Math. Annalen, Bd. 124, S. 77—86 (1951).

Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.

Von

Friedrich Hirzebruch in Münster (Westf.).

Einleitung.

0.1. Eine komplexe Mannigfaltigkeit $M^{(n)}$[1]) ist eine topologische Mannigfaltigkeit von $2n$ (reellen) Dimensionen, die mit lokalen Systemen komplexer Koordinaten so überdeckt ist, daß der Übergang von einem System zu einem anderen in einem gemeinsamen Existenzbereich durch (komplex)-analytische Funktionen mit von 0 verschiedener Funktionaldeterminate erfolgt. Es ist sinnvoll, von regulären, meromorphen Funktionen in einer komplexen Mannigfaltigkeit, von analytischen Abbildungen einer komplexen Mannigfaltigkeit in eine andere usw. zu sprechen, da alle diese Begriffe nicht von speziellen komplexen Koordinatensystemen abhängen. Jede komplexe $M^{(n)}$ ist durch die komplexen Koordinatensysteme in natürlicher Weise orientiert (vgl. zu 0.1. Hopf[2])).

0.2. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten heißen analytisch äquivalent, wenn sie topologisch und analytisch aufeinander abgebildet werden können. Wir sagen auch: Analytisch äquivalente komplexe Mannigfaltigkeiten $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$ bestimmen auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M^{(n)} = M_1^{(n)} = M_2^{(n)}$ dieselbe komplexe Struktur. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$, die nicht analytisch äquivalent sind, aber homöomorph sind, bestimmen auf der topologischen Mannigfaltigkeit $M^{(n)} = M_1^{(n)} = M_2^{(n)}$ verschiedene komplexe Strukturen.

0.3. H. Hopf hat die Frage gestellt, welche orientierbaren $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch Einführung komplexer Koordinatensysteme zu einer komplexen Mannigfaltigkeit gemacht werden können und diese Frage z. B. für die Sphären S^4 und S^8 im verneinenden Sinne beantwortet[3]). Für $n = 1$ gilt bekanntlich: Alle orientierbaren Flächen können zu komplexen Mannigfaltigkeiten (= Riemannschen Flächen) gemacht werden. An diese Fragestellung von H. Hopf schließt sich die folgende Fragestellung an: Zu einer vorgegebenen $2n$-dim. orientierbaren Mannigfaltigkeit M^{2n} sollen alle möglichen komplexen Strukturen angegeben werden, anders formuliert: es sollen alle Äquivalenzklassen von analytisch äquivalenten komplexen Mannigfaltigkeiten angegeben werden, die zu M^{2n} homöomorph sind. In dieser Arbeit wird ein spezieller Beitrag zu dieser Fragestellung gegeben.

0.4. Für $n = 1$ und für die geschlossenen Flächen M^2 vom Geschlecht > 0 wird die in 0.3. angegebene Fragestellung mit Hilfe der Theorie der „Moduln“ behandelt. Die einzigen einfach zusammenhängenden orientierbaren

---

[1]) Obere Indices ohne Klammern: reelle Dimensionen, in Klammern: „komplexe“ Dimensionen.

[2]) Hopf, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays Presented to R. Courant, S. 167—185, New York 1948.

[3]) Ein allgemeineres Resultat für die Sphären S^{4n} in A. Kirchhoff: C. R. Acad. Sci. Paris **225**, 1258 (1947).

Flächen M^2 sind die Sphäre S^2 und die gewöhnliche Ebene E^2. Für S^2 gibt es genau eine komplexe Struktur: die RIEMANNsche Zahlenkugel. Für E^2 gibt es genau zwei komplexe Strukturen: die (offene) z-Ebene und das Innere des Einheitskreises.

0. 5. Wir spezialisieren die in 0. 3. angegebene Fragestellung jetzt folgendermaßen: zu einer vorgegebenen (orientierbaren) *einfach zusammenhängenden geschlossenen* 4-dim. Mannigfaltigkeit M^4 sollen alle möglichen komplexen Strukturen angegeben werden. Diese Fragestellung ist meines Wissens z. B. unbeantwortet für $M^4 = P^{(2)}$ (= komplex-projektive Ebene).

0. 6. In dieser Arbeit wird zu der spezialisierten Fragestellung 0. 5. der folgende spezielle Beitrag geliefert. Für jedes natürliche $n \geq 0$ wird eine geschlossene komplexe Mannigfaltigkeit Σ_n angegeben. Σ_n ist gefasert mit der Faser S^2 und dem Basisraum S^2, und zwar so, daß die Fasern analytische Flächen in Σ_n sind und daß die Faserabbildung eine analytische Abbildung von Σ_n auf die als Basisraum auftretende RIEMANNsche Zahlenkugel S^2 ist. Für $n \equiv m \pmod 2$ sind Σ_n, Σ_m fasertreu homöomorph. Σ_0 ist das cartesische Produkt $S^2 \times S^2$ von zwei RIEMANNschen Zahlenkugeln. Σ_1 ist als topologische Mannigfaltigkeit topologische Summe $P^{(2)} + P^{(2)}$, 2. Art, von zwei Exemplaren der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ (vgl. 2. 5.). Für $n \neq m$ sind Σ_n, Σ_m nicht analytisch äquivalent. Es werden damit durch die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n (n gerade) unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für $S^2 \times S^2$ und durch Σ_n (n ungerade) für $P^{(2)} + P^{(2)}$ angegeben. $S^2 \times S^2$ und $P^{(2)} + P^{(2)}$ sind geschlossen und einfach zusammenhängend. Es wird nicht die Aufgabe gelöst, alle komplexen Strukturen für $S^2 \times S^2$ (bzw. $P^{(2)} + P^{(2)}$) anzugeben. — Der Beweis, daß Σ_n, Σ_m ($n \neq m$, $n \equiv m \pmod 2$) nicht analytisch äquivalent sind, wird mit Hilfe der folgenden Tatsache geführt: Zwei analytische Flächen in einer geschlossenen komplexen $M^{(2)}$, die sich höchstens in isolierten Punkten schneiden, haben eine nicht negative Schnittzahl. Die durch diese analytischen Flächen repräsentierten (ganzzahligen) Homologieklassen haben daher ebenfalls eine nicht negative Schnittzahl. Mit Hilfe dieser Tatsache gelingt nämlich der Nachweis, daß sich die homöomorphen komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n, Σ_m ($n \neq m$) in der Repräsentierbarkeit der 2-dimensionalen Homologieklassen durch analytische Flächen unterscheiden.

0. 7. Wir werden weiter zeigen, daß die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n als algebraische Flächen, und zwar als Regelflächen auftreten und daß Σ_n, Σ_m als algebraische Flächen betrachtet birational äquivalent sind. Σ_n (n beliebig) ist mit der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ birational äquivalent.

Zusammenfassung: In bezug auf *topologische* Äquivalenz (Homöomorphie) gehören die Mannigfaltigkeiten Σ_n zwei Äquivalenzklassen an. In bezug auf *analytische* Äquivalenz sind sie paarweise verschieden. In bezug auf *birationale* Äquivalenz gehören sie einer einzigen Äquivalenzklasse an.

1. Zusammenstellung von Hilfssätzen.

1. 1. Es werden im folgenden nur Homologiegruppen mit ganzen Zahlen als Koeffizienten betrachtet. BETTIsche Gruppe: Homologiegruppe mit ganzzahligen Koeffizienten bei Vernachlässigung der Torsion. Falls, wie in den von uns zu betrachtenden Fällen, keine Torsion vorhanden ist, fallen ganzzahlige Homologiegruppe und BETTIsche Gruppe zusammen. Eine Basis der

BETTIschen Gruppe heißt BETTIsche Basis. In einer 4-dimensionalen geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit, deren 2. BETTIsche Zahl p sei, ist in bezug auf eine 2-dim. BETTIsche Basis $(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ die quadratische Matrix $\mathfrak{S} = (s_{ik}) = (\zeta_i \circ \zeta_k)$ definiert. ($\alpha \circ \beta$ = Schnittzahl von α mit β.) $\mathfrak{S}$ ist symmetrisch, ganzzahlig, und es ist $|\mathfrak{S}| = \pm 1$. Die ganzzahligen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{S}$, $\tilde{\mathfrak{S}}$ ($|\mathfrak{S}| = \pm 1$, $|\tilde{\mathfrak{S}}| = \pm 1$) heißen äquivalent, wenn es eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $\tilde{\mathfrak{S}} = \pm \mathfrak{A} \mathfrak{S} \mathfrak{A}'$. Zwei homöomorphe 4-dim. Mannigfaltigkeiten besitzen Schnittmatrizen derselben Äquivalenzklasse.

1. 2. $M^{(2)}$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit. (u, v) sei ein lokales Koordinatensystem, das in einer Umgebung U des Punktes P zulässig ist. ($P \in M^{(2)}$, $P = (0,0)$). In U seien durch $f(u, v) = 0$, $g(u, v) = 0$ (f, g in U regulär) zwei analytische Flächenstücke F, G gegeben, die in U nur den Punkt P gemeinsam haben, d. h. $f(u, v) = g(u, v) = 0$ genau dann, wenn $u = v = 0$. Die Schnittzahl von F mit G in P ist topologisch definiert. Sie ist kommutativ und stets größer als 0. Andeutung der topologischen Definition der Schnittzahl: (vgl. v. D. WAERDEN[4]) S. 349).

Die Orientierung von U, F, G ist durch die komplexe Struktur eindeutig bestimmt. F, G können in U stetig so verschoben werden, daß die verschobenen Flächenstücke sich in evtl. mehreren Punkten einfach schneiden. Die Anzahl dieser Punkte hängt nur von F, G ab und ist die Schnittzahl von F mit G in P.

1.3. In einer komplexen Mannigfaltigkeit $M^{(2)}$ seien zwei geschlossene irreduzible analytische Flächen F_1, F_2 gegeben. F_1, F_2 schneiden sich höchstens in isolierten Punkten. Die Anzahl der Schnittpunkte ist endlich. Die Zyklen F_1, F_2 repräsentieren ganzzahlige 2-dim. Homologieklassen von $M^{(2)}$, deren Schnittzahl gleich der Summe der lokal definierten Schnittzahlen in den isolierten Schnittpunkten von F_1, F_2 ist, also nach 1.2. nicht negativ ist. Es ergibt sich hieraus: Ist die Schnittzahl einer 2-dim. Homologieklasse von $M^{(2)}$ mit sich selbst negativ, so kann diese Homologieklasse höchstens durch eine irreduzible geschlossene analytische Fläche repräsentiert werden.

1.4. Wir benutzen im folgenden meistens die Terminologie der Funktionentheorie, manchmal und zwar hauptsächlich im letzten Abschnitt aber die der algebraischen Geometrie, die die algebraischen Gebilde ihrer komplexen Dimension gemäß benennt. Eine algebraische Kurve ist eine analytische Fläche im Sinne der Terminologie der Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen, eine Gerade ist eine analytische Ebene. Durch diese Bemerkung werden Mißverständnisse wohl ausgeschlossen.

2. Topologische Untersuchung der Mannigfaltigkeiten Σ_n. Σ_n, Σ_m sind dann und nur dann homöomorph, wenn $n \equiv m \pmod 2$.

2.1. $P^{(n)}$ bezeichne den projektiven Raum von n komplexen Dimensionen. $(x) = (x_0, x_1, x_2)$ seien homogene Koordinaten für $P^{(2)}$, $(y) = (y_1, y_2)$ seien homogene Koordinaten für $P^{(1)}$. ($P^{(1)}$ ist eine zweidimensionale Sphäre = RIEMANNsche Zahlenkugel S^2). Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ werde das durch die Gleichung $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$ im cartesischen Produkt $P^{(2)} \times P^{(1)}$ gegebene Nullstellengebilde mit Σ_n bezeichnet. Da Σ_n zusammenhängend ist und die

[4]) VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann. **102**, S. 337—362 (1929).

Einbettung von Σ_n in $P^{(2)} \times P^{(1)}$ frei von (algebraischen) Singularitäten ist, ist Σ_n eine komplexe Mannigfaltigkeit.

2. 2. Σ_0 ist das cartesische Produkt $P^{(1)} \times P^{(1)}$ mit der üblichen komplexen Struktur. (Σ_0 ist der „Raum der Funktionentheorie", s. OSGOOD[5]). Σ_0 ist homöomorph zu $S^2 \times S^2$.

2. 3. Durch $\varphi_n(x, y) = x$, $(x, y) \in \Sigma_n$, wird eine analytische Abbildung φ_n von Σ_n auf $P^{(2)}$ bestimmt. Durch $x_1 = x_2 = 0$ ist in Σ_n eine analytische Fläche T_n singularitätenfrei eingebettet. T_n ist ein $P^{(1)}$. Der Punkt $(1, 0, 0)$ von $P^{(2)}$ werde mit Q bezeichnet. Es ist $\varphi_n(T_n) = Q$. Wenn $n = 1$, dann gilt speziell folgendes: φ_1 bildet $\Sigma_1 - T_1$ topologisch und analytisch auf $P^{(2)} - \{Q\}$ ab. Man kann daher anschaulich sagen: Σ_1 entsteht aus $P^{(2)}$ durch „Herausstechen" von Q und „Einsetzen" von T_1.

2. 4. Die Inversion I von $P^{(2)}$: $I(x_0, x_1, x_2) = (|x_1|^2 + |x_2|^2, x_1\overline{x_0}, x_2\overline{x_0})$ ist eine topologische Abbildung vom Grade -1 von $P^{(2)} - \{Q\} - E$ auf sich. (E: die „unendlichferne" Ebene $x_0 = 0$.) Auf Σ_1 übertragen wird I zur Abbildung $\varphi_1^{-1} I \varphi_1$, die sich zu einer topologischen Selbstabbildung I' von Σ_1 vom Grade -1 erweitern läßt. Es ist $I'\varphi^{-1}(E) = T_1$. Die durch T_1, $\varphi^{-1}(E)$ repräsentierten ganzzahligen zweidimensionalen Homologieklassen von Σ_1 sollen mit τ_1, ε_1 bezeichnet werden. Es ist $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_1 \circ \tau_1 = 0$; da I' vom Grade -1 ist, gilt $\tau_1 \circ \tau_1 = -1$.

2. 5. Aus 2. 3. und 2. 4. erkennt man: Σ_1 ist die topologische Summe 2. Art von zwei in natürlicher Weise orientierten Exemplaren von $P^{(2)}$[6]). Zur topologischen Summenbildung werde folgendes bemerkt: Für zwei orientierte Mannigfaltigkeiten M^n und $\widetilde{M}^n$ ist die topologische Summe (1. Art bzw. 2. Art) so definiert: Aus M^n und $\widetilde{M}^n$ wird je eine kleine Kugel ausgebohrt. Die beiden so entstehenden, durch in bestimmter Weise orientierte $(n-1)$-Sphären S^{n-1} bzw. $\widetilde{S}^{n-1}$ berandeten Mannigfaltigkeiten werden „aufeinandergeklebt", indem man S^{n-1} topologisch mit Umkehr der Orientierung (1. Art), bzw. mit Erhaltung der Orientierung (2. Art) auf $\widetilde{S}^{n-1}$ abbildet und entsprechende Punkte identifiziert. Jede der beiden Summenmannigfaltigkeiten ist wieder orientierbar. Ihre topologische Struktur hängt nur von M^n und $\widetilde{M}^n$ ab. Die Summe 2. Art kann so orientiert werden, daß ihre Orientierung mit der von M^n übereinstimmt und der von $\widetilde{M}^n$ entgegengesetzt ist.

2. 6. Da Σ_1 nach 2. 5. topologische Summe $P^{(2)} + P^{(2)}$ (2. Art) ist, kann die Homologiestruktur von Σ_1 (ganzzahlige Koeffizienten) so bestimmt werden: (H für Homologiegruppe, $\dot{+}$ für direkte Summe im Sinne der Gruppentheorie). Es ist $H^k(\Sigma_1) = 0$ für $k = 1,3$ und $H^2(\Sigma_1) = (\tau_1) \dot{+} (\varepsilon_1)$, wo (τ_1), (ε_1) die durch τ_1 bzw. ε_1 erzeugten unendlichen zyklischen Gruppen sind.

(τ_1, ε_1) ist eine ganzzahlige 2-dimensionale Homologiebasis für Σ_1 mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (vgl. 2. 4.).

2. 7. Zu Σ_0 gehört die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrizen $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind nicht äquivalent. Σ_0 und Σ_1 sind daher nicht homöomorph.

2. 8. π_n sei diejenige Abbildung von Σ_n auf $P^{(1)}$, die den Punkt $(x, y) \in \Sigma_n$ auf den Punkt $(y) \in P^{(1)}$ abbildet (2. 1.). π_n ist eine Faserabbildung von Σ_n auf $P^{(1)}$. Jede Faser ist ein $P^{(1)}$, also durch stereographische Projektion homöo-

---

[5]) OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1., 2. Aufl., S. 56, (1929).

[6]) Vgl. z. B. M. RUEFF: Compositio Math. 6 (1938), insbes. S. 185.

morph zu S^2. Es gilt: Σ_n ist eine gefaserte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Faser S^2 und dem Basisraum S^2. (In Analogie zur Gruppentheorie schreiben wir: $\Sigma_n/S^2 = S^2$.) Σ_n ist sogar ein sphere bundle im Sinne von STEENROD[7]).

Beweis: P_i $(i = 1, 2)$ sei das durch $y_i \neq 0$ gegebene Gebiet von $P^{(1)}$, (P_i ist mit der gewöhnlichen offenen Ebene E^2 homöomorph). $P^{(1)}$ sei ein weiteres Exemplar des $P_*^{(1)}$ mit den homogenen Koordinaten (ξ_0, ξ_1). Es sei $h(r) = (1 + r^n)^{-1}$. Durch $w''(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left(\xi_0, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\right), \xi_1 h\left(\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\right)\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n; y_1, y_2\right)$ wird eine fasertreue topologische Abbildung w'' von $P_*^{(1)} \times P_2$ auf $\pi_n^{-1}(P_2)$ gegeben. Entsprechend wird durch $w'(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left(\xi_0, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_2}{y_1}\right|\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_2}{y_1}\right|\right); y_1, y_2\right)$ eine fasertreue topologische Abbildung w' von $P_*^{(1)} \times P_1$ auf $\pi_n^{-1}(P_1)$ bestimmt. Für $(y_1, y_2) \in P_1 \cap P_2$, d. h. $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, ist $w_n = (w'')^{-1} w'$ die durch $w_n(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left(\xi_0, \xi_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n \left|\frac{y_1}{y_2}\right|^n; y_1, y_2\right)$ bestimmte Drehung von $P_*^{(1)}$. Die orthogonale Struktur von Σ_n wird durch die orthogonale Struktur von $P_*^{(1)}$ gegeben, welche durch stereographische Projektion von $P_*^{(1)}$ auf die RIEMANNsche $\frac{\xi_1}{\xi_0}$-Zahlenkugel oder gleichwertig durch das sphärische Linienelement $\frac{|dz|}{1+|z|^2}$ $\left(z = \frac{\xi_1}{\xi_0}\right)$ bestimmt wird.

2.9. Aus dem Beweis zu 2.8. erkennt man: Die gefaserte Mannigfaltigkeit Σ_n kann so konstruiert werden: S sei auf $P^{(1)}$ gegeben durch $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| = 1$, E' durch $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| \leq 1$ und E'' durch $\left|\frac{y_1}{y_2}\right| \leq 1$. S als Rand von E' werde mit S', S als Rand von E'' werde mit S'' bezeichnet. Σ_n entsteht durch „Verklebung" aus den cartesischen Produkten $P_*^{(1)} \times E'$, $P_*^{(1)} \times E''$, indem man durch w_n den Rand $P_*^{(1)} \times S'$ auf $P_*^{(1)} \times S''$ fasertreu topologisch abbildet und entsprechende Punkte identifiziert.

2.10. Nach STEENROD[7]) gibt es genau zwei Typen von sphere bundles A mit $A/S^2 = S^2$. Es entsteht die Frage, wie sich die gefaserten Mannigfaltigkeiten Σ_n auf diese beiden Typen verteilen. Die Antwort lautet: Wenn $n \equiv m$ (mod 2), dann lassen sich Σ_n und Σ_m fasertreu topologisch aufeinander abbilden, und zwar so, daß die Fasern von Σ_n orthogonal auf die Fasern von Σ_m abgebildet werden. Σ_n, Σ_m repräsentieren dasselbe sphere bundle. Für gerades n ist also Σ_n fasertreu homöomorph zu $\Sigma_0 = S^2 \times S^2$, und es handelt sich um die triviale Faserung des cartesischen Produktes. Für ungerades n ist Σ_n fasertreu homöomorph zu Σ_1. Da Σ_1 nicht zu $S^2 \times S^2$ homöomorph ist (2.7.), werden die beiden Typen von sphere bundles A mit $A/S^2 = S^2$ durch Σ_0 und Σ_1 repräsentiert.

Beweis: Es sei $n > m$ und $n - m$ gerade. Die Behauptung, daß Σ_n, Σ_m dasselbe sphere bundle repräsentieren, ergibt sich so: Γ_2 sei der Raum der orthogonalen Drehungen von $P_*^{(1)}$, der bekanntlich zum 3-dimensionalen reellen projektiven Raum homöomorph ist. Die Abbildung w_k von $P_*^{(1)} \times S'$ auf $P_*^{(1)} \times S''$ bei der Konstruktion von Σ_k (2.9.) bestimmt einen Weg W_k in Γ_2. Da $n - m$ gerade, ist der Weg W_{n-m} in Γ_2 nullhomotop. Es gibt daher eine fasertreue, topologische, auf den Fasern orthogonale Abbildung von $P_*^{(1)} \times E'$ auf sich, die für $P_*^{(1)} \times S'$ mit w_{n-m} übereinstimmt. Σ_n, bzw. Σ_m entsteht durch Identifizierung von $P_*^{(1)} \times S'$ und $P_*^{(1)} \times S''$ mittels der Abbildung w_n bzw. w_m. Nun ist aber $w_n = w_m w_{n-m}$.

[7]) STEENROD, N.E.: Classification of sphere bundles, Ann. of Math. 45, S. 294—311 (1944).

2. 11. Es werde noch eine spezielle fasertreue topologische Abbildung von $\Sigma_0 = P^{(1)} \times P^{(1)}$ auf Σ_n (n gerade) angegeben. $(u_1, u_2; v_1, v_2)$ seien Koordinaten für $P^{(1)} \times P^{(1)}$, die in u_1, u_2 und v_1, v_2 homogen sind. Folgende Abbildung von $P^{(1)} \times P^{(1)}$ *in* $P^{(2)} \times P^{(1)}$ ist eine fasertreue topologische Abbildung von $P^{(1)} \times P^{(1)}$ *auf* Σ_n (n gerade).

$$\begin{aligned} y_1 &= v_1 & x_0 &= (|v_1|^n + |v_2|^n)\,(v_1^{\frac{n}{2}}\, u_1 + v_2^{\frac{n}{2}}\, u_2) \\ & & x_1 &= v_2^n\,(-\bar v_2^{\frac{n}{2}}\, u_1 + \bar v_1^{\frac{n}{2}}\, u_1) \\ y_2 &= v_2 & & \\ & & x_2 &= v_1^n\,(-\bar v_2^{\frac{n}{2}}\, u_1 + \bar v_1^{\frac{n}{2}}\, u_1)\,. \end{aligned}$$

Die Fasern $\frac{v_2}{v_1} = \text{const}$ von $P^{(1)} \times P^{(1)}$ sind mit einer orthogonalen Struktur versehen. Die Fasern von Σ_n sind nach 2.8. ebenfalls mit einer orthogonalen Struktur versehen. Man kann leicht nachrechnen, daß die angegebene Abbildung auf den einzelnen Fasern orthogonal ist.

3. Die Mannigfaltigkeiten Σ_n sind als komplexe Mannigfaltigkeiten paarweise verschieden.

3. 1. $\varphi_1^{-1}\,\varphi_n$ ist eine analytische Abbildung von $\Sigma_n - T_n$ auf $\Sigma_1 - T_1$ (vgl. 2.3.), die sich zu einer analytischen Abbildung $\tilde\varphi_n$ von Σ_n auf Σ_1 erweitern läßt. Es ist $\tilde\varphi_n(T_n) = T_1$. Wenn Σ_n durch $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$ und Σ_1 durch $\tilde x_1 \tilde y_1 - \tilde x_2 \tilde y_2 = 0$ gegeben ist (vgl. 2. 1.), dann wird $\tilde\varphi_n$ durch $\tilde x_0 = x_0$, $\tilde x_1 = x_1$, $\tilde x_2 = x_2$, $\tilde y_1 = y_1^n$, $\tilde y_2 = y_2^n$ gegeben. Σ_n ist eine n-blättrige verzweigte Überlagerung von Σ_1 mit der zugehörigen Überlagerungsabbildung $\tilde\varphi_n$[8]).

3. 2. Es werde gesetzt $E_n = \varphi_n^{-1}(E)$ (vgl. 2. 4. E: die „unendlich ferne" Ebene $x_0 = 0$ von $P^{(2)}$). Durch E_n, T_n werden ganzzahlige 2-dim. Homologieklassen ε_n, τ_n von Σ_n repräsentiert, ν_n sei die Homologieklasse der Fasern von Σ_n. Man beachte, daß E_n, T_n und die Fasern als analytische Flächen von Σ_n in natürlicher Weise orientiert sind. T_n, E_n sind Schnittflächen der Faserung von Σ_n. — Der zu $\tilde\varphi_n$ gehörige HOPFsche Umkehrungshomomorphismus[9]) des Homologieringes von Σ_1 in den von Σ_n werde mit φ_n^* bezeichnet.

Es ist $\tilde\varphi_n^{-1}(T_1) = T_n$, $\tilde\varphi_n^{-1}(E_1) = E_n$ und $\varphi_n^*(\tau_1) = \tau_n$, $\varphi_n^*(\varepsilon_1) = \varepsilon_n$, $\varphi_n^*(\nu_1) = n\,\nu_n$. Es folgt $\tau_n \circ \tau_n = \varphi_n^*(\tau_1) \circ \varphi_n^*(\tau_1) = \varphi_n(\tau_1 \circ \tau_1) = \varphi_n^*(-\text{Punkt}) = -n$ und ebenso $\varepsilon_n \circ \varepsilon_n = n$. Die Schnittzahl 1 ist dabei als die durch einen Punkt repräsentierte 0-dimensionale Homologieklasse aufzufassen. Es ist $\tau_n \circ \nu_n = \varepsilon_n \circ \nu_n = 1$. Zu (τ_n, ν_n) gehört die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ihre Determinante ist -1. Daher bilden (τ_n, ν_n) eine (ganzzahlige) 2-dim. Homologiebasis. Aus $\varepsilon_n \circ \tau_n = 0$, $\varepsilon_n \circ \nu_n = 1$ berechnet man: $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$.

3. 3. Wir können zusammenfassend sagen: Σ_n besitzt eine 2-dim. Homologiebasis (τ_n, ν_n) mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Homologieklassen τ_n, ν_n und $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$ werden durch irreduzible analytische Flächen repräsentiert. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

[8]) Für ungerades n gibt $\tilde\varphi_n$ eine stetige Abbildung von $P^{(2)} + P^{(2)}$ auf sich vom Grade n an, eine stetige Selbstabbildung von einem Grade $k \equiv 2 \pmod 4$ gibt es nicht. Vgl.[6]), S. 185.

[9]) HOPF, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, J. ang. Math. **163**, 71—88 (1930). Vgl. auch die bei RUEFF[6]) angegebene Literatur.

1. *n gerade*

$\left(\nu_n, \tau_n + \frac{n}{2}\nu_n\right)$ ist ebenfalls eine 2-dim. Homologiebasis. Die zugehörige Schnittmatrix ist $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (vgl. 2.7., 2.10.).

2. *n ungerade*

$\left(\tau_n + \frac{n+1}{2}\nu_n, \tau_n + \frac{n-1}{2}\nu_n\right)$ ist eine Basis mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ (vgl. 2. 6., 2. 10.).

3.4. Aus den in 3. 3. zusammengestellten Tatsachen läßt sich der folgende Satz ableiten:

Die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n, Σ_m $(n \neq m)$ lassen sich nicht topologisch und analytisch aufeinander abbilden, d. h. Σ_n, Σ_m sind als komplexe Mannigfaltigkeiten verschieden.

Beweis: Da die Schnittmatrizen unter 3.3. Fall 1 und 2 nicht äquivalent sind, genügt es, die folgende Kontraposition zu beweisen: Wenn Σ_n, Σ_m topologisch und analytisch aufeinander abbildbar sind, wobei $n \equiv m \pmod 2$ und $m \neq 0$ sein soll, dann ist $n = m$. Wir kommen nun zum Beweis dieser Kontraposition:

Σ_n, Σ_m lassen sich als zwei Exemplare derselben komplexen Mannigfaltigkeit $M^{(2)}$ auffassen. In $M^{(2)}$ führen wir nach 3.3. eine feste 2-dimensionale Homologiebasis (ξ, η) mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ im Fall 1, bzw. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ im Fall 2, ein.

In $M^{(2)}$ gibt es 2-dim. Homologieklassen $\tau_n, \nu_n, \varepsilon_n, \tau_m, \nu_m, \varepsilon_m$, die durch analytische Flächen repräsentiert werden. Diese analytischen Flächen sind irreduzibel. Zwei von ihnen sind deshalb identisch, oder schneiden sich in isolierten Punkten. Es folgt hieraus:

$$(*)\quad \tau_n \circ \varepsilon_m \geq 0,\ \tau_m \circ \varepsilon_n \geq 0,\ \nu_n \circ \tau_m \geq 0,\ \nu_n \circ \varepsilon_m \geq 0.$$

(Beweis: Da die jeweils zum Schnitt gebrachten Homologieklassen sicher verschieden sind, weil ihre Selbstschnittzahlen verschieden sind, können die repräsentierenden analytischen Flächen nicht identisch sein. Vgl. 0.6)

Fall 1. *n, m gerade.*

(ξ, η) ist eine Basis mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

τ_n, ν_n lassen sich darstellen in der Form:

$\tau_n = a\,\xi + b\,\eta$

$\nu_n = c\,\xi + d\,\eta$ $(a, b, c, d$ ganze Zahlen), es muß gelten:

$$\begin{pmatrix}-n & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2ab & ad+bc\\ ad+bc & 2cd\end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt: entweder $c = 0$ oder $d = 0$.

Ist $c = 0$, so ist $a = e$, $d = e$, $b = -e\frac{n}{2}$ $\quad (e = \pm 1)$

Ist $d = 0$, so ist $b = e'$, $c = e'$, $a = -e'\frac{n}{2}$ $\quad (e' = \pm 1)$

Es ist also: (man beachte die Gleichung $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$),

$$(1)\quad \begin{aligned}\nu_n &= e\,\eta\\ \tau_n &= e\left(\xi - \frac{n}{2}\eta\right)\\ \varepsilon_n &= e\left(\xi + \frac{n}{2}\eta\right)\end{aligned} \qquad \text{oder} \quad (2)\quad \begin{aligned}\nu_n &= e'\,\xi\\ \tau_n &= e'\left(-\frac{n}{2}\xi + \eta\right)\\ \varepsilon_n &= e'\left(\frac{n}{2}\xi + \eta\right).\end{aligned}$$

Entsprechend gilt: $(e'' = \pm 1,\ e''' = \pm 1)$

$$(3)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e''\,\eta \\ \tau_m &= e''\left(\xi - \frac{m}{2}\,\eta\right) \\ \varepsilon_m &= e''\left(\xi + \frac{m}{2}\,\eta\right) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (4)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e'''\,\xi \\ \tau_m &= e'''\left(-\frac{m}{2}\,\xi + \eta\right) \\ \varepsilon_m &= e'''\left(\frac{m}{2}\,\xi + \eta\right). \end{aligned}$$

Wenn „(2) und (3)", so ist $\nu_n \circ \tau_m = -e'\,e''\,\frac{m}{2}$ und $\nu_n \circ \varepsilon_m = e'\,e''\,\frac{m}{2}$, also $\nu_n \circ \tau_m$ oder $\nu_n \circ \varepsilon_m$ negativ. Das steht im Widerspruch zu (*). „(2) und (3)" trifft daher nicht zu. Ebenso wird „(1) und (4)" zum Widerspruch geführt. Es gilt daher: „(1) und (3)" oder „(2) und (4)". Nach evtl. Umbenennung von ξ in η und η in ξ können wir annehmen, daß „(1) und (3)" gilt. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \tau_n \circ \varepsilon_m &= e\,e''\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right) \\ \varepsilon_n \circ \tau_m &= e\,e''\left(\frac{n}{2} - \frac{m}{2}\right) \end{aligned} \qquad \tau_n \circ \varepsilon_m = -\varepsilon_n \circ \tau_m\,.$$

Aus (*) folgt weiter $\tau_n \circ \varepsilon_m = \varepsilon_n \circ \tau_m = 0$, d. h. $n = m$.

Fall 2. *n, m ungerade.* Der Beweis verläuft analog:

(ξ, η) ist eine Basis mit der Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

τ_n, ν_n lassen sich darstellen in der Form:

$\tau_n = a\,\xi + b\,\eta$

$\nu_n = c\,\xi + d\,\eta$ (a, b, c, d ganze Zahlen), und es gilt:

$$\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & a\,c - b\,d \\ a\,c - b\,d & c^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt: Entweder $c = d$, oder $c = -d$.

$$\text{Ist}\quad c = d,\quad \text{so ist}\quad c = d = e,\ a - b = e,\ a + b = -e\,n,$$
$$a = -e\,\frac{n-1}{2}\,,\ b = -e\,\frac{n+1}{2} \qquad (e = \pm 1).$$

Ist $c = -d$, so ist $c = -e'$, $d = e'$, $a = e'\,\frac{n-1}{2}$, $b = -e'\,\frac{n+1}{2}$ $(e' = \pm 1)$.

Es ist also: (man beachte $\varepsilon_n = \tau_n + n\,\nu_n$)

$$(1)\quad \begin{aligned} \nu_n &= e\,(\xi + \eta) \\ \tau_n &= -e\left(\frac{n-1}{2}\,\xi + \frac{n+1}{2}\,\eta\right) \\ \varepsilon_n &= e\left(\frac{n+1}{2}\,\xi + \frac{n-1}{2}\,\eta\right) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad (2)\quad \begin{aligned} \nu_n &= e'\,(-\xi + \eta) \\ \tau_n &= e'\left(\frac{n-1}{2}\,\xi - \frac{n+1}{2}\,\eta\right) \\ \varepsilon_n &= e'\left(-\frac{n+1}{2}\,\xi + \frac{n-1}{2}\,\eta\right). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt: $(e'' = \pm 1,\ e''' = \pm 1)$

$$(3)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e''\,(\xi + \eta) \\ \tau_m &= -e''\left(\frac{m-1}{2}\,\xi + \frac{m+1}{2}\,\eta\right) \\ \varepsilon_m &= e''\left(\frac{m+1}{2}\,\xi + \frac{m-1}{2}\,\eta\right) \end{aligned} \quad \text{oder}\ (4)\quad \begin{aligned} \nu_m &= e'''\,(-\xi + \eta) \\ \tau_m &= e'''\left(\frac{m-1}{2}\,\xi - \frac{m+1}{2}\,\eta\right) \\ \varepsilon_m &= e'''\left(-\frac{m+1}{2}\,\xi + \frac{m-1}{2}\,\eta\right). \end{aligned}$$

Wenn „(2) und (3)", so ist $\nu_n \circ \tau_m = e'\,e''\,m$ und $\nu_n \circ \varepsilon_m = -e'\,e''\,m$, also $\nu_n \circ \tau_m$ oder $\nu_n \circ \varepsilon_m$ negativ. Das steht im Widerspruch zu (*). Ebenso wird „(1) und (4)" zum Widerspruch geführt. Es gilt daher: „(1) und (3)" oder „(2) und (4)".

Nach einer evtl. erlaubten Umbenennung von ξ in $-\xi$ und $-\xi$ in ξ können wir annehmen, daß „(1) und (3)" gilt, es folgt dann:

$$\tau_n \circ \varepsilon_m = -\varepsilon_n \circ \tau_m = e\,e''\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right).$$

Aus (*) folgt $\tau_n \circ \varepsilon_m = \varepsilon_n \circ \tau_m = 0$, d. h. $n = m$.

3.5. Wir wollen unser Resultat nochmals zusammenfassen: Die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n (n gerade) stellen unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für die (einfach zusammenhängende, geschlossene) topologische Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^2$ dar.

Die komplexen Mannigfaltigkeiten Σ_n (n ungerade) stellen unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für die (ebenfalls einfach zusammenhängende und geschlossene) topologische Summe 2. Art zweier Exemplare der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ dar.

Die 2. Bettischen Zahlen dieser topologischen Mannigfaltigkeiten $S^2 \times S^2$ und $P^{(2)} + P^{(2)}$ sind beide gleich 2. Es bleibt die Frage offen, ob es einfach zusammenhängende, geschlossene, 4-dim. Mannigfaltigkeiten mit der 2. Bettischen Zahl 1 gibt, die verschiedene komplexe Strukturen zulassen. Meines Wissens ist nicht bekannt, ob $P^{(2)}$ verschiedene komplexe Strukturen zuläßt.

4. Die birationale Äquivalenz der Mannigfaltigkeiten Σ_n mit der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$[10]).

4.0. $M^{(2)}$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Q \in M^{(2)}$. Die von Q verschiedenen Punkte von $M^{(2)}$ und die analytischen Flächenelemente (= komplexe Linienelemente) von $M^{(2)}$ in Q lassen sich in natürlicher Weise als Punkte einer neuen komplexen Mannigfaltigkeit $M_Q^{(2)}$ auffassen. Die analytischen Flächenelemente von $M^{(2)}$ in Q lassen sich als Punkte einer komplex-projektiven Geraden (= Riemannsche Zahlenkugel) auffassen, die Trägersphäre des Punktes Q genannt und mit T_Q bezeichnet werde. $M_Q^{(2)}$ entsteht, anschaulich gesagt, aus $M^{(2)}$ durch „Herausstechen" von Q und darauf folgendes „analytisches Einsetzen" von T_Q. Die Mannigfaltigkeit Σ_1 (vgl. 2. 3.) entsteht durch Einsetzen einer Trägersphäre aus $P^{(2)}$[11]).

4.1. Das cartesische Produkt $P^{(2)} \times P^{(1)}$ (vgl. 2. 1.) kann singularitätenfrei als algebraische Mannigfaltigkeit in den $P^{(5)}$ eingebettet werden. Durch $z_{ik} = x_i\, y_k$ ($i = 0, 1, 2$; $k = 1, 2$; z_{ik} homogene Koordinaten des $P^{(5)}$) wird eine eineindeutige Parameterdarstellung dieser algebraischen Mannigfaltigkeit gegeben. Σ_n ist damit singularitätenfrei als algebraische Fläche im $P^{(5)}$ eingebettet. Diese algebraische Fläche werde in den $P^{(3)}$ projiziert. (z_1, z_2, z_3, z_4) seien homogene Koordinaten für $P^{(3)}$. Wir setzen: $z_1 = z_{21} = x_2\, y_1$, $z_2 = z_{12} = x_1\, y_2$, $z_3 = z_{02} = x_0\, y_2$, $z_4 = z_{01} = x_0\, y_1$. Diese Gleichungen stellen eine eindeutige Abbildung ψ_n von Σ_n (gegeben durch $x_1\, y_1^n - x_2\, y_2^n = 0$) auf die algebraische Fläche Σ_n^* (gegeben durch $z_1\, z_3^{n+1} - z_2\, z_4^{n+1} = 0$) dar. Die Gerade $z_3 = 0$, $z_4 = 0$ von Σ_n^* werde mit E_n^* bezeichnet. Durch $x_0 = 0$ wird in Σ_n die Gerade E_n bestimmt (vgl. 3. 2.). Man überzeugt sich leicht, daß ψ_n eine ein-

[10]) Man beachte 1. 4.

[11]) Dieser Einsetzungsprozeß ist aus der algebraischen Geometrie bekannt. Die Nützlichkeit dieses Prozesses für die Untersuchung komplexer Mannigfaltigkeiten ist von Herrn H. Hopf in Vorträgen und Gesprächen wiederholt betont worden. Man vgl. auch Behnke, H. und Stein, K., Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. **124**, 1—16 (1951), Nr. 3.

eindeutige Abbildung von $\Sigma_n - E_n$ auf $\Sigma_n^* - E_n^*$ ist und daß $\psi_n(E_n) = E_n^*$. Die Abbildung ψ_n wird für $x_0 = 0$, d. h. für E_n, gegeben durch: $z_1 = y_1^{n+1}$, $z_2 = y_2^{n+1}$. Es folgt: Σ_n entsteht aus der algebraischen Fläche Σ_n^*, indem man jeden Punkt der $(n+1)$-fachen Geraden $z_3 = 0$, $z_4 = 0$, abgesehen von den „Verzweigungspunkten" $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 0)$, in $n+1$ verschiedene Punkte „auflöst". Σ_n (als algebraische Fläche im $P^{(5)}$ aufgefaßt) und die algebraische Fläche Σ_n^* im $P^{(3)}$ sind birational äquivalent. Σ_n^* ist eine „windschiefe Fläche" $(n+2)$-ter Ordnung mit einer $(n+1)$-fachen Geraden (vgl. zum Folgenden NOETHER[12]), insbesondere S. 195).

4.2. Die Fasern von Σ_n werden durch ψ_n auf die Geraden abgebildet, die das Ebenenbüschel $z_3 y_1 - z_4 y_2 = 0$ aus Σ_n^* herausschneidet. Q sei ein von den Verzweigungspunkten verschiedener Punkt der $(n+1)$-fachen Geraden; wir projizieren Σ_n^* von Q auf eine nicht durch Q gehende Ebene $\widetilde{P}^{(2)}$. Diese Projektion ϱ_n stellt eine birationale Beziehung zwischen Σ_n^* und $\widetilde{P}^{(2)}$ her. Die algebraischen Flächen Σ_n im $P^{(5)}$ sind also alle mit der Ebene $\widetilde{P}^{(2)}$ birational äquivalent.

4.3. Die birationale Beziehung zwischen Σ_n und $\widetilde{P}^{(2)}$ soll etwas näher untersucht werden. $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ seien die $n+1$ Punkte von Σ_n, in die der Punkt Q von Σ_n^* „aufgelöst" wird, d. h. $\psi_n(Q_i) = Q$ $(i = 1, \ldots, n+1)$. $\varrho_n \psi_n$ ist eine eindeutige Abbildung von $\Sigma_n - \{Q_1, \ldots, Q_{n+1}\}$ in $\widetilde{P}^{(2)}$. Die durch Q_i gehende Faser von Σ_n wird auf einen einzigen Punkt A_i von $\widetilde{P}^{(2)}$ abgebildet, E_n entspricht der vielfachen Geraden von Σ_n und geht in einen einzigen Punkt B von $\widetilde{P}^{(2)}$ über. Die Punkte A_i liegen auf einer Geraden von $\widetilde{P}^{(2)}$, auf der B nicht liegt. In Q_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ werde die Trägersphäre T_{Q_i} (vgl. 4.0.) eingesetzt. Die entstehende Mannigfaltigkeit werde mit $\Sigma_{n,Q}$ bezeichnet. $\varrho_n \psi_n$ bildet $\Sigma_{n,Q}$ eindeutig auf $\widetilde{P}^{(2)}$ ab, und zwar T_{Q_i} auf die Verbindungsgerade $A_i B$. In den Punkten A_i und B von $\widetilde{P}^{(2)}$ mögen die Trägersphären T_{A_i}, T_B eingesetzt werden. Die entstehende Mannigfaltigkeit werde mit $\widetilde{P}^{(2)}_{A,B}$ bezeichnet. $\varrho_n \psi_n$ läßt sich als eineindeutige analytische Abbildung von $\Sigma_{n,Q}$ auf $\widetilde{P}^{(2)}_{A,B}$ auffassen.

4.4. Die in 4.3. angegebenen Beziehungen lassen sich so formulieren: Σ_n kann folgendermaßen erhalten werden. In der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ werden in $n+1$ Punkten A_i, die auf einer Geraden liegen, und in einen Punkt B, der nicht auf dieser Geraden liegt, die Trägersphären eingesetzt. Man erhält eine Mannigfaltigkeit $P^{(2)}_{A,B}$. Die Verbindungsgeraden $A_i B$ verhalten sich in $P^{(2)}_{A,B}$ wie eingesetzte Trägersphären. Nimmt man sie aus $P^{(2)}_{A,B}$ heraus und schließt durch jeweils einen einzigen Punkt wieder ab, dann erhält man Σ_n.

---

[12]) NOETHER, M.: Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen. Math. Ann. 3, S. 161—227 (1871).

(Eingegangen am 7. April 1951.)