Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche
by Hopf, H.
in Mathematische Annalen
volume 104; pp. 637 - 665

Göttingen State and University Library

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions.With the usage of the library's online-systems to access or download a digitizied document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:
Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek Göttingen
Digitalisierungszentrum
37070 Göttingen
Germany
E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek Göttingen
Digitalisierungszentrum
37070 Göttingen
Germany
E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Göttingen State and University Library

Göttinger Digitalisierungs-Zentrum

Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche.

Von

Heinz Hopf in Zürich.

Einleitung.

Unter einer „Abbildung“ eines Komplexes (oder auch einer beliebigen Menge) A „auf“ einen Komplex B verstehen wir stets eine eindeutige und stetige, nicht notwendig eineindeutige, Abbildung von A, bei der die Menge der Bildpunkte zu B gehört. Zwei Abbildungen von A auf B nennen wir zu derselben „Klasse“ gehörig, wenn man sie stetig ineinander überführen kann, d. h. wenn es eine sie enthaltende stetige Schar von Abbildungen von A auf B gibt, und wir bezeichnen eine Abbildung als „topologisch wesentlich“, wenn bei jeder Abbildung der durch sie bestimmten Klasse die Bildmenge aus allen Punkten von B besteht, d. h. wenn es unmöglich ist, durch stetige Abänderung der Abbildung einen Punkt von B von der Bedeckung durch die Bildmenge zu befreien.

Das Hauptziel und -ergebnis dieser Arbeit ist der Beweis von

Satz I. *Die Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre S^3 auf die 2-dimensionale Sphäre S^2 bilden unendlich viele Klassen.*

Da sich jede echte Teilmenge der Kugelfläche S^2 stetig auf einen willkürlichen Punkt der S^2 zusammenziehen läßt, gehören alle topologisch unwesentlichen Abbildungen einer Menge A auf die S^2 zu einer einzigen Klasse. Mithin enthält Satz I den

Satz Ia. *Die S^3 läßt sich topologisch wesentlich auf die S^2 abbilden.*

Darüber, für welche Dimensionszahlen a und b sich ähnliche Aussagen über die Abbildungen der a-dimensionalen Sphäre S^a auf die b-dimensionale S^b machen lassen, ist mir fast nichts bekannt. Trivial sind die Fälle $a < b$, denn dann läßt sich jedes stetige Bild der S^a in der S^b auf einen willkürlichen Punkt zusammenziehen, die Abbildungen bilden also eine einzige

Klasse und sind sämtlich topologisch unwesentlich. Ist $a = b$, so sind die Antworten auf unsere Fragen aus der Theorie des Abbildungsgrades bekannt: zu jeder ganzen Zahl c gibt es genau eine Klasse, deren Abbildungen den Grad c haben; die Klasse vom Grade 0, und nur diese, enthält topologisch unwesentliche Abbildungen[1]). Schließlich ist noch der Fall $a > b = 1$ leicht zu übersehen: hier ist die $S^b = S^1$ ein Kreis; bezeichnet w seine Winkelkoordinate, x die Punkte von S^a, so wird die zunächst nur bis auf Vielfache von 2π bestimmte Größe w bei jeder Abbildung infolge des einfachen Zusammenhanges von S^a nach dem Monodromieprinzip eine eindeutige Funktion $w = f(x)$; durch die Abbildungsschar $w = tf(x)$ wird, während der Parameter t von 1 bis 0 läuft, f stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt des Kreises übergeführt; die Abbildungen von S^a auf S^1 mit $a > 1$ sind also sämtlich topologisch unwesentlich und bilden eine einzige Klasse. Dagegen sind für $a > b > 1$ die Sätze I und Ia die einzigen mir bekannten hierhergehörigen Aussagen über Abbildungen der S^a auf die S^b.

Satz I ist eine leichte Folge aus

Satz II. *Jeder Abbildung f der S^3 auf die S^2 läßt sich eine ganze Zahl $\gamma(f)$ zuordnen, die unter anderem folgende Eigenschaften hat:*

a) $\gamma(f) = \gamma(f')$, *wenn f und f' zu einer Klasse gehören;*

b) *ist g eine Abbildung einer 3-dimensionalen Sphäre S_1^3 auf eine 3-dimensionale Sphäre S^3 mit dem Grade c, f eine Abbildung der S^3 auf die S^2, so ist $\gamma(fg) = c \cdot \gamma(f)$;*

c) *es gibt eine Abbildung der S^3 auf die S^2 mit $\gamma(f) = 1$.*

In der Tat folgt I aus II; denn da man S_1^3 auf S^3 mit beliebigem Grade c abbilden kann, gibt es nach b) und c) Abbildungen von S_1^3 auf S^2 mit beliebigem γ, und diese gehören nach a) zu verschiedenen Klassen.

Die geometrische Bedeutung der Größe γ läßt sich ungefähr so beschreiben: Die Originalmenge eines Punktes x von S^2, d. h. die Menge der durch f auf x abgebildeten Punkte von S^3, besteht bei hinreichender Regularität von f, z. B. wenn f eine simpliziale Abbildung ist, aus endlich vielen einfach geschlossenen Polygonen, ist also ein 1-dimensionaler Zyklus[2]); γ ist die *Verschlingungszahl*[3]) der Originalzyklen zweier beliebiger Punkte x und y.

---

[1]) L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **71** (1911), S. 97–115. — H. Hopf, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **96** (1926), S. 209–224.

[2]) Zyklus = geschlossener, d. h. unberandeter Komplex.

[3]) L. E. J. Brouwer, On Looping Coefficients, Proc. Acad. Amsterdam **15** (1912), S. 113–122.

Die folgende Eigenschaft von γ ist als Gegenstück zu IIb bemerkenswert:

IIb'. *Ist h eine Abbildung von S^2 auf eine zweite Kugelfläche S_1^2 vom Grade c, f wieder eine Abbildung der S^3 auf S^2, so ist $\gamma(hf) = c^2 \cdot \gamma(f)$.*

Der Beweis des Satzes II wird in den §§ 1 bis 5 geführt.

In den §§ 6 und 7 wird eine Verallgemeinerung der bisherigen Sätze für gewisse Abbildungen beliebiger 3-dimensionaler Mannigfaltigkeiten auf die S^2 vorgenommen, die geeignet ist, die Rolle des Satzes Ia für die allgemeine Theorie der Abbildungen zu beleuchten. Sie beruht auf dem Begriff der „algebraischen Wesentlichkeit" einer Abbildung, zu dem man folgendermaßen geführt wird:

Dafür, daß eine Abbildung f eines n-dimensionalen Zyklus Z^n auf die n-dimensionale Sphäre S^n topologisch wesentlich ist, ist hinreichend (und übrigens auch notwendig, worauf es im Augenblick aber nicht ankommt), daß der Grad c von f nicht 0 ist; dabei kann man c durch die Gleichung $f(Z^n) = c\,S^n$ definieren, worin $f(Z^n)$ das in S^n gelegene Bild von Z^n im Sinne der algebraischen Topologie[4]) bedeutet; die genannte hinreichende Bedingung läßt sich also auch so ausdrücken: $f(Z^n) \neq 0$. Liegt nicht ein Zyklus im gewöhnlichen Sinne, sondern ein „Zyklus modulo m" vor, wobei m eine ganze Zahl > 1 ist, d. h. ein Komplex, dessen Rand mod m verschwindet[4]), so ist der „Grad" nur mod m bestimmt, und die der obigen analoge Bedingung für die topologische Wesentlichkeit von f ist, wenn wir den Zyklus mod m mit Z_m^n bezeichnen: $f(Z_m^n) \not\equiv 0$ mod m. Da man so im Fall der n-dimensionalen Zyklen bzw. Zyklen mod m einfache algebraische, für die topologische Wesentlichkeit von f hinreichende Bedingungen hat, liegt es nahe, bei der Untersuchung der Abbildungen eines beliebigen Komplexes A die in ihm liegenden n-dimensionalen Zyklen ins Auge zu fassen und zu definieren: „Die Abbildung f des Komplexes A auf die S^n heiße ‚algebraisch wesentlich', wenn es ein $m > 1$ und in A einen n-dimensionalen Zyklus Z_m^n mod m gibt, dessen Bild $f(Z_m^n) \not\equiv 0$ mod m ist." Dabei beachte man, daß f natürlich immer algebraisch wesentlich ist, wenn es einen gewöhnlichen Zyklus Z^n in A gibt, dessen Bild $f(Z^n) = c\,S^n \neq 0$ ist; denn Z^n ist ein Z_m^n für jedes $m > 1$, und für jedes m, das kein Teiler von c ist, ist $f(Z^n) \not\equiv 0$ mod m. Nun ist eine algebraisch wesentliche Abbildung eines Komplexes A a fortiori immer topologisch wesentlich, da ja in A wenigstens ein Z_m^n enthalten ist, der topologisch wesentlich abgebildet wird. Es entsteht daher die Frage, ob es auch Abbildungen gibt, die zwar algebraisch unwesentlich, aber topologisch wesentlich sind; diese

[4]) Zur Einführung in die kombinatorische oder algebraische Topologie sei empfohlen: J. W. Alexander, Combinatorial Analysis Situs, Transact. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 301—329.

Frage wird durch den Satz Ia bejaht. Denn jede Abbildung der S^3 auf die S^2 ist algebraisch unwesentlich; da nämlich jeder in S^3 gelegene Z_m^2 homolog 0 mod m ist, ist auch sein Bild $f(Z_m^2) \sim 0 \bmod m$ in S^2, d. h. $f(Z_m^2) \equiv 0 \bmod m$. Und die oben erwähnte Verallgemeinerung des Satzes Ia lautet:

Satz IIIa. *Jede (geschlossene orientierbare) Mannigfaltigkeit M^3 gestattet Abbildungen auf die S^2, die zugleich algebraisch unwesentlich und topologisch wesentlich sind.*

Ebenso wie Ia aus I, folgt IIIa aus

Satz III. *Die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen M^3 auf die S^2 bilden unendlich viele Klassen.*

Der Beweis von III wird dadurch erbracht, daß die Existenz einer Zahl γ mit den in Satz II genannten Eigenschaften für die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen M^3 festgestellt wird. Ob sich nicht nur jede M^3, sondern sogar *jeder 3-dimensionale Zyklus* topologisch wesentlich auf die S^2 abbilden läßt, weiß ich nicht.

In einem „Anhang" wird noch weiter auf die Begriffe der algebraischen und topologischen Wesentlichkeit und den Zusammenhang zwischen ihnen eingegangen. Wenn der abzubildende Komplex A und die Sphäre S die gleiche Dimension a haben, gilt der folgende Satz, den ich an anderer Stelle bewiesen habe[5]):

Satz IV. *Eine Abbildung eines a-dimensionalen Komplexes A^a auf die S^a ist dann und nur dann topologisch wesentlich, wenn sie algebraisch wesentlich ist.*

Derselbe Satz gilt auch, wenn A beliebige Dimension, S die Dimension 1 hat:

Satz V. *Eine Abbildung eines beliebigen Komplexes A auf einen Kreis S^1 ist dann und nur dann topologisch wesentlich, wenn sie algebraisch wesentlich ist.*

Abbildungen eines a-dimensionalen A^a auf die b-dimensionale S^b mit $a < b$ sind stets in jedem Sinne unwesentlich; somit ist aus den Sätzen IV und V ersichtlich, daß die niedrigsten Dimensionszahlen, die für die Existenz von zwar topologisch, aber nicht algebraisch, wesentlichen Abbildungen eines A^a auf die S^b in Frage kommen, $a = 3$ und $b = 2$ sind; und für diese Zahlen existieren in der Tat bereits derartige Abbildungen, wie die Sätze Ia und IIIa zeigen.

[5]) Über wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen, Moskauer Mathematische Sammlung (z. Z. im Druck).

Welche A^a lassen sich nun in den Fällen $b = a$ und $b = 1$ wesentlich (algebraisch und topologisch) auf die S^b abbilden? Die Antworten sind:

Satz IVa. *A^a läßt sich dann und nur dann wesentlich auf die S^a abbilden, wenn es ein $m > 1$ und in A einen a-dimensionalen Zyklus* mod m *gibt, der nicht homolog* 0 mod m *ist, mit anderen Worten: wenn die „a-te Bettische Zahl* mod m" $p_m^a > 0$ *ist.*

Satz Va. *A läßt sich dann und nur dann wesentlich auf einen Kreis abbilden, wenn es in A einen 1-dimensionalen Zyklus (im gewöhnlichen Sinne) gibt, der nicht homolog 0 ist, mit anderen Worten: wenn die erste Bettische Zahl $p^1 > 0$ ist.*

Man beachte den Unterschied zwischen den Bedingungen der beiden Sätze: die Bedingung $p_m^1 > 0$ für ein gewisses m ist im allgemeinen nicht hinreichend für die Gültigkeit der Aussage von Va, und die Bedingung $p^a > 0$, worin p^a die a-te Bettische Zahl ist, im allgemeinen nicht notwendig für die Gültigkeit der Aussage von IVa. Beides bestätigt man z. B. dadurch, daß man für A die projektive Ebene nimmt.

Bei anderen Dimensionszahlen b als $b = a$ und $b = 1$ sind mir Kriterien für die topologisch wesentliche Abbildbarkeit von A^a auf S^b nicht bekannt. Aber über die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit läßt sich noch etwas aussagen:

Satz VI. *Notwendig für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von A^a auf S^b ist, daß entweder die b-te Bettische Zahl $p^b > 0$ oder daß $(b-1)$-te Torsion vorhanden (oder daß beides der Fall) ist.*

Man sieht leicht, daß diese Bedingung in den Fällen $b = a$ und $b = 1$ mit den in IVa bzw. IVb genannten Bedingungen zusammenfällt; sie ist daher in diesen Fällen auf Grund der Sätze IV und IVa bzw. V und Va nicht nur, wie VI behauptet, notwendig, sondern auch hinreichend für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit. Dies gilt noch für einen weiteren Fall:

Satz VII. *Die in Satz* VI *genannte Bedingung ist — außer in den Fällen $b = a$ und $b = 1$ — auch in dem Fall $b = a - 1$ für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von A^a auf S^b hinreichend.*

Die niedrigsten Dimensionszahlen, die für die Existenz eines Beispieles in Frage kommen, in dem die Bedingung des Satzes VI nicht hinreicht, sind, da immer $b < a$ sein muß, auf Grund von VII die Zahlen $a = 4$, $b = 2$; und hier gibt es in der Tat ein Beispiel, in dem sogar die stärkere Bedingung des Nichtverschwindens der b-ten Bettischen Zahl nicht ausreicht:

Satz VIII. *Die in Satz* VI *genannte Bedingung und auch die stärkere Bedingung $p^b > 0$ ist im allgemeinen nicht hinreichend für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von A^a auf S^b: die 4-dimensionale Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte der projektiven Ebene läßt sich nicht algebraisch wesentlich auf die S^2 abbilden, obwohl für sie $p^2 = 1$ ist.*

Ob aus der Tatsache, daß die b-te Bettische Zahl eines Komplexes A^a positiv ist, die *topologisch* wesentliche Abbildbarkeit von A^a auf S^b folgt, ist mir nicht bekannt.

Die genannten Sätze werden in dem „Anhang" in der Reihenfolge V, IVa, VI, VII, Va, VIII bewiesen; einen Beweis von IV findet man, wie erwähnt, in einer Arbeit in der „Moskauer Mathematischen Sammlung"[5]).

Schließlich sei noch folgendes bemerkt: Auf Grund von Satz IV sind algebraisch wesentlich diejenigen Abbildungen von A^a auf S^b, durch die ein b-dimensionaler Teilkomplex von A^a topologisch wesentlich abgebildet wird. Dieser Umstand legt die Einführung einer Rangordnung der Wesentlichkeit von Abbildungen nahe: f heiße wesentlich vom Range i, wenn ein $(a+1-i)$-dimensionaler, aber kein niedriger-dimensionaler Teilkomplex von A^a topologisch wesentlich abgebildet wird. Dann sind die topologisch wesentlichen Abbildungen von A^a die mit positivem, die algebraisch wesentlichen die mit dem maximalen Rang $a-b+1$. Vielleicht ist diese Begriffsbildung von Nutzen bei der Behandlung von Abbildungsproblemen, wie sie z. B. bei der Frage nach der Übertragbarkeit der hier bewiesenen Sätze auf andere Dimensionszahlen entstehen.

§ 1.

Die Umkehrung einer simplizialen Abbildung.

1. T^2 und τ^2 seien orientierte Dreiecke, T^2 sei affin so auf τ^2 abgebildet, daß seinen Ecken die Ecken von τ^2 entsprechen. Ein beliebiger innerer Punkt ξ von τ^2 hat in T^2, und zwar im Inneren, genau einen Originalpunkt x. Das Symbol φ_{T^2} bezeichne die Umkehrung der Abbildung, und zwar setzen wir $\varphi_{T^2}(\xi)=+x$ oder $\varphi_{T^2}(\xi)=-x$, je nachdem T^2 im positiven oder im negativen Sinne auf τ^2 abgebildet ist. Es sei nun A ein Komplex beliebiger Dimensionszahl, seine Dreiecke seien mit T_i^2 bezeichnet, Γ^2 sei ein τ^2 enthaltender zweidimensionaler Komplex; A sei simplizial auf Γ^2 abgebildet, d. h. so, daß den Ecken eines Simplexes von A immer Ecken — nicht notwendig alle drei Ecken — eines Dreiecks von Γ^2 entsprechen und daß die Abbildung in jedem einzelnen Simplex von A affin ist. Wird dabei ein Dreieck T_i^2 nicht-ausartend, also eineindeutig, auf τ^2 abgebildet, so ist $\varphi_{T_i^2}(\xi)$ wie oben erklärt; andernfalls, d. h. wenn das Innere von τ^2 durch das Bild von T^2 nicht bedeckt wird, setzen wir sinngemäß $\varphi_{T_i^2}(\xi)=0$. Als „Originalkomplex" von ξ bei der Abbildung eines zweidimensionalen Teilkomplexes $C^2=\sum a_i T_i^2$ von A definieren wir den nulldimensionalen Komplex $\varphi_{C^2}(\xi)=\sum a_i \varphi_{T_i^2}(\xi)$. Aus der Definition folgen unmittelbar die Regeln

$$(1) \qquad \varphi_{C_1^2+C_2^2}(\xi)=\varphi_{C_1^2}(\xi)+\varphi_{C_2^2}(\xi), \qquad \varphi_{-C^2}(\xi)=-\varphi_{C^2}(\xi),$$

sowie die Berechtigung von

$$\varphi_0(\xi) = 0. \tag{1'}$$

2. Betrachten wir eine affine Abbildung eines orientierten Tetraeders T^3 auf das Dreieck τ^2: Wenn τ^2 durch das Bild von T^3 bedeckt wird, wenn dieses Bild also nicht lediglich aus einer Seite oder Ecke von τ^2 besteht, so werden genau zwei Seitendreiecke T_1^2, T_2^2 von T^3 eineindeutig-affin auf τ^2 abgebildet; gibt man ihnen die durch die Orientierung von T^3 in bekannter Weise bestimmte Randorientierung, so wird eines von ihnen, etwa T_1^2, im positiven, das andere, T_2^2, im negativen Sinne abgebildet. Die Originalmenge des Punktes ξ ist eine Strecke, deren Endpunkte auf T_1^2 und T_2^2 liegen; diese Strecke, mit der von T_2^2 nach T_1^2 weisenden Richtung versehen, nennen wir $\varphi_{T^3}(\xi)$. Wenn wir immer unter $\dot{C}, \dot{T}, \dot{\varphi}, \ldots$ die Ränder von $C, T, \varphi \ldots$ verstehen (im algebraisch-kombinatorischen Sinne), so hat diese Festsetzung die Gültigkeit von

$$\dot{\varphi}_{T^3}(\xi) = \varphi_{\dot{T}^3}(\xi) \tag{2}$$

zur Folge, wobei $\varphi_{\dot{T}^3}(\xi)$ nach den unter 1. gegebenen Vorschriften zu bilden ist. Wird τ^2 durch das Bild von T^3 nicht bedeckt, so setzen wir $\varphi_{T^3}(\xi) = 0$, und auch dann gilt (2) in Hinblick auf (1′). Liegt nicht nur eine affine Abbildung eines einzelnen T^3 auf τ^2, sondern eine simpliziale Abbildung eines dreidimensionalen Komplexes $C^3 = \sum a_i T_i^3$, den wir uns etwa wieder als Teil eines beliebigen Komplexes A denken können, auf den τ^2 enthaltenden Komplex Γ^2 vor, so definieren wir als Originalkomplex von ξ: $\varphi_{C^3}(\xi) = \sum a_i \varphi_{T_i^3}(\xi)$. Analog zu (1) und (1′) gelten die Regeln

$$\varphi_{C_1^3 + C_2^3}(\xi) = \varphi_{C_1^3}(\xi) + \varphi_{C_2^3}(\xi), \qquad \varphi_{-C^3}(\xi) = -\varphi_{C^3}(\xi), \tag{3}$$

$$\varphi_0(\xi) = 0. \tag{3'}$$

Ferner folgt aus (2) und (1) leicht

$$\dot{\varphi}_{C^3}(\xi) = \varphi_{\dot{C}^3}(\xi). \tag{4}$$

Hiernach und nach (1′) ist $\varphi_{C^3}(\xi)$ ein Zyklus, wenn C^3 ein Zyklus ist.

3. Bei einer affinen Abbildung eines vierdimensionalen Simplexes T^4 auf τ^2 ist, falls τ^2 durch das Bild bedeckt wird, die Originalmenge von ξ eine zweidimensionale ebene Zelle E^2; ihr Rand ist ein einfach geschlossenes Polygon, dessen Seiten die von 0 verschiedenen $\varphi_{T_i^3}(\xi)$ sind, wobei wir mit T_i^3 die Randtetraeder von T^4 bezeichnen. Da $\dot{T}^4 = \sum T_i^3$ ein Zyklus ist, ist nach der Schlußbemerkung von 2. auch $\varphi_{\dot{T}^4}(\xi) = \sum \varphi_{T_i^3}(\xi)$ ein Zyklus, und dieser Zyklus liegt auf dem Randpolygon von E^2; daher ist, wenn wir unter P dieses Polygon in einer bestimmten Durchlaufungs-

richtung verstehen, $\varphi_{\dot{T}^4}(\xi)$ ein Vielfaches von P; nun kommt aber in $\varphi_{\dot{T}^4}(\xi)$ jede Seite nur einmal vor, da in $\dot{T}^4$ jedes T_i^3 nur einmal vorkommt; daher ist $\varphi_{\dot{T}^4}(\xi) = \pm P$. Mithin läßt sich E^2 auf eine und nur eine Weise so orientieren, daß $\dot{E}^2 = \varphi_{\dot{T}^4}(\xi)$ wird. Die so orientierte Zelle E^2 nennen wir $\varphi_{T^4}(\xi)$; dann gilt

$$(5) \qquad \dot{\varphi}_{T^4}(\xi) = \varphi_{\dot{T}^4}(\xi).$$

Wenn τ^2 durch das Bild von T^4 nicht bedeckt wird, so setzen wir wieder $\varphi_{T^4}(\xi) = 0$; ferner definieren wir für die Abbildung eines vierdimensionalen Komplexes $C^4 = \sum a_i T_i^4$: $\varphi_{C^4}(\xi) = \sum a_i \varphi_{T_i^4}(\xi)$. Dann ergibt sich aus (5) analog zu (4)

$$(6) \qquad \dot{\varphi}_{C^4}(\xi) = \varphi_{\dot{C}^4}(\xi).$$

Die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf beliebige Dimensionszahlen liegt auf der Hand, spielt aber für diese Arbeit keine Rolle.

4. Wir kehren zu dem in 2. behandelten Fall der Abbildung eines dreidimensionalen Komplexes C^3 auf Γ^2 zurück, setzen jetzt aber voraus, daß $C^3 = M^3$ eine geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit ist. Dann ist zunächst wegen der Geschlossenheit von M^3 nach der Schlußbemerkung von 2. $\varphi_{M^3}(\xi)$ ein eindimensionaler orientierter Zyklus Z^1; da in M^3 jedes Dreieck T_i^2 auf genau zwei Tetraedern liegt, stoßen in einer Ecke von Z^1 stets genau zwei Kanten zusammen; mithin besteht Z^1 aus einer Anzahl zueinander fremder, einfach gesschlossener Polygone, von denen jedes mit einer bestimmten Durchlaufungsrichtung versehen ist. Ist T^2 ein orientiertes Dreieck der (fest gegebenen) Triangulation von M^3, das mit Z^1 einen Punkt gemeinsam hat, so hat es nur diesen einen Punkt mit Z^1 gemeinsam und wird in ihm von Z^1 geschnitten; dies folgt unmittelbar aus der Definition von $Z^1 = \varphi_{M^3}(\xi)$. Der Schnitt ist nach einer bekannten Regel mit einem Vorzeichen zu versehen, und zwar kann man diese Regel so aussprechen: T^2 liegt auf zwei Tetraedern, beide sind durch die Orientierung von M^3 orientiert, die durch sie bewirkten Randorientierungen sind auf T^2 einander entgegengesetzt, für eines von ihnen, T_1^3, stimmt sie mit der vorgegebenen Orientierung von T^2 überein; der Schnitt von Z^1 mit T^2 ist positiv oder negativ zu zählen, je nachdem Z^1 durch T^2 aus T_1^3 aus- oder in T_1^3 eintritt. Diese Regel und die in 2 gegebene Orientierungsvorschrift für $\varphi_{T^2}(\xi)$ zeigen, daß der Schnitt dasselbe Vorzeichen erhält wie die Abbildung von T^2 auf τ^2; da überdies dann und nur dann ein Schnitt von Z^1 mit T^2 vorliegt, wenn τ^2 durch das Bild von T^2 bedeckt wird, ist allgemein die Schnittzahl von Z^1 mit einem beliebigen T^2 gleich dem Grade, mit dem T^2 auf τ^2 abgebildet

wird; durch Addition mehrerer T_i^2 folgt hieraus: *Die Schnittzahl von $\varphi_{M^3}(\xi)$ mit einem in M^3 liegenden Komplex $C^2 = \sum a_i T_i^2$ ist gleich dem Grade der gegebenen Abbildung von C^2 im Punkte ξ.* [6])

§ 2.

Die Definition von γ für simpliziale Abbildungen der S^3 auf die S^2.

1. Wir betrachten eine simpliziale Abbildung der dreidimensionalen Sphäre S^3 auf die zweidimensionale Kugelfläche S^2. τ^2 sei ein Dreieck der zugrunde gelegten Triangulation von S^2, ξ ein innerer Punkt von τ^2, $\varphi(\xi) = \varphi_{S^3}(\xi)$ sein Originalzyklus. $\varphi(\xi)$ ist, wie jeder eindimensionale Zyklus in S^3, homolog 0, d. h. es gibt zweidimensionale Komplexe K^2 mit $\dot{K}^2 = \varphi(\xi)$. Da $\varphi(\xi)$ nicht aus Kanten der in S^3 zugrunde gelegten Triangulation besteht, kann auch K^2 nicht aus Dreiecken dieser Triangulation bestehen; die folgende Wahl von K^2 ist für das Weitere zweckmäßig:

T^3 sei ein Tetraeder der Triangulation, dessen Bild τ^2 bedeckt, das also eine Strecke von $\varphi(\xi)$ enthält; a, b seien deren Anfangs- und Endpunkt, e sei eine der beiden Ecken, die das a enthaltende Dreieck mit dem b enthaltenden gemeinsam hat; ersetzen wir die Strecke ab durch das Streckenpaar aeb, und tun wir das Analoge in jedem T^3, das eine Strecke von $\varphi(\xi)$ enthält, so ersetzen wir $\varphi(\xi)$ durch einen Zyklus X^1 derart, daß X^1 auf Dreiecken der Triangulation verläuft und zusammen mit $\varphi(\xi)$ den aus den Dreiecken aeb gebildeten Komplex berandet; wir ersetzen nun weiter immer die in einem Dreieck verlaufenden Streckenpaare $e'ae, ebe'', \ldots$ (wobei die $e', e'', \ldots$ Ecken sind) durch die Kanten $e'e, ee'', \ldots$, die auch in Punkte entarten können; diese Kanten bilden einen Zyklus Y^1; er berandet zusammen mit $\varphi(\xi)$ den Komplex K_1^2, der aus den Dreiecken $aeb, \ldots$ und aus den Dreiecken $e'ae, \ldots$ besteht und somit ganz in den Komplex derjenigen T^3 liegt, deren Bilder τ^2 bedecken. Ferner berandet Y^1 selbst, da er aus Kanten der Triangulation besteht und homolog 0 ist, einen aus Dreiecken der Triangulation bestehenden Komplex K_2^2; $K^2 = K_1^2 + K_2^2$ ist ein von $\varphi(\xi)$ berandeter Komplex, wie wir ihn benutzen wollen.

2. Durch die simpliziale Abbildung f wird jedes Dreieck von K_2^2 affin auf ein Dreieck, eine Seite oder eine Ecke der Triangulation von S^2 abgebildet; K_1^2 besteht, in der oben benutzten Bezeichnung, aus Dreiecken der Art aeb und aus Dreiecken der Art $e'ae$; die der ersten Art werden durch f auf die Strecken $\xi\varepsilon$ abgebildet, wobei $\varepsilon = f(e)$ Ecke von τ^2 ist, die der zweiten Art auf die (eventuell in Strecken entarteten) Dreiecke $\varepsilon'\xi\varepsilon$,

---

[6]) Bezüglich der Umkehrungsabbildung φ vergleiche man auch den § 3 meiner Arbeit: „Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten", Journal f. d. reine u. angew. Math. (Crelle) **163** (1930), S. 71—88.

wobei auch $\varepsilon' = f(e')$ Ecke von τ^2 ist. Wenn wir daher τ^2 dadurch unterteilen, daß wir ξ mit den Ecken verbinden, so ist in bezug auf die so entstandene Triangulation die Abbildung $f(K^2)$ simplizial im gewöhnlichen Sinne, d. h. sie bildet jedes Dreieck von K^2 affin auf ein Dreieck, eine Seite oder eine Ecke der triangulierten S^2 ab.

Nun ist bei einer simplizialen Abbildung das Bild des Randes eines Komplexes stets mit dem Rand von dessen Bild identisch [7]); der Rand des zweidimensionalen Bildkomplexes $f(K^2)$ besteht daher nur aus dem Punkt ξ, ist also gleich 0 zu setzen, d. h. $f(K^2)$ ist ein auf S^2 liegender zweidimensionaler Zyklus; er ist mithin ein Vielfaches der S^2, da es andere zweidimensionale Zyklen auf ihr nicht gibt: $f(K^2) = \gamma \cdot S^2$. Mit anderen Worten: Der in den von dem Randbild ξ verschiedenen Punkten von S^2 definierte Grad der Abbildung $f(K^2)$ hat in allen diesen Punkten denselben Wert γ.

3. Dieser Grad γ hängt nicht von dem speziell gewählten K^2, sondern nur von dem Rande $\varphi(\xi)$ ab. Ist nämlich $\overline{K}^2$ ein beliebiger von $\varphi(\xi)$ berandeter Komplex, so ist $Z^2 = K^2 - \overline{K}^2$ ein zweidimensionaler Zyklus, ein solcher ist in S^3 immer homolog 0, also ist auch sein Bild $f(Z^2) \sim 0$, d. h. $= 0$ in S^2; dies bedeutet $f(\overline{K}^2) = f(K^2) = \gamma \cdot S^2$.

4. Die Größe $\gamma = \gamma_\xi$ ist somit allein durch den Punkt ξ bestimmt; sie ist aber sogar von der Wahl dieses Punktes unabhängig.

Ist nämlich η innerer Punkt eines von τ^2 verschiedenen Dreiecks von S^2, so ist nach § 1, 4. γ_ξ die *Schnittzahl* $(K^2 \cdot \varphi(\eta))$ des von $\varphi(\xi)$ berandeten Komplexes K^2 mit $\varphi(\eta)$, also die *Verschlingungszahl* der Zyklen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$. Die Verschlingungszahl zweier eindimensionaler Zyklen in S^3 ist aber symmetrisch in bezug auf die beiden Zyklen [8]); in unserem Fall ist also γ_ξ zugleich die Schnittzahl eines von $\varphi(\eta)$ berandeten Komplexes L^2 mit $\varphi(\xi)$; diese Schnittzahl ist γ_η, ebenso wie γ_ξ die Schnittzahl von K^2 mit $\varphi(\eta)$ ist; folglich ist $\gamma_\eta = \gamma_\xi$. Hierbei haben wir vorausgesetzt, daß η nicht in τ^2 liegt; ist aber ζ ein beliebiger Punkt aus τ^2, so folgt ebenso $\gamma_\eta = \gamma_\zeta$, also $\gamma_\zeta = \gamma_\xi$.

---

[7]) Man verifiziert diese Behauptung erst für ein einzelnes Simplex und beweist sie dann allgemein durch Addition mehrerer Simplexe.

[8]) Beweis. Es sei $\dot{K}^2 = \varphi(\xi)$, $\dot{L}^2 = \varphi(\eta)$, K^2 und L^2 seien zueinander in allgemeiner Lage; dann schneiden sie sich in einem Streckenkomplex C^1, dessen Rand bei richtiger Bestimmung der Vorzeichen $\dot{C}^1 = K^2 \cdot \varphi(\eta) - \varphi(\xi) \cdot \dot{L}^2$ ist; daher ist $K^2 \cdot \varphi(\eta) \sim \varphi(\xi) \cdot L^2$, wobei $K^2 \cdot \varphi(\eta)$ und $\varphi(\xi) \cdot L^2$ die nulldimensionalen Schnitte der in Frage kommenden Komplexe sind. Daher sind die Schnittzahlen $(K^2 \cdot \varphi(\eta))$ und $(\varphi(\xi) \cdot L^2) = (L^2 \cdot \varphi(\xi))$ einander gleich. (Wegen der vorkommenden Vorzeichenbestimmung der Schnitte und Ränder vgl. man etwa: B. L. van der Waerden, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Annalen **102** (1929), S. 337—362, besonders § 3.) Siehe auch Brouwer, wie unter [3]).

5. Damit ist die Unabhängigkeit der Größe γ von ξ allgemein gezeigt; zugleich hat sich die Deutung von γ als Verschlingungszahl von $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ unter der Voraussetzung ergeben, daß ξ und η verschiedenen Dreiecken angehören. Es ist leicht zu sehen, daß diese Voraussetzung unwesentlich ist. Liegen nämlich ξ und η in demselben Dreieck τ^2, so wähle man in τ^2 einen Punkt δ so, daß bei der Unterteilung von τ^2 in drei Dreiecke, die durch Verbindung von δ mit den Ecken von τ^2 entsteht, ξ und η im Inneren verschiedener Dreiecke liegen. Diese Unterteilung übertrage man auf jedes Dreieck T^2 der Triangulation von S^3, das durch f eineindeutig-affin auf τ^2 abgebildet wird; man wähle ferner in jedem Tetraeder T^3, dessen Bild τ^2 bedeckt, auf dem also zwei T^2 der eben genannten Art liegen, auf der zu $\varphi(\delta)$ gehörigen Strecke einen Punkt und verbinde ihn mit den Ecken und Kanten des untergeteilten Randes von T^3; es entsteht eine Verfeinerung der ursprünglichen Triangulation von S^3; die alte Abbildung f ist auch bezüglich der neuen Triangulationen von S^3 und S^2 simplizial; ξ und η liegen jetzt aber in verschiedenen Dreiecken, es folgt also ebenso wie früher, daß $\gamma = \gamma_\xi$ die Verschlingungszahl von $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ ist.

6. Das Ergebnis ist: *Zu jeder simplizialen Abbildung f der S^3 auf die S^2 gehört eine ganze Zahl $\gamma = \gamma(f)$, die sich auf folgende beiden Weisen erklären läßt: sie ist der Grad, mit dem ein beliebiger, von dem Originalzyklus eines beliebigen Punktes berandeter zweidimensionaler Komplex abgebildet wird; sie ist zugleich die Verschlingungszahl der Originalzyklen zweier beliebiger Punkte.* Dabei ist die einzige Einschränkung, der die „beliebigen“ Punkte unterworfen sind, die schon für die Definition der Originalzyklen notwendige Bedingung, daß sie im Inneren von Dreiecken der Triangulation von S^2 liegen.

§ 3.

Die Konstanz von γ in der Abbildungsklasse.

1. Wir haben zunächst einige allgemeine Bemerkungen über „simpliziale Approximationen“ zu machen[9]).

Unter dem „Stern“ $s(e)$ eines Eckpunktes e in einem Komplex C verstehen wir die Menge derjenigen Punkte x, die die Eigenschaft haben, daß jedes x enthaltende Simplex (beliebiger Dimension) von C den Eckpunkt e hat. $s(e)$ besteht also, wie man leicht sieht, aus allen e enthaltenden i-dimensionalen Simplexen ($i = 1, 2, \ldots$), wenn man aus jedem von ihnen das e gegenüberliegende $(i-1)$-dimensionale Randsimplex wegläßt.

[9]) Siehe Nr. 5 und 6 der unter [4]) zitierten Arbeit von Alexander.

C und Γ seien zwei Komplexe; Simplexe, Ecken, Sterne in C bzw. Γ bezeichnen wir mit T, e, s bzw. τ, ε, σ. f sei eine Abbildung von C auf Γ; eine simpliziale Abbildung g von C auf Γ heißt eine „simpliziale Approximation", genauer: eine „simpliziale Approximation bezüglich der T- und τ-Triangulationen" oder kurz: eine „simpliziale T-τ-Approximation" von f, wenn ihr die T- und τ-Triangulationen zugrunde liegen und wenn für jeden Eckpunkt e von C

$$f(s(e)) \subset \sigma(g(e)) \tag{1}$$

ist.

x sei ein Punkt von C, T_0 das Simplex niedrigster Dimension, dem er angehört, e eine Ecke von T_0; dann ist $x \subset s(e)$, also nach (1) $f(x) \subset \sigma(g(e))$. Demnach ist $g(e)$ Ecke jedes Simplexes τ von Γ, dem $f(x)$ angehört, und da g simplizial ist, ist $g(T_0) \subset \tau$. Mithin gehören $f(x)$ und $g(x)$ einem Simplex τ an, wodurch die Bezeichnung „Approximation" gerechtfertigt ist, und woraus die Zugehörigkeit von f und g zu einer Klasse folgt: die Punkte $f(x)$ können geradlinig auf Γ in die Punkte $g(x)$ wandern.

Der Wert dieser Begriffsbildungen besteht in der Gültigkeit des folgenden Approximationssatzes: „Ist f eine Abbildung von C auf Γ, und sind diese Komplexe in T- bzw. τ-Triangulationen gegeben, so gibt es eine simpliziale $\overline{T}$-τ-Approximation von f, wobei die $\overline{T}$-Triangulation eine hinreichend feine Unterteilung der T-Triangulation ist." Da man von vornherein die τ-Triangulation von Γ beliebig fein wählen kann, so ist hierin mit Rücksicht auf den vorigen Absatz die Tatsache enthalten, daß sich f beliebig gut simplizial approximieren läßt. Ferner ist das Vorhandensein simplizialer $\overline{T}$-τ-Abbildungen in jeder Klasse festgestellt.

2. Es sei jetzt f selbst simplizial in bezug auf die T- und τ-Triangulation. $\bar{f}$ sei eine simpliziale $\overline{T}$-$\bar{\tau}$-Approximation von f, wobei die $\overline{T}$ bzw. $\bar{\tau}$ Unterteilungen der T bzw. τ sind. Wir behaupten, daß für jedes Simplex T^i der T-Triangulation

$$\bar{f}(T^i) \doteq f(T^i) \tag{2}$$

ist; und zwar gilt (2) nicht nur im mengentheoretischen Sinne, insofern das Zusammenfallen der durch $\bar{f}$ und f gelieferten Bildpunktmengen von T^i behauptet wird, sondern auch in folgendem algebraischen Sinne: wenn $f(T^i)$ nicht entartet, sondern ein i-dimensionales Simplex τ^i ist, so gilt $\bar{f}(T^i) = f(T^i) = \pm \tau^i$ im Sinne der algebraischen Topologie, wobei T^i und τ^i als aus Simplexen $\overline{T}$ und $\bar{\tau}$ zusammengesetzte Komplexe aufzufassen sind.

Beweis. Simplexe, Ecken, Sterne der $\overline{T}$- bzw. $\bar{\tau}$-Triangulation werden mit $\overline{T}$, $\bar{e}$, $\bar{s}$ bzw. $\bar{\tau}$, $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$ bezeichnet. (1) lautet dann

$$f(\bar{s}(\bar{e})) \subset \bar{\sigma}(\bar{f}(\bar{e})). \tag{1'}$$

Ist $\bar{e} \subset T^i$, so ist auch $f(\bar{e}) \subset f(T^i) = \tau^j$ $(j \leqq i)$ und

$$f(\bar{e}) \subset \bar{\tau}, \tag{3}$$

wobei $\bar{\tau}$ ein gewisses Teilsimplex von τ^j ist. Andererseits ist $\bar{e} \subset \bar{s}(\bar{e})$, also auch $f(\bar{e}) \subset f(\bar{s}(\bar{e}))$, mithin nach (1′)

$$f(\bar{e}) \subset \bar{\sigma}(\bar{f}(\bar{e})). \tag{4}$$

Auf Grund der Definition des „Sternes" ist nach (3) und (4) der Punkt $\bar{f}(\bar{e})$ Ecke von $\bar{\tau}$, also in $\tau^j = f(T^i)$ enthalten. Da dies für jeden in T^i enthaltenen $\bar{e}$ gilt, ist

$$\bar{f}(T^i) \subset f(T^i). \tag{5}$$

Für den Beweis von (2) können wir uns jetzt auf den Fall beschränken, daß $f(T^i)$ nicht entartet, daß also, in der eben benutzten Bezeichnung, $j = i$ ist; denn im Fall $j < i$ besitzt T^i ein j-dimensionales Randsimplex T^j, daß ohne Entartung auf $\tau^j = f(T^i)$ abgebildet wird; hierin und in (5) ist dann (2) enthalten. Wir werden also (2) für $j = i$ beweisen, und zwar gleich in dem oben ausgesprochenen algebraischen Sinne.

Für $i = 0$ ist die Behauptung bereits durch (5) bewiesen; sie sei für die Dimensionszahl $i - 1$ bewiesen. Dann gilt sie für jedes $(i-1)$-dimensionale Randsimplex von T^i, also auch für den ganzen Rand $\dot{T}^i$; d. h. es ist $\bar{f}(\dot{T}^i) = f(\dot{T}^i)$. Da bei jeder simplizialen Abbildung das Bild des Randes mit dem Rand des Bildes identisch ist (im algebraischen Sinne) [7], ist daher auch

$$(\bar{f}(T^i))^{\cdot} = (f(T^i))^{\cdot}. \tag{6}$$

Nach (5) liegt der Komplex $\bar{f}(T^i)$ in dem Simplex τ^i, welches gleich $\pm f(T^i)$ ist; nach (6) ist daher $\bar{f}(T^i) - f(T^i)$ ein in τ^i liegender i-dimensionaler Zyklus; dieser muß, da τ^i ein i-dimensionales Simplex $(i > 0)$ ist, identisch 0 sein; d. h. es ist $\bar{f}(T^i) = f(T^i)$, w. z. b. w.

3. Wir betrachten jetzt wieder simpliziale Abbildungen der S^3 auf die S^2; es gelten die Bezeichnungen des Abschnitts 2, insbesondere sei also $\bar{f}$ eine simpliziale Approximation der simplizialen Abbildung f. Wir behaupten:

$$\gamma(\bar{f}) = \gamma(f).$$

Beweis. ξ sei innerer Punkt eines $\bar{\tau}^2$; dann ist er auch innerer Punkt eines τ^2, seine Originalzyklen $\varphi(\xi)$ und $\bar{\varphi}(\xi)$ bezüglich der Abbildungen f bzw. $\bar{f}$ sind also definiert; η sei innerer Punkt eines $\bar{\tau}_1^2$, und das τ_1^2, von dem $\bar{\tau}_1^2$ ein Teil ist, sei von τ^2 verschieden; auch $\varphi(\eta)$ und $\bar{\varphi}(\eta)$ sind definiert. Die Behauptung ist, daß $\bar{\varphi}(\xi)$ und $\bar{\varphi}(\eta)$ dieselbe Verschlingungszahl haben wie $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$. Wir werden sie dadurch beweisen, daß wir die Existenz zweier Komplexe X^2 und Y^2 nachweisen, so daß X^2

zu $\varphi(\eta)$ und $\overline{\varphi}(\eta)$, Y^2 zu $\varphi(\xi)$ und $\overline{\varphi}(\xi)$ fremd und daß

$$\dot{X}^2 = \varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi), \tag{7x}$$

$$\dot{Y}^2 = \varphi(\eta) - \overline{\varphi}(\eta) \tag{7y}$$

ist; dann folgt nämlich aus (7x) und der Fremdheit von X^2 mit $\varphi(\eta)$, daß, wenn wir die Verschlingungszahlen immer mit V bezeichnen, $V(\varphi(\xi), \varphi(\eta)) = V(\overline{\varphi}(\xi), \varphi(\eta))$ ist[10]; aus (7y) und der Fremdheit von Y^2 mit $\overline{\varphi}(\xi)$ folgt ebenso $V(\overline{\varphi}(\xi), \varphi(\eta)) = V(\overline{\varphi}(\xi), \overline{\varphi}(\eta))$, also die Behauptung $V(\varphi(\xi), \varphi(\eta)) = V(\overline{\varphi}(\xi)), \overline{\varphi}(\eta))$. Da ξ und η ganz symmetrisch auftreten, genügt der Nachweis der Existenz von X^2.

Nach Abschnitt 2 werden durch $\bar{f}$ dieselben T^3 auf τ^2 abgebildet wie durch f; sie bilden einen Komplex X^3; in ihm liegt sowohl $\varphi(\xi)$ wie $\overline{\varphi}(\xi)$. X^3 hat mit dem Komplex Y^3 der durch f und $\bar{f}$ auf τ_1^2 abgebildeten Tetraeder kein T^3 gemeinsam, und da $\varphi(\eta)$ und $\overline{\varphi}(\eta)$ in Y^3 liegen, ist unsere Aufgabe gelöst, wenn wir gezeigt haben, daß $\varphi(\xi)$ und $\overline{\varphi}(\xi)$ zusammen in X^3 einen X^2 beranden, d. h. daß $\varphi(\xi) \sim \overline{\varphi}(\xi)$ in X^3 ist.

Ein durch f eineindeutig auf τ^2 abgebildetes T^2 wird durch $\bar{f}$ zwar nicht eineindeutig, aber nach 2. mit demselben Grade $+1$ oder -1 auf τ^2 abgebildet wie durch f. Nach § 1, 4. haben daher $\varphi(\xi)$ und $\overline{\varphi}(\xi)$ dieselbe Schnittzahl mit T^2; anders ausgedrückt: der Zyklus $Z^1 = \varphi(\xi) - \overline{\varphi}(\xi)$ hat mit jedem zu X^3 gehörigen T^2 die Schnittzahl 0; wir werden zeigen — und damit wird unsere Behauptung bewiesen sein —, daß jeder in X^3 liegende Zyklus Z^1, der mit jedem zu X^3 gehörigen T^2 die Schnittzahl 0 hat, homolog 0 in X^3 ist.

Ein derartiger Z^1 habe mit einem T^2 einen Schnittpunkt a, der bei einer fest gewählten Orientierung von T^2 positiv zu zählen sei; dann hat Z^1, da seine gesamte Schnittzahl mit T^2 0 ist, noch einen zweiten Schnittpunkt b mit T^2, und dieser ist negativ zu zählen. Sind T_1^3, T_2^3 die beiden Tetraeder, auf denen T^2 liegt, und a_1, a_2, b_1, b_2 Punkte, die nahe bei a bzw. b in T_1^3 bzw. T_2^3 auf Z^1 liegen, und ist $a_1 a a_2$ die positive Richtung von Z^1 beim Durchschreiten von a, so ist $b_2 b b_1$ seine positive Richtung beim Durchschreiten von b. Wir verbinden nun a_1 in T_1^3 geradlinig mit b_1 und a_2 in T_2^3 geradlinig mit b_2 und bezeichnen das geschlossene, gerichtete Polygon $a_1 a a_2 b_2 b b_1 a_1$ mit P^1; es ist homolog 0 in $T_1^3 + T_2^3$, also in X^3; daher ist $Z_1^1 = Z^1 - P^1 \sim Z^1$ in X^3; dieser Zyklus Z_1^1 enthält a und b nicht, er hat also zwei Schnittpunkte mit den T^2 weniger als Z^1, und seine Schnittzahl mit jedem einzelnen T^2 ist 0, ebenso wie sie es

---

[10]) Denn ist $\dot{K}^2 = \varphi(\xi)$, so ist $(K^2 - X^2)^{\cdot} = \overline{\varphi}(\xi)$, und K^2 hat dieselben Schnittpunkte mit $\varphi(\eta)$ wie $K^2 - X^2$.

für Z^1 ist. Ebenso wie wir von Z^1 zu Z_1^1 übergegangen sind, können wir weiter zu einem Z_2^1 übergehen, der $\sim Z_1^1 \sim Z^1$ in X^3 ist, wieder zwei Schnittpunkte weniger und mit jedem einzelnen T^2 die Schnittzahl 0 hat. So gelangen wir schließlich zu einem Z_n^1, der $\sim Z^1$ in X^3 und fremd zu allen T^2 ist; er besteht also aus einer Anzahl zueinander fremder Zyklen, von denen jeder im Inneren eines T^3 liegt, also ~ 0 in T^3 und a fortiori in X^3 ist; mithin ist auch $Z^1 \sim Z_n^1 \sim 0$ in X^3.

4. Wenn im folgenden zwei verschiedene Triangulationen der S^3 vorkommen, so wird immer vorausgesetzt, daß es eine dritte Triangulation gibt, die eine gemeinsame Unterteilung der beiden ist; das gleiche gilt für die S^2. Wir nehmen also an, daß zunächst je eine Triangulation der S^3 und der S^2 gegeben ist und daß alle die und nur die Triangulationen der S^3 bzw. S^2 zugelassen sind, die mit den ursprünglichen eine Unterteilung gemeinsam haben. Wenn mehrere simpliziale Abbildungen der S^3 auf die S^2 betrachtet werden, so sollen die ihnen zugrunde gelegten Triangulationen in dieser Weise miteinander zusammenhängen.

Satz. Für zwei zu einer Abbildungsklasse gehörige simpliziale Abbildungen f_1, f_2 der S^3 auf die S^2 ist $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$.

Beweis. Da f_1 und f_2 zu einer Klasse gehören, gibt es eine sie enthaltende, von dem Parameter r für $1 \leqq r \leqq 2$ stetig abhängende Schar von Abbildungen f_r der S^3 auf die S^2. C^4 sei das topologische Produkt der S^3 mit einer Strecke, deren Koordinate r von 1 bis 2 läuft; wir können uns C^4 im vierdimensionalen Raum durch das von zwei konzentrischen Kugeln S_1^3 und S_2^3 begrenzte Raumstück realisieren, wobei S_1^3 und S_2^3 die Radien 1 und 2 haben. Ist x ein Punkt von S^3 und $1 \leqq r \leqq 2$, so gibt es einen Punkt von C^4, der mit (x, r) zu bezeichnen ist; durch $F((x, r)) = f_r(x)$ wird eine Abbildung F von C^4 auf S^2 erklärt, die auf S_1^3 bzw. S_2^3 mit f_1 bzw. f_2 übereinstimmt.

F' sei eine simpliziale Approximation von F; die ihr zugrunde gelegte Triangulation von C^4 sei folgendermaßen hergestellt: Eine Triangulation der S^3, die eine gemeinsame Unterteilung der f_1 und f_2 zugrunde gelegten Triangulationen ist, sei auf S_1^3 und S_2^3 eingetragen; durch Produktbildung der Simplexe dieser Triangulation mit der r-Strecke entsteht eine Einteilung von C^4 in „Prismen“, die sich zu einer simplizialen Triangulation verfeinern läßt; diese oder eine Unterteilung von ihr sei F' zugrunde gelegt. Dadurch ist man auf S_1^3 und S_2^3 zu Unterteilungen der ursprünglichen Triangulationen übergegangen, und F' stellt auf S_1^3 bzw. S_2^3 simpliziale Approximationen f_1' bzw. f_2' von f_1 bzw. f_2 dar. Nach 3. ist $\gamma(f_1') = \gamma(f_1)$ und $\gamma(f_2') = \gamma(f_2)$; wir haben daher zu zeigen, daß $\gamma(f_1') = \gamma(f_2')$ ist.

Die Originalkomplexe eines Punktes ξ der S^2 bei den Abbildungen F', f_1' bzw. f_2' haben wir nach den Vorschriften des § 1 mit $\varphi_{C^4}(\xi)$, $\varphi_{S_1^3}(\xi)$ bzw. $\varphi_{S_2^3}(\xi)$ zu bezeichnen. Da $\dot{C}^4 = S_2^3 - S_1^3$ ist, ist nach § 1, Gl. (6) und (3) $\dot{\varphi}_{C^4}(\xi) = \varphi_{S_2^3}(\xi) - \varphi_{S_1^3}(\xi)$. Daher ist, wenn K_1^2, K_2^2 Komplexe in S_1^3 bzw. S_2^3 mit $\dot{K}_1^2 = \varphi_{S_1^3}(\xi)$, $\dot{K}_2^2 = \varphi_{S_2^3}(\xi)$ sind, $K_2^2 - \varphi_{C^4}(\xi) - K_1^2 = Z^2$ ein Zyklus. Z^2 ist, wie jeder Zyklus in C^4, einem Zyklus in S_1^3 homolog, nämlich der „Projektion“ Z_1^2 von Z^2 auf S_1^3, die entsteht, indem man jeden Punkt (x, r) von Z^2 durch den Punkt $(x, 1)$ ersetzt. Aus $Z^2 \sim Z_1^2$ folgt $F'(Z^2) \sim F'(Z_1^2)$, d. h. $F'(Z^2) = F'(Z_1^2)$ in S^2. Da $Z_1^2 \sim 0$ in S_1^3 ist, ist $F'(Z_1^2) = f_1'(Z_1^2) \sim 0$, d. h. $= 0$ in S^2; mithin ist auch $F'(Z^2) = 0$, also $F'(K_2^2) - F'(\varphi_{C^4}(\xi)) - F'(K_1^2) = f_2'(K_2^2) - f_1'(K_1^2) - F'(\varphi_{C^4}(\xi)) = 0$. Nun wird aber $\varphi_{C^4}(\xi)$ durch F' auf den Punkt ξ abgebildet, es ist also $F'(\varphi_{C^4}(\xi)) = 0$, mithin $f_1'(K_1^2) = f_2'(K_2^2)$, d. h. $\gamma(f_1') = \gamma(f_2')$.

5. Jede Klasse von Abbildungen der S^3 auf die S^2 enthält nach 1. simpliziale Abbildungen, denen Triangulationen der im Sinne des ersten Absatzes von 4. ausgezeichneten Triangulationssysteme zugrunde liegen. Da nach 4. zu allen simplizialen Abbildungen $\bar{f}$ der Klasse dieselbe Zahl $\gamma(\bar{f})$ gehört, ist γ eine Konstante der Klasse. Damit ist die in der Einleitung ausgesprochene Behauptung IIa bewiesen.

Die Zahl γ muß vorläufig als abhängig von den zugrunde gelegten Triangulationssystemen gelten; dieser Umstand stört aber den Beweis des Satzes II, der ja unser Ziel ist, nicht, und überdies wird sich im nächsten Paragraphen die topologische Invarianz von γ, d. h. die Unabhängigkeit von den Triangulationssystemen, herausstellen.

§ 4.

Eigenschaften von γ.

1. Beweis des Produktsatzes IIb (s. Einleitung). Es gelten die in der Einleitung benutzten Bezeichnungen. Wir dürfen f und g als simplizial annehmen, da c und γ Konstanten der Abbildungsklassen sind und jede Klasse simpliziale Abbildungen enthält. $\varphi(\xi)$ sei der Originalzyklus eines Punktes ξ bei der Abbildung f, $\psi(\xi)$ sein Originalzyklus bei der Abbildung fg. Werden auf ein T^3 von S^3, welches eine Strecke von $\varphi(\xi)$ enthält, p Tetraeder von S_1^3 im positiven, n Tetraeder im negativen Sinne abgebildet, so ist $p - n = c$; auf die in T^3 liegende Strecke von $\varphi(\xi)$ werden dann p bzw. n Strecken von $\psi(\xi)$ im positiven bzw. negativen Sinne abgebildet; umgekehrt ist das Bild jeder Strecke von $\psi(\xi)$ eine — eventuell in einen Punkt entartende — Strecke von $\varphi(\xi)$. Mithin ist

$g(\psi(\xi)) = c \cdot \varphi(\xi)$. Ist $\dot{L}^2 = \psi(\xi)$, $\dot{K}^2 = \varphi(\xi)$, so ist demnach $(g(L^2))^{\cdot} = g(\dot{L}^2) = c\dot{K}^2$, mithin ist $g(L^2) - cK^2$ ein Zyklus in S^3; da das durch f gelieferte Bild eines solchen, wie wir schon mehrere Male sahen, 0 ist, ist $fg(L^2) = c \cdot f(K^2)$, d. h. es ist $\gamma(fg) = c \cdot \gamma(f)$.

2. Beweis des Produktsatzes IIb′. Wir benutzen wieder dieselben Bezeichnungen wie in der Einleitung, und wir nehmen wieder f und h als simplizial an. Die Originalzyklen bei f bzw. hf werden mit φ bzw. ψ bezeichnet. Die Originalpunkte des Punktes ζ von S_1^2 bei h seien die Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ von S^2, und zwar mögen die Dreiecke, welche die ξ_i enthalten, im positiven, die Dreiecke, welche die η_j enthalten, im negativen Sinne auf das ζ enthaltende Dreieck abgebildet werden. Dann ist $\psi(\zeta) = \sum\limits_i \varphi(\xi_i) - \sum\limits_j \varphi(\eta_j)$; ist $\dot{K}_i^2 = \varphi(\xi_i)$, $\dot{L}_j^2 = \varphi(\eta_j)$, so ist demnach $\left(\sum\limits_i K_i^2 - \sum\limits_j L_j^2\right)^{\cdot} = \psi(\zeta)$ und daher $hf\left(\sum\limits_i K_i^2 - \sum\limits_j L_j^2\right) = \gamma(hf) \cdot S_1^2$. Nun ist aber

$$f(K_i^2) = f(L_j^2) = \gamma(f) \cdot S^2,$$

also

$$f\left(\sum_i K_i^2 - \sum_j L_j^2\right) = (p-n) \cdot \gamma(f) \cdot S^2 = c \cdot \gamma(f) \cdot S^2,$$

und ferner $h(S^2) = c \cdot S_1^2$, also $hf\left(\sum\limits_i K_i^2 - \sum\limits_j L_j^2\right) = c^2 \cdot \gamma(f) \cdot S_1^2$; folglich ist $\gamma(hf) = c^2 \cdot \gamma(f)$.

3. Betrachten wir auf der S^3 neben dem bisher zugrunde gelegten System von Triangulationen ein davon ganz unabhängiges Triangulationssystem, so können wir uns S^3 als in zwei Exemplaren S_1^3 und S_2^3 vorliegend denken, von denen S_1^3 mit dem ersten, S_2^3 mit dem zweiten Triangulationssystem versehen ist; die Koinzidenz auf S^3 vermittelt eine Abbildung g von S_1^3 auf S_2^3, die, da sie eineindeutig ist, unter Zugrundelegung der auf S_1^3 und S_2^3 ausgezeichneten Triangulationen den Grad $+1$ oder -1 hat. Ist f eine Abbildung von S_2^3 auf S^2, so ist fg dieselbe Abbildung von S^3; nur ist, wenn sie mit f bezeichnet wird, das erste, wenn sie mit fg bezeichnet wird, das zweite Triangulationssystem ausgezeichnet, so daß $\gamma(f)$ und $\gamma(fg)$ die Werte von γ sind, die sich für die betrachtete Abbildung der S^3 auf die S^2 unter Zugrundelegung der verschiedenen Triangulationen von S^3 ergeben. Nach IIb ist, da g den Grad ± 1 hat, $\gamma(fg) = \pm\gamma(f)$; das bedeutet, daß $\gamma(f)$, vom Vorzeichen abgesehen, unabhängig von der zugrunde gelegten Triangulation von S^3 ist; das Vorzeichen hängt von der Orientierung von S^3 ab [11]).

[11]) Dieser Beweis ist dem Beweis der topologischen Invarianz des Abbildungsgrades analog: L. E. J. Brouwer, Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911), S. 320–327.

Analog verhält es sich auf Grund von IIb′ bezüglich der Triangulationen von S^2; nur ist hier sogar das Vorzeichen von γ unabhängig von Triangulationen und Orientierung, da c in der Aussage des Satzes IIb′ im Quadrat auftritt.

Somit sehen wir: der Betrag von $\gamma(f)$ ist topologisch invariant, d. h. unabhängig von den zugrunde gelegten Triangulationen der S^3 und S^2; das Vorzeichen von γ ändert sich bei Umkehrung der Orientierung der S^3, ist aber unabhängig von der Orientierung der S^2.

4. Schließlich sei noch hervorgehoben, daß für eine topologisch unwesentliche Abbildung stets $\gamma = 0$ ist; denn gehört ein Punkt ξ der S^2 bei einer Abbildung nicht zur Bildmenge, so ist sein Originalzyklus $\varphi(\xi)$ leer, und jeder andere Zyklus hat mit ihm die Verschlingungszahl 0.

§ 5.

Eine Abbildung der S^3 auf die S^2 mit $\gamma = 1$.

Der euklidische R^4 mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sei auf den euklidischen R^3 mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{gathered} \xi_1 = 2(x_1 x_3 + x_2 x_4), \qquad \xi_2 = 2(x_2 x_3 - x_1 x_4), \\ \xi_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2. \end{gathered} \tag{1}$$

Dann ist

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4(x_1^2 + x_2^2)\cdot(x_3^2 + x_4^2),$$

also

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2; \tag{2}$$

die dreidimensionale Kugel mit dem Radius r um den Nullpunkt R^4 als Mittelpunkt wird somit auf die zweidimensionale Kugel mit dem Radius r^2 um den Nullpunkt des R^3 als Mittelpunkt abgebildet; insbesondere ist die Einheitskugel S^2 des R^3 das Bild der Einheitskugel S^3 des R^4. Diese Abbildung f der S^3 auf die S^2 wollen wir betrachten[12]).

f läßt sich auch folgendermaßen beschreiben: Führt man auf S^2 in der üblichen Weise eine komplexe Variable z ein, indem man die komplexen Zahlen $\xi_1 + i\xi_2$ der Ebene $\xi_3 = 0$ stereographisch von dem Nordpol $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ der Kugel aus auf diese projiziert, so wird dem Punkt mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Zahl

$$z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3} \tag{3}$$

---

[12]) Diese Betrachtung, und somit der Beweis von IIc, ist die einzige Stelle in dieser Arbeit, an der benutzt wird, daß S^2 die Kugel und nicht eine beliebige orientierbare Fläche ist.

zugeordnet, wobei für den Nordpol selbst, für den der Ausdruck (3) unbestimmt wird, $z = \infty$ zu setzen ist. Ersetzt man in (3) ξ_1, ξ_2, ξ_3 aus (1) und berücksichtigt, daß $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ ist, so ergibt sich

$$z = \frac{x_1 + i x_2}{x_3 + i x_4}, \tag{4}$$

und hier spielt der Wert $z = \infty$ keine Ausnahmerolle, da für die Punkte mit $x_3 = x_4 = 0$ auf der S^3 nicht auch $x_1 = x_2 = 0$ sein kann und da diesen Punkten nach (1) der Nordpol $0, 0, 1$ der S^2 entspricht. Mithin ist f durch (4) gegeben, wenn man die S^2 als Riemannsche Zahlkugel auffaßt.

Die Originalmenge des Punktes $0, 0, 1$ besteht, wie wir soeben sahen, aus denjenigen Punkten der S^3, für die $x_3 = x_4 = 0$ ist; für jeden anderen Punkt ξ_1, ξ_2, ξ_3 der S^2 erhält man die Originalmenge durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (3) und (4); es ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned} (1-\xi_3)\cdot x_1 - \xi_1\cdot x_3 + \xi_2\cdot x_4 &= 0, \\ (1-\xi_3)\cdot x_2 - \xi_2\cdot x_3 - \xi_1\cdot x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

In jedem Falle ist die Originalmenge eines Punktes der S^2 der Schnitt der S^3 mit dem Schnitt zweier nicht zusammenfallender dreidimensionaler Ebenen durch den Mittelpunkt, also der Schnitt der S^3 mit einer zweidimensionalen Ebene durch den Mittelpunkt, d. h. ein Großkreis [13]).

Wir werden nun zeigen, daß für eine Abbildung f der S^3 auf die S^2, bei welcher die Originalmenge $\Phi(\xi)$ jedes Punktes ξ der S^2 ein Großkreis der S^3 ist, stets $\gamma(f) = \pm 1$ ist; das Vorzeichen hängt natürlich von der Orientierung der S^3 ab.

Eine dreidimensionale und eine zweidimensionale Ebene durch den Mittelpunkt der S^3 schneiden sich, wenn die letztere nicht ganz in der ersteren liegt, in einer Geraden durch den Mittelpunkt; dies bedeutet, wenn man zu den Schnitten mit der S^3 übergeht: eine zweidimensionale Großkugel und ein Großkreis schneiden sich, wenn der Kreis nicht auf der Kugel verläuft, in zwei zueinander diametralen Punkten; folglich wird die Hälfte H einer Großkugel von jedem Großkreis, der fremd zu dem Rand von H ist und daher nicht auf der Großkugel verläuft, stets in genau einem Punkte geschnitten; da es zu jedem Großkreis (unendlich viele) von ihm berandete Hälften von Großkugeln gibt, folgt hieraus: je zwei zueinander fremde Großkreise der S^3 sind miteinander verschlungen, und zwar ist ihre Verschlingungszahl ± 1.

---

[13]) Das System dieser Großkreise, die die Originalmengen der Punkte von S^2 bilden, ist eine Cliffordsche Parallelenkongruenz; hierzu vgl. man F. Klein, Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie (Berlin 1928), S. 234; daß dort anstatt der S^3 der elliptische Raum betrachtet wird, macht keinen wesentlichen Unterschied.

Hiernach liegt bereits die Annahme nahe, daß für eine Abbildung f der S^3 auf die S^2, bei der die Originalmenge $\Phi(\xi)$ jedes Punktes von S^2 ein Großkreis ist, $\gamma(f) = \pm 1$ ist. Um die Richtigkeit dieser Annahme zu bestätigen, haben wir aber infolge unserer Definition von γ auf simpliziale Approximationen f' von f zurückzugehen und zu zeigen, daß auch die Originalzyklen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ bei einer solchen Abbildung f' die Verschlingungszahl ± 1 haben. Nun ist klar, daß mit zunehmender Güte der Approximation die Zyklen $\varphi(\xi)$ und $\varphi(\eta)$ gegen $\Phi(\xi)$ bzw. $\Phi(\eta)$ in dem Sinne konvergieren, daß sie schließlich in beliebig vorgegebenen Umgebungen U_ξ, U_η der Kreise $\Phi(\xi)$ bzw. $\Phi(\eta)$ liegen. Wenn wir noch gezeigt haben, daß bei hinreichender Güte der Approximation $\varphi(\xi) \sim \Phi(\xi)$ in U_ξ, $\varphi(\eta) \sim \Phi(\eta)$ in U_η ist, so sind wir fertig; denn dann hat, wenn nur U_ξ und U_η fremd zueinander sind, $\varphi(\xi)$ mit $\varphi(\eta)$ dieselbe Verschlingungszahl wie $\Phi(\xi)$ mit $\Phi(\eta)$ (vgl. den ersten Absatz des Beweises in § 3, 3). Da ξ und η ganz symmetrisch auftreten, genügt es, einen der beiden Punkte zu betrachten; unsere Behauptung ist also: Ist f' eine hinreichend gute simpliziale Approximation von f, so ist $\varphi(\xi) \sim \Phi(\xi)$ in U_ξ, wobei U_ξ eine willkürlich vorgeschriebene Umgebung von $\Phi(\xi)$ ist.

ξ sei ein fester Punkt von S^2; alle im folgenden vorkommenden simplizialen Abbildungen seien so gewählt, daß er innerer Punkt eines Dreiecks der S^2, daß $\varphi(\xi)$ also für jede dieser Approximationen erklärt ist. ζ sei ein von ξ verschiedener Punkt der S^2, H eine von $\Phi(\zeta)$ berandete halbe Großkugel; die Triangulationen der S^3, die den Approximationen zugrunde gelegt werden, sollen alle so beschaffen sein, daß H aus Dreiecken der Triangulation besteht. H wird, wie wir oben sahen, von jedem $\Phi(\eta)$ mit $\eta \neq \zeta$ in genau einem Punkte geschnitten; folglich ist die Abbildung $f(H)$ in allen von ζ verschiedenen Punkten der S^2, insbesondere also in der Umgebung von ξ, eineindeutig und hat daher dort den Grad ± 1. Die Approximation f' von f sei so gut, daß auch die Abbildung $f'(H)$ im Punkte ξ den Grad ± 1 hat; dann hat nach § 1, 4. H mit $\varphi(\xi)$ die Schnittzahl ± 1. Wir konstruieren nun eine schlauchförmige Umgebung U'_ξ des Kreises $\Phi(\xi)$, die ganz in der gegebenen Umgebung U_ξ verläuft und mit H eine von einem Kreis berandete Kugelkappe K, im übrigen aber keinen Punkt gemeinsam hat; diese Konstruktion ist möglich, da $\Phi(\xi)$ und H einen einzigen Punkt x gemeinsam haben. Wir verbessern die Güte der Approximation, falls das nötig ist, weiter so, daß $\varphi(\xi)$ ganz im Inneren von U'_ξ liegt; dann liegen alle Schnittpunkte von $\varphi(\xi)$ und H auf K, die Schnittzahl von $\varphi(\xi)$ und K ist also ± 1. Ebenso haben $\Phi(\xi)$ und K die Schnittzahl ± 1, da diese beiden Gebilde nur den einen, einfach zu zählenden Schnitt x haben. Bei geeigneter Orientierung von $\Phi(\xi)$ hat daher der im Inneren des Schlauches verlaufende Zyklus $Z^1 = \Phi(\xi) - \varphi(\xi)$

mit K die Schnittzahl 0. Daraus folgt, daß $Z^1 \sim 0$ in dem Schlauch U'_ξ ist; denn analog dem in § 3, 3. angewandten Verfahren kann man einen Zyklus Z^1_n konstruieren, der $\sim Z^1$ in U'_ξ ist und mit K keinen Punkt gemeinsam hat; ein solcher Z^1_n läßt sich im Inneren des Schlauches auf einen Punkt zusammenziehen, ist dort also ~ 0. Dann ist auch $Z^1 \sim 0$ in U'_ξ, also erst recht in U_ξ; mithin ist $\varphi(\xi) \sim \Phi(\xi)$ in U_ξ, w. z. b. w.

Für die Abbildung f der S^3 auf die S^2, die durch (1) oder durch (4) gegeben ist, ist also in der Tat $\gamma(f)=1$; hieraus und aus § 4, 4. folgt, daß f topologisch wesentlich ist, womit der Satz Ia bewiesen ist. Insbesondere aber haben wir jetzt unser eigentliches Ziel, nämlich den Beweis des Satzes II, aus dem ja auch der Satz I folgt, erreicht: denn das Bestehen der Eigenschaft IIa wurde im § 3, das der Eigenschaft IIb in § 4, 1. und das von IIc in diesem Paragraphen gezeigt.

§ 6.

Eine Kennzeichnung der algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer M^3.

In der im § 1 vorgenommenen Untersuchung der Umkehrung einer simplizialen Abbildung eines C^3 wurde niemals vorausgesetzt, daß C^3 eine Sphäre ist; vielmehr durfte er in Abschnitt 2 ganz beliebig, in Abschnitt 4 durfte er eine beliebige orientierbare geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit M^3 sein. Insbesondere sind also für eine simpliziale Abbildung f einer M^3 auf die S^3 die Originalzyklen $\varphi(\xi)$, $\varphi(\eta), \ldots$ von beliebigen, im Inneren von Dreiecken von S^2 liegenden Punkten $\xi, \eta, \ldots$ wohldefiniert. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis der folgenden beiden Sätze:

A. *Es ist $\varphi(\xi) \sim \varphi(\eta)$ bei beliebigen ξ und η; es ist also durch f eine eindimensionale Homologieklasse φ in M^3 ausgezeichnet.*

B. *Es ist dann und nur dann $\varphi \sim 0$, wenn f algebraisch unwesentlich ist.*

Beide Sätze beruhen im wesentlichen auf dem

Hilfssatz I. Ein ν-dimensionaler Zyklus Z^ν in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n ist dann und nur dann ~ 0, wenn für jedes $m > 1$ und jeden $(n-\nu)$-dimensionalen Zyklus $Z^{n-\nu}_m$ modulo m die Schnittzahl $(Z^\nu \cdot Z^{n-\nu}_m) \equiv 0 \mod m$ ist.

Beim Beweis dieses Hilfssatzes werden wir die folgende algebraische Tatsache benutzen:

Hilfssatz II. Gegeben ist eine Matrix u_{ij} und eine Zahlenreihe v_j; die v_j sind dann und nur dann eine lineare Verbindung der u_{ij}, d. h. das Gleichungssystem

(1) $$v_j = \sum_i x_i u_{ij}$$

besitzt dann und nur dann Lösungen x_i, wenn folgende Beziehung zwischen den u_{ij} und v_j besteht: ist m irgendeine Zahl >1 und sind die y_j irgendwelche Lösungen des Kongruenzensystems

$$\sum_i u_{ij} y_j \equiv 0 \pmod{m}, \tag{2}$$

so ist auch stets

$$\sum v_j y_j \equiv 0 \pmod{m}. \tag{3}$$

(Dabei sind natürlich alle vorkommenden Größen u, v, x, y ganze Zahlen.)

Einen Beweis des Hilfssatzes II findet man in der unter [5]) zitierten Arbeit, wo er in ähnlichem Zusammenhang auftritt wie hier.

Beweis des Hilfssatzes I. Mit T bzw. $\overline{T}$ werden die Zellen zweier dualer Zelleinteilungen der M^n bezeichnet. Lauten die Berandungsrelationen für die $T^{\nu+1}$

$$\dot{T}_i^{\nu+1} = \sum_j u_{ij} T_j^{\nu}, \tag{4}$$

so lauten sie für die $\overline{T}^{n-\nu}$

$$\dot{\overline{T}}_j^{n-\nu} = \sum_i u_{ij} \overline{T}_i^{n-\nu-1}. \tag{5}$$

Den Zyklus Z^ν dürfen wir als aus Zellen T_j^ν bestehend annehmen:

$$Z^\nu = \sum_j v_j T_j^\nu. \tag{6}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $Z^\nu \sim 0$ ist, ist die Existenz eines $C^{\nu+1} = \sum_i x_i T_i^{\nu+1}$ mit $\dot{C}^{\nu+1} = \sum_j x_i \dot{T}_i^{\nu+1} = \sum_{i,j} x_i u_{ij} T_j^\nu = Z^\nu = \sum_j v_j T_j^\nu$, also die Lösbarkeit des Systems (1), und somit nach Hilfssatz II die Tatsache, daß aus jedem Kongruenzensystem (2) die Kongruenz (3) folgt.

Nun hat ein Komplex $\sum_j y_j \overline{T}_j^{n-\nu}$ auf Grund von (5) den Rand $\sum_{i,j} u_{ij} y_j \overline{T}_i^{n-\nu-1}$; (2) bedeutet also, daß er ein Zyklus modulo m ist. Folglich ist die Tatsache, daß der durch (6) gegebene Z^ν homolog 0 ist, gleichbedeutend damit, daß seine Koeffizienten v_j und die Koeffizienten y_j eines beliebigen, aus Zellen $\overline{T}^{n-\nu}$ gebildeten Zyklus modulo m

$$\overline{Z}_m^{n-\nu} = \sum_j y_j \overline{T}_j^{n-\nu} \tag{7}$$

die Kongruenz (3) erfüllen. Die linke Seite von (3) ist aber die Schnittzahl von Z^ν und $\overline{Z}^{n-\nu}$; denn da die Schnittzahl $T_j^\nu \cdot \overline{T}_k^{n-\nu}$ den Wert 0 oder 1 hat, je nachdem $j \neq k$ oder $j = k$ ist, ist

$$Z^\nu \cdot \overline{Z}^{n-\nu} = \sum_j v_j T_j^\nu \cdot \sum_j y_j \overline{T}_j^{n-\nu} = \sum_{j,k} v_j y_k T_j^\nu \cdot \overline{T}_k^{n-\nu} = \sum_j v_j y_j.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Beweis des Satzes A. Ist Z_m^2 ein Zyklus mod m in M^3, so ist der Grad mod m der Abbildung $f(Z_m^2)$ auf S^2 konstant, er hat also in zwei beliebigen Punkten ξ, η gleichen Wert. Nach § 1, 4. hat daher Z_m^2 mit $\varphi(\xi)$ dieselbe Schnittzahl mod m wie mit $\varphi(\eta)$. Der eindimensionale Zyklus $\varphi(\xi)-\varphi(\eta)$ hat also mit jedem Z_m^2 die Schnittzahl 0 mod m bei beliebigem m, er ist somit nach Hilfssatz I ~ 0.

Beweis des Satzes B. Daß f algebraisch unwesentlich ist, heißt, daß für jeden Z_m^2 der Grad mod m der Abbildung $f(Z_m^2)$ gleich 0 ist. Nach § 1, 4. bedeutet dies, daß, wenn ξ irgendein Punkt von S^2 ist, die Schnittzahl von $\varphi(\xi)$ und Z_m^2 mod m verschwindet. Nach Hilfssatz I ist das dann und nur dann der Fall, wenn $\varphi(\xi)\sim 0$ ist.

§ 7.

Die Abbildungen einer M^3 auf die S^2.

Die Gültigkeit des soeben bewiesenen Satzes B ermöglicht die Übertragung der in den §§ 2 bis 4 für die Abbildungen der S^3 auf die S^2 entwickelten Theorie der Größe γ auf die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit M^3 auf die S^2. In der Tat überzeugt man sich, wenn man die §§ 2 bis 4 durchsieht, davon, daß außer Eigenschaften, welche jeder Abbildung einer M^3 auf die S^2 zukommen, nur die beiden folgenden Eigenschaften B′ und B″ benutzt werden, die dort darauf beruhen, daß es sich um Abbildungen der Sphäre handelt, die aber gerade den algebraisch unwesentlichen Abbildungen beliebiger Mannigfaltigkeiten eigentümlich sind:

$$(\mathrm{B}')\quad \varphi(\xi)\sim 0; \qquad (\mathrm{B}'')\quad f(Z^2)=0,$$

d. h. die Abbildung f jedes zweidimensionalen Zyklus aus M^3 hat den Grad 0.

Es gehört also zu jeder Klasse algebraisch unwesentlicher Abbildungen einer M^3 auf die S^2 eine Zahl γ, für die unter anderem auch der Produktsatz IIb in folgender Form gilt: „Ist g eine Abbildung einer M_1^3 auf eine M^3 mit dem Grade c, f eine algebraisch unwesentliche Abbildung der M^3 auf die S^2, so ist auch fg algebraisch unwesentlich, und es ist $\gamma(fg)=\gamma(f)$.“ Dabei ist unmittelbar klar, daß aus der algebraischen Unwesentlichkeit von f die von fg folgt; denn ist Z_m^2 ein Zyklus mod m in M_1^3, so ist $\bar{Z}_m^2=g(Z_m^2)$ ein Zyklus mod m in M^3, folglich ist

$$f(\bar{Z}_m^2)=fg(Z_m^2)\equiv 0 \mod m$$

in S^3, d. h. fg ist algebraisch unwesentlich.

Aus diesem Produktsatz, aus der Existenz einer Abbildung f der S^3 auf die S^2 mit $\gamma(f)=1$, die als Abbildung der S^3 a fortiori algebraisch unwesentlich ist, und aus der Tatsache, daß man jede M^3 mit beliebigem Grade c auf die S^3 abbilden kann, ergibt sich Satz III.

Zum Schluß sei nur noch bezüglich der Abbildungen der *nicht-orientierbaren* Mannigfaltigkeiten auf die S^2 bemerkt, daß alles Vorstehende unverändert seine Gültigkeit behält, wenn man sich darauf beschränkt, die Größe γ mod 2 zu erklären. Infolgedessen gilt

Satz III′. *Die algebraisch unwesentlichen Abbildungen einer beliebigen nicht-orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit auf die S^2 bilden wenigstens zwei Klassen; es gibt unter diesen Abbildungen also immer topologisch wesentliche.*

Anhang.

Über die topologische und die algebraische Wesentlichkeit von Abbildungen.

Wir knüpfen unmittelbar an den Wortlaut der Einleitung an.

1. Beweis des Satzes V. Es ist trivial, daß die Abbildung f topologisch wesentlich ist, wenn sie algebraisch wesentlich ist. Sie sei algebraisch unwesentlich. Die Winkelkoordinate w auf S^1 ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt; für einen festen Punkt x_0 von A zeichnen wir einen der zu $f(x_0)$ gehörigen Werte willkürlich aus und nennen ihn $w = F(x_0)$. Diese Funktion F setzen wir auf den von x_0 ausgehenden Wegen stetig so fort, daß immer $F(x)$ einer der Werte von w im Punkte $f(x)$ ist. Dabei gelangt man auf verschiedenen Wegen W_1, W_2, die denselben Endpunkt y haben, immer zu demselben Wert $F(y)$; denn käme man zu verschiedenen Werten $F_1(y)$, $F_2(y)$, so wäre

$$F_1(y) - F_2(y) = k \cdot 2\pi, \qquad k \neq 0;$$

bei Durchlaufung des von y nach y zurückführenden geschlossenen Weges $Z^1 = W_2^{-1} W_1$ würde sich die Winkelkoordinate des Bildpunktes um $k \cdot 2\pi$ ändern, d. h. der Zyklus Z^1 würde mit dem Grade $k \neq 0$ auf S^1 abgebildet, f wäre algebraisch wesentlich, entgegen der Voraussetzung. Mithin läßt sich F in der Tat eindeutig und stetig auf A erklären. Ist nun t ein von 1 bis 0 laufender Parameter, so wird durch $w = t\,F(x)$ eine Schar von Abbildungen f_t von A auf S^1 erklärt, durch welche $f = f_1$ stetig in die Abbildung f_0 auf einen einzigen Punkt von S^1 übergeht. Folglich ist f topologisch unwesentlich.

2. Beweis des Satzes IVa. Es ist trivial, daß sich A^a nicht (algebraisch) wesentlich abbilden läßt, wenn in A^a kein a-dimensionaler Zyklus modulo einer Zahl $m > 1$ vorhanden ist. Es sei Z_m^a ein solcher Zyklus mod m in A^a, T^a ein a-dimensionales Simplex von Z_m^a, das in Z_m^a mit einem Koeffizienten c vorkommt, der $\not\equiv 0$ mod m ist. Man bilde den Rand von T^a und alle nicht zu T^a gehörigen Punkte von A^a auf einen

festen Punkt ξ von S^a, das Innere von T^a eineindeutig auf $S^a - \xi$ ab. Diese Abbildung $f(A^a)$ bewirkt eine Abbildung $f(Z^a_m)$, deren Grad mod m $c \not\equiv 0$ ist; f ist daher (algebraisch) wesentlich.

3. Dem Beweis des Satzes VI schicken wir einige Bemerkungen über die im Satz VI ausgesprochene Bedingung voraus. Wir wollen sagen, daß A^a die „Eigenschaft E^b“ hat, wenn entweder $p^b > 0$ oder $(b-1)$-te Torsion vorhanden (oder wenn beides der Fall) ist. $Z^b \approx 0$ soll, wie üblich, bedeuten, daß der Zyklus Z^b ein „Randteiler“ ist, d. h. daß es eine Zahl $c > 0$ gibt, so daß $c\,Z^b$ ein Rand, also $c\,Z^b \sim 0$ ist; analog soll „$Z^b_m \approx 0$ mod m“ bedeuten, daß der Zyklus mod m Z^b_m einem Randteiler kongruent mod m ist, d. h. daß es einen Komplex K^b gibt, so daß $Z^b_m + m\,K^b \approx 0$ ist.

Wir behaupten nun: A^a hat dann und nur dann die Eigenschaft E^b, wenn es ein $m > 1$ und in A^a einen Zyklus mod m Z^b_m gibt, der $\not\approx 0$ mod m ist.

Beweis. I. Es gebe in A^a einen Z^b_m, der $\not\approx 0$ mod m ist; es ist $\dot{Z}^b_m = m\,K^{b-1}$; $m\,K^{b-1}$ ist als Rand ein Zyklus, also ist auch $K^{b-1} = Z^{b-1}$ Zyklus, und es ist $m\,Z^{b-1} \sim 0$. Ist $Z^{b-1} \nsim 0$, so ist Z^{b-1} Randteiler, ohne Rand zu sein, es ist also $(b-1)$-dimensionale Torsion vorhanden; ist $Z^{b-1} \sim 0$, so gibt es einen Komplex C^b mit $\dot{C}^b = Z^{b-1}$; dann ist $(Z^b_m - m\,C^b)^{\cdot} = 0$, also $Z^b_m - m\,C^b = Z^b$ ein Zyklus; da $Z^b_m \not\approx 0$ mod m ist, ist $Z^b \not\approx 0$, folglich ist $p^b > 0$.

II. Wenn $p^b > 0$ ist, so nehmen wir einen Zyklus Z^b, der in einer Homologiebasis enthalten ist, der also die Eigenschaft hat, daß sich jeder Zyklus $\bar{Z}^b$ auf eine und nur eine Weise in der Form $\bar{Z}^b \approx c\,Z^b + \sum\limits_i c_i Z^b_i$ darstellen läßt, wobei die Z^b_i die übrigen Basiselemente sind. Z^b ist zugleich für jedes m ein Zyklus mod m; wir behaupten, daß er $\not\approx 0$ mod m für jedes m ist. Andernfalls wäre nämlich $Z^b = \tilde{Z}^b + m\,K^b$, wobei $\tilde{Z}^b$ Zyklus und ≈ 0 wäre; es wäre also auch $m\,K^b$ und mithin $K^b = \bar{Z}^b$ Zyklus und $Z^b \approx m\,\bar{Z}^b$; da $\bar{Z}^b \approx c\,Z^b + \ldots$ ist, wäre $m\,c = 1$, was wegen $m > 1$ unmöglich ist; folglich ist $Z^b \not\approx 0$ mod m bei beliebigem m. — Wenn $(b-1)$-te Torsion vorhanden ist, so gibt es einen $(b-1)$-dimensionalen Zyklus, der Randteiler, aber nicht Rand ist: $Z^{b-1} \nsim 0$, $m\,Z^{b-1} = \dot{C}^b$, $m > 1$; dann ist $C^b = Z^b_m$ ein Zyklus mod m; wir behaupten, daß er $\not\approx 0$ mod m ist. Andernfalls wäre nämlich

$$Z^b_m = Z^b + m\,K^b, \quad (Z^b \approx 0), \quad \dot{Z}^b_m = m\,Z^{b-1} = m\,\dot{K}^b, \quad Z^{b-1} = \dot{K}^b,$$

also $Z^{b-1} \sim 0$.

Damit ist gezeigt, daß die Eigenschaft E^b mit der Existenz eines Z^b_m, der $\not\approx$ mod m ist, zusammenfällt. Ist $b = a$, so ist $Z^b_m \approx 0$ mod m gleichbedeutend mit $Z^b_m = 0$; folglich ist die Eigenschaft E^a mit der Existenz eines Z_m^a, also mit $p_m^a > 0$ für irgendein m identisch. Ist $b = 1$, so ist E^1, da es 0-dimensionale Torsion nicht gibt, identisch mit der Bedingung $p^1 > 0$.

4. Beweis des Satzes VI. Ist f eine algebraisch wesentliche Abbildung von A^a auf S^b, so gibt es ein m und einen Z_m^b in A^a, dessen Bild $f(Z_m^b) \not\equiv 0 \bmod m$ ist. Dieser Z_m^b kann nicht $\approx 0 \bmod m$ sein, weil sonst auch sein Bild $\approx 0 \bmod m$ in S^b, also $\equiv 0 \bmod m$ wäre. A^a hat daher nach 3. die Eigenschaft E^b.

5. Beweis des Satzes VII. Der in dem Wortlaut des Satzes erwähnte Fall $b = a$ ist auf Grund der Schlußbemerkung von 3. in dem Satz IVa enthalten, also bereits erledigt; ebenso ist der ebenfalls erwähnte Fall $b = 1$ auf Grund der Schlußbemerkung von 3. in Va enthalten und wird mit diesem erledigt werden. Jetzt beschäftigt uns also nur der Fall $b = a - 1$; wir setzen daher voraus, daß A^a die Eigenschaft E^{a-1} besitzt.

$\mathfrak{L}$ sei die Gruppe aller Linearformen in den $(a-1)$-dimensionalen Simplexen T_j^{a-1} von A^a, also die Gruppe aller $(a-1)$-dimensionalen Teilkomplexe von A^a in der fest gegebenen Triangulation; $\mathfrak{R}$ sei diejenige Untergruppe von $\mathfrak{L}$, die von allen $(a-1)$-dimensionalen Rändern und Randteilern gebildet wird; da $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft hat, daß, sobald ein Vielfaches eines Elements von $\mathfrak{L}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, stets auch das Element selbst zu $\mathfrak{R}$ gehört, besitzt die Faktorgruppe $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}$ nur Elemente unendlicher Ordnung, und da sie eine von endlich vielen ihrer Elemente erzeugte Abelsche Gruppe ist (weil $\mathfrak{L}$ diese Eigenschaft hat), besitzt sie eine Basis $F_1, F_2, \ldots, F_p$ der Art, daß sich jedes Element von $\mathfrak{F}$ auf eine und nur eine Weise als lineare Verbindung der F_ν darstellen läßt.

Infolge der Eigenschaft E^{a-1} gibt es ein $m > 1$ und einen Zyklus $\bmod m$ Z_m^{a-1}, der $\not\approx 0 \bmod m$ ist; die Restklasse modulo $\mathfrak{R}$, der er angehört, werde durch das Element $\sum c_\nu F_\nu$ von $\mathfrak{F}$ repräsentiert; diese Restklasse enthält nicht das m-fache eines Elements von $\mathfrak{L}$, weil sonst $Z_m^{a-1} \approx 0 \bmod m$ wäre; folglich ist das Element $\sum c_\nu F_\nu$ nicht das m-fache eines anderen Elements von $\mathfrak{F}$, und daher ist infolge der Einzigkeit der Darstellung $\sum c_\nu F_\nu$ wenigstens einer der Koeffizienten c_ν nicht durch m teilbar ist; das sei etwa c_1.

Durch die Restklassenzerlegung modulo $\mathfrak{R}$ ist die Gruppe $\mathfrak{L}$ homomorph auf die Gruppe $\mathfrak{F}$ abgebildet; wir bilden weiter $\mathfrak{F}$ homomorph auf die additive Gruppe der ganzen Zahlen ab, indem wir jedem Element $\sum y_\nu F_\nu$ von $\mathfrak{F}$ die Zahl y_1 zuordnen; beide Homomorphismen zusammen ergeben eine homomorphe Abbildung H von $\mathfrak{L}$ auf die ganzen Zahlen; dabei ist insbesondere

(1) $$H(Z_m^{a-1}) = c_1, \quad c_1 \not\equiv 0 \mod m,$$

(2) $$H(R^{a-1}) = 0 \text{ für jeden Rand oder Randteiler } R^{a-1}.$$

Ferner sei für die Simplexe T_j^{a-1}

(3) $$H(T_j^{a-1}) = x_j.$$

Die Berandungsrelationen für die a-dimensionalen Simplexe T_i^a seien

(4) $$\dot{T}_i^a = \sum u_{ij} T_j^{a-1};$$

dann ist nach (3), da H ein Homomorphismus ist, $H(\dot{T}_j^a) = \sum u_{ij} x_j$, und nach (2), da $\dot{T}_j^a$ ein Rand R^{a-1} ist,

(5) $$\sum u_{ij} x_j = 0.$$

Z_m^{a-1} sei durch

(6) $$Z_m^{a-1} = \sum v_j T_j^{a-1}$$

gegeben; dann folgt aus (3) und (1)

(7) $$\sum v_j x_j = c_1 \not\equiv 0 \mod m.$$

Wir definieren nun zunächst folgende Abbildung f des aus allen T_j^{a-1} bestehenden $(a-1)$-dimensionalen Teilkomplexes A^{a-1} von A^a auf die S^{a-1}: Alle $(a-2)$-dimensionalen Randsimplexe der T_j^{a-1} werden auf einen festen Punkt ξ von S^{a-1} abgebildet; das Innere jedes T_j^{a-1} wird so auf S^{a-1} abgebildet, daß die Abbildung $f(T_j^{a-1})$ den Grad x_j hat; das kann man z. B. dadurch erreichen, daß man in T_j^{a-1} $|x_j|$ zueinander fremde Simplexe $t_1^{a-1}, t_2^{a-1}, \ldots, t_{|x_j|}^{a-1}$ wählt, jedes von ihnen so auf S^{a-1} abbildet, daß der Rand in ξ übergeht und die Abbildung in t_ν^{a-1} im übrigen eineindeutig vom Grade $+1$ oder -1 ist, je nachdem x_j positiv oder negativ ist, und schließlich auch $T_j^{a-1} - \sum t_\nu^{a-1}$ auf den Punkt ξ abbildet. Diese Abbildung $f(A^{a-1})$ läßt sich zu einer Abbildung des ganzen Komplexes A^a erweitern. Denn infolge von (4) und (5) wird die Randsphäre $S_i^{a-1} = \dot{T}_i^a$ jedes Simplexes T_i^a mit dem Grade 0 abgebildet, und eine solche Abbildung von S_i^{a-1} auf S^{a-1} läßt sich immer folgendermaßen zu einer Abbildung des T_i^a erweitern: da der Grad 0 ist, gibt es eine Abbildungsschar $f_r(S_i^{a-1})$ der S_i^{a-1} auf S^{a-1} mit $f_1 = f$ und $f_0(S_i^{a-1}) = \xi$, wobei wieder ξ ein fester Punkt von S^{a-1} ist $(1 \leqq r \leqq 1)$[14]; x_0 sei ein fester innerer Punkt von T_i^a; ist $x = x_1$ irgendein Punkt auf S_i^{a-1}, x_r der Punkt der Strecke $x_0 x_1$, der diese im Verhältnis $r : 1 - r$ teilt, so wird $f(T_i^a)$ durch $f(x_r) = f_r(x)$ bestimmt.

Bei der so definierten Abbildung $f(A^a)$ ist der modulo m bestimmte Grad, mit dem Z_m^{a-1} abgebildet wird, infolge von (6) und (7) $c_1 \not\equiv 0 \mod m$; das bedeutet, daß $f(A^a)$ algebraisch wesentlich ist.

Aus dem Beweis ergibt sich, daß man zu dem Satz VII noch folgenden *Zusatz* machen kann: Hat A^a die Eigenschaft E^{a-1}, und ist Z^{a-1} ein

---

[14]) Einen Beweis dieser Tatsache (die übrigens ein Spezialfall von Satz IV ist), findet man in meiner unter [1]) zitierten Arbeit.

gewöhnlicher Zyklus bzw. Z_m^{a-1} irgendein Zyklus mod m, der $\not\approx 0$ bzw. $\not\approx 0 \bmod m$ ist, so kann man A^a auf die S^{a-1} so abbilden, daß gerade dieser Z^{a-1} bzw. Z_m^{a-1} algebraisch wesentlich abgebildet wird. (Die analogen Zusätze lassen sich, wie sich aus den Beweisen ergibt, übrigens auch zu den Sätzen IVa und Va machen.)

6. Beweis des Satzes Va. Die Bedingung $p^1 > 0$ ist nach der Schlußbemerkung von 3. mit der Bedingung E^1 identisch. Daß sie notwendig für die algebraisch wesentliche Abbildbarkeit von A^a auf den Kreis S^1 ist, ist daher in Satz VI enthalten; wir haben zu zeigen, daß sie hinreicht. Für $a = 1$ ist das der Fall, da sie dann, wie aus dem Schluß von 3. hervorgeht, mit der Bedingung des Satzes IVa zusammenfällt. Ebenso ist für $a = 2$ die Behauptung schon im Satz VII enthalten. Es sei also $a \geqq 3$; wir dürfen annehmen, daß die Behauptung für die Dimensionszahl $a-1$ schon bewiesen sei, und zwar in der dem Zusatz zu Satz VII entsprechenden schärferen Fassung, daß ein vorgegebener Z^1, der $\not\approx 0$ ist, wesentlich abgebildet wird. Nun sei Z^1 ein Zyklus in A^a, der $\not\approx 0$ ist; A^{a-1} sei der Komplex der $(a-1)$-dimensionalen Simplexe T_j^{a-1} von A^a; dann liegt Z^1 in A^{a-1} und ist dort erst recht $\not\approx 0$. Also kann man A^{a-1} so auf den Kreis S^1 abbilden, daß Z^1 wesentlich abgebildet wird. Die Aufgabe ist nun, analog wie in dem Beweis des vorigen Satzes, für jedes einzelne Simplex T_i^a die auf seinem Rande $S_i^{a-1} = \dot{T}_i^a$ schon definierte Abbildung f auf ganz T_i^a auszudehnen; genau wie vorhin ist diese Aufgabe gelöst, falls man die Abbildung $f(S_i^{a-1})$ auf S^1 stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt überführen kann. Diese Überführung ist möglich, da S_i^{a-1} eine wenigstens zweidimensionale Sphäre und jede ihrer Abbildungen auf einen Kreis daher topologisch unwesentlich ist, wie schon in der Einleitung (im Anschluß an die Formulierung des Satzes Ia) gezeigt wurde, und wie es überdies in den Sätzen V und VI enthalten ist. Mithin läßt sich $f(A^a)$ in der gewünschten Weise konstruieren.

7. Beweis des Satzes VIII. A^4 sei die Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte der projektiven Ebene[15]). Ihre zweite Bettische Zahl ist $p^2 = 1$; bezeichnen wir mit $z_1 : z_2 : z_3$ die Koordinaten in A^4, so definiert die Gleichung $z_3 = 0$ eine zweidimensionale Kugel A^2, die eine Basis der zweidimensionalen Homologien ist; d. h. jeder Zyklus Z^2 aus A^4 genügt einer Homologie $Z^2 \sim a \cdot A^2$. Ist f eine Abbildung von A^4 auf sich, so ist $f(A^2)$ selbst ein Z^2 in A^4, also gehört zu f eine Zahl u, die durch $f(A^2) \sim u \cdot A^2$ definiert ist; es gilt der Satz, daß dann f den Grad u^2 hat[16]).

---

[15]) Eine Darstellung der einfachsten topologischen Eigenschaften von A^4 findet man im „Anhang II" der unter [8]) zitierten Arbeit von van der Waerden.

[16]) § 5 der unter [6]) zitierten Arbeit.

Liegt nun eine Abbildung von A^4 auf eine S^2 vor, so können wir diese S^2 durch die eben beschriebene A^2 realisieren; die Abbildung ist dann eine Abbildung von A^4 auf sich, die den Grad 0 hat, da nur ein echter Teil von A^4 durch die Bildmenge bedeckt wird. Folglich ist nach dem eben genannten Satz auch $u = 0$, also $f(A^2) \sim 0$ in A^4, d. h. $f(A^2) = 0$ auf S^2. Ist Z^2 irgendein Zyklus von A^4, so ist $Z^2 \sim a \cdot A^2$, mithin $f(Z^2) = a \cdot f(A^2) = 0$ auf S^2, d. h. f ist algebraisch unwesentlich.

8. Schließlich sei für den Satz Ia noch ein Beweis angegeben, der auf den Sätzen VII und VIII beruht und von dem in den §§ 1 bis 5 enthaltenen Beweis völlig verschieden ist: A^4 und A^2 haben dieselben Bedeutungen wie in 7., A^3 bezeichne den Komplex der dreidimensionalen Simplexe T_j^3 einer bestimmten Zerlegung von A^4; dann kann man A^2 als in A^3 liegend annehmen, und dort ist A^2 erst recht $\not\approx 0$. Daher kann man nach dem Zusatz zu Satz VII A^3 so auf die S^2 abbilden, daß dabei A^2 algebraisch wesentlich abgebildet wird. Diese Abbildung f läßt sich auf Grund von Satz VIII aber nicht zu einer Abbildung $f(A^4)$ erweitern. Folglich gibt es unter den vierdimensionalen Simplexen T_i^4 von A^4 wenigstens eines, etwa T_1^4, so daß sich die auf dem Rand $\dot{T}_1^4 = S_1^3$ erklärte Abbildung f nicht auf ganz T_1^4 ausdehnen läßt; daraus folgt, daß die Abbildung $f(S_1^3)$ auf die S^2 topologisch wesentlich ist, da andernfalls die Ausdehnung von f auf T_1^4 nach dem im Beweise von Satz VII angewandten Verfahren vorgenommen werden könnte. Damit ist ein indirekter Beweis des Satzes Ia geliefert.

Hain im Riesengebirge, September 1930.

(Eingegangen am 30. 9. 1930.)