Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen

Hopf, H.

in: Mathematische Annalen | Mathematische Annalen | Article

340 - 367

Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Einleitung.

Aus der Integralformel von Gauß-Bonnet in der gewöhnlichen Differentialgeometrie folgt bekanntlich der Satz von der topologischen Invarianz der Curvatura integra einer geschlossenen Fläche [1]); er läßt sich folgendermaßen aussprechen: „Ist auf einer geschlossenen Fläche durch ein Bogenelement ds eine überall reguläre Maßbestimmung definiert und ist K das in bekannter Weise aus den Koeffizienten von ds^2 berechnete Gaußsche Krümmungsmaß, so ist das über die ganze Fläche erstreckte Integral von K gleich dem Produkt aus dem Oberflächeninhalt 4π der Einheitskugel und einer ganzzahligen topologischen Invariante der Fläche.“ Es ist also, damit dieser Satz gelte, nicht nötig, sich auf Flächen zu beschränken, die im dreidimensionalen euklidischen Raum liegen und die ihnen dadurch aufgezwungene Metrik tragen. In den nachstehenden Untersuchungen der Curvatura integra mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten jedoch nehmen wir die eben gekennzeichnete Einschränkung vor: wir betrachten n-dimensionale, in den $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum eingebettete geschlossene Hyperflächen (die übrigens Selbstdurchdringungen aufweisen dürfen), und fragen nach den Werten der Curvatura integra, welche durch Hyperflächen, die „Modelle“ ein und derselben Mannigfaltigkeit sind, geliefert werden. Aus der Gaußschen Definition des Krümmungsmaßes vermittels der Normalenabbildung geht ohne weiteres hervor, daß die Curvatura integra einer Hyperfläche m gleich dem Produkt aus dem Oberflächeninhalt der n-dimensionalen Einheitskugel und dem „Grade“ der durch die Normalen von m vermittelten Abbildung der durch das Modell m repräsentierten Mannigfaltigkeit auf die „Richtungskugel“ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes ist. Dieser Abbildungsgrad, den wir in

[1]) S. z. B. Blaschke, Vorles. über Diff.-Geom. 1 (Berlin 1921), § 64.

Abänderung der Bezeichnung selbst die Curvatura integra von m nennen wollen, bildet daher den Mittelpunkt der Untersuchung [2].

Infolgedessen schließt sich diese eng an die fundamentalen, die Theorie des Abbildungsgrades begründenden Arbeiten Brouwers an; es sind dies die Abhandlung „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten" [3], sowie Teile der Abhandlung „Über Jordansche Mannigfaltigkeiten" [3]. Ihre Begriffsbildungen, Beweismethoden und Terminologie werden im folgenden — besonders in den §§ 1, 2 — so häufig benutzt, daß nicht jedesmal im Text auf sie verwiesen werden konnte und ihre Kenntnis als bekannt vorausgesetzt werden muß.

Der Inhalt der Arbeit ist kurz zusammengefaßt folgender: Im § 1 wird der im wesentlichen von Poincaré [4] eingeführte Begriff des „Index" einer Singularität eines stetigen Vektorfeldes, der bei Brouwers Untersuchungen über Fixpunkte eine wichtige Rolle spielt, so erweitert, daß man einen Punkt eines n-dimensionalen Gebietes, der bei zwei verschiedenen Abbildungen in denselben Bildpunkt übergeht, während in seiner Umgebung eine solche Übereinstimmung sonst nicht eintritt, mit einem „Index der Übereinstimmung" versieht; über diesen werden einige für spätere Zwecke nützliche Feststellungen gemacht, insbesondere wird seine Invarianz gegenüber topologischen Transformationen, also seine Unabhängigkeit vom Koordinatensystem bewiesen. Im § 2 werden zwei Abbildungen einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ auf die n-dimensionale Kugel betrachtet; es wird gezeigt, daß die Summe der Übereinstimmungsindizes — vorausgesetzt, daß die Abbildungen nur endlich viele Übereinstimmungspunkte haben — unabhängig von den topologischen Eigenschaften von μ für gerades n gleich der Summe, für ungerades n gleich der Differenz der beiden Abbildungsgrade ist; dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Poincaré-Bohl [5], der u. a. besagt, daß die beiden Abbildungsgrade sich um den Faktor $(-1)^{n+1}$ unterscheiden, falls kein

---

[2]) Kronecker weist in seiner Abhandlung: „Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen" (Monatsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1869, 2. Abhdl.) darauf hin, daß die Curvatura integra der Fläche $F(x, y, z) = 0$ mit der mit 4π multiplizierten „Charakteristik" des Funktionensystems $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ übereinstimmt; diese ist identisch mit dem Grad der im Text betrachteten Abbildung. Man vergleiche hierzu Hadamard, Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker, abgedruckt in Tannery, Introduction à la théorie des fonctions II, 2$^{\text{ième}}$ éd. (1910), sowie Dyck, Beiträge zur Analysis Situs I, Math. Annalen 32 (1888).

[3]) Math. Annalen 71 (1912).

[4]) Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles (3$^{\text{ième}}$ partie), Chap. 13 (Journ. de Math. (4) 1 (1885), (4) 2 (1886)).

[5]) Hadamard, l. c. S. 476 ff.

Übereinstimmungspunkt auftritt. Die Tatsache, daß man nach dem genannten Satz aus der Indexsumme und dem einen Grad den andern Grad bestimmen kann, wird in § 3 zur Untersuchung der Curvatura integra benutzt. Dort werden zwei Hyperflächen, die Modelle von μ sind, betrachtet; einer Klassifikation folgend, die in anderem Zusammenhang Antoine [6]) in die Topologie eingeführt hat, unterscheiden wir, ob die durch μ zwischen ihren beiden Modellen vermittelte Abbildung sich auf (die Modelle enthaltende) Elemente oder nur auf (die Modelle enthaltende) Umgebungen erweitern läßt, oder ob über eine derartige Erweiterungsmöglichkeit nichts bekannt ist. Es zeigt sich, daß für *gerades* n die Curvatura integra eine topologische Invariante von μ ist, d. h. daß sie bei den Abbildungen aller drei Klassen ungeändert bleibt. Für *ungerades* n dagegen bleibt die Curvatura integra zwar noch ungeändert bei den Abbildungen der ersten Klasse (wenigstens unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen), jedoch bereits nicht mehr bei denen der zweiten Klasse; hier gibt es sogar Jordansche, d. h. durchdringungsfreie, homöomorphe Hyperflächen mit (nicht nur dem Vorzeichen nach) verschiedenen Werten der Curvatura integra. Offen bleiben hier die Fragen, ob man (für ungerades $n \geqq 3$) willkürliche Zahlen als Curvatura integra eines, nicht notwendig Jordanschen, Modells einer vorgelegten Mannigfaltigkeit vorschreiben kann und ob ein Jordansches Modell der n-dimensionalen Kugel stets die Curvatura integra ± 1 hat; die letzte Frage wird in dieser Arbeit nur unter der vereinfachenden Voraussetzung bejaht, daß das Modell die Begrenzung eines Elements ist, einer Voraussetzung, von der nicht bekannt ist, ob sie nicht eine Einschränkung bedeutet.

Dagegen wird in einer anderen Richtung noch ein Ergebnis erzielt: Im Verlauf der Untersuchungen des § 3 ergibt sich, daß die Indexsumme der Singularitäten eines an eine Hyperfläche tangentialen Vektorfeldes eine *gerade* Zahl sein muß, nämlich bei *ungeradem* n Null, bei *geradem* n die doppelte Curvatura integra der Hyperfläche. Aus dieser Tatsache wird im § 4 eine notwendige Bedingung dafür hergeleitet, daß eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine Hyperfläche im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum als Modell besitzt; auf Grund dieser Bedingung ergibt sich im § 5, daß die Gesamtheit der komplexen Punkte des $2k$-dimensionalen projektiven Raumes, die eine $4k$-dimensionale, einfach zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit ist, sich im $(4k+1)$-dimensionalen euklidischen Raum nicht durch eine Hyperfläche, auch nicht unter Zulassung von Selbstdurchdringungen, repräsentieren läßt.

[6]) Antoine, Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages, Journ. de Math. (8) 4 (1921).

§ 1.

Der Index eines Übereinstimmungspunktes zweier Abbildungen.

In der Umgebung des einem n-dimensionalen Gebiete Γ angehörigen Punktes Ω sei ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eingeführt. Bezüglich der Indikatrix machen wir folgende Festsetzungen, die für alle Betrachtungen dieser Arbeit gelten, sofern nicht ausdrücklich einmal etwas anderes bestimmt wird: die positive Indikatrix ist durch die Reihenfolge $(0, \ldots, 0)$; $(1, 0, \ldots, 0)$; $(0, 1, 0, \ldots, 0)$; $\ldots$; $(0, 0, \ldots, 1)$ der Ecken des durch diese bestimmten Simplexes S definiert; dadurch ist gleichzeitig die positive Indikatrix des Randes von S festgelegt. Als die „natürliche" Orientierung einer Jordanschen Mannigfaltigkeit μ bezeichnen wir diejenige, bei der das Innengebiet die Ordnung $+1$ hat, wobei wir die Ordnung eines Punktes A durch Projektion von μ von A aus auf ein A umgebendes, zu S seitenparalleles und entsprechend orientiertes Simplex $\varkappa$ bestimmen. Ist m ein orientiertes $(n-1)$-dimensionales Flächenstück, das in jedem Punkt Π einen sich mit Π stetig ändernden ebenen $(n-1)$-dimensionalen Tangentialraum ϑ_Π besitzt, so ist die positive Indikatrix von ϑ_Π so zu wählen, daß die durch senkrechte Projektion vollzogene topologische Abbildung eines hinreichend kleinen, Π enthaltenden Gebietes von m auf ϑ_Π die positive Indikatrix von m in diejenige von ϑ_Π überführt. Einen von Π ausgehenden, nicht an m tangentialen Strahl nennen wir nach der „positiven" Seite von m gerichtet, wenn die durch die natürliche Orientierung eines n-dimensionalen Simplexes, das von einem Punkt des Strahls und einem $(n-1)$-dimensionalen Simplex von ϑ_Π gebildet wird, definierte positive Randindikatrix die positive Indikatrix von ϑ_Π ist. Danach haben die inneren Normalen einer natürlich orientierten $(n-1)$-dimensionalen Kugel positive Richtung. Die Orientierung von ϑ_Π ist daher die gleiche, ob man ϑ_Π als Tangentialraum von m oder von einer Kugel auffaßt, deren Mittelpunkt auf der positiven Normalen von m liegt.

Γ sei zwei Abbildungen [7] H_1 und H_2 auf Punktmengen des Gebiets G unterworfen, das Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ und ebenfalls Orientierung in der geschilderten Weise besitzt; Ω sei ein isolierter Übereinstimmungspunkt von H_1 und H_2, d. h. es sei $H_1(\Omega) = H_2(\Omega) = O$, aber $H_1(\Pi) \neq H_2(\Pi)$ für $\Pi \neq \Omega$.

Jedem von Ω verschiedenen Punkt Π von Γ ordnen wir den von $H_1(\Pi)$ nach $H_2(\Pi)$ weisenden Vektor $v(\Pi)$, sowie den zu $v(\Pi)$ gehörigen

[7] Unter einer „Abbildung" wird stets eine eindeutige und stetige Abbildung verstanden.

Punkt der „Richtungskugel R“ von G zu, d. h. den Punkt einer festen natürlich orientierten, „R repräsentierenden“ Kugel K, in dem diese von dem im Mittelpunkt angebrachten, zu $v(\Pi)$ parallelen Strahl geschnitten wird. Den, von der Wahl der die Richtungskugel repräsentierenden Kugel offenbar unabhängigen, Grad der so definierten Abbildung einer in Γ liegenden, Ω im Innern enthaltenden, natürlich orientierten, Jordanschen Mannigfaltigkeit μ auf R nennen wir den „Grad $a_{12}(\mu)$ von μ“. Er ist von der Wahl von μ unabhängig; denn ist $\varkappa$ eine Kugel um Ω, Π_1 der Schnittpunkt von $\varkappa$ mit dem Strahl $\Omega\Pi_0$, wobei $\Pi_0 = \Pi$ ein Punkt von μ ist, Π_t der Punkt der Strecke $\Pi_0\Pi_1$, der diese im Verhältnis $t:(1-t)$ teilt, und betrachtet man die durch die Vektoren $v(\Pi_t)$ vermittelten Abbildungen α_t von μ auf R, während t von 0 bis 1 wächst, so geht die Abbildung vom Grade $a_{12}(\mu)$ stetig, also unter Erhaltung des Grades, in die Abbildung α_1 über; diese setzt sich aber zusammen aus der durch Projektion von Ω aus vermittelten Abbildung von μ auf $\varkappa$, die nach Definition der „Ordnung“ und unserer Orientierungsvorschrift den Grad $+1$ hat, und der Abbildung vom Grade $a_{12}(\varkappa)$ der Kugel $\varkappa$ auf R; da sich bei Zusammensetzung zweier Abbildungen die Grade multiplizieren, folgt hieraus $a_{12}(\mu) = a_{12}(\varkappa)$, womit die Unabhängigkeit des Grades a_{12} von der Wahl von μ bewiesen ist.

Wir nennen a_{12} den „Index der Übereinstimmung“ von H_1 und H_2 in Ω. — Vertauscht man H_1 und H_2, so gehen die Vektoren v in ihre entgegengesetzten über, mithin ist $a_{21} = (-1)^n a_{12}$. — Ändert man die Orientierung von Γ oder die von G, so ändert a_{12} sein Vorzeichen, da dann μ bzw. R eine Abbildung vom Grade -1 erleidet; ändert man beide Indikatrizen, so bleibt daher a_{12} ungeändert.

Den von Ω verschiedenen Punkten Π sei eine stetige Schar einfacher, abgeschlossener, stetig differenzierbarer, $H_1(\Pi)$ mit $H_2(\Pi)$ verbindender Kurvenstücke $s(\Pi)$ zugeordnet, deren Tangentialvektoren $w(\Pi)$ in $H_1(\Pi)$ sich mit Π stetig ändern. Genau so wie die Vektoren v definieren auch die Vektoren w einen „Index“ von Ω. Dieser ist gleich a_{12}; denn bezeichnet $H(\Pi, t)$ den Punkt, der $s(\Pi)$ im Verhältnis $(1-t):t$ teilt, und $v(\Pi, t)$ den von $H_1(\Pi) = H(\Pi, 1)$ nach $H(\Pi, t)$ zeigenden Vektor, so geht, wenn t stetig von 0 nach 1 läuft, das Vektorfeld der $v(\Pi) = v(\Pi, 0)$ stetig in das der $w(\Pi) = v(\Pi, 1)$ über. — Zur Bestimmung von a_{12} können also statt der Richtungen der von $H_1(\Pi)$ nach $H_2(\Pi)$ gezogenen Strecken auch die Anfangsrichtungen von Kurven s benutzt werden.

Wird Γ einer topologischen Abbildung φ auf ein orientiertes Gebiet Γ' unterworfen, so sind in diesem zwei Abbildungen $H_1'(\Pi') = H_1\varphi^{-1}(\Pi')$, $H_2'(\Pi') = H_2\varphi^{-1}(\Pi')$ definiert, die in $\Omega' = \varphi(\Omega)$ eine isolierte Übereinstimmungsstelle haben. Die natürliche Orientierung einer Jordanschen

Mannigfaltigkeit μ geht bei φ in die natürliche oder die dieser entgegengesetzte Orientierung von $\mu' = \varphi(\mu)$ über, je nachdem φ die Indikatrix erhält oder nicht. Aus der Definition des Index folgt daher unmittelbar:

Der Index einer isolierten Übereinstimmungsstelle zweier Abbildungen H_1, H_2 bleibt bei einer topologischen Abbildung φ des Definitionsbereichs von H_1 und H_2 unverändert oder erhält den Faktor -1, je nachdem φ die Indikatrix erhält oder umgekehrt.

Der analoge Satz gilt für topologische Abbildungen von G:

Der Übereinstimmungsindex ist — höchstens, wie oben, vom Vorzeichen abgesehen — invariant gegenüber topologischen Abbildungen des Bildbereiches.

Beweis: f sei die topologische Abbildung einer Umgebung G von O auf die Umgebung G' des Punktes $O' = f(O)$, k eine im Definitionsbereich von f liegende Kugel um O, μ sei so klein, daß $H_1(\mu)$ und $H_2(\mu)$ im Inneren von k liegen, $H(\Pi)$ sei der Schnittpunkt von k mit dem Strahl $H_1(\Pi)\, H_2(\Pi)$. Die den Übereinstimmungsindex bestimmenden Vektoren $H_1(\Pi) \to H(\Pi)$ führen wir stetig in die Vektoren $O \to H(\Pi)$ über, indem wir ihre Anfangspunkte geradlinig und gleichförmig in der Zeit 1 von $H_1(\Pi)$ nach O laufen lassen. Wählen wir nun als Richtungskugel R eine Kugel um O, so ist der zu untersuchende Index der Grad derjenigen Abbildung von μ auf R, die durch Projektion von $H(\mu)$ aus O vermittelt wird, also gleich der „Ordnung von O in bezug auf $H(\mu)$“.

Die den zu untersuchenden Übereinstimmungsindex von fH_1 und fH_2 definierenden, von $fH_1(\Pi)$ nach $fH_2(\Pi)$ zeigenden Vektoren führen wir stetig in die von O' nach $fH(\Pi)$ zeigenden Vektoren über, indem wir 1. ihre Endpunkte auf den durch f gelieferten Bildern der Strecken $H_2(\Pi)\, H(\Pi)$ gleichförmig (im Sinne der Geometrie von G) nach $fH(\Pi)$, 2. ihre Anfangspunkte auf den Bildern der Strecken $H_1(\Pi)\, O$ gleichförmig nach O laufen lassen. Wählen wir als Richtungskugel R' eine Kugel um O', so erkennen wir, daß der fragliche Index gleich der „Ordnung von $f(O)$ in bezug auf $fH(\mu)$“ ist.

Die Behauptung der Invarianz des Übereinstimmungsindex ist damit zurückgeführt auf die der *Invarianz der Ordnung von O in bezug auf $H(\mu)$ gegenüber der topologischen Abbildung f.* Die Richtigkeit dieser Behauptung zeigen wir, indem wir sie für eine Folge $H(\mu)$ gleichmäßig approximierender simplizialer Abbildungen $H^{(\nu)}(\mu)$ und eine Folge f gleichmäßig approximierender simplizialer Abbildungen f_λ beweisen; dabei ist bei der Konstruktion der Grundsimplexe für f_λ sowie der Bildsimplexe für f_λ und $H^{(\nu)}$ die euklidische Metrik von G bzw. G' zugrunde zu legen.

Ist $K = H^{(\nu)}$ eine der Approximationen von H, so besteht die Bildmenge $K(\mu)$ aus einer endlichen Anzahl $(n-1)$-dimensionaler Simplexe. Wir legen durch einen nicht zu $K(\mu)$ gehörigen Punkt A einen Strahl, der keine $(n-2)$-dimensionale Seite eines dieser Simplexe trifft; sind p und p' die Anzahlen derjenigen Teilsimplexe der K zugrunde liegenden Zerlegung von μ, deren Bildsimplexe von dem Strahl im positiven bzw. negativen Sinn durchsetzt werden, so ist $p - p'$ die Ordnung von A in bezug auf $K(\mu)$. $q - q'$ sei die entsprechende Zahl für einen von A ins Unendliche gehenden Streckenzug, der keine $(n-2)$-dimensionale Seite eines Bildsimplex trifft, und von dem kein Eckpunkt auf $K(\mu)$ liegt; wir behaupten, daß $q - q' = p - p'$ ist. — Dies ist bewiesen, wenn gezeigt ist, daß die entsprechende Zahl für jedes geschlossene orientierte Polygon gleich 0 ist. Ist W ein solches Polygon, so können wir die Lage seiner Eckpunkte von vornherein als so modifiziert annehmen, daß die Verlängerungen keiner Seite eine $(n-2)$-dimensionale Seite von $K(\mu)$ treffen. Wir fügen in jeder Ecke von W die beiden Strahlen an, die die Verlängerungen der dort zusammenstoßenden Seiten bilden, und versehen sie mit den durch die betreffenden Seiten bestimmten Richtungssinnen. Die zu untersuchende Differenz vermehrt sich bei Hinzufügung des einen Strahls um die Ordnung des Eckpunkts, während sie sich bei Hinzufügung des anderen Strahls um diese Ordnungszahl vermindert; sie bleibt im ganzen daher ungeändert. Das System der nunmehr vorliegenden Strecken und Strahlen zerfällt in eine endliche Anzahl gerichteter Geraden; für jede Gerade ist die Differenz der Anzahlen der positiven und negativen Durchsetzungen 0, was man erkennt, wenn man die Gerade als aus zwei Strahlen zusammengesetzt betrachtet. Mithin ist die zu untersuchende Zahl in der Tat gleich 0; damit ist gezeigt, daß die durch einen beliebigen von A ins Unendliche führenden Streckenzug bestimmte Differenz $q - q'$ der Ordnung von A gleich ist[8]). Daraus folgt weiter, daß diese Differenz für einen von A nach B führenden Streckenzug gleich der Ordnung von A vermindert um die Ordnung von B ist.

Wir nehmen nun K als fest vorliegend an und zeigen, daß, wenn f_λ eine hinreichend gute Approximation von f ist, die Ordnung von O in bezug auf $K(\mu)$ sich bei der Abbildung f_λ höchstens um das Vorzeichen ändert; da diese Änderung bei einer Spiegelung eintritt, können wir aus Bequemlichkeitsgründen annehmen, daß f die Indikatrix erhält, und haben dann zu beweisen, daß auch das Vorzeichen der Ordnung ungeändert bleibt. — Zunächst sei eine simpliziale Approximation f_λ' von f gegeben; wir haben sie in geeigneter Weise zu einer Abbildung f_λ der gewünschten Art zu verfeinern. Die f_λ' zugrunde liegende simpliziale Zerlegung von G

[8]) Vgl. Brouwer, Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, S. 323, sowie Hadamard l. c.

erfülle folgende Voraussetzungen: O ist Eckpunkt eines Grundsimplex, so daß also $f'_\lambda(O) = f(O) = O'$ ist. t sei ein keine $(n-2)$-dimensionale Seite von $K(\mu)$ treffender, von O ausgehender Strahl. Jeder Schnittpunkt von t mit $K(\mu)$ sei innerer Punkt eines Grundsimplex. Sind $P_1, P_2, \ldots, P_r$ die Punkte von μ, für die $K(P_\varrho)$ auf t liegt, so können wir $K(P_{\varrho_1}) \neq K(P_{\varrho_2})$ für $\varrho_1 \neq \varrho_2$ annehmen, da sich dies durch eine beliebig kleine Modifikation von K erreichen läßt. s_ϱ seien die die P_ϱ enthaltenden Grundsimplexe von μ, S_ϱ die die $K(P_\varrho)$ enthaltenden Grundsimplexe in G, die so gewählt seien, daß die Punkte $K(P_\varrho)$ in ihrem Innern liegen. Die S_ϱ seien so klein, daß in jedem S_ϱ außer Punkten von $K(s_\varrho)$ kein Punkt von $K(\mu)$ liegt. $K(s_\varrho)$ zerlegt S_ϱ in zwei Teile S_ϱ^1, S_ϱ^2; A_ϱ^1, A_ϱ^2 seien zwei im Innern von S_ϱ^1 bzw. S_ϱ^2 liegende Punkte von t, und die Richtung $A_\varrho^1 \rightarrow A_\varrho^2$ sei die von O herkommende. — Wir verdichten nun die vorliegende simpliziale Zerlegung von G zu einer Zerlegung ζ_λ mit folgenden Eigenschaften: 1. Die $K(P_\varrho)$ liegen im Innern von Grundsimplexen. Die zu ζ_λ gehörige simpliziale Abbildung f_λ approximiere f so gut, daß 2., wenn t_ϱ die Strecke $A_\varrho^1\, A_\varrho^2$, w_ϱ den Umfang von S_ϱ, μ_ϱ den Teil von μ, für den $K(\mu_\varrho)$ in S_ϱ liegt, bezeichnet, $f_\lambda(t_\varrho)$ mit $f_\lambda(w_\varrho)$ und mit $f_\lambda(\mu - \mu_\varrho)$, $f_\lambda(t - \sum\limits_\varrho t_\varrho)$ mit $f_\lambda(\mu - \sum\limits_\varrho \mu_\varrho)$ punktfremd sind, und daß 3., wenn u_ϱ der Umfang von S_ϱ^1 ist, die Ordnungen von $f_\lambda(A_\varrho^1)$ und $f_\lambda(A_\varrho^2)$ in bezug auf $f_\lambda(u_\varrho)$ den Ordnungen von $f(A_\varrho^1)$ bzw. $f(A_\varrho^2)$ in bezug auf $f(u_\varrho)$ gleich sind.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so sind die einzigen Schnittpunkte des Streckenzuges $f_\lambda(t)$ mit $f_\lambda K(\mu)$ die Schnittpunkte der $f_\lambda(t_\varrho)$ mit den $f^\lambda K(\mu_\varrho)$, und für jedes ϱ ist die Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Schnittpunkte gleich der Ordnung von $f(A_\varrho^1)$ in bezug auf $f(u_\varrho)$ vermindert um die Ordnung von $f(A_\varrho^2)$ in bezug auf $f(u_\varrho)$. Dabei ist die Indikatrix von u_ϱ durch die von μ_ϱ festgelegt.

Nun ist die Ordnung von A_ϱ^2 in bezug auf u_ϱ gleich 0, die von A_ϱ^1 in bezug auf u_ϱ gleich ± 1, je nachdem die Kreuzung in $K(P_\varrho)$ positiv oder negativ ist. Mithin ist unser Satz auf einen einfachen Spezialfall zurückgeführt, nämlich auf die Behauptung, daß die Ordnung eines Punktes in bezug auf die *Jordansche Mannigfaltigkeit* u_ϱ sich bei der topologischen Abbildung f nicht ändert, sondern für die inneren Punkte ± 1, für die äußeren 0 bleibt. Die Richtigkeit dieser Behauptung aber folgt aus bekannten Sätzen von Brouwer[9]).

Damit ist die topologische Invarianz der Ordnung eines Punktes in bezug auf $H(\mu)$ — allenfalls abgesehen vom Vorzeichen —, und zugleich dasselbe für den Übereinstimmungsindex zweier Abbildungen bewiesen.

[9]) Brouwer, Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, §§ 4, 5.

Diese Tatsache läßt sich auch so aussprechen, daß diese Zahlen, bei richtiger Berücksichtigung des Vorzeichens, unabhängig vom Koordinatensystem sind.

Eine Anwendung der bisherigen Ergebnisse, die für uns später von Nutzen sein wird, ist die folgende: Sind H_1, H_2 Abbildungen von Γ auf das einer Kugel angehörige Gebiet G, dann ist es zur Ermittlung des Übereinstimmungsindex gleichgültig, ob wir als $H_1(\Pi)$ mit $H_2(\Pi)$ verbindende Kurven $s(\Pi)$, durch deren Anfangsrichtungen der Übereinstimmungsindex zu bestimmen ist (s. o.), die Großkreisbögen oder die Kreisbögen durch einen beliebigen festen Punkt A der Kugel verwenden, sowie, ob wir das kartesische Koordinatensystem in G, das wir zur Bestimmung des Index brauchen, durch stereographische oder irgendeine andere Projektion eines ebenen Raumes auf G übertragen, sofern nur die Indikatrix erhalten bleibt.

Zu noch wichtigeren Anwendungen führt folgende Betrachtung:

Ist Γ mit G identisch und H_1 die identische Abbildung, so ist Ω isolierter *Fixpunkt* von H_2, $a = a_{12}$ sein „Index"; das im vorstehenden Gesagte bleibt gültig, man hat aber zu beachten, daß, wenn $\Gamma = G$ einer topologischen Abbildung mit Umkehrung der Indikatrix unterworfen wird, diese Umkehrung sowohl in Γ wie in G vorgenommen wird, a_{12} sein Vorzeichen also *nicht* ändert; der betreffende Satz heißt daher:

Der Index eines Fixpunktes ist eine topologische Invariante.

Ist in Γ ein stetiges Vektorfeld $v(\Pi)$ mit einer isolierten Singularität in Ω gegeben, so verstehen wir unter dem „Index" a dieser Singularität den Grad der Abbildung einer Ω umschließenden Kugel $\varkappa$ auf die Richtungskugel, die durch die auf $\varkappa$ angebrachten Vektoren des Feldes vermittelt wird. Er ist gleich dem Index des Fixpunktes Ω derjenigen Abbildung H_2, die jeden Punkt Π in Richtung seines Vektors $v(\Pi)$ um eine Strecke $\varepsilon(\Pi)$ verschiebt, wobei $\varepsilon(\Pi)$ eine in Ω verschwindende, im übrigen positive, stetige Funktion ist. Wird Γ einer differenzierbaren Abbildung f mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante unterworfen, so geht das Vektorfeld in ein neues Vektorfeld $v' = fv$, H_2 in die Abbildung fH_2 über. Den Index des Fixpunktes $f(\Omega)$ bei der Abbildung fH_2 bestimmen wir durch die Anfangsrichtungen $fv(\Pi)$ der von $f(\Pi)$ nach $fH_2(\Pi)$ führenden Kurven $s(\Pi)$, die die Bilder der Strecken $\overline{\Pi H_2(\Pi)}$ sind. Er ist einerseits gleich a, andererseits gleich dem Index der Singularität $f(\Omega)$ des Vektorfeldes fv. Damit ist gezeigt:

Der Index einer Singularität eines stetigen Vektorfeldes ändert sich *nicht bei einer Abbildung mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante*[10]).

Die für uns wichtigste Anwendung dieser Sätze ist folgende:

Unter einem „Modell" einer n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit μ verstehen wir eine im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum gelegene Punktmenge m, auf die μ eindeutig und stetig so abgebildet ist, daß diese Abbildung F im Kleinen auch eindeutig umkehrbar ist, d. h. daß es um jeden Punkt P von μ eine Umgebung U_P gibt, die auf ihre Bildmenge $F(U_P)$ topologisch bezogen ist. — Wir betrachten Modelle, die „Hyperflächen" sind; das bedeutet, daß zu jedem Punkt P von μ ein, sich mit P stetig ändernder, n-dimensionaler ebener Tangentialraum ϑ_P an $F(U_P)$ existiert. Dann gibt es zu jedem P eine Umgebung U_P^*, deren durch senkrechte Projektion von $F(U_P^*)$ vermittelte Abbildung $SF(U_P^*)$ auf ϑ_P topologisch ist.

Auf m sei ein stetiges Feld tangentialer Vektoren mit endlich vielen Singularitäten gegeben; d. h. mit endlich vielen Ausnahmen $P_1, P_2, \ldots, P_r$ gibt es zu jedem Punkt P von μ einen an $F(U_P)$ tangentialen, in $F(P)$ angebrachten Vektor $v(P)$, der sich mit P stetig ändert. Jeder der Punkte $F(P_\varrho)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ besitzt einen bestimmten Index a_ϱ, zu dessen Bestimmung man etwa das Koordinatensystem von ϑ_P auf $F(U_P^*)$ projizieren kann. $(r \geqq 0.)$

Wir definieren in μ eine stetige Funktion $\varepsilon(P)$, die in den Punkten P_ϱ verschwindet und im übrigen positiv ist. Jedem Punkt P ordnen wir denjenigen Punkt P_t' des durch $v(P)$ bestimmten tangentialen Strahles zu, der von $F(P)$ den Abstand $t \cdot \varepsilon(P)$ hat, wobei t ein Parameter ist. Es gibt eine Zahl $t_0 > 0$, so daß für alle P und für $0 < t \leqq t_0$ der Punkt P_t' in $SF(U_P^*)$ liegt; er sei bei der Abbildung SF das Bild des Punktes P_t. Die Abbildung $P_t = h(P, t)$ ist in ganz μ und für alle t $(0 \leqq t \leqq t_0)$ eindeutig und stetig und besitzt die r festen, d. h. von t unabhängigen, Fixpunkte P_ϱ mit den Indizes a_ϱ.

Liegt nun ein zweites Modell $m' = F'(\mu)$ vor, das ebenfalls eine Hyperfläche ist, also stetige, ebene Tangentialräume ϑ_P' besitzt, so wählen wir t so klein, daß keine der Sehnen $F'(P)F'(P_t)$ in $F'(P)$ auf $F'(U_P')$ senkrecht steht, und projizieren diese Sehnen in Richtung der Normalen in $F'(P)$ auf die Tangentialräume ϑ_P'. So wird ein nur in den Punkten $F'(P_\varrho)$ singuläres, stetiges tangentiales Vektorfeld auf m' erzeugt, und die Indizes der Singularitäten sind wieder gleich den Indizes a_ϱ der Fixpunkte der in μ definierten Transformation h. — Damit ist gezeigt:

[10]) Diese Tatsache ist auch ohne unseren Satz von der Invarianz des Index eines Fixpunktes leicht zu beweisen.

Gibt es auf m ein stetiges tangentiales Vektorfeld mit r Singularitäten, deren Indizes $a_1, \ldots, a_r$ sind, so gibt es auf jedem anderen Modell m' derselben Mannigfaltigkeit μ ein stetiges tangentiales Vektorfeld mit der gleichen Anzahl Singularitäten und den gleichen Indizes. $(r \geqq 0.)$ [11])

Von besonderem Interesse werden für uns später folgendermaßen definierte Übereinstimmungsstellen zweier Abbildungen auf die Kugel sein:

Γ sei ein n-dimensionales im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raum gelegenes, stetig differenzierbares, orientiertes Flächenstück. In den Punkten von Γ seien zwei derartige stetige Verteilungen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ $(n+1)$-dimensionaler Vektoren gegeben, daß alle Vektoren $\mathfrak{E}_1$ in bezug auf Γ negative Richtung haben und daß für einen und nur einen Punkt Ω von Γ die Vektoren $\mathfrak{E}_1(\Omega)$ und $\mathfrak{E}_2(\Omega)$ zusammenfallen. Die durch $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ vermittelten Abbildungen H_1 und H_2 von Γ auf die Richtungskugel R stimmen also in Ω, und nur dort, überein; der zugehörige Index sei a_{12}.

In jedem von Ω verschiedenen Punkt Π von Γ bestimmen die Vektoren $\mathfrak{E}_1(\Pi)$, dessen entgegengesetzter Vektor $\bar{\mathfrak{E}}_1(\Pi)$ und $\mathfrak{E}_2(\Pi)$ eine Halbebene, die, da $\mathfrak{E}_1(\Pi)$ nicht tangential ist, den ebenen Tangentialraum ϑ_Π in einem Vektor $v_{12}(\Pi)$ schneidet. Das Feld der v_{12}, das wir *das von* $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ *erzeugte tangentiale Feld* nennen, hat in Ω eine Singularität, von der wir zeigen, daß ihr Index a_{12} ist:

R sei repräsentiert durch eine ϑ_Ω in Ω berührende Kugel, deren Mittelpunkt A auf der positiven Normalen von Γ liegt, also in dem Teil des Raumes, dem $\mathfrak{E}_1(\Omega)$ nicht angehört. Wir nehmen mit ihrer zwischen ϑ_Ω und dem zu diesem parallelen Raum durch A gelegenen Hälfte die Zentralprojektion Z von A aus auf ϑ_Ω vor; dabei geht (s. o.) die positive Indikatrix von R in die positive Indikatrix von ϑ_Ω über, und wir erhalten zwei Abbildungen $ZH_1 = H_1'$, $ZH_2 = H_2'$ von Γ auf ϑ_Ω, deren Übereinstimmung in Ω ebenfalls den Index a_{12} hat. Der von $H_1'(\Pi)$ nach $H_2'(\Pi)$ weisende Vektor ist dem Vektor $w(\Pi)$ parallel, in dem ϑ_Ω von der in Π konstruierten, $\mathfrak{E}_1(\Pi)$, $\bar{\mathfrak{E}}_1(\Pi)$, $\mathfrak{E}_2(\Pi)$, $v_{12}(\Pi)$ enthaltenden Halbebene geschnitten wird; die $w(\Pi)$, die wir demnach zur Bestimmung von a_{12} benutzen können, führen wir in einer Umgebung von Ω stetig in Vektoren $w'(\Pi)$ über: wir führen die $\mathfrak{E}_1(\Pi)$ unter Festhaltung ihrer Anfangspunkte durch die von den Richtungen $\mathfrak{E}_1(\Pi)$ und $\mathfrak{E}_1(\Omega)$ ausgespannten spitzen Winkel hindurch in zu $\mathfrak{E}_1(\Omega)$ parallele Vektoren über, was in der Nähe von Ω ohne Durchschreitung von ϑ_Π geschieht. Während dieses Vorganges beobachten wir die Änderung, die der Vektor $v(\Pi, t)$ erleidet,

[11]) Falls die durch μ vermittelte Beziehung zwischen m und m' geeignete Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt, ist der Beweis unseres Satzes offenbar wesentlich einfacher zu führen als im Text.

in dem ϑ_Ω von der Halbebene $\mathfrak{C}_1(\Pi, t)$, $\bar{\mathfrak{C}}_1(\Pi, t)$, $v_{12}(\Pi)$ geschnitten wird, wobei $\mathfrak{C}_1(\Pi, t)$ der bewegte Vektor ist: die $v(\Pi, t)$ werden stetig aus den $w(\Pi)$ in diejenigen Vektoren $w'(\Pi)$ transformiert, die aus den $v_{12}(\Pi)$ durch Parallelprojektion in Richtung von $\mathfrak{C}_1(\Omega)$ auf ϑ_Ω entstehen. Der Grad der durch die w' vermittelten Abbildung einer Ω in ϑ_Ω umgebenden $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf die Richtungskugel r von ϑ_Ω ist daher einerseits gleich a_{12}, andererseits gleich dem Index von Ω bezüglich des Feldes der v_{12}, womit die Behauptung bewiesen ist. Man kann demnach die Bestimmung von a_{12} durch diejenige des Index von Ω in bezug auf das Feld der v_{12} ersetzen.

Unterwerfen wir die $(n+1)$-dimensionale Umgebung von Ω einer eindeutigen, stetig differenzierbaren Abbildung φ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante, so gehen die $\mathfrak{C}_1(\Pi)$, $\mathfrak{C}_2(\Pi)$, $v_{12}(\Pi)$ in Vektorfelder $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$, v_{12}' über; die Orientierung des Bildes Γ' von Γ wählen wir zunächst so, daß auch die $\mathfrak{C}_1'$ negativ gerichtet sind. Die $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ haben in Ω' eine isolierte Übereinstimmungsstelle, deren Index a_{12}' dem Index von Ω' bezüglich des an Γ' tangentialen Vektorfeldes $v_{12}' = \varphi(v_{12})$ gleich ist, das offenbar mit dem von $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ erzeugten tangentialen Feld identisch ist, (da die lineare Abhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, v_{12} in jedem Punkte bei der Abbildung erhalten bleibt). Da sich nun der Index von Ω bezüglich v_{12} bei der Abbildung, wie oben bewiesen, nicht ändert, gilt dasselbe für den Index a_{12} der Übereinstimmung von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ in Ω. — Verfügen wir entgegen der eben getroffenen Festsetzung über die positive Indikatrix von Γ' so, daß die Abbildung von Γ auf Γ' den Grad $+1$ hat, so ist zu unterscheiden, ob die Funktionaldeterminante D von φ positiv oder negativ ist, d. h. ob φ die Indikatrix erhält oder umkehrt: im ersten Fall geht die negative Seite von Γ in die negative Seite von Γ' über, es ist also $a_{12}' = a_{12}$; im zweiten Fall jedoch sind die $\mathfrak{C}_1'$ und $\mathfrak{C}_2'$ positiv gerichtet, und der Übereinstimmungsindex $(-1)^{n+1} a_{12}'$ der durch die negativ gerichteten, zu $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ diametralen Vektorverteilungen $\bar{\mathfrak{C}}_1'$, $\bar{\mathfrak{C}}_2'$ vermittelten Abbildungen ist gleich dem Index von Ω' in bezug auf das von $\bar{\mathfrak{C}}_1'$ und $\bar{\mathfrak{C}}_2'$ erzeugte tangentiale Vektorfeld, das zu dem der v_{12}' diametral ist, also gleich $(-1)^n a_{12}$, da Ω' in bezug auf die v_{12}' den Index a_{12} hat; aus $(-1)^{n+1} a_{12}' = (-1)^n a_{12}$ folgt $a_{12}' = -a_{12}$, und man sieht, daß $a_{12}' = \pm a_{12}$ ist, je nachdem $D \gtrless 0$ ist.

§ 2.

Die Übereinstimmungszahl zweier Abbildungen einer geschlossenen zweiseitigen Mannigfaltigkeit auf die Kugel.

Die geschlossene, zweiseitige, orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ sei durch die Abbildungen f_1 und f_2 auf die durch die Gleichung $\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu^2 = 1$ gegebene n-dimensionale Kugel $\mathfrak{K}$ abgebildet. f_1 und f_2 sollen nur in endlich vielen Punkten $P_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ von μ übereinstimmen; die Summe der Indizes dieser Übereinstimmungen $\sum_{\varkappa=1}^{k} a_{12}^{(\varkappa)} = I_{12} = (-1)^n I_{21}$ heiße die „Übereinstimmungszahl" von f_1 und f_2.

Wir konstruieren zwei, im wesentlichen simpliziale, Approximationsabbildungen von f_1, f_2 mit denselben Übereinstimmungspunkten bzw. -indizes $P_\varkappa, a_{12}^{(\varkappa)}$:

ζ sei eine simpliziale Zerlegung von μ, bei der die $P_\varkappa$ innere Punkte von Simplexen $S_\varkappa$ sind, und die so dicht ist, daß die Bilder $f_1(S_\varkappa)$ und $f_2(S_\varkappa)$ sich in solche Kugeln $\mathfrak{H}_\varkappa$ $[\varkappa = 1, \ldots, k]$ einschließen lassen, deren sphärische Radien kleiner sind als $\frac{\pi}{2}$, so daß man in jeder von ihnen zwei Punkte eindeutig durch Großkreisbögen verbinden kann, und deren Vereinigungsmenge noch ein Gebiet $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{K}$ frei läßt. Bezeichnet nun μ' den Teil von μ, der durch Fortlassen der Innengebiete der $S_\varkappa$ aus μ entsteht und ist m das Minimum der sphärischen Abstände $\overline{f_1(P)\, f_2(P)}$ für alle Punkte P von μ', so stellen wir eine Unterteilung ζ' von ζ her, die so dicht ist, daß für jede der beiden zugehörigen simplizialen Approximationen δ_1, δ_2 von f_1, f_2 der sphärische Abstand $\overline{\delta_i(P) f_i(P)} < \frac{m}{2}$ in ganz μ ist und daß die Bilder $\delta_1(S_\varkappa)$ und $\delta_2(S_\varkappa)$ auch noch ganz im Innern der $\mathfrak{H}_\varkappa$ liegen. Dabei sind zur Herstellung der simplizialen Approximationen als Koordinaten in $\mathfrak{K}$ die natürlichen Koordinaten zu wählen, d. h. als Schwerpunkt von $n+1$ in den Ecken $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n+1}^i$ $[i = 1, \ldots, n-1]$ eines sphärischen Simplex $\mathfrak{S}$ angebrachten Massen m^i ist der Punkt von $\mathfrak{S}$ zu betrachten, dessen Koordinaten ξ_ν sich verhalten wie die $n+1$ Zahlen $\sum_{i=1}^{n+1} x_\nu^i m^i$; bei Zugrundelegung dieser Koordinaten werden die simplizialen Abbildungen von μ in ganz μ stetig definiert[12]). δ_1 und δ_2 haben wegen

[12]) Bei Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, § 1, werden die simplizialen Abbildungen von μ zunächst nur für diejenigen Grundsimplexe von μ definiert, deren Eckpunktbilder demselben Element von $\mathfrak{K}$ angehören; jedoch scheint mir in § 3 der Brouwerschen Arbeit den simplizialen Abbildungen auf die Kugel die im obigen Text benutzte Modifikation der Definition zugrunde gelegt zu sein.

der Beziehungen $\overline{\delta_i f_i} < \frac{m}{2}$ $[i = 1, 2]$, $\overline{f_1 f_2} \geqq m$ in μ', also insbesondere auf den Rändern der $S_\varkappa$ keinen Übereinstimmungspunkt; im Innern der $S_\varkappa$ jedoch kann es unendlich viele Übereinstimmungspunkte geben. Um diese zu beseitigen, ersetzen wir δ_2 durch eine Abbildung δ_2': In μ' sei $\delta_2' = \delta_2$; in jedem $S_\varkappa$ betrachten wir das Bündel der von $P_\varkappa$ ausgehenden Strahlen und die stetige, nur in $P_\varkappa$ verschwindende, im übrigen positive Funktion α, die in jedem Randpunkt $P_{R_\varkappa}$ von $S_\varkappa$ gleich der Entfernung $\overline{\delta_1(P_{R_\varkappa})\,\delta_2(P_{R_\varkappa})}$ ist und auf dem Strahl $P_{R_\varkappa} P_\varkappa$ proportional der Entfernung von $P_\varkappa$ abnimmt. Dem Punkt P des Strahles $P_{R_\varkappa} P_\varkappa$ ordnen wir nun denjenigen Punkt $\delta_2'(P)$ von $\mathfrak{K}$ zu, der von $\delta_1(P)$ die sphärische Entfernung α hat und für den bei stereographischer Projektion von dem Gegenpunkt $p_\varkappa$ des Punktes $\delta_1(P_\varkappa)$ aus der Vektor $\delta_1(P) \rightarrow \delta_2'(P)$ dem Vektor $\delta_1(P_{R_\varkappa}) \rightarrow \delta_2(P_{R_\varkappa})$ parallel ist. Dann ist δ_2' in ganz μ stetig und in μ' mit δ_2 identisch, also simplizial. Die Bilder $\delta_2'(S_\varkappa)$ liegen ebenfalls ganz in den Kugeln $\mathfrak{H}_\varkappa$; δ_2' stimmt mit δ_1 nur in den $P_\varkappa$ überein. Der Index dieser Übereinstimmung in $P_\varkappa$ ist $a_{12}^{(\varkappa)}$; denn er läßt sich unter Zugrundelegung des durch stereographische Projektion von $p_\varkappa$ aus gelieferten euklidischen Koordinatensystems mittels der Anfangsrichtungen der zu den Randpunkten $P_{R_\varkappa}$ gehörigen Großkreisbögen $\delta_1(P_{R_\varkappa})\delta_2(P_{R_\varkappa})$ bestimmen. Die Gesamtheit dieser Bögen kann man innerhalb $\mathfrak{H}_\varkappa$ durch gleichförmige Bewegung ihrer Anfangs- und Endpunkte stetig in die Gesamtheit der Großkreisbögen $f_1(P_{R_\varkappa})\, f_2(P_{R_\varkappa})$ überführen, und bei diesem Übergang entartet wegen der Ungleichungen $\overline{\delta_i f_i} < \frac{1}{2} \overline{f_1 f_2}$ $[i = 1, 2]$ niemals ein Bogen in einen Punkt; folglich liefern die Anfangsrichtungen der Bögen $\delta_1(P_{R_\varkappa})\delta_2(P_{R_\varkappa})$ und die der Bögen $f_1(P_{R_\varkappa}) f_2(P_{R_\varkappa})$ Abbildungen gleichen Grades auf die Richtungskugel des Koordinatensystems; d. h. der Übereinstimmungsindex von δ_1 und δ_2' in $P_\varkappa$ ist $a_{12}^{(\varkappa)}$.

δ_2 und δ_2' haben gleichen Grad, da das Gebiet $\mathfrak{N}$ bei beiden Abbildungen von denselben Punkten von μ bedeckt wird. Sind also g_1, g_2 die Grade von f_1, f_2, so sind dies auch die Grade der simplizialen Approximationen δ_1 und δ_2, und mithin auch die von δ_1 und δ_2'.

Wir wählen einen Punkt O von $\mathfrak{N}$, der nicht auf dem Rande eines Bildsimplex von δ_1 oder δ_2 liegt; da $\mathfrak{N}$ bei beiden Abbildungen nur von Punkten von μ' überdeckt wird und dort $\delta_2' \equiv \delta_2$ ist, sind für alle Punkte von μ, die bei einer der Abbildungen δ_1 und δ_2' in die Punkte der Umgebung von O übergehen, diese beiden Abbildungen simplizial.

Jetzt ordnen wir den Punkten P von μ diejenigen Vektoren zu, die tangential sind an die von O über $\delta_1(P)$ nach $\delta_2'(P)$ führenden Kreisbögen[12a]). Diese Zuordnung ist in folgenden, und nur diesen, Punkten P^* unbestimmt:

1. in den Punkten $P_\varkappa$;
2. in den Punkten $A_1, \ldots, A_r$, für die $\delta_1(A_\varrho) = O$ ist;
3. in den Punkten $B_1, \ldots, B_s$, für die $\delta_2'(B_\sigma) = \delta_2(B_\sigma) = O$ ist.

Jeder dieser Punkte P^* liegt im Innern eines Grundsimplex $S^*(P^*)$ der Zerlegung ζ'. Ist S^{**} ein nur einen dieser singulären Punkte enthaltendes Teilsimplex von S^*[13]), so wird der Umfang von S^{**} durch die seinen Punkten zugeordneten Vektoren, unter Vermittlung stereographischer Projektion, auf die Richtungskugel des in $\delta_1(P^*)$ an $\mathfrak{K}$ tangentialen ebenen Raumes abgebildet. Der Grad dieser Abbildung heiße der „Index" $I(P^*)$. Wir bestimmen $\sum\limits_{P^*} I(P^*)$:

1. es ist $I(P_\varkappa) = a_{12}^{(\varkappa)}$, also $\sum\limits_{P^* = P_\varkappa} I(P^*) = I_{12}$;

2. der Index der Singularität $\delta_1(A_\varrho) = O$ des Vektorfeldes, das von den den Punkten von $S^{**}(A_\varrho)$ zugeordneten, in den Punkten von $\delta_1(S^{**}(A_\varrho))$ angebrachten Vektoren gebildet wird, ist $+1$;[14]) mithin ist $I(A_\varrho) = \pm 1$, je nachdem $\delta_1(S^{**}(A_\varrho))$ positives oder negatives Bildsimplex von $S^{**}(A_\varrho)$ ist. Da aber der Grad g_1 von f_1 die Anzahl der O positiv überdeckenden, vermindert um die Anzahl der O negativ überdeckenden Bildsimplexe ist, ist $\sum\limits_{P^* = A_\varrho} I(P^*) = g_1$;

3. der Index der Singularität $\delta_1(B_\sigma)$ des Vektorfeldes, das von den den Punkten von $S^{**}(B_\sigma)$ zugeordneten, in den Punkten von $\delta_1(S^{**}(B_\sigma))$ angebrachten Vektoren gebildet wird, ist ∓ 1, je nachdem die Simplexe $\delta_1(S^{**}(B_\sigma))$ uud $\delta_2(S^{**}(B_\sigma))$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben[14]); daher ist $I(B_\sigma) = \mp 1$, je nachdem $\delta_2(S^{**}(B_\sigma))$ positives oder negatives Bildsimplex ist. Daraus folgt $\sum\limits_{P^* = B_\sigma} I(P^*) = -g_2$.

Es ist also $\underline{\sum\limits_{P^*} I(P^*) = I_{12} + g_1 - g_2}$.

Wir bestimmen nun $\sum\limits_{P^*} I(P^*)$ noch auf eine zweite Weise:

Wir wählen auf $\mathfrak{K}$ einen beliebigen, keinem Rand eines Bildsimplex von δ_1 angehörigen, aber von mindestens einem solchen überdeckten, Punkt Q. Er werde bei δ_1 von p bzw. p' positiven bzw. negativen Bild-

[12a]) Der Rest dieses Paragraphen ist lediglich eine Modifikation von Betrachtungen Brouwers in der Abhandlung „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten".

[13]) Es könnten zunächst ein A und ein B demselben S^* angehören.

[14]) Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, § 3.

simplexen $T_1, \ldots, T_p$; $T_1', \ldots, T_{p'}'$ überdeckt; es ist $p - p' = g_1$. Als vermittelnde Abbildungen zwecks Einführung euklidischer Koordinatensysteme zur Bestimmung der Indizes der P^* benutzen wir für diejenigen Grundsimplexe, deren Bilder die T und T' sind, die stereographische Projektion von dem Gegenpunkt $\overline{Q}$ von Q aus, für alle anderen Grundsimplexe die stereographische Projektion von Q aus. Es wird also mit dem Rand jedes T_i bzw. T_j' je eine Abbildung L_i bzw. L_j' auf die Richtungskugel des Tangentialraumes ϑ_Q und je eine Abbildung $\overline{L}_i$ bzw. $\overline{L}_j'$ auf die Richtungskugel von $\vartheta_{\overline{Q}}$ vorgenommen; sind die Grade dieser Abbildungen

$$c_i, c_j'; \qquad \bar{c}_i, \bar{c}_j'; \qquad [i = 1, \ldots, p; \quad j = 1, \ldots, p'],$$

dann ist

$$c_\nu + \bar{c}_\nu = c_\nu' + \bar{c}_\nu' = 1 + (-1)^n. \text{ [14]}$$

Nun ist aber $\sum_{P^*} I(P^*)$ gleich der Summe der Abbildungsgrade aller Umfänge von Grundsimplexen von μ auf die entsprechenden Richtungskugeln, und bei dieser Summation heben sich die beiden Beiträge jeder $(n-1)$-dimensionalen Seite auf, sofern sie nicht der Seite eines T oder T' entspricht, also auf zwei verschiedene Richtungskugeln abgebildet wird. Mithin ist

$$\underline{\sum_{P^*} I(P^*)} = \sum_i c_i - \sum_j c_j' + \sum_i \bar{c}_i - \sum_j \bar{c}_j'$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (c_i + \bar{c}_i) - \sum_{j=1}^{p'} (c_j' + \bar{c}_j') = (p - p')(1 + (-1)^n) = \underline{g_1 + g_1(-1)^n}.$$

Früher fanden wir $\sum_{P^*} I(P^*) = I_{12} + g_1 - g_2$, mithin ist

$$\underline{I_{12} = (-1)^n \cdot g_1 + g_2}. \text{ [15]}$$

§ 3.

Über die Curvatura integra n-dimensionaler Modelle.

Es sei eine Hyperfläche m gegeben, die [vgl. § 1] ein Modell einer n-dimensionalen, geschlossenen, zweiseitigen, orientierten Mannigfaltigkeit μ ist. Die positive Indikatrix von m wählen wir so, daß die Abbildungen F der U_P den Grad $+1$ haben, und bestimmen nach der früher gegebenen

[15]) Im Fall $n = 2$ läßt sich die Formel $I_{12} = g_1 + g_2$ funktionentheoretisch bestätigen: Ist $F(z, w)$ eine ganze rationale irreduzible Funktion in z und w von den Graden g_1 bzw. g_2, μ die Riemannsche Fläche des durch $F(z, w) = 0$ definierten analytischen Gebildes, so hat die Gleichung $F(z, z) = 0$ unter gehöriger Berücksichtigung des unendlich fernen Punktes genau $g_1 + g_2$ Wurzeln, vorausgesetzt, daß nicht $F \equiv k(z - w)$, also $F(z, z) \equiv 0$ ist.

Vorschrift die positive Normalenrichtung. — Ist F in ganz μ eineindeutig, so nennen wir m ein „einfaches" oder „Jordansches" Modell; die positive Normalenrichtung ist nicht notwendig nach innen gerichtet, sondern von der Orientierung von μ abhängig. —

Unter $C(m)$, der *„Curvatura integra"* von m, verstehen wir den Grad der durch die zu den Punkten P von μ gehörigen negativen Normalen von m vermittelten Abbildung von μ auf die Richtungskugel R. Ändert man die Orientierung von μ, so sind die Normalen durch ihre diametralen Vektoren zu ersetzen, man hat also, um die neue Curvatura integra $C'(m)$ zu erhalten, 1. μ auf sich mit dem Grad -1, 2. μ auf R mit dem Grad C, 3. R auf sich mit dem Grad $(-1)^{n+1}$ abzubilden; dies ergibt: $C' = -1 \cdot C \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^n C$. $C(m)$ ist also von der Orientierung von μ bei geradem n unabhängig, bei ungeradem n in bezug auf sein Vorzeichen abhängig. — Statt der Normalen lassen sich nach dem Satz von Poincaré-Bohl [s. Einleitung] zur Bestimmung von C auch beliebige andere nach der negativen Seite der $F(U_P)$ gerichtete, mit P stetig variierende Vektoren verwenden. Wir verwenden bis auf weiteres eine, wie im vorigen Paragraphen in ganz μ erklärte, simpliziale modifizierte Approximation γ_1 der Normalenabbildung.

Nun untersuchen wir, wie sich $C(m)$ bei gewissen Arten des Überganges von m zu anderen Modellen von μ verhält:

Es sei zunächst ein m im Innern enthaltendes Element E einer stetig differenzierbaren Abbildung φ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante unterworfen:

$$x'_\nu = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_{n+1}), \qquad [\nu = 1, 2; \ldots, n+1],$$
$$D(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n+1})} \neq 0.$$

m geht dabei in das Modell $m' = \varphi(m)$ über. Nach unserer Festsetzung ist die Orientierung von m' so zu wählen, daß φ die positive Indikatrix von m in die positive Intikatrix von m' überführt; dann gehen die γ_1 vermittelnden, auf m in negativer Richtung angebrachten Vektoren $\mathfrak{C}_1$ in negativ bzw. positiv gerichtete Vektoren $\mathfrak{C}'_1$ auf m' über, je nachdem φ die Indikatrix von E nicht ändert oder ändert, d. h. je nachdem $D > 0$ oder $D < 0$ ist; der Grad der durch die $\mathfrak{C}'_1$ vermittelten Abbildung γ'_1 von μ auf R ist daher entsprechend $(\pm 1)^{n+1} C'$, wobei $C' = C(m')$ ist. Nun wählen wir einen Punkt A von R und bringen in allen Punkten von m die A entsprechenden parallelen Vektoren $\mathfrak{C}_2$ an, die μ durch die Abbildung $\gamma_2(P) = A$ vom Grade 0 auf R beziehen. $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ stimmen (höchstens) in endlich vielen Punkten überein, und es ist (nach § 2) $I_{12} = (-1)^n C$. Die $\mathfrak{C}_2$ gehen durch φ in

Vektoren $\mathfrak{C}_2'$ über, welche eine Abbildung γ_2' von μ auf R vom Grade c_2' vermitteln, und die Übereinstimmungszahl von γ_1' und γ_2' ist

$$I_{12}' = (-1)^n (\pm 1)^{n+1} C' + c_2'.$$

Nach § 1 (letzter Absatz) ist aber $I_{12} = \pm I_{12}'$, also

$$(\pm 1)^n C' = C \mp c_2' (-1)^n.$$

Nun geht die Gesamtheit der in *allen* Punkten von E angebrachten, parallelen, A entsprechenden Vektoren in eine in ganz $E' = \varphi(E)$ eindeutige und stetige Vektorverteilung Δ' über, der die $\mathfrak{C}_2'$ angehören; m' läßt sich, da E' ein Element ist, innerhalb E' durch eine eindeutige und stetige Deformation auf einen Punkt Q zusammenziehen; dabei geht die Abbildung γ_2', wenn man in jedem Moment des Deformationsvorganges dem Punkt P von μ denjenigen Punkt von R zuordnet, der zu dem in dem momentanen Bildpunkt von P angebrachten Vektor Δ' gehört, in eine Abbildung über, die allen Punkten von μ denselben Punkt $\Delta'(Q)$ zuordnet; mithin ist $c_2' = 0$, $C' = (\pm 1)^n C$, und wir haben den Satz erhalten:

Bei einer in einem m enthaltenden Element stetig differenzierbaren Abbildung mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante D ändert sich $C(m)$ allenfalls um den Faktor -1; und zwar tritt diese Änderung dann und nur dann ein, wenn $D < 0$ und n ungerade ist.

Es liegt nun die Frage nahe, ob man die Differenzierbarkeitsvoraussetzung nicht fallen lassen kann. Daß dies wenigstens in einem besonders einfachen Fall möglich ist, lehrt der Satz:

Die Begrenzung m eines Elements hat die Curvatura integra $(\pm 1)^n$.

Beweis: Hat m die „natürliche" Orientierung, so ist der Grad der durch die inneren Normalen N von m auf R vermittelten Abbildung: $(-1)^{n+1} C$. Dieses Feld der N projiziert m stetig auf eine benachbarte Paralellfläche m_1 von m, und läßt sich durch Zusammenziehen von m_1 auf einen inneren Punkt in eine Verteilung nach diesem Punkt weisender Vektoren deformieren, die den Index $(-1)^{n+1}$ hat. Mithin ist $C = 1$ und bei beliebiger Orientierung von m: $C = (\pm 1)^n$. (Bezüglich des Vorzeichens vgl. man den ersten Absatz dieses Paragraphen.)

Wir erweitern jetzt die Klasse der betrachteten Abbildungen: φ braucht nicht mehr in ganz E definiert zu sein, sondern nur noch in einer Umgebung von m, d. h. in der Vereinigungsmenge von Umgebungen aller Punkte von m. Im übrigen bleiben alle Annahmen und Bezeichnungen ungeändert. Es gilt auch jetzt:

$$(\pm 1)^n C' = C \mp c_2' (-1)^n.$$

Wir betrachten neben den zu A gehörigen Vektoren $\mathfrak{C}_2$ noch die zu ihnen diametralen Vektoren $\overline{\mathfrak{C}}_2$. Diese gehen in Vektoren $\overline{\mathfrak{C}}_2'$ über, welche eine Abbildung $\bar{\gamma}_2'$ vom Grade $\bar{c}_2'$ vermitteln, und es ist

$$(\pm 1)^n C' = C \mp \bar{c}_2'(-1)^n,$$

also $\bar{c}_2' = c_2'$. Da die Vektoren $\mathfrak{C}_2'$ und $\overline{\mathfrak{C}}_2'$ zueinander diametral sind, ist aber $\bar{c}_2' = (-1)^{n+1} c_2'$; für gerades n ist also auch jetzt $c_2' = 0$, mithin $C' = C$.

Wir werden zeigen, daß für *ungerades* n $c_2' \neq 0$ sein kann:

Mit einem nicht auf m liegenden Punkt Q als Zentrum nehmen wir eine Transformation durch reziproke Radien vor; diese Abbildung φ erfüllt unsere Voraussetzung; denn in allen von Q verschiedenen Punkten ist φ stetig differenzierbar mit negativer Funktionaldeterminante. φ führt m in ein Modell m', den unendlich fernen Punkt in den Punkt Q über; die Ordnung von Q in bezug auf m' sei q (darunter ist, wie früher, der Grad der durch Projektion des Modells m' von Q auf eine Kugel k um Q vermittelten Abbildung von μ auf k zu verstehen; es ist übrigens leicht zu sehen, daß sie gleich der Ordnung von Q in bezug auf m ist). Die Gesamtheit aller dem Punkt A von R entsprechenden Vektoren des Definitionsbereiches von φ geht bei φ in ein Vektorfeld Δ' mit der einzigen Singularität Q über; ihr Index ist $+2$. Denn φ läßt sich so herstellen: Man projiziere zunächst den ganzen Raum stereographisch auf eine ihn in Q berührende $(n+1)$-dimensionale im $(n+2)$-dimensionalen Raum liegende Kugel K_{n+1}; dabei gehen die zu A gehörigen Vektoren in ein eindeutiges stetiges, nur im Gegenpunkt Q^* von Q singuläres Vektorfeld über, in dem Q^* daher[14]) den Index $+2$ hat. Dann projiziere man K_{n+1} stereographisch von Q aus auf den Berührungsraum in Q^* und darauf diesen senkrecht auf den urprünglichen Raum zurück. Dabei geht Q^* in Q unter Erhaltung des Index über.

Um c_2' zu bestimmen, lassen wir die Punkte von m' gleichförmig in der Zeit 1 auf den von Q ausgehenden Strahlen bis auf eine Kugel k um Q laufen und beobachten dabei die in jedem Augenblick in den laufenden Punkten angebrachten Vektoren von Δ': anfangs sind es die Vektoren $\mathfrak{C}_2'$, am Ende die auf k sitzenden Vektoren; die durch letztere vermittelte Abbildung von μ auf R setzt sich zusammen aus der Projektion von m' aus Q auf k, die den Grad q hat, und der Abbildung von k auf R vom Grade 2, mithin ist $c_2' = 2q$, also

$$C + C' = 2q.$$

Sind insbesondere m und m' einfach, und ist Q im Innern von m gelegen, so liegt Q auch im Innern von m', da Q und der unendlich ferne Punkt durch m voneinander getrennt werden, es ist daher $q = \pm 1$, $C + C' = \pm 2$, und man erkennt:

Besitzt bei ungeradem n das einfache Modell m eine gegenüber Abbildungen der betrachteten Art dem absoluten Betrage nach invariante Curvatura integra, so ist diese gleich ± 1.

Jetzt zeigen wir, daß es für jedes ungerade $n \geqq 3$ einfache Modelle m mit $C(m) = 0 \neq \pm 1$, gibt. Wir betrachten die einparametrige Bewegungsgruppe $x' = f(x; \alpha)$ des $(n+1)$-dimensionalen Raumes, die durch die Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} x'_{2\nu-1} &= f_{2\nu-1}(x_1, \ldots, x_{n+1}; \alpha) = \cos\alpha \cdot x_{2\nu-1} + \sin\alpha \cdot x_{2\nu} \\ x'_{2\nu} &= f_{2\nu}\ (x_1, \ldots, x_{n+1}; \alpha) = -\sin\alpha \cdot x_{2\nu-1} + \cos\alpha \cdot x_{2\nu} \end{aligned}$$

$$\left[\nu = 1, \ldots, \frac{n+1}{2}\right].$$

Die Bahnkurve jedes Punktes ist ein Kreis; zwei solche Kreise sind punktfremd; denn wegen $f(f(x; \alpha); \beta) = f(x; \alpha + \beta)$ folgt aus $f(x; \alpha) = f(y; \beta)$ für *jedes* γ: $f(x; \alpha + \gamma) = f(y; \beta + \gamma)$, d. h. daß die Bahnkreise von x und y zusammenfallen. Der einzige Fixpunkt der Bewegungen ist der Nullpunkt; in jedem andern Punkt ist der Vektor der Bewegungsrichtung ausgezeichnet.

Die $(n-1)$-dimensionale Kugel K_0: $\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - 2)^2 = 1$, $x_{n+1} = 0$ enthält den Nullpunkt nicht. Sie wird ferner von keinem Bahnkreis in zwei Punkten geschnitten; denn wäre für zwei Punkte x und y der Kugel $y = f(x; \alpha)$ mit $\alpha \neq 0$, so folgt aus

$$\begin{aligned} y_n &= \cos\alpha \cdot x_n + \sin\alpha \cdot x_{n+1} \\ y_{n+1} &= -\sin\alpha \cdot x_n + \cos\alpha \cdot x_{n+1} \\ x_{n+1} &= y_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

entweder $x_n = 0$, was mit der Gleichung der Kugel nicht verträglich ist, oder $\alpha = \pi$ und $y_\nu = -x_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$; aus

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - 2)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{n} (-x_\nu - 2)^2 = 1$$

würde aber durch Addition $8n + 2\Sigma x_\nu^2 = 2$, $\Sigma x_\nu^2 = 1 - 4n < 0$ folgen.

Ebenso verhält sich jede Kugel K_α, in die K_0 durch eine unserer Bewegungen übergeführt wird. Daher hat die von K_0 beschriebene Fläche r, d. h. die Gesamtheit aller Punkte $f(x; \alpha)$, für die $f(x, 0)$ auf K_0 liegt, die Eigenschaft, daß nur dann $f(x; \alpha) = f(y; \beta)$ ist, wenn $x = y$, $\alpha = \beta$

ist. r ist daher ein einfaches Modell der von einem Kreis und einer $(n-1)$-dimensionalen Kugel gebildeten Produktmannigfaltigkeit[16]).

Zur Bestimmung von $C(r)$ können wir nach dem Satz von Poincaré-Bohl die an r tangentialen Richtungsvektoren der Bewegung verwenden; die von ihnen geleistete Abbildung auf R hat den Grad 0, da sich r ohne Überschreitung des im Äußeren liegenden, singulären Nullpunkts, also innerhalb des Feldes der Bewegungsvektoren stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Mithin ist $C(r) = 0$, und aus $C + C' = \pm 2$ folgt daher $C' = C(r') = \pm 2$.

Die Produktmannigfaltigkeit μ, deren einfaches Modell r ist, liefert ein auch in anderer Richtung interessantes Beispiel; sie zeigt, daß es unendlich viele, allerdings nicht einfache, Modelle einer Mannigfaltigkeit mit lauter verschiedenen Werten für C geben kann. Da nämlich der Kreis für jede positive ganze Zahl q q-facher unverzweigter Überlagerungsraum von sich selbst ist, gilt dasselbe für jede Produktmannigfaltigkeit, die den Kreis als Faktor enthält. Man kann sich daher r als von einem Modell r_q von μ q-fach überlagert vorstellen; dann hat Q die Ordnung $\pm q$ in bezug auf $\varphi(r_q)$, es ist also $C(\varphi(r_q)) = \pm 2q$, da $C(r_q) = 0$ ist.

Zu einfachen Modellen m mit $C(m) = \pm 1$, also insbesondere zu der n-dimensionalen Kugel liefert die Transformation durch reziproke Radien kein homöomorphes einfaches Modell m' mit $C(m') \neq C(m)$. Es ist mir auch nicht bekannt, ob es ein einfaches Modell m der n-dimensionalen Kugel mit $C(m) \neq \pm 1$ gibt.

Als Hilfsmittel zur Untersuchung des Verhaltens von $C(m)$ bei Abbildungen, über die weniger als bisher vorausgesetzt wird, dient folgende Betrachtung:

Wir bringen an m ein beliebiges Feld V tangentialer Vektoren mit höchstens endlich vielen singulären Stellen an; d. h. wir ordnen jedem Punkt P von μ mit endlich vielen Ausnahmen einen sich mit P stetig ändernden Tangentenvektor in $F(P)$ an m zu (z. B. können wir für V das von den Vektorfeldern $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ erzeugte tangentiale Feld wählen (s. § 1)). Die Summe der Indizes der Singularitäten von V sei s. Wir definieren in μ eine stetige Funktion $w(P)$, die in den singulären Punkten $P_\varkappa$ gleich 0, im übrigen stets positiv und < 1 ist, und ordnen jedem nicht singulären Punkt P den Vektor $H(P)$ zu, der in dem von $V(P)$ und der negativen Normalen $N(P)$ ausgespannten Quadranten liegt und

[16]) S. z. B. Steinitz, Beiträge zur Analysis Situs (Sitz.-Ber. d. Berl. Math. Ges. 7 1908).

mit $N(P)$ den Winkel $w \cdot \frac{\pi}{2}$ bildet; für die $P_\varkappa$ setzen wir $H(P_\varkappa) = N(P_\varkappa)$. Dann sind die H in ganz μ stetig und stimmen mit den N in den $P_\varkappa$ überein. Nach § 1 ist die Übereinstimmungszahl der durch N und H von μ auf R gelieferten Abbildungen $I_{12} = s$. Andererseits haben nach dem Satz von Poincaré-Bohl beide Abbildungen denselben Grad $C = C(m)$, es ist daher nach dem Ergebnis des § 2:

$$s = I_{12} = C + (-1)^n C,$$

also für gerades n:

$$s = 2C.$$

Da nun nach § 1 auf jedem beliebigen Modell m' von μ ein Vektorfeld mit derselben Indexsumme s existiert, folgt jetzt der Satz:

Die Curvatura integra der Modelle einer geschlossenen, zweiseitigen Mannigfaltigkeit μ von gerader Dimensionenzahl ist eine Invariante von μ.

§ 4.

Curvatura integra und Indexsumme; Bedingungen für die Darstellbarkeit einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit im $(n+1)$-dimensionalen Raum.

Die zwischen der Indexsumme s der Singularitäten eines an m tangentialen Vektorfeldes und der Curvatura integra $C(m)$ gültige Beziehung

$$s = C \cdot (1 + (-1)^n)$$

führt zu einigen Folgerungen, die sich zwar nicht unmittelbar auf die Curvatura integra beziehen, aber doch noch betrachtet werden sollen. Zunächst ist aus ihr der Satz zu entnehmen:

Die Indexsumme der Singularitäten eines an ein Modell von μ tangentialen Vektorfeldes ist eine topologische Invariante von μ, d. h. unabhängig von der Wahl des Modells, sowie der des Vektorfeldes; und zwar ist diese Invariante für ungerades n stets 0.

Dieser Satz wird bei Hadamard[17]) ausgesprochen, sogar mit der Erweiterung, daß die betrachteten Modelle in Räumen beliebiger Dimensionenzahl liegen dürfen; jedoch wird in dem betreffenden Kapitel, das nur referierenden Charakter besitzt, kein Beweis angegeben, und auch in der sonstigen Literatur ist mir keiner bekannt. Bemerkenswert ist, daß in den Fällen, in denen s berechnet ist, nämlich für $n = 2$[4]), für ungerades n, für die n-dimensionalen Kugeln[14]) und für die im nächsten Paragraphen betrachteten Mannigfaltigkeiten s gleich der Charakteristik der Mannigfaltig-

[17]) l. c. S. 474f.

keit ist, d. h. $=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\alpha_k$, wenn α_k die Anzahl der bei einer simplizialen Zerlegung vorkommenden k-dimensionalen Simplexe bezeichnet*).

Wir können zu dem Satz von der Invarianz der Indexsumme nun eine verschärfende Aussage machen; wir wissen nämlich:

Die Indexsumme der Modelle von μ ist eine gerade Zahl.

Dabei ist, wie stets, vorausgesetzt, daß μ zweiseitig ist und die Modelle im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum liegen. Dies liefert eine Möglichkeit, die Frage zu beantworten, ob jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ ein solches Modell besitzt: Gestattet nämlich μ eine stetige Deformation $P' = f(P; t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $f(P, 0) = P$, die für $t > 0$ außer endlich vielen festen, d. h. von t unabhängigen, Fixpunkten keinen Fixpunkt besitzt, und ist σ die Summe der Indizes dieser Fixpunkte, so muß, falls μ ein Modell besitzt, σ gerade sein; denn analog dem in § 1 eingeschlagenen Verfahren läßt sich auf dem Modell ein tangentiales Vektorfeld mit der Indexsumme $s = \sigma$ konstruieren. Betrachten wir eine besonders einfache Art von Fixpunkten: wir nennen einen isolierten Fixpunkt ein „Zentrum", wenn er in einem abgeschlossenen, im übrigen fixpunktfreien, Element liegt, das in sich selbst übergeht. Ein Zentrum hat stets den Index $(-1)^n$, da man die von den Punkten P der Berandung des Elements nach den Punkten $f(P)$ zielenden Vektoren unter Festhaltung ihrer Anfangspunkte stetig in solche abändern kann, die nach einem festen Punkt des Inneren zeigen. Wir können daher den Satz aussprechen, daß eine Mannigfaltigkeit keine Hyperfläche als Modell besitzt, wenn sie eine Deformation zuläßt, deren Fixpunkte Zentren und in ungerader Anzahl vorhanden sind. Auf Grund dieser Tatsache läßt sich beweisen:

Die Gesamtheit Z_{2k} der komplexen Punkte des $2k$-dimensionalen projektiven Raumes ist eine $4k$-dimensionale geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit, die keine Hyperfläche als Modell im $(4k+1)$-dimensionalen euklidischen Raum besitzt.

Der Beweis ist nach dem Vorstehenden erbracht, sobald gezeigt ist, daß Z_r eine geschlossene zweiseitige Mannigfaltigkeit ist und eine Deformation der geschilderten Art mit $(r+1)$ Zentren gestattet. Dies wird im nächsten Paragraphen bewiesen, in dem außerdem noch die Charakteristik von Z_r berechnet wird; sie ist ebenfalls $(r+1)$, was im Hinblick

*) **Zusatz bei der Korrektur:** Ein Beweis des bei Hadamard ausgesprochenen Satzes mit dem Zusatz, daß die als Indexsumme auftretende Invariante die Charakteristik ist, wird vom Verfasser in diesen Annalen veröffentlicht werden.

auf die oben erwähnte, auch in anderen Fällen vorhandene Übereinstimmung zwischen Charakteristik und Indexsumme von Interesse ist.

§ 5.

Die komplexen projektiven Räume.

Z_r bezeichne die Gesamtheit der komplexen Punkte des r-dimensionalen projektiven Raumes, d. h. die Gesamtheit aller Verhältnisse $z_0 : z_1 : \ldots : z_r$, in denen die z_ϱ komplexe, nicht sämtlich verschwindende Zahlen sind. Z_r ist $2\,r$-dimensional und im Fall $r = 1$ bekanntlich der Kugel homöomorph.

Z_r ist eine geschlossene Mannigfaltigkeit mit der *Charakteristik* $r + 1$.

Beweis: Wir zerlegen Z_r in $r + 1$ Teile E_ϱ: E_ϱ ist die Gesamtheit derjenigen Punkte von Z_r, für die $|z_\varrho| \geqq |z_\sigma|$ $(\sigma = 0, \ldots, r)$ ist. Da in E_ϱ $z_\varrho \neq 0$ ist, können wir die Koordinaten aller Punkte von E_ϱ so normieren, daß stets $z_\varrho = 1$ ist. Setzen wir dann $z_\sigma = x_\sigma + i\,y_\sigma$, so ist E_ϱ topologisch auf den durch die Ungleichungen $x_\sigma^2 + y_\sigma^2 \leqq 1$ mit $0 \leqq \sigma (\neq \varrho) \leqq r$ definierten Teil E_ϱ' eines $2\,r$-dimensionalen euklidischen Raumes abgebildet. E_ϱ' können wir durch r Kreisscheiben K_σ^ϱ $(0 \leqq \sigma (\neq \varrho) \leqq r)$ vom Radius 1 darstellen, indem wir jede Gruppe von r Punkten A_σ^ϱ, von der der Punkt A_σ^ϱ der Scheibe K_σ^ϱ angehört, als Punkt von E_ϱ' bezeichnen. Daraus, daß wir, ohne die topologische Struktur von E_ϱ zu ändern, statt der Kreisscheiben K_σ^ϱ auch durch Ungleichungen $|x_\sigma| \leqq 1$, $|y_\sigma| \leqq 1$ definierte Quadratscheiben, also statt E_ϱ' einen $2\,r$-dimensionalen Würfel verwenden können, geht hervor, daß E_ϱ ein *Element* ist. — Ein Punkt von Z_r gehört dann und nur dann zugleich E_{ϱ_1} und E_{ϱ_2} an, wenn in ihm $|z_{\varrho_1}| = |z_{\varrho_2}| \geqq |z_\varrho|$ ist, d. h. wenn der Punkt $A_{\varrho_2}^{\varrho_1}$ der ihn in der besprochenen Darstellung von E_{ϱ_1}' repräsentierenden Punktgruppe $A_\sigma^{\varrho_1}$ auf dem Rande von $K_{\varrho_2}^{\varrho_1}$ liegt; daraus ist ersichtlich, daß, wenn $\varrho_1, \ldots, \varrho_s$ s der Zahlen $0, \ldots, r$ sind, der Durchschnitt $E_{\varrho_1, \ldots, \varrho_s}$ der Elemente $E_{\varrho_1}, \ldots, E_{\varrho_s}$ der aus $s - 1$ Kreisen und $r - s + 1$ abgeschlossenen Kreisscheiben gebildeten Produktmannigfaltigkeit homöomorph ist, also die Dimension $s - 1 + 2(r - s + 1) = 2r - s + 1$ hat.

Wir nehmen mit Z_r eine Zerlegung in Elemente vor, die zeigt, daß Z_r eine „Mannigfaltigkeit" entsprechend Brouwers[3]) Definition ist, und ferner die Eigenschaft hat, daß für jedes s jede der Mannigfaltigkeiten $E_{\varrho_1 \ldots \varrho_s}$ ganz aus $(2r - s + 1)$-dimensionalen Elementseiten der Zerlegung besteht. Wie man eine solche Zerlegung herstellen kann, demonstrieren wir an dem Fall $r = 2$ [18]): Der Durchschnitt E_{012} der drei Elemente E_0, E_1, E_2 ist

[18]) Die hierbei angewandte Methode läßt sich ohne weiteres auf beliebiges r übertragen; jedoch wird dann der Wortlaut der Darstellung so kompliziert, daß mir die Behandlung des Spezialfalles $r = 2$ die Verhältnisse deutlicher zu machen scheint als die Betrachtung des allgemeinen Falles.

einer aus zwei Kreisen gebildeten Produktmannigfaltigkeit, also einer Torusfläche, homöomorph; wir können E_{012} durch

$$z_0 = 1, \qquad z_1 = e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = e^{i\varphi_2}; \qquad 0 \leqq (\varphi_1, \varphi_2) \leqq 2\pi;$$

oder durch

$$z_0 = e^{i\varphi_0}, \quad z_1 = 1, \qquad z_2 = e^{i\varphi_2}; \qquad 0 \leqq (\varphi_2, \varphi_0) \leqq 2\pi;$$

oder durch

$$z_0 = e^{i\varphi_0}, \quad z_1 = e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = 1; \qquad 0 \leqq (\varphi_0, \varphi_1) \leqq 2\pi$$

definieren. E_{012} zerlegt den der dreidimensionalen Kugel homöomorphen Umfang von E_0 in die durch

$$\begin{aligned} &z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}; \quad 0 \leqq (\varphi_1, \varphi_2) \leqq 2\pi; \quad 0 \leqq r_2 \leqq 1; \\ &z_0 = 1, \quad z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = e^{i\varphi_2}; \quad 0 \leqq (\varphi_1, \varphi_2) \leqq 2\pi; \quad 0 \leqq r_1 \leqq 1 \end{aligned}$$

bestimmten Mannigfaltigkeiten E_{01} und E_{02}, deren jede dem Produkt aus Kreis und Kreisscheibe, also einem gewöhnlichen Torusraum homöomorph ist; analog werden die Umfänge von E_1 und E_2 durch E_{012} in die Torusräume E_{12} und E_{10} bzw. E_{20} und E_{21} zerlegt. Wir zerlegen nun zunächst E_{012} in ein unsere Forderungen erfüllendes System zweidimensionaler Elemente, indem wir z. B. die zwölf geschlossenen Kurven

$$\left.\begin{aligned} &z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{k\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{i\varphi_2}; \\ &z_0 = e^{i\varphi_0}, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i\frac{k\pi}{2}}; \\ &z_0 = e^{i\frac{k\pi}{2}}, \quad z_1 = e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = 1 \end{aligned}\right\} \; 0 \leqq (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \leqq 2\pi; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ziehen, die auf E_{012} ein Netz von 32 krummlinigen Dreiecken bilden. Jetzt zerlegen wir E_{01} durch die 4 zweidimensionalen Elementarmannigfaltigkeiten F^a $(a = 1, 2, 3, 4)$:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{k\pi}{2}}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}; \quad 0 \leqq \varphi_2 \leqq 2\pi; \quad 0 \leqq r_2 \leqq 1; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

in 4 dreidimensionale Elemente E_{01}^b $(b = 1, 2, 3, 4)$; der Umfang jedes E_{01}^b wird gebildet von 2 der F^a, sowie einem Viertel von E_{012}, und dieses Viertel setzt sich aus Elementen der vorgenommenen Einteilung von E_{012} zusammen, da seine beiden Ränder selbst Netzkurven sind. In jeder der beiden das betrachtete E_{01}^b begrenzenden F^a ziehen wir die 4 durch

$$z_2 = r_2 e^{i\frac{k\pi}{2}}; \quad 0 \leqq r_2 \leqq 1; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

definierten Kurven; sie gehen von demselben Punkt von F^a aus und enden in den 4 auf dem Rand von F^a liegenden Eckpunkten der Einteilung von E_{012}. Auf diese Weise ist der Umfang von E_{01}^b einer Zerlegung der gewünschten Art unterzogen, die in dem E_{012} angehörigen Teil mit der dort bereits vorhandenen Zerlegung übereinstimmt. Diese Zerlegung des Umfanges von E_{01}^b erweitern wir zu einer Zerlegung des Elementes E_{01}^b selbst, indem wir von einem inneren Punkt aus diejenigen Kurven nach den Seiten- und Eckpunkten der Umfangszerlegung ziehen, die bei der topologischen Abbildung von E_{01}^b auf das Innere einer zweidimensionalen Kugel den Geraden entsprechen. Indem wir so mit allen vier E_{01}^b verfahren, teilen wir ganz E_{01} in der geforderten Art in Elemente ein, und dasselbe machen wir mit E_{12} und E_{02}. Erweitern wir die nunmehr vorliegende Zerlegung der Umfänge von E_0, E_1, E_2 in der geschilderten Weise auf E_0, E_1, E_2 selbst, so erhalten wir eine Zerlegung von Z_2, die allen gestellten Anforderungen genügt.

Die Eigenschaft der so mit Z_r vorgenommenen Zerlegung, daß jede Mannigfaltigkeit $E_{\varrho_1,\ldots,\varrho_s}$ ganz aus Elementseiten besteht, läßt sich auch so ausdrücken: Entweder gehört kein innerer Punkt einer vorgelegten Elementseite oder es gehört die ganze Elementseite zu E_ϱ. Dies berechtigt uns, die Gesamtheit aller die Zerlegung hervorrufenden Elemente beliebiger Dimensionenzahl (d. h. Ecken, ν-dimensionalen Seiten, $2r$-dimensionalen Elemente) in $r+1$ Komplexe K_s $(s=1,\ldots,r+1)$ einzuteilen, die dadurch bestimmt sind, daß K_s diejenigen Elemente e_s enthält, welche genau s der E_ϱ angehören. K_s habe die Charakteristik $k(K_s)=\beta_s$, d. h. es sei $\beta_s=\sum\limits_{\nu=0}^{2r}(-1)^\nu\alpha_\nu^{(s)}$, wobei die Anzahl der K_s angehörigen ν-dimensionalen Elemente mit $\alpha_\nu^{(s)}$ bezeichnet ist. Wir bestimmen β_m zunächst für $m\geqq 2$: $E_{\varrho_1,\ldots,\varrho_s}$ hat als Produktmannigfaltigkeit mit einem Kreis als Faktor die Charakteristik $k(E_{\varrho_1,\ldots,\varrho_s})=0$, da die Charakteristik eines Produktes gleich dem Produkt der Charakteristiken der Faktoren ist[16]), und der Kreis die Charakteristik 0 hat[19]). Es ist also $S_s=0$, wenn man $S_s=\Sigma\, k(E_{\varrho_1,\ldots,\varrho_s})$ setzt, wobei die Summe über alle die E zu erstrecken ist, die s Indizes haben; ein K_m angehöriges Element, das in $E_{\lambda_1,\ldots,\lambda_m}$ liegt, kommt in allen den $E_{\varrho_1,\ldots,\varrho_s}$ vor, deren Indizes unter den $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ enthalten sind, es wird bei der Bildung von S_s daher genau $\binom{m}{s}$ mal gezählt. Mithin bestehen die Relationen

$$S_s=\sum_{m=1}^{r+1}\binom{m}{s}\beta_m=0 \qquad [s=2,\ldots,r+1],$$

---

[19]) Für ein Produkt mit einem Kreis als Faktor ergibt sich das Verschwinden der Charakteristik auch ohne den im Text benutzten Steinitzschen Satz daraus, daß eine solche Mannigfaltigkeit zweifacher unverzweigter Überlagerungsraum von sich selbst ist; denn dann folgt: $k(\mu)=2k(\mu)$, $k(\mu)=0$.

die sich, da $\binom{m}{s} = 0$ für $m < s$ ist, in der Form schreiben lassen:

$$\sum_{m=s}^{r+1} \binom{m}{s} \beta_m = 0 \qquad [s = 2, \ldots, r+1].$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist 1, da in der Hauptdiagonale lauter Einsen, unter ihr lauter Nullen stehen; mithin ist $\beta_m = 0$ für $m \geqq 2$. Für $s = 1$ lautet die entsprechende Gleichung

$$S_1 = \sum_{\varrho=0}^{r} k(E_\varrho) = \sum_{m=1}^{r+1} m\,\beta_m = \beta_1,$$

und da E_ϱ als Element die Charakteristik 1 hat, ist $\beta_1 = r+1$. — Die Charakteristik von Z_r ist daher

$$\underline{k(Z_r)} = \sum_{s=1}^{r+1} k(K_s) = \sum_{s=1}^{r+1} \beta_s = \underline{r+1}, \qquad \text{w. z. b. w.}[20]$$

Z_r ist *einfach zusammenhängend*; denn für $r = 1$ ist dies bekannt, und wir brauchen daher nur den einfachen Zusammenhang von Z_r nachzuweisen, wenn wir ihn von Z_{r-1} schon kennen: ist eine geschlossene Kurve $z_0(t), \ldots, z_r(t)$ gegeben, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Punkt $0, 0, \ldots, 0, 1$ nicht auf ihr liegt; die Punkte $z_0(t), \ldots, z_{r-1}(t)$, $\lambda z_r(t)$ bilden daher für jedes λ, auch für $\lambda = 0$, eine geschlossene Kurve. Läuft λ von 1 bis 0, so wird die gegebene Kurve K_1 stetig in die Kurve K_0: $z_0(t), \ldots, z_{r-1}(t)$, 0 transformiert; diese gehört dem durch die Gleichung $z_r = 0$ definierten Gebilde an, das homöomorph mit Z_{r-1} ist. Da Z_{r-1} als einfach zusammenhängend angenommen wird, läßt sich K_0 in dem Gebilde $z_r = 0$ stetig auf einen Punkt zusammenziehen, womit die Deformation von K_1 auf einen Punkt vollendet ist.

Aus dem einfachen Zusammenhang geht hervor, daß Z_r *zweiseitig* ist.

Z_r läßt eine eindeutige und stetige, die Identität enthaltende Deformation

$$P' = f(P; t); \quad 0 \leqq t \leqq 1; \quad f(P, 0) = P$$

[20]) Herr H. Künneth teilte mir brieflich mit, daß er die Bettischen Zahlen von Z_2 bestimmt und $P_1 = P_3 = 1$, $P_2 = 2$ gefunden hat; hieraus folgt für die Charakteristik $k(Z_2)$ nach der Formel $k = \sum_{i=0}^{n} P_i(-1)^i + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ (s. Tietze, Die topologischen Invarianten ..., Wiener Monatshefte **19** (1908), S. 48) unter Berücksichtigung von $P_0 = P_n = 1$ (Tietze, l. c., S. 35, Fußn. 5) in Übereinstimmung mit unserem Ergebnis: $k(Z_2) = 3$.

zu, welche $r+1$ von t unabhängige *Zentren*, im übrigen für $t > 0$ aber keinen Fixpunkt besitzt.

Denn bei der Deformation

$$z'_\varrho(z_0, \ldots, z_r; t) = e^{\frac{\varrho t}{r+1}\cdot 2\pi i}\cdot z_\varrho \quad [\varrho = 0, \ldots, r],\ [0 < t \leqq 1]$$

bleiben die $r+1$ durch

$$1, 0, \ldots, 0; \quad 0, 1, 0, \ldots, 0; \quad \ldots; \quad 0, 0, \ldots, 0, 1$$

definierten Punkte fest; sie sind Zentren, da jedes E_ϱ in sich deformiert wird und genau einen dieser Punkte im Innern enthält. Andere Fixpunkte treten aber nicht auf; denn für einen solchen gäbe es zwei Indizes $\varrho_1 > \varrho_2$ mit

$$z_{\varrho_1} \neq 0, \quad z_{\varrho_2} \neq 0, \quad z'_{\varrho_1} : z'_{\varrho_2} = z_{\varrho_1} : z_{\varrho_2}, \quad \text{also} \quad e^{\frac{\varrho_1 t}{r+1} 2\pi i} = e^{\frac{\varrho_2 t}{r+1}\cdot 2\pi i},$$

$$\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)\, t}{r+1}\cdot 2\pi = 2k\pi \geqq 2\pi, \quad (\varrho_1 - \varrho_2)\, t \geqq r+1,$$

während doch $0 < \varrho_1 - \varrho_2 \leqq r$, $0 < t \leqq 1$, also $(\varrho_1 - \varrho_2)\, t \leqq r$ ist.

(Eingegangen am 7. 3. 1925.)