

Vektorfelder in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Poincaré hat bewiesen, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, in jedem Punkt einer stetig differenzierbaren, geschlossenen, unberandeten Fläche vom Geschlecht p einen Tangentialvektor derart anzubringen, daß das so entstehende Vektorfeld überall stetig ist; er hat gezeigt, daß die Summe der „Indizes“ der dabei auftretenden Singularitäten den Wert $2 - 2p$ hat, woraus folgt, daß für $p \neq 1$ immer Unstetigkeitsstellen vorhanden sein müssen¹⁾. Brouwer hat diesen Satz auf die n -dimensionalen Kugeln ausgedehnt: auch hier ist die Summe der Indizes der Singularitäten unabhängig von der speziellen Wahl des Vektorfeldes; sie ist 2 für die Kugeln gerader, 0 für die Kugeln ungerader Dimensionenzahl²⁾. Diese Tatsachen lassen sich auch aus einem ungefähr gleichzeitig mit der betreffenden Brouwerschen Arbeit von Hadamard ohne Beweis veröffentlichten allgemeineren Satze folgern, welcher besagt, daß für jede im $(n + k)$ -dimensionalen ($k \geq 1$) euklidischen Raum liegende n -dimensionale, geschlossene, unberandete Mannigfaltigkeit die Summe der Indizes der Singularitäten eines tangentialen Vektorfeldes eine *topologische Invariante* der Mannigfaltigkeit sei, so daß z. B. zur Bestimmung der von Brouwer für die Kugeln angegebenen Zahlen die Betrachtung *spezieller* Vektorfelder genügt³⁾. (Wie mir Herr Brouwer mitteilt, sind übrigens die

¹⁾ Sur les courbes définies par les équations différentielles, 3. partie, chap. 13, Journ. de Math. (4) 1 (1885).

²⁾ Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (datiert vom Juli 1910).

³⁾ Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker in Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable II, 2. éd. (1910), Nr. 42. — Es wird dort auf Arbeiten von Poincaré, Dyck, Brouwer verwiesen; in den in Frage kommenden Abhandlungen dieser drei Autoren behandeln Poincaré und Brouwer die im Text genannten speziellen Fälle, während Dyck zwar verwandte Sätze, aber nicht den bei Hadamard formulierten Satz beweist.

Brouwersche und die Hadamardsche Arbeit teilweise unter Gedankenaustausch zwischen den beiden Verfassern entstanden.)

Gelegentlich der Untersuchung der *Curvatura integra* geschlossener Hyperflächen gelangte ich zu einem Beweis des von Hadamard ausgesprochenen Satzes für den Fall, daß $k = 1$ ist⁴⁾; da jedoch, wie sich gleichzeitig herausstellte, nicht jede n -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit regulär in den $(n + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raum eingebettet werden kann, so handelte es sich dabei nur um einen Spezialfall der fraglichen Behauptung.

In der vorliegenden Arbeit wird sie nun vollständig bewiesen. Der Satz wird dabei in zwei Richtungen verschärft: die eine, unwesentliche, Verschärfung besteht darin, daß man sich von der Einbettung der Mannigfaltigkeit in einen Raum höherer Dimensionenzahl überhaupt frei macht, was bei geeigneter Definition der Vektorfelder, insbesondere bei der Deutung des Vektorfeldes als einer „kleinen Transformation“, leicht geschieht; zweitens aber wird die als Summe der Indizes auftretende topologische Invariante wirklich angegeben: sie ist gleich der *Eulerschen Charakteristik* der Mannigfaltigkeit, was nach ihrer in speziellen Fällen bereits vorliegenden Bestimmung zu erwarten war. Singularitätenfreie Vektorfelder sind in einer Mannigfaltigkeit mithin nur möglich, wenn die Charakteristik 0 ist. Die Frage liegt nahe, ob umgekehrt, im Falle verschwindender Charakteristik, also z. B. im Fall einer geschlossenen unberandeten Mannigfaltigkeit ungerader Dimensionenzahl⁵⁾, sich immer ein singularitätenfreies Vektorfeld konstruieren läßt. Diese Frage wird bejaht, indem die gewünschte Konstruktion auf die Lösung gewisser „Randwertaufgaben für Vektorverteilungen“ zurückgeführt wird, die ich in anderem Zusammenhang behandelt habe⁶⁾. Eine der Folgerungen aus diesen Tatsachen ist der Satz: „Eine Mannigfaltigkeit gestattet dann und nur dann beliebig kleine fixpunktfreie Transformationen in sich, wenn ihre Charakteristik den Wert 0 hat.“ Insbesondere läßt also jede unberandete geschlossene Mannigfaltigkeit ungerader Dimensionenzahl derartige Transformationen zu, während dies bei Mannigfaltigkeiten gerader Dimensionenzahl im allgemeinen nicht der Fall ist.

Ein verhältnismäßig breiter Raum (§§ 1, 2) mußte für die Diskussion von — größtenteils bekannten — Begriffen und Tatsachen verwendet werden, welche Komplexe, Mannigfaltigkeiten und deren Darstellung

⁴⁾ Über die *Curvatura integra* geschlossener Hyperflächen, Math. Ann. 95 (1925).

⁵⁾ S. z. B. H. Tietze, Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, Wiener Monatshefte für Math. u. Phys. 19 (1908), § 8.

⁶⁾ Abbildungsklassen n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 96.

betreffen. Der Zusammenhang zwischen der Indexsumme der Singularitäten eines Vektorfeldes und der Eulerschen Charakteristik wird im wesentlichen in § 3 behandelt; dies geschieht durch Schluß von $n - 1$ auf n Dimensionen; dabei ist das $(n - 1)$ -dimensionale Gebilde, auf das man im Verlauf des für n -dimensionale *Mannigfaltigkeiten* zu führenden Beweises zurückzugehen hat, keine Mannigfaltigkeit mehr, sondern ein „Komplex“, der Randkomplex der Mannigfaltigkeit. Dieser Umstand macht es notwendig, da man in Komplexen nicht ohne weiteres von Stetigkeit einer Vektorverteilung reden kann, einen neuen Begriff einzuführen, den des „komplexstetigen Vektorfeldes“. In § 4 wird eine den Beweis des § 3 vervollständigende Hilfskonstruktion nachgetragen, und in § 5 wird dem Satz seine endgültige Formulierung gegeben; er wird in der oben erwähnten Weise als Fixpunktsatz für kleine Transformationen aufgefaßt und auf Grund der Lösbarkeit der „Randwertaufgaben“ in der ebenfalls schon angedeuteten Weise umgekehrt; ferner wird gezeigt, daß die Zahlen, die als die „Totalkrümmungen“ geschlossener Hyperflächen⁴⁾ auftreten, in vielen Fällen als Eulersche Charakteristiken gedeutet werden können.

§ 1.

Komplexe und ihre Darstellungen.

1. Im n -dimensionalen gewöhnlichen Raum seien β^n Simplexe T_{ν}^n [$\nu = 1, \dots, \beta^n$] gegeben; ihre k -dimensionalen [$0 \leq k < n$] Randsimplexe seien mit T_{ν}^k [$\nu = 1, \dots, \beta^k$] bezeichnet. Die T_{ν}^n bilden eine „Komplexdarstellung“ $\mathfrak{D}^n$, wenn zwischen den Punkten gewisser T_{ν}^n , die, „miteinander verbunden“ genannt werden, Zuordnungen folgender Art bestehen:

T_1^n, T_2^n seien miteinander verbunden; dann gibt es zwei zu T_1^n, T_2^n gehörige Simplexe T_1^k, T_2^k [$0 \leq k \leq n$], deren Punkte eineindeutig und stetig so aufeinander bezogen sind, daß jedem T_1^p [$0 \leq p \leq k$] von T_1^k ein T_2^p von T_2^k entspricht, während zwei nicht zu T_1^k, T_2^k gehörige Punkte A_1, A_2 von T_1^n, T_2^n nicht einander zugeordnet sind. Diese Zuordnung ist transitiv, d. h.: sind einerseits A_1, A_2 , andererseits A_2, A_3 einander zugeordnete Punkte von T_1^n, T_2^n bzw. T_2^n, T_3^n , so sind auch A_1, A_3 einander zugeordnet.

Infolge der Transitivität können wir für jedes p [$0 \leq p \leq n$] die β^p Simplexe T_{ν}^p derart in α^p Gruppen g_{λ}^p [$\lambda = 1, \dots, \alpha^p$; $1 \leq \alpha^p \leq \beta^p$] einteilen, daß die einer g^p angehörigen T^p einander zugeordnet sind, und analog lassen sich die Punkte A in Gruppen a zusammenfassen. Wir nennen die Gruppen a die „Punkte“, die Gruppen g_{λ}^p die „Simplexe“ des „durch $\mathfrak{D}^n$ dargestellten Komplexes C^n “, und sagen, daß zwei zu derselben Gruppe gehörige Punkte bzw. Simplexe von $\mathfrak{D}^n$ „identisch in C^n “ sind.

2. Ist in zwei Komplexdarstellungen $\mathfrak{D}_1^n, \mathfrak{D}_2^n$ für jedes k : $\beta_1^k = \beta_2^k$, und unterscheiden sie sich nicht hinsichtlich der Gruppierungen $g_{\lambda k}^k$ ihrer Simplexe, sondern nur hinsichtlich der Punktzuordnungen innerhalb der Simplexe $T_{\nu k}^k$, so nennen wir sie „isomorph“; zwei durch isomorphe $\mathfrak{D}_1^n, \mathfrak{D}_2^n$ dargestellte Komplexe C_1^n, C_2^n lassen sich eineindeutig und stetig so aufeinander abbilden, daß k -dimensionale Simplexe einander so entsprechen, wie es durch den Isomorphismus vorgeschrieben ist⁷⁾, und wir betrachten sie als nicht voneinander verschieden.

Zu jeder Darstellung $\mathfrak{D}^n$ gibt es eine ihr isomorphe „affine“ Darstellung $\mathfrak{A}^n$, d. h. eine solche, in der die Abbildungen von je zwei einander zugeordneten Simplexen aufeinander affin sind; um eine solche Darstellung zu erhalten, hat man nur mit je zwei Simplexen $T_{\nu k}^k$ diejenige affine Abbildung aufeinander vorzunehmen, die durch die vermöge $\mathfrak{D}^n$ vorgeschriebene Zuordnung ihrer Ecken eindeutig bestimmt ist.

Eine Darstellung $\mathfrak{D}^n$ heißt „reduziert“, wenn in ihr $\alpha^n = \beta^n$ ist, d. h. wenn Zuordnungen nur für Randpunkte, nicht für innere Punkte der $T_{\nu n}^n$ vorgenommen sind. Man kann jede Darstellung durch Fortlassung gewisser $T_{\nu n}^n$ „reduzieren“, und wir betrachten den durch die reduzierte Darstellung repräsentierten Komplex als nicht verschieden von dem ursprünglichen. Im allgemeinen haben wir im folgenden reduzierte affine Komplexdarstellungen im Auge.

3. Die $(n-1)$ -dimensionalen Randsimplexe $T_{\nu, n-1}^{n-1}$ von $\mathfrak{D}^n$ bilden bei Aufrechterhaltung der durch $\mathfrak{D}^n$ vorgeschriebenen Zuordnungen eine $(n-1)$ -dimensionale Komplexdarstellung $\mathfrak{D}^{n-1}$. Ist $\mathfrak{D}^n$ affin, so ist auch $\mathfrak{D}^{n-1}$ affin, jedoch ist $\mathfrak{D}^{n-1}$ im allgemeinen auch bei reduziertem $\mathfrak{D}^n$ nicht reduziert. Den durch $\mathfrak{D}^{n-1}$ dargestellten Komplex C^{n-1} nennen wir den „Randkomplex“ von C^n .

4. Zerlegt man jedes $T_{\nu n}^n$ von $\mathfrak{D}^n$ derart in endlich viele Teilsimplexe, daß die so entstandenen Zerlegungen verschiedener $T_{\nu k}^k$ [$1 \leq k \leq n$], sofern diese einander zugeordnet sind, miteinander „identisch in C^n “ sind, so entsteht damit „durch Unterteilung“ von $\mathfrak{D}^n$ bzw. C^n eine Darstellung $\mathfrak{D}_1^n$ eines Komplexes C_1^n . C^n und C_1^n haben bekanntlich dieselbe „Eulersche Charakteristik“; diese ist in der obigen Bezeichnung für C^n definiert als $\sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^k$. Durch die mit den $T_{\nu n}^n$ vorgenommene Zerlegung entsteht gleichzeitig durch Unterteilung von $\mathfrak{D}^{n-1}$ bzw. C^{n-1} eine Darstellung $\mathfrak{D}_1^{n-1}$ des Randkomplexes C_1^{n-1} von C_1^n .

⁷⁾ H. Kneser, Die Topologie der Mannigfaltigkeiten (Anhang), Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 34, 1.—4. Heft (1925). — Es werden dort zwar nur Mannigfaltigkeiten betrachtet, doch bleibt die Argumentation unverändert für Komplexe gültig.

$\mathfrak{U}^n$ sei eine affine Darstellung. Dann ist jede durch Unterteilung entstandene Darstellung $\mathfrak{U}_1^n$ auch affin. Man kann mit einer vorgelegten affinen Darstellung $\mathfrak{U}^n$ folgendermaßen eine beliebig dichte Unterteilung vornehmen: m sei eine beliebig große ganze Zahl; man teile jede Kante $T_{\nu,1}^1$ in m gleiche Teile und lege durch jeden Teilpunkt A die parallelen ebenen Räume zu denjenigen T^{n-1} , die demselben T^n angehören wie A , ohne A zu enthalten. Auf diese Weise wird jedes T^k in endlich viele beliebig kleine konvexe Polyeder P^k zerlegt, und diese Zerlegungen sind in einander zugeordneten T^k „identisch in C^n “. Die P^k zerlegt man nun weiter in Simplexe, und zwar wieder unter Beachtung der vorhandenen Zuordnungen, so daß eine Unterteilung von C^n entsteht⁸⁾. — Dabei ist für eine spätere Anwendung folgende Bemerkung wichtig: Bezeichnen wir zwei Polyeder als nach „Gestalt und Lage“ nicht voneinander verschieden, wenn sie durch Dehnung und Translation — also in einem $(x_1, \dots, x_n)$ -Koordinatensystem durch eine Transformation $x'_\nu = c x_\nu + a_\nu$ [$\nu = 1, \dots, n$] — ineinander übergeführt werden können, so kommen für die P^n , unabhängig von der Zahl m , nach Gestalt und Lage nur endlich viele Polyeder in Betracht. In der Tat: führen wir z. B. in T_1^n , dessen Seiten $T_1^{n-1}, \dots, T_{n+1}^{n-1}$ seien, derart ein affines Koordinatensystem ein, daß die der Seite T_{n+1}^{n-1} gegenüberliegende Ecke der Nullpunkt, die von ihm ausgehenden Kanten die Achsen, die übrigen n Ecken die Einheitspunkte auf den Achsen sind, so ist ein zu T_1^n gehöriges P^n ein Teil eines „Parallelepipedons“ Π , dessen Kanten den Einheitsstrecken des Koordinatensystems parallel und proportional — nämlich von der Länge $\frac{1}{m}$ — sind, also eines nach Gestalt und Lage von m unabhängigen Gebildes; und zwar ist P^n eines der Stücke von Π , die man erhält, wenn man durch jede Ecke von Π den zu T_{n+1}^{n-1} parallelen ebenen Raum legt, die also ebenfalls nach Gestalt und Lage von vornherein bestimmt sind. Nun läßt sich auch die Zerlegung dieser P^n in Simplexe nach Gestalt und Lage von vornherein vorschreiben⁹⁾. — Diese Überlegung gilt für jedes einzelne $T_{\nu,n}^n$; damit ist gezeigt, daß man durch eine beliebig dichte Unterteilung (d. h. eine Unterteilung mit beliebig großem m) von $\mathfrak{U}^n$ eine Darstellung $\mathfrak{U}_1^n$ herstellen kann, deren Simplexe von vornherein in bezug auf Gestalt und Lage auf endlich viele vorgegebene, allein durch $\mathfrak{U}^n$ bestimmte mögliche Fälle beschränkt sind.

5. Es sei T_1^n ein Simplex von $\mathfrak{D}^n$, T_1^{n-k} [$k \geq 1$] ein Randsimplex von T_1^n . T_1^{n-k} gehört k Simplexen T_κ^{n-1} [$\kappa = 1, \dots, k$] an; der T_1^{n-k}

⁸⁾ Hadamard, a. a. O. Nr. 10, Fußnote 2).

⁹⁾ Man verbinde den Schwerpunkt jedes P^k [$2 \leq k \leq n$] mit jeder Ecke von P^k und mit dem Schwerpunkt jedes P^l [$2 \leq l < k$], das dem Rand von P^k angehört.

enthaltende ebene $(n - k)$ -dimensionale Raum E^{n-k} ist der Durchschnitt der k $(n - 1)$ -dimensionalen ebenen Räume E_x^{n-1} , welche die T_x^{n-1} enthalten. Jeder E_x^{n-1} zerlegt den n -dimensionalen Raum in zwei Teile; denjenigen, der T_1^n enthält, nennen wir die „positive Seite“ von E_x^{n-1} . Den Durchschnitt der positiven Seiten der E_x^{n-1} [$x = 1, \dots, k$] nennen wir das „Innere“ des durch die E_x^{n-1} gebildeten „ k -fachen Winkels W_k^n “, dessen Scheitel E^{n-k} ist; das Innere mit Einschluß des Randes ist der „abgeschlossene Winkelraum“ W_k^n . (Unter einem W_1^n ist demnach die durch einen E^{n-1} bestimmte positive Hälfte des Raumes zu verstehen.) Jeder W_k^n wird begrenzt durch k abgeschlossene Winkelräume W_{k-1}^{n-1} , die der durch $\mathfrak{D}^n$ definierten Darstellung $\mathfrak{D}^{n-1}$ des Randkomplexes C^{n-1} angehören.

6. $\mathfrak{A}^n$ sei eine affine reduzierte Darstellung von C^n , $\mathfrak{A}^{n-1}$ die zugehörige affine (nicht reduzierte) Darstellung des Randkomplexes C^{n-1} , $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ eine reduzierte affine Darstellung von C^{n-1} in einem ebenen Raum F^{n-1} . E_1^{n-1} sei der das Randsimplex T_1^{n-1} von $\mathfrak{A}^n$ enthaltende ebene Raum, P_1 ein Punkt von T_1^{n-1} , w_1 ein in P_1 angebrachter, in E_1^{n-1} liegender Halbstrahl. Sind $T_2^{n-1} \dots T_r^{n-1}$ die mit T_1^{n-1} in C^n identischen Randsimplexe von $\mathfrak{A}^n$, $P_2, \dots, P_r$ die Punkte in ihnen, die mit P_1 identisch sind, so sind vermöge der affinen Zuordnung zwischen den die T_ϱ^{n-1} [$\varrho = 1, \dots, r$] enthaltenden E_ϱ^{n-1} Halbstrahlen $w_2, \dots, w_r$ definiert, die in den P_ϱ beginnen und in den E_ϱ^{n-1} liegen. Diesen r in $\mathfrak{A}^{n-1}$ definierten Strahlen entspricht in $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ vermöge der affinen und transitiven Zuordnung genau ein Strahl w^* von F^{n-1} , der in dem P_1 entsprechenden Punkt p des Simplexes t^{n-1} von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ angebracht ist, welches das Bild der T_ϱ^{n-1} ist. Gehören P_1 und w_1 gleichzeitig mehreren $(n - 1)$ -dimensionalen Randsimplexen T^{n-1} von $\mathfrak{A}^n$ an, so entsprechen dem Halbstrahl w_1 und den mit ihm in C^n identischen Halbstrahlen $w_2, \dots, w_m$ [$m \geq r$] von $\mathfrak{A}^n$ mehrere Halbstrahlen von F^{n-1} , welche dann jedoch alle in Randräumen von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ liegen und vermöge der affinen und transitiven Beziehung zwischen den Randräumen von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ aufeinander abgebildet sind.

7. Es sei $k \geq 1$, T^{n-k} ein Randsimplex von $\mathfrak{A}^n$, P ein Punkt von T^{n-k} , E^{n-k} der T^{n-k} enthaltende ebene Raum, W_k^n der zu E^{n-k} als Scheitel gehörige k -fache Winkel, u ein in P angebrachter, ins Innere von W_k^n gerichteter Halbstrahl, $\bar{u}$ der zu u diametrale Halbstrahl, e^2 eine von u und $\bar{u}$ ausgespannte 2-dimensionale Halbebene. e^2 schneidet jeden der k Randräume E_x^{n-1} [$x = 1, \dots, k$], die E^{n-k} enthalten, in einem Halbstrahl w_x . Sind T_x^{n-1} die den E_x^{n-1} angehörigen Randsimplexe, so entspricht jedem T_x^{n-1} ein Simplex t_x^{n-1} von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$, an jedem von diesen gibt es ein t_x^{n-k} , welches das Bild von T^{n-k} ist, zu jedem t_x^{n-k} gehört

ein Winkel $(w_{k-1}^{n-1})_\kappa$ von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$; in jedem t_κ^{n-k} gibt es einen Bildpunkt p_κ von P , und jedem w_κ entspricht ein in p_κ angebrachter Strahl w_κ^* von F^{n-1} . Wir betrachten die Richtungen dieser w_κ^* genauer; es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. (Hauptfall): e^2 habe mit je 2 der E_κ^{n-1} nur den Punkt P gemeinsam; dann gehört jeder der Strahlen w_κ nur einem T_κ^{n-1} an; kein w_κ^* ist daher in einem $(n-2)$ -dimensionalen Randraum von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ gelegen. Dreht man u in e^2 bis in die Lage $\bar{u}$, so sei w_1 der erste Schnitt mit einem E_κ^{n-1} ; dann ist w_1 der einzige w_κ , der dem Rande von W_k^n angehört, da alle andern w_κ ins Äußere von W_k^n zeigen. Daher zeigt w_1^* ins Innere von $(w_{k-1}^{n-1})_1$, während alle anderen w_κ^* ins Äußere ihrer $(w_{k-1}^{n-1})_\kappa$ gerichtet sind.

II. (Grenzfall): e^2 habe mit mehreren der E_κ^{n-1} gleichzeitig außer P noch einen Punkt, also einen Halbstrahl gemeinsam; dann sind nicht alle w_κ voneinander verschieden. Die k Halbstrahlen w_κ lassen sich in i Gruppen ($i < k$) derart zusammenfassen, daß die Strahlen einer Gruppe in einen Strahl w'_j [$j = 1, \dots, i$] zusammenfallen. Für die w'_j bleiben die in Fall I für die w_i festgestellten Tatsachen richtig. Ist w'_1 der erste Schnitt des gedrehten Strahls u mit einem E_κ^{n-1} und ist w'_1 nur mit einem einzigen w_κ identisch, so bleibt das Resultat der Überlegung von Fall I unverändert bestehen, daß von den w_κ^* [$\kappa = 1, \dots, k$] genau einer, nämlich w_1^* , ins Innere seines $(w_{k-1}^{n-1})_1$ zeigt, alle anderen w_κ^* ins Äußere ihrer $(w_{k-1}^{n-1})_\kappa$ gerichtet sind. Ist dagegen w'_1 mit mehreren w_κ identisch, so ist diese Tatsache dahin zu modifizieren, daß gewisse w_κ^* , etwa $w_1^*, \dots, w_m^*$ (nämlich diejenigen, die w'_1 entsprechen), den Rändern ihrer $(w_{k-1}^{n-1})_\kappa$ angehören, und zwar so, daß sie vermöge der in $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ definierten affinen transitiven Zuordnungen aufeinander abgebildet sind, während alle anderen w_κ^* [$\kappa = m+1, \dots, k$] ins Äußere ihrer $(w_{k-1}^{n-1})_\kappa$ weisen.

Bevor wir die hiermit festgestellten Tatsachen verwerten, haben wir noch spezielle Komplexe zu betrachten.

§ 2.

Mannigfaltigkeiten und ihre Darstellungen.

1. Ein Eckpunkt $T_{\nu,0}^0$ einer reduzierten Darstellung von C^n heißt ein „regulärer Eckpunkt“, wenn die $T_{\nu,k}^k$ [$k = 1, \dots, n$], die ihn sowie die mit ihm in C^n identischen Punkte enthalten, einander zugeordnet sind wie zusammenfallende Simplexe und Randsimplexe der Simplexe eines gewissen Simplexsterns des n -dimensionalen kartesischen Raums. Dabei verstehen wir unter einem Simplexstern ein aus endlich vielen Simplexen derart zusammengesetztes Element S^n , daß alle Simplexe einen Eckpunkt

A gemeinsam haben, während alle andern Eckpunkte auf einer Kugel um A liegen¹⁰⁾; T_{ν}^0 heißt „innerer“ oder „Randeckpunkt“, je nachdem A im Innern oder auf dem Rande von S^n liegt.

Ein Komplex, der nur reguläre Eckpunkte — innere oder Randpunkte — besitzt und außerdem „zusammenhängend“ ist, d. h. in dem man von jedem T_1^n zu jedem andern T_2^n durch eine Kette von T^n gelangen kann, in welcher jedes T^n mit dem folgenden verbunden ist, heißt eine (geschlossene) „Mannigfaltigkeit“ M^n . Hat M^n nur innere Eckpunkte, so heißt sie „unberandet“¹¹⁾; hat M^n auch Randeckpunkte, so bilden alle „Randpunkte“ eine endliche Anzahl geschlossener unberandeter $(n-1)$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten¹²⁾; dabei heißt ein Punkt ein Randpunkt von M^n , wenn er einem solchen Randsimplex angehört, dem bei jeder Zuordnung zu den Simplexen eines Simplexsterns S^n ein aus Randpunkten von S^n gebildetes Simplex entspricht.

Ein Komplex, dessen Darstellung $\mathfrak{D}_1^n$ durch Unterteilung einer Darstellung $\mathfrak{D}^n$ einer Mannigfaltigkeit M^n entsteht, ist, wie aus der Definition folgt, selbst eine Mannigfaltigkeit. Diese gilt für uns als nicht verschieden von M^n .

2. Wir betrachten die *gleichzeitige* Abbildung mehrerer in M^n miteinander verbundener Simplexe einer Darstellung auf Teile eines Elements im kartesischen Raum: Seien zunächst T_{ν}^n die Simplexe einer affinen Darstellung $\mathfrak{A}^n$ von M^n , T_0^0 eine Ecke, S_0^n der zugehörige Simplexstern; dann läßt sich die zwischen den k -dimensionalen Simplexen Z_{ν}^k ($0 \leq k \leq n$) von S_0^n einerseits und den Simplexen T_{ν}^k andererseits bestehende *Zuordnung*, soweit diese definiert ist, zu einer *Abbildung* verschärfen, indem man zwischen jedem Simplex Z_{ν}^k von S_0^n und dem ihm zugeordneten T_{ν}^k die durch die Zuordnung der Ecken von Z_{ν}^k zu denen von T_{ν}^k eindeutig definierte affine Abbildung ausführt; auf diese Weise wird S_0^n auf denjenigen Teil Σ_0^n von M^n eineindeutig und stetig abgebildet, der in $\mathfrak{A}^n$ durch alle den Eckpunkt T_0^0 oder einen mit ihm in M^n identischen Eckpunkt T_i^0 enthaltende Simplexe T_i^n dargestellt wird.

3. Der so auf ein Stück des kartesischen Raums abgebildete Teil Σ_0^n von M^n umfaßt alle Simplexe, welche in M^n die Umgebung eines *Punktes*, nämlich des durch T_0^0 repräsentierten, bilden; wir suchen nun eine analoge

¹⁰⁾ Diese Definition des Simplexsterns weicht unwesentlich ab von der von Brouwer in der unter 2) zitierten Arbeit gegebenen.

¹¹⁾ Dann hat M^n offenbar überhaupt nur „innere“ Punkte im gewöhnlichen Sinne; vgl. dazu den unter 2) zitierten Bericht von H. Kneser.

¹²⁾ Hadamard, a. a. O. Nr. 16.

Abbildung der ganzen Umgebung eines *Simplexes* einer Darstellung von M^n ; wir definieren:

Eine affine Darstellung $\mathfrak{A}_1^n$ von M^n heißt eine „Umgebungsdarstellung“, wenn sich zu jedem ihrer Simplexe T_0^n ein Element E_0^n des gewöhnlichen Raumes mit folgender Eigenschaft angeben läßt: Ist Ω_0^n die „Simplexumgebung von T_0^n “, d. h. der durch die mit T_0^n verbundenen Simplexe T_i^n [$i = 1, \dots, m$] in $\mathfrak{A}_1^n$ dargestellte Teil von M^n , so läßt sich E_0^n in $m + 1$ Simplexe $z_{0,i}^n$ [$i = 0, 1, \dots, m$] zerlegen und eineindeutig und stetig so auf Ω_0^n abbilden, daß dabei $z_{0,i}^n$ auf T_i^n [$i = 0, 1, \dots, m$] affin bezogen ist¹³⁾.

Wir zeigen, daß man von jeder M^n eine Umgebungsdarstellung herstellen kann: $\mathfrak{A}^n$ sei die oben besprochene affine Darstellung, in bezug auf die man die für ein einzelnes ν^0 geschilderte Abbildung der $S_{\nu^0}^n$ und $\Sigma_{\nu^0}^n$ [$\nu^0 = 1, \dots, \beta^0$] vorgenommen hat. Wir stellen durch Unterteilung eine Darstellung $\mathfrak{A}_1^n$ von M^n her, indem wir jede eindimensionale Kante $T_{\nu^0}^1$ in $n + 1$ gleiche Teile teilen, durch die Teilpunkte die zu den Seiten $T_{\nu^0}^{n-1}$ parallelen ebenen $(n - 1)$ -dimensionalen Räume legen und die so entstehenden konvexen Polyeder in Simplexe zerlegen. Ist t_0^n ein Simplex der Darstellung $\mathfrak{A}_1^n$ und etwa T_0^n das Simplex von $\mathfrak{A}^n$, dem t_0^n angehört, so gibt es eine $(n - 1)$ -dimensionale Seite von T_0^n , mit der t_0^n keinen Punkt gemeinsam hat; in der Tat, führen wir (wie in § 1, 4) ein affines Koordinatensystem $\xi_1, \dots, \xi_n$ in T_0^n ein, dessen Nullpunkt die Ecke von T_0^n ist, in welcher sich die Seiten $T_1^{n-1}, \dots, T_n^{n-1}$ schneiden, dessen Achsen die vom Nullpunkt ausgehenden Kanten, dessen Einheitpunkte auf den Achsen die übrigen Ecken von T_0^n sind, so genügen die Koordinaten jedes Punktes eines Simplexes der Darstellung $\mathfrak{A}_1^n$, welches mit jeder der Seiten $T_1^{n-1}, \dots, T_n^{n-1}$ einen Punkt gemein hat, den Ungleichungen

$$\xi_i \leq \frac{1}{n+1} \quad [i = 1, \dots, n]; \quad \sum_{i=1}^n \xi_i < 1;$$

dieses Simplex besitzt daher auf der letzten durch die Gleichung $\sum_{i=1}^n \xi_i = 1$ definierten Seite T_{n+1}^{n-1} von T_0^n keinen Punkt. — Also gibt es zu t_0^n eine Seite von T_0^n , z. B. T_0^{n-1} , mit der t_0^n keinen Punkt gemeinsam hat. Ist nun T_0^0 der T_0^{n-1} gegenüberliegende Eckpunkt von T_0^n , S_0^n der zu T_0^0 gehörige Simplexstern, so ist die oben besprochene eineindeutige stetige und stückweise affine Beziehung zwischen S_0^n und den Simplexen von $\mathfrak{A}^n$, die einen mit T_0^0 in M^n identischen Eckpunkt enthalten, in t_0^n sowie in jedem

¹³⁾ Allgemein bezeichnet also z_{ν_1, ν_2}^n in dem die Simplexumgebung von $T_{\nu_1}^n$ darstellenden Element $E_{\nu_1}^n$ dasjenige Teilsimplex, welches das Bild von $T_{\nu_2}^n$ ist.

mit t_0^n verbundenen Simplex von $\mathfrak{U}_1^n$, also in der „Simplexumgebung“ Ω_0^n von t_0^n erklärt, d. h.: $\mathfrak{U}_1^n$ ist eine Umgebungsdarstellung.

Wir können nun zur Darstellung von M^n an Stelle der $t_{\mu^n}^n$ direkt die oben definierten Simplexe z_{μ^n, μ^n}^n benutzen, und erhalten so, wenn wir, um zu unserer früheren Bezeichnungsweise zurückzukehren, von vornherein $z_{\mu^n, \mu^n}^n = T_{\mu^n}^n$ setzen, eine Umgebungsdarstellung, die folgendermaßen aussieht: An jedes Simplex $T_{\mu^n}^n$ ¹⁴⁾ sind an denjenigen Randsimplexten, die keine Randpunkte von M^n repräsentieren, Simplexe $z_{\mu^n, i}^n$ [$i = 1, \dots, m_{\mu^n}$]¹³⁾ angebracht, die zusammen mit $T_{\mu^n}^n$ ein Element $E_{\mu^n}^n$, das eineindeutige Bild der Simplexumgebung $\Omega_{\mu^n}^n$ von $T_{\mu^n}^n$ in M^n , bilden; dabei sind je zwei Simplexe $z_{\mu_1^n, \mu^n}^n, z_{\mu_2^n, \mu^n}^n$, die zu zwei verschiedenen Elementen $E_{\mu_1^n}^n, E_{\mu_2^n}^n$ gehören und denen dasselbe durch $T_{\mu^n}^n = z_{\mu^n, \mu^n}^n$ repräsentierte Stück von M^n entspricht, durch Vermittelung von M^n affin aufeinander abgebildet.

4. Diese „ausgezeichnete Umgebungsdarstellung“ von M^n , die wir wieder mit $\mathfrak{U}^n$ bezeichnen wollen, ist geeignet zur Untersuchung gewisser *Transformationen* von M^n :

Eine eindeutige stetige Abbildung von M^n auf sich oder einen Teil von sich heiße in bezug auf $\mathfrak{U}^n$ eine „Umgebungstransformation“ von M^n , wenn jeder durch einen Punkt eines $T_{\mu^n}^n$ repräsentierte Punkt von M^n in einen Punkt der Simplexumgebung $\Omega_{\mu^n}^n$ von $T_{\mu^n}^n$ übergeht.

Z. B. sind die Transformationen f_i einer in ganz M^n gleichmäßig gegen die Identität konvergierenden Transformationsfolge $f_1, f_2, \dots$ in bezug auf jede beliebige ausgezeichnete Umgebungsdarstellung $\mathfrak{U}^n$ von einem gewissen, von $\mathfrak{U}^n$ abhängigen Index an Umgebungstransformationen; dies drücken wir gelegentlich so aus, daß wir sagen, eine „beliebig kleine Transformation“ von M^n ist eine Umgebungstransformation in bezug auf jede ausgezeichnete Normaldarstellung.

Ist f in bezug auf $\mathfrak{U}^n$ eine Umgebungstransformation, so ist durch sie in eindeutiger Weise eine eindeutige und stetige Abbildung f_{μ^n} jedes Simplexes $T_{\mu^n}^n$ auf eine dem Element $E_{\mu^n}^n$ angehörige Punktmenge definiert. Wir nehmen an, daß f höchstens endlich viele Fixpunkte hat und daß diese nur *inneren* Punkten der $T_{\mu^n}^n$ entsprechen. Bringen wir nun in jedem Punkt P von $T_{\mu^n}^n$ den nach dem Punkt $f_{\mu^n}(P)$ weisenden Vektor $\mathfrak{v}(P)$ an, so ist dieses Vektorfeld $\mathfrak{V}$ in einem gewissen Sinne, von den Fix-

¹⁴⁾ μ^n bezeichnet also jetzt, ebenso wie im § 1 ν^n , einen von 1 bis α^n laufenden Index.

punkten abgesehen¹⁵⁾, in ganz M^n eindeutig und stetig. Es hat, unter Benutzung der Bezeichnungen des § 1, u. a. folgende Eigenschaften:

A. In jedem einzelnen $T_{\mu^n}^n$ [$\mu^n = 1, \dots, \beta^n$] ist $\mathfrak{B}$ eindeutig und stetig, abgesehen höchstens von endlich vielen im Innern gelegenen Punkten.

B. P_0 sei ein Randpunkt von T_0^n und gehöre einem Randsimplex T_0^{n-k} [$1 \leq k \leq n$] an; T_ϱ^{n-k} [$\varrho = 1, \dots, r$] seien die mit T_0^{n-k} identischen Randsimplexe anderer $T_{\mu^n}^n$, P_ϱ die mit P_0 identischen Punkte der T_ϱ^{n-k} , $(W_k^n)_\varrho$ [$\varrho = 0, 1, \dots, r$] die k -fachen Winkel, deren Scheitel die T_ϱ^{n-k} sind. Dann tritt stets einer von folgenden beiden Fällen ein:

I. (Hauptfall): Von den $r+1$ Vektoren $v(P_\varrho)$ weist *genau einer ins Innere* seines $(W_k^n)_\varrho$, während *alle anderen ins Äußere* ihrer $(W_k^n)_\varrho$ gerichtet sind.

II. (Grenzfall): *Einige* der $v(P_\varrho)$ gehören den *Rändern* ihrer $(W_k^n)_\varrho$ an und sind vermöge der zwischen den Randräumen bestehenden affinen und transitiven Zuordnungen aufeinander abgebildet, während *die übrigen* $v(P_\varrho)$ *ins Äußere* ihrer $(W_k^n)_\varrho$ zeigen.

Wie man erkennt, tritt Fall II dann und nur dann ein, wenn P_0 und $f_0(P_0)$ demselben Randsimplex angehören.

§ 3.

Komplexstetige Vektorfelder.

Bei der am Schluß des vorigen Paragraphen gewählten Formulierung der Eigenschaften A und B des Vektorfeldes $\mathfrak{B}$ ist kein Gebrauch von der Tatsache gemacht, daß wir eine *Umgebungsdarstellung* einer *Mannigfaltigkeit* vor uns haben. Liegt eine reduzierte *affine* Darstellung $\mathfrak{A}^n$ eines beliebigen *Komplexes* C^n vor, so wird keine der eben ausgesprochenen Eigenschaften sinnlos, wenn wir M^n durch C^n ersetzen. Wir dürfen daher definieren:

Eine Zuordnung $\mathfrak{B}$ von Vektoren $v(P)$ zu den Punkten P der reduzierten affinen Darstellung $\mathfrak{A}^n$ des Komplexes C^n heißt ein „in C^n (in bezug auf $\mathfrak{A}^n$) *komplexstetiges* Vektorfeld“, wenn sie den Forderungen A und B genügt. [Siehe den „Zusatz“ am Schluß dieser Arbeit.]

1. Von den Eigenschaften komplexstetiger Vektorfelder, die uns im Folgenden beschäftigen werden, sei zunächst festgestellt: Ist $\mathfrak{A}_1^n$ eine durch Unterteilung von $\mathfrak{A}^n$ entstandene Komplexdarstellung, so ist $\mathfrak{B}$ auch komplexstetig in bezug auf $\mathfrak{A}_1^n$, vorausgesetzt, daß kein singulärer Punkt

¹⁵⁾ Von nun an kommt es uns, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, stets nur auf die Stetigkeit der Richtungen, nicht der Längen der Vektoren an; Nullstellen des Vektorfeldes gelten daher als Singularitäten.

von $\mathfrak{B}$ auf einem Randsimplex der Darstellung $\mathfrak{A}_1^n$ liegt. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich durch die Feststellung, daß $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft B nicht nur, wie vorausgesetzt, auf den Rändern der Darstellung $\mathfrak{A}_1^n$, sondern auch auf den bei der Unterteilung neu entstandenen Rändern hat, in denen $\mathfrak{B}$ stetig im gewöhnlichen Sinne ist.

2. Eine zweite wichtige Eigenschaft der komplexstetigen Vektorfelder betrifft die „Projektion des komplexstetigen Vektorfeldes $\mathfrak{B}$ auf den Randkomplex“. Darunter ist Folgendes zu verstehen: C^n , $\mathfrak{A}^n$, $\mathfrak{B}$ haben dieselben Bedeutungen wie bisher, $\mathfrak{A}^{n-1}$ sei die durch $\mathfrak{A}^n$ definierte nicht reduzierte Darstellung des Randkomplexes C^{n-1} , $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ sei eine reduzierte affine Darstellung von C^{n-1} , $T_{\nu^k}^n$ [$k=0, \dots, n$; $\nu^k=1, \dots, \beta^k$; $\beta^n=\alpha^n$] seien die Simplexe von $\mathfrak{A}^n$, $t_{\lambda^k}^k$ [$k=0, \dots, n-1$; $\lambda^k=1, \dots, \gamma^k$; $\gamma^{n-1}=\alpha^{n-1}$] die Simplexe von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$. Auf dem Rande jedes $T_{\nu^n}^n$ sei ein Feld $\mathfrak{U}_{\nu^n}$ von Vektoren $u(P)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

- a) $u(P)$ ist ins Innere von $T_{\nu^n}^n$ gerichtet;
- b) liegt P auf einem T^{n-2} , so fallen die Richtungen $u(P)$ und $v(P)$ nicht zusammen;
- c) es gibt höchstens endlich viele Punkte P , in denen die Richtungen von $u(P)$ und $v(P)$ zusammenfallen.

Wir lassen es dabei im Augenblick dahingestellt, ob solche Vektorfelder $\mathfrak{U}_{\nu^n}$ stets existieren.

Auf jedem T^{n-1} von $T_{\nu^n}^n$ fassen wir nun nur die Punkte P ins Auge, in denen $v(P)$ entweder nach der positiven Seite des T^{n-1} enthaltenden ebenen Raumes E^{n-1} gerichtet ist oder in E^{n-1} liegt — in denen $v(P)$ also dem betreffenden „abgeschlossenen Winkelraum W_1^n “ angehört —, und projizieren diese $v(P)$ von $u(P)$ aus auf E^{n-1} , d. h. wir stellen denjenigen Vektor $w(P)$ her, in dem E^{n-1} von der durch $u(P)$, $v(P)$ und dem zu $u(P)$ diametralen Vektor $\bar{u}(P)$ ausgespannten Halbebene $e^2(P)$ geschnitten wird; dabei ist die Reihenfolge der genannten Vektoren in e^2 stets die folgende: u , v , w , $\bar{u}$. Diese Konstruktion wird nur in denjenigen, höchstens in endlicher Anzahl vorhandenen, der betrachteten Punkte P unmöglich, in denen $u(P)$ und $v(P)$ zusammenfallen. Dem Vektor $w(P)$ entspricht nun entweder (s. § 1, 6) genau ein Vektor w^* in $\mathfrak{A}_1^{n-1}$, oder es entsprechen ihm mehrere in Randräumen von $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ liegende Vektoren w^* , die affin aufeinander abgebildet sind. Die Gesamtheit $\mathfrak{B}^*$ der so in $\mathfrak{A}_1^{n-1}$ erzeugten Vektoren w^* nennen wir eine „Projektion des Feldes $\mathfrak{B}$ “ und behaupten, daß sie ein in C^{n-1} komplexstetiges Vektorfeld darstellt. In der Tat: daß $\mathfrak{B}^*$ die Eigenschaft A der für die komplexstetigen Vektorfelder charakteristischen Eigenschaften A und B

besitzt, folgt aus der geschilderten Konstruktion von $\mathfrak{B}^*$ sowie der Tatsache, daß die Forderung B von $\mathfrak{B}$ insbesondere für $k=1$ erfüllt wird; und daß $\mathfrak{B}^*$ die Eigenschaft B für jedes $k^* \leq n-1$ besitzt, ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{B}$ diese Eigenschaft für $k=k^*+1$ besitzt, sowie aus dem in § 1, 7 diskutierten Verhalten der projizierten Vektoren, wonach insbesondere w^* dann und nur dann seinem abgeschlossenen Winkelraum w_{k-1}^{n-1} angehört, wenn w der *erste* Schnitt des in e^2 gedrehten Vektors u mit einem Randraum E^{n-1} von W_k^n ist, wenn also v dem abgeschlossenen Winkelraum W_k^n angehört.

3. Wir bringen nun die Indizes der Singularitäten von $\mathfrak{B}$ in Beziehung zu den Indizes der Singularitäten von $\mathfrak{B}^*$. $s_{\nu,n}$ sei die Summe der Indizes derjenigen Singularitäten von $\mathfrak{B}$, die in $T_{\nu,n}^n$ liegen, und $s^n = \sum_{\nu^n=1}^{\alpha^n} s_{\nu,n}$ sei also die Indexsumme aller Singularitäten von $\mathfrak{B}$; ferner sei s^{n-1} die Indexsumme aller Singularitäten von $\mathfrak{B}^*$, $a_{\nu,n}$ die Summe der Übereinstimmungsindizes⁴⁾ der beiden Abbildungen des Randes von $T_{\nu,n}^n$ auf die Richtungskugel, die von $U_{\nu,n}$ und dem zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Randfeld $\mathfrak{B}_{\nu,n}$ (in dieser Reihenfolge!) vermittelt werden, und $a = \sum_{\nu^n=1}^{\alpha^n} a_{\nu,n}$ die Summe aller dieser Übereinstimmungsindizes. Nun läßt sich die Zahl a auf zweierlei Weise bestimmen: Dort und nur dort, wo $U_{\nu,n}$ und $\mathfrak{B}_{\nu,n}$ Übereinstimmungsstellen haben, entsteht eine Singularität von $\mathfrak{B}^*$. Der Index einer solchen Übereinstimmung ist gleich dem Index der Singularität des Feldes der projizierten Vektoren w , also auch gleich dem Index der Singularität von $\mathfrak{B}^*$, vorausgesetzt, daß man den $(n-1)$ -dimensionalen Randraum E^{n-1} , dem der betrachtete Punkt angehört, so orientiert, daß ein positiv orientiertes Achsensystem von E^{n-1} zusammen mit einem Vektor von $U_{\nu,n}$ als *letzter* Achse ein *negatives* Achsensystem des n -dimensionalen Raumes bildet¹⁶⁾; in unserem Fall ist aber die Indikatrix von E^{n-1} als Randindikatrix von $T_{\nu,n}^n$ bestimmt, d. h. ein auf die geschilderte Weise gebildetes n -faches Achsensystem ist *positiv* orientiert²⁾. Folglich ist der Übereinstimmungsindex von $U_{\nu,n}$ und $\mathfrak{B}_{\nu,n}$ entgegengesetzt gleich dem Index der Singularität von $\mathfrak{B}^*$ in dem entsprechenden Punkt, und es ist daher

$$(1) \quad a = -s^{n-1}.$$

Andererseits ist $a = \sum_{\nu^n=1}^{\alpha^n} a_{\nu,n}$ auf folgende zweite Weise zu bestimmen: $a_{\nu,n}$ ist die Summe der Übereinstimmungsindizes der durch $U_{\nu,n}$ und $\mathfrak{B}_{\nu,n}$

¹⁶⁾ Beweis s. § 1 der unter ⁴⁾ zitierten Arbeit.

vermittelten Abbildungen des Randes von T_{ν}^n auf die Richtungskugel. Die durch $\mathcal{U}_{\nu}$ vermittelte Abbildung hat den Grad $(-1)^n$, da alle Vektoren $u(P)$ ins Innere von T_{ν}^n gerichtet sind, sich also stetig unter Festhaltung ihrer Anfangspunkte in Vektoren überführen lassen, die nach einem festen inneren Punkt zeigen. Die durch $\mathfrak{B}_{\nu}$ vermittelte Abbildung hat den Grad s_{ν} . Daher gilt die Gleichung⁴⁾

$$(2) \quad a_{\nu} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n + s_{\nu} = -1 + s_{\nu},$$

und hieraus folgt durch Summation als zweiter Wert für a :

$$(3) \quad a = \sum_{\nu=1}^{\alpha^n} a_{\nu} = -\alpha^n + s^n.$$

Vergleich der beiden Werte von a liefert:

$$(4) \quad s^n = \alpha^n - s^{n-1}.$$

4. Wir beginnen nun den Beweis des folgenden Satzes:

Satz I. *Die Indexsumme der Singularitäten eines in C^n komplexstetigen Vektorfeldes ist gleich der mit $(-1)^n$ multiplizierten Eulerschen Charakteristik von C^n .*

Wir führen den Beweis durch Schluß von $n-1$ auf n .

Es sei zunächst $n=1$, $C^n = C^1$ also ein System von α^1 Strecken, deren Ecken in α^0 Gruppen zusammengefaßt sind; die einer Gruppe angehörigen Ecken sind identisch in C^1 und repräsentieren einen Punkt dieses Komplexes. (Wir können uns diese Identifizierungen etwa im dreidimensionalen Raum durch Zusammenheften ausgeführt denken.) Das komplexstetige Vektorfeld besteht aus Vektoren, die in den Geraden, denen die Strecken angehören, liegen, und besitzt Singularitäten im Innern der Strecken mit der Indexsumme s^1 . Es weist in jedem der α^0 Punkte des Komplexes, welche durch die β^0 Eckpunkte der Strecken repräsentiert werden, genau einen ins Innere seiner Strecke gerichteten Vektor auf. Ist also $-a$ ¹⁷⁾ die Anzahl aller ins Innere ihrer Strecken gerichteten Eckvektoren, so ist

$$(1^*) \quad a = -\alpha^0.$$

Wir bestimmen a auf eine zweite Weise, indem wir jede der Strecken T_{ν}^1 einzeln betrachten: Eine singuläre Stelle des 1-dimensionalen Vektorfeldes $\mathfrak{B}$ ist — in sinngemäßer Anwendung der für n Dimensionen getroffenen Definitionen — mit dem Index $+1$ zu versehen, falls in ihrer Umgebung

¹⁷⁾ Bezeichnungen und Vorzeichen sind im Hinblick auf die Übereinstimmung mit dem n -dimensionalen Fall gewählt.

alle Vektoren von ihr fort, mit dem Index -1 , falls in ihrer Umgebung alle Vektoren nach ihr hinweisen, mit dem Index 0 , falls in ihrer Umgebung alle Vektoren gleichgerichtet sind (und die Singularität daher hebbar ist). Singularitäten mit anderen Indizes treten für $n=1$ nicht auf. $s_{r,1}$ sei die Summe der Indizes aller Singularitäten von $\mathfrak{B}$ auf $T_{r,1}^1$, $-a_{r,1}$ die Anzahl der ins Innere von $T_{r,1}^1$ weisenden Eckvektoren; dann ist $s_{r,1} = -1, 0$ oder $+1$, je nachdem $-a_{r,1} = 2, 1$ oder 0 ist; jedenfalls ist also

$$(2^*) \quad a_{r,1} = -1 + s_{r,1}.$$

Summierung liefert

$$(3^*) \quad a = -\alpha^1 + s^1,$$

und hieraus folgt durch Vergleich mit (1^*)

$$(4^*) \quad s^1 = \alpha^1 - \alpha^0 = -(\alpha^0 - \alpha^1).$$

Dies ist für $n=1$ die in unserem Satz behauptete Beziehung. Wir nehmen ihn nun für $n-1$ als bewiesen an. Ist dann C^n ein Komplex und $\mathfrak{B}$ ein derartiges komplexstetiges Vektorfeld in ihm, daß man Vektorfelder $\mathfrak{U}_{r,n}$ mit den oben unter 2. genannten Eigenschaften a), b), c) konstruieren kann, so folgt, da $\mathfrak{B}^*$ komplexstetig ist und der Satz für den Randkomplex C^{n-1} richtig, da also

$$s^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha^k$$

sein soll, aus (4) die behauptete Beziehung

$$(5) \quad s^n = \alpha^n - (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^k.$$

Jedoch wissen wir nicht, ob man die Felder $\mathfrak{U}_{r,n}$ stets konstruieren kann. Da aber ein durch Unterteilung von C^n entstandener Komplex dieselbe Eulersche Charakteristik hat wie C^n , so ist Satz I vollständig bewiesen, sobald, was im nächsten Paragraphen geschehen wird, die Richtigkeit des folgenden Hilfssatzes gezeigt ist:

Ist $\mathfrak{U}^n$ eine reduzierte affine Darstellung des Komplexes C^n und $\mathfrak{B}$ darin ein komplexstetiges Vektorfeld, so kann man durch Unterteilung von $\mathfrak{U}^n$ eine Darstellung $\mathfrak{B}^n$ und in $\mathfrak{B}^n$ ein komplexstetiges Vektorfeld $\mathfrak{B}$, dessen Singularitäten mit denen von $\mathfrak{B}$ in bezug auf Lage und Index identisch sind, derart herstellen, daß sich in jedem n -dimensionalen Simplex $t_{\lambda,n}^n$ von $\mathfrak{B}^n$ ein Vektorfeld $\mathfrak{U}_{\lambda,n}$ konstruieren läßt, welches in bezug auf $\mathfrak{B}$ die Eigenschaften a), b), c) besitzt.

§ 4.

Vervollständigung des Beweises zu dem Satz über die Indexsumme der Singularitäten eines komplexstetigen Vektorfeldes.

Um $\mathfrak{B}^n$ und $\mathfrak{P}$ in der gewünschten Weise zu erhalten, beseitigen wir zunächst die im Innern der Simplexe T_{ν}^n von $\mathfrak{U}^n$ angebrachten Vektoren von $\mathfrak{B}$ und ersetzen sie durch ein neues Vektorfeld $\mathfrak{P}$, das dieselben Randfelder $\mathfrak{B}_{\nu,n}$ und dieselben Singularitäten mit denselben Indizes besitzt wie $\mathfrak{B}$, das aber in gewissen Umgebungen $Q(P_e)$ der singulären Punkte P_e — diese selbst natürlich ausgenommen — *analytisch* ist; daß es derartige $\mathfrak{P}$ gibt, ist an anderer Stelle¹⁸⁾ gezeigt worden. $\mathfrak{P}$ ist komplexstetig in $\mathfrak{U}^n$, da es mit dem komplexstetigen Feld $\mathfrak{B}$ die Randfelder gemeinsam hat; $\mathfrak{P}$ ist daher (nach § 3, 1) auch komplexstetig in jeder durch Unterteilung von $\mathfrak{U}^n$ entstandenen Komplexdarstellung $\mathfrak{B}^n$, sofern nur keiner der singulären Punkte auf einem Randsimplex von $\mathfrak{B}^n$ liegt. Ist nun γ eine beliebige positive Zahl, so stellen wir durch Unterteilung von $\mathfrak{U}^n$ eine Darstellung $\mathfrak{B}^n(\gamma)$ her, die außer der eben genannten Berücksichtigung der singulären Stellen noch folgende Bedingungen erfüllt:

$\mathfrak{B}^n(\gamma)$ ist eine so feine Zerlegung, daß 1. jedes einen singulären Punkt P_e enthaltende Simplex t^n von $\mathfrak{B}^n(\gamma)$ ganz in der analytischen Umgebung $Q(P_e)$ liegt, und daß 2. die Schwankung der Vektorrichtungen von $\mathfrak{P}$ in jedem t^n , das nicht ganz in einem $Q(P_e)$ liegt, kleiner ist als γ ; Bedingung 2 läßt sich, wenn 1 bereits erfüllt ist, durch weitere Unterteilung infolge der gleichmäßigen Stetigkeit von $\mathfrak{P}$ außerhalb der $Q(P_e)$ stets erfüllen. 3. soll $\mathfrak{B}^n(\gamma)$ die Eigenschaft haben, daß jedes der Simplexe t^n mit einem von endlich vielen, von vornherein durch $\mathfrak{U}^n$ bestimmten Simplexen $\tau_1^n, \dots, \tau_r^n$ in Gestalt und Lage übereinstimmt (§ 1, 4); daß die Erfüllung von 3 mit einer beliebigen Verfeinerung der Unterteilung verträglich ist, wurde in § 1, 4 gezeigt.

Wir beweisen nun, daß man bei hinreichend kleinem γ Vektorfelder $\mathfrak{U}_{\nu,n}$ in der gewünschten Weise an den Rändern der $t_{\nu,n}^n$ anbringen kann. Um derartige γ zu bestimmen, fassen wir zunächst ein Simplex τ_e^n ins Auge: E_{ν}^{n-1} [$\nu = 1, \dots, n+1$] seien die τ_e^n begrenzenden ebenen Räume, deren positive Seiten wie in § 1, 5 definiert seien. Unter einem „negativen Richtungsstern σ_e von τ_e^n “ verstehen wir ein System von $n+1$ in einem festen Punkt O des Raumes angebrachten Einheitsvektoren α_{ν} , die so gerichtet sind, daß α_{ν} [$\nu = 1, \dots, n+1$] nicht nach der positiven Seite von E_{ν}^{n-1} zeigt, also entweder nach der negativen Seite von E_{ν}^{n-1} weist oder parallel mit E_{ν}^{n-1} ist. Die σ_e bilden eine $(n-1) \cdot (n+1)$ -dimensionale

¹⁸⁾ § 5, Aufgabe 4, Zusatz, der unter *) zitierten Arbeit.

abgeschlossene Menge S_e . Unter den $\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$ Winkeln zwischen je zwei der Richtungen eines σ_e gibt es einen größten, $m(\sigma_e)$; dabei sind Winkelgrößen so zu messen, daß sie stets zwischen 0 und π einschließlich liegen. $m(\sigma_e)$ ist stets positiv; denn wäre $m(\sigma_e) = 0$, so würde das bedeuten, daß alle Vektoren α_ν eines σ_e in einen einzigen Vektor α zusammenfielen und daß daher dieser Vektor α für kein E_ν^{n-1} nach der positiven Seite gerichtet wäre; dies ist aber unmöglich, da eine zu α parallele, durch einen inneren Punkt von τ_e^n gehende orientierte Gerade nach der positiven Seite desjenigen E_ν^{n-1} gerichtet ist, durch den sie in τ_e^n eintritt. Es ist also immer $m(\sigma_e) > 0$; da andererseits $m(\sigma_e)$ als eine in der abgeschlossenen Menge S_e stetige Funktion an einer Stelle ihre untere Grenze γ_e erreicht, ist auch $\gamma_e > 0$.

Wir definieren nun γ als die kleinste der r Zahlen $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ und haben zu beweisen, daß man unter Zugrundelegung der Unterteilung $\mathfrak{B}^n(\gamma)$ sowohl (Fall α) in jedem Simplex t^n , auf dessen Rand¹⁹⁾ die Schwankung von $\mathfrak{P}$ kleiner als γ ist, als auch (Fall β) in jedem Simplex t^n , auf dessen Rande $\mathfrak{P}$ analytisch ist, ein Vektorfeld $\mathfrak{U}$ mit den Eigenschaften a), b), c) (s. § 3) konstruieren kann.

Wir beginnen mit Fall α : t_0^n habe also die Eigenschaft, daß der Winkel zwischen je zwei Vektoren, die dem auf seinem Rande befindlichen Teil $\mathfrak{P}_0$ von $\mathfrak{P}$ angehören, kleiner als γ ist; dann gibt es, so behaupten wir, unter seinen Randräumen $F_1^{n-1}, \dots, F_{n+1}^{n-1}$ mindestens einen, nach dessen positiver Seite *alle* Vektoren von $\mathfrak{P}_0$ gerichtet sind. Andernfalls ließe sich nämlich aus Vektoren von $\mathfrak{P}_0$ ein negativer Richtungsstern σ von t_0^n bilden, und dieser wäre zugleich ein negativer Richtungsstern desjenigen τ_e^n , mit dem t_0^n in Gestalt und Lage übereinstimmt; es wäre dann $m(\sigma) \geq \gamma_e \geq \gamma$, entgegen der Tatsache, daß die Schwankung von $\mathfrak{P}_0$ kleiner ist als γ . — Es seien also alle Vektoren von $\mathfrak{P}_0$ etwa nach der positiven Seite von F_1^{n-1} gerichtet. A sei ein innerer Punkt des zu F_1^{n-1} gehörigen Randsimplexes t_1^{n-1} von t_0^n , g ein ins Innere von t_0^n gerichteter, von A ausgehender Halbstrahl; $t_2^{n-1}, \dots, t_{n+1}^{n-1}$ seien die übrigen $(n-1)$ -dimensionalen Randsimplexe von t_0^n , $\overline{\mathfrak{P}_0}$ sei der zu ihnen gehörige Teil von $\mathfrak{P}_0$, M die (eventuell leere) Menge der Punkte von g , in denen g von den durch die Vektoren von $\overline{\mathfrak{P}_0}$ bestimmten Halbstrahlen geschnitten wird. A gehört nicht zu M , da andernfalls der A enthaltende Halbstrahl von $\overline{\mathfrak{P}_0}$ nicht nach der positiven Seite von F_1^{n-1} gerichtet wäre. M ist aber abgeschlossen; es gibt daher auf g im Innern von t_0^n Punkte, die nicht zu M gehören; B sei ein solcher Punkt. Wir definieren nun das auf dem Rand von t_0^n zu konstruierende Feld $\mathfrak{U}_0$ zu-

¹⁹⁾ Es genügt, $\mathfrak{P}$ auf den Rändern der t^n zu betrachten.

nächst auf den $t_2^{n-1}, \dots, t_{n+1}^{n-1}$ durch die Bestimmung, daß diese Vektoren alle durch B hindurchgehen; dann erfüllt es dort gewiß die Bedingungen a), b), c), denn es ist überall ins Innere von t_0^n gerichtet und hat mit $\mathfrak{P}_0$ überhaupt keinen Übereinstimmungspunkt. Wir haben $\mathfrak{U}_0$ nun noch in den inneren Punkten des Simplexes t_1^{n-1} zu konstruieren, auf dessen Rand es bereits festgelegt ist. Berücksichtigen wir, daß $\mathfrak{U}_0$ auf diesem Rande und daß $\mathfrak{P}_0$ auf ganz t_1^{n-1} nach der positiven Seite von F_1^{n-1} weist, so können wir $\mathfrak{U}_0$ in den inneren Punkten von t_1^{n-1} folgendermaßen vorschriftsmäßig bestimmen: Ist P ein von A verschiedener innerer Punkt von t_1^{n-1} , so sei $\bar{P}$ der Schnittpunkt des Strahles AP mit dem Rande von t_1^{n-1} , $p(P)$, $p(\bar{P})$, $u(\bar{P})$ seien die in P bzw. $\bar{P}$ angebrachten Vektoren von $\mathfrak{P}_0$ bzw. $\mathfrak{U}_0$, $q(\bar{P})$ die Projektion des Vektors $p(\bar{P})$ vom Vektor $u(\bar{P})$ aus auf E_1^{n-1} (d. h., wie früher, der Schnitt von E_1^{n-1} mit der durch $u(\bar{P})$, $p(\bar{P})$ und den zu $u(\bar{P})$ diametralen Vektor $\bar{u}(\bar{P})$ ausgespannten Halbebene), $q(P)$ der in P angebrachte, zu $q(\bar{P})$ parallele Vektor. Der zu definierende Vektor $u(P)$ soll nun derjenige Vektor des von $p(P)$ und $q(P)$ ausgespannten 2-dimensionalen, zwischen 0 und π liegenden Winkels sein, der diesen Winkel so teilt, daß das Winkelverhältnis $\angle \{p(P) u(P)\} : \angle \{u(P) q(P)\}$ gleich ist dem Produkt aus dem Winkelverhältnis $\angle \{p(\bar{P}) u(\bar{P})\} : \angle \{u(\bar{P}) q(\bar{P})\}$ und dem Streckenverhältnis $AP : A\bar{P}$; in A selbst soll $u(A) = p(A)$ sein. Das nunmehr auf dem ganzen Rand von t_0^n definierte Feld $\mathfrak{U}_0$ genügt allen Anforderungen: es ist stetig, überall nach innen gerichtet und hat mit $\mathfrak{P}_0$ einen einzigen Übereinstimmungspunkt A .

Damit ist Fall α erledigt, und wir wenden uns dem Fall β zu, wir setzen also voraus, daß $\mathfrak{P}_0$ auf dem Rande von t_0^n analytisch ist. K^n sei eine ganz im Innern von t_0^n gelegene Vollkugel. Dann gibt es einen positiven Winkel δ derart, daß jeder Winkel, dessen Scheitel und einer Schenkel dem Rand von t_0^n angehören, während der andere Schenkel einen Punkt von K^n enthält, größer als δ ist. Wir teilen die Randsimplexe $t_1^{n-1}, \dots, t_{n+1}^{n-1}$ in so kleine Teilsimplexe s_σ^{n-1} , daß die Schwankung von $\mathfrak{P}_0$ in jedem einzelnen s_σ^{n-1} kleiner als δ ist; wenn dann ein zu einem Punkt von s_σ^{n-1} gehöriger Vektor von $\mathfrak{P}_0$ nach einem Punkt von K^n weist, so weisen alle $\mathfrak{P}_0$ -Vektoren von s_σ^{n-1} ins Innere von t_0^n . — Die Halbstrahlen, die durch die in den $(n-2)$ -dimensionalen Randsimplex s_σ^{n-2} der s_σ^{n-1} angebrachten Vektoren von $\mathfrak{P}_0$ festgelegt sind, bilden eine endliche Anzahl analytischer, $(n-1)$ -dimensionaler Hyperflächenstücke; es gibt daher in K^n gewiß Punkte, die auf keiner dieser Hyperflächen liegen; C sei ein solcher Punkt. Definieren wir dann $\mathfrak{U}_0$ zunächst in den s_σ^{n-2} durch die Bestimmung, daß die Vektoren $u(P)$ nach C weisen, so sind dort keine Übereinstimmungspunkte mit $\mathfrak{P}_0$ vorhanden. Dieselbe Festsetzung treffen

wir für diejenigen s_e^{n-1} , in denen kein zu $\mathfrak{P}_0$ gehöriger Strahl nach einem Punkt von K^n weist; auch dort treten dann keine Übereinstimmungspunkte von $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{P}_0$ auf. In den übrigen s_e^{n-1} weisen alle Vektoren $p(P)$ ins Innere von t_0^n , und dasselbe gilt für die auf ihren Rändern schon angebrachten Vektoren von $\mathfrak{U}_0$. Wir können daher in jedem einzelnen von ihnen durch das Verfahren, mit dem wir im Fall α das Simplex t_1^{n-1} behandelt haben, nach innen gerichtete Vektoren $u(P)$ konstruieren, die sich an die am Rande von s_e^{n-1} bereits vorhandenen Vektoren von $\mathfrak{U}_0$ stetig anschließen und im Innern von s_e^{n-1} in genau einem Punkt mit dem Feld $\mathfrak{P}_0$ übereinstimmen.

Damit ist auch Fall β erledigt, die Gültigkeit des am Ende des vorigen Paragraphen formulierten Hilfssatzes ist gezeigt und Satz I vollständig bewiesen.

§ 5.

Fixpunkte kleiner Transformationen und Singularitäten stetiger Vektorfelder in geschlossenen Mannigfaltigkeiten.

Wir machen nun Anwendungen von Satz I und beschränken uns dabei ausschließlich auf den Fall, daß $C^n = M^n$ eine geschlossene (berandete oder unberandete) Mannigfaltigkeit ist.

Jedem Punkt P von M^n sei eine ihn enthaltende Umgebung $U(P)$ zugeordnet, die so klein ist, daß sie bei Zugrundelegung einer bestimmten „ausgezeichneten Umgebungsdarstellung“ $\mathfrak{U}^n$ von M^n — in der Bezeichnung von § 2 — ganz in jedem der Elemente $E_{\mu^n}^n$ dargestellt wird, die die Bilder der Simplexumgebungen der P enthaltenden Simplexe sind; für hinreichend kleine Umgebungen $U(P)$ ist diese Bedingung gewiß erfüllt. f sei nun eine eindeutige und stetige Abbildung von M^n auf eine zu M^n gehörige Punktmenge und so „klein“, daß mit P das Bild $f(P)$ der Umgebung $U(P)$ angehört; ferner besitze f , falls M^n berandet ist, auf dem Rande keinen Fixpunkt. Dann ist f in bezug auf $\mathfrak{U}^n$ eine „Umgebungs-transformation“ und erzeugt ein komplexstetiges Vektorfeld, dessen Singularitäten, von denen wir, da sie innere Punkte von M^n sind, voraussetzen dürfen, daß sie nur im Innern der $T_{\mu^n}^n$ auftreten²⁰⁾, nach Lage und Index mit den Fixpunkten von f identisch sind. Aus Satz I folgt dann

²⁰⁾ Zu jeder Darstellung $\mathfrak{U}^n$ von M^n läßt sich eine mit ihr im Sinn der kombinatorischen Topologie homöomorphe Darstellung, d. h. eine solche, die durch Zerlegung und Zusammensetzung von Simplexen entsteht, angeben, in der endlich viele vorgeschriebene innere Punkte von M^n durch innere Punkte der n -dimensionalen Simplexe repräsentiert werden.

Satz II. *Die Summe der Indizes der Fixpunkte einer hinreichend kleinen Transformation der geschlossenen Mannigfaltigkeit M^n in sich ist, vorausgesetzt, daß höchstens endlich viele Fixpunkte auftreten, gleich der mit $(-1)^n$ multiplizierten Eulerschen Charakteristik von M^n .*

Hieraus ergibt sich:

Satz IIa. *Jede hinreichend kleine Transformation einer Mannigfaltigkeit mit von 0 verschiedener Eulerscher Charakteristik in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Wir stellen nun die Frage, ob es denn in jeder M^n beliebig kleine Transformationen mit höchstens endlich vielen Fixpunkten gibt. Daß diese Frage zu bejahen ist, erkennt man — immer unter Benutzung der Bezeichnungsweise von § 2 — folgendermaßen: $T_1^n, \dots, T_{\alpha^n}^n$ seien die Simplexe von $\mathfrak{M}^n$, $E_1^n, \dots, E_{\alpha^n}^n$ die die Simplexumgebungen der $T_{\mu^n}^n$ darstellenden Elemente. Auf dem Rande von T_1^n definiere man ein stetiges Feld von auch der Länge nach bestimmten, nicht verschwindenden Vektoren, deren Endpunkte E_1^n angehören; ihnen entsprechen vermöge der affinen Abbildungen, die zwischen den Teilen der verschiedenen $E_{\mu^n}^n$ bestehen, Vektoren auf gewissen Randsimplexten gewisser der $T_2^n, \dots, T_{\alpha^n}^n$. Diese Vektoren bringen wir in den Punkten, zu denen sie gehören, an, so daß jetzt ein Teil der Randsimplexe von $T_2^n, \dots, T_{\alpha^n}^n$ mit Vektoren besetzt ist. Wir bringen nun auf dem *ganzen* Rand von T_2^n ein Feld von Vektoren an, deren Endpunkte in E_2^n liegen und unter denen die auf gewissen Randsimplexten von T_2^n eventuell bereits angebrachten enthalten sind; daß diese Anbringung von Vektoren stets möglich ist, wurde in der Arbeit „Abbildungsklassen n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten“⁶⁾ (§ 5; 2, 3) gezeigt. So fahren wir für $\nu = 3, 4, \dots, \alpha^n$ fort, bis die Ränder aller $T_{\mu^n}^n$ vollständig mit Vektoren besetzt sind. Darauf wählen wir im Innern jedes $T_{\mu^n}^n$ einen Punkt P_{μ^n} und ordnen jedem von ihm verschiedenen Punkt P von $T_{\mu^n}^n$ denjenigen Vektor PP' zu, der parallel ist zu dem Vektor desjenigen Randpunktes $\bar{P}$ von $T_{\mu^n}^n$, in den P von P_{μ^n} aus projiziert wird, und dessen Länge sich zu der des genannten Randvektors verhält wie die Strecke $P_{\mu^n}P$ zu der Strecke $P_{\mu^n}\bar{P}$; dem Punkte P_{μ^n} selbst ordnen wir den verschwindenden Vektor zu. Auf diese Weise ist ein Vektorfeld mit den Singularitäten P_{μ^n} definiert. Durch die Vorschrift, daß jeder Punkt in denjenigen Punkt des in ihm angebrachten Vektors PP' übergehen soll, der die Strecke PP' in dem Verhältnis $t:1-t$ teilt, ist für jedes t zwischen 0 und 1 eine Umgebungstransformation f_t definiert. Die Schar der f_t konvergiert gleichmäßig gegen die Identität, wenn t sich der 0 nähert; jede dieser Abbildungen hat die Punkte P_{μ^n} , und nur diese, zu Fixpunkten.

Es gibt also beliebig kleine Transformationen von M^n mit endlich vielen Fixpunkten. Wir ziehen hieraus eine Folgerung: Ist M_1^n eine zu M^n homöomorphe, d. h. eineindeutig und stetig auf M^n abbildbare Mannigfaltigkeit, so läßt sich in M^n eine Transformation mit endlich vielen Fixpunkten konstruieren, die jeden Punkt so wenig von seinem Ausgangspunkt entfernt, daß diese Abbildung nicht nur in bezug auf eine Darstellung $\mathfrak{U}^n$ von M^n , sondern auch in bezug auf eine Darstellung $\mathfrak{U}_1^n$ von M_1^n eine Umgebungstransformation ist. Da nun der Index eines Fixpunktes eine topologische Invariante der betreffenden Transformation ist⁴⁾, so ergibt sich hieraus auf Grund von Satz II der folgende bekannte

Satz III. *Homöomorphe Mannigfaltigkeiten haben dieselbe Eulersche Charakteristik.*

Dieser Satz ist einer der klassischen und einfachsten Sätze der kombinatorischen Topologie⁵⁾, in der man zwei Mannigfaltigkeiten als homoöomorph betrachtet, wenn ihre Darstellungen miteinander isomorphe (s. § 1) Unterteilungen besitzen. Der eben geführte Beweis gilt für die Topologie im weiteren Sinne, in der man zwei Mannigfaltigkeiten bereits dann als homöomorph bezeichnet, wenn sie sich eineindeutig und stetig aufeinander abbilden lassen. Auch unter diesem allgemeineren Gesichtspunkt ist Satz III bereits von Alexander²¹⁾ bewiesen worden.

Wir verfolgen nun die oben angeschnittene Frage nach der Existenz beliebig kleiner Transformationen mit endlich vielen Fixpunkten weiter: Ist es möglich, eine beliebig kleine Transformation anzugeben, welche an den vorgeschriebenen inneren Stellen $Q_1, \dots, Q_m$ ($m \geq 0$) Fixpunkte mit den vorgeschriebenen Indizes $q_1, \dots, q_m$ besitzt, falls nur deren Summe gleich der mit $(-1)^n$ multiplizierten Charakteristik c von M^n ist? Dies ist in der Tat stets möglich²²⁾. Denn die Punkte $P_1, \dots, P_{a^n}, Q_1, \dots, Q_m$ lassen sich in ein zu M^n gehöriges Element F einschließen²³⁾, und in diesem läßt sich weiter ein die genannten Punkte im Innern enthaltendes Element F_1 angeben. Wir wählen nun — in der obigen Bezeichnung — t so klein, daß das durch f_t gelieferte Bild von F_1 ganz in F liegt. F' sei ein dem gewöhnlichen Raum angehöriges topologisches Bild von F , F'_1 in ihm das Bild von F_1 , $P'_1, \dots, P'_{a^n}, Q'_1, \dots, Q'_m$ seien die Bilder der $P_1, \dots, P_{a^n}, Q_1, \dots, Q_m$. Der Abbildung f_t entspricht eine Abbildung f'_t

²¹⁾ J. W. Alexander II, A proof of the invariance of certain constants of Analysis Situs, Transact. of the Am. Math. Soc. 16 (1915). — Dort wird die Invarianz der Bettischen Zahlen für die Topologie im weiteren Sinne bewiesen. Da die Eulersche Charakteristik durch die Bettischen Zahlen ausdrückbar ist (s. z. B. Tietze a. a. O.), ist damit Satz III bewiesen; vgl. auch H. Kneser a. a. O., Fußnote 2 auf S. 12.

²²⁾ Wir setzen $n \geq 2$ voraus.

²³⁾ s. § 2 der in Fußnote *) genannten Arbeit.

von F'_1 auf einen Teil von F' ; ihre Fixpunkte sind $P'_1, \dots, P'_{a^*}$, die zugehörigen Indizes sind wegen ihrer topologischen Invarianz dieselben wie die entsprechenden Indizes bei der Abbildung f_t ; die von den Randpunkten von F'_1 nach deren Bildpunkten bei der Abbildung f'_t gezogenen Vektoren definieren daher eine Abbildung des Randes von F'_1 auf die Richtungskugel, deren Grad $(-1)^n \cdot c$ ist. Auf Grund der Lösbarkeit²²⁾ einer „Randwertaufgabe für Vektorverteilungen“ (s. die oben ⁶⁾ zitierte Arbeit über Abbildungsklassen, § 5, 4) können wir, da auch $\sum_{\mu=1}^m q_\mu = (-1)^n c$ ist,

diese Randvektoren derart zu einem in ganz F'_1 definierten stetigen Vektorfeld ergänzen, daß dessen Vektoren in den Q'_μ ($\mu = 1, \dots, m$), und nur dort, verschwinden, und daß die Singularitäten des Richtungsfeldes in diesen Punkten die Indizes q_μ besitzen. Die Vektoren dieses Feldes können wir überdies alle so klein wählen, daß ihre Endpunkte sämtlich im Innern von F' liegen. Durch die Vorschrift, daß jeder Punkt von F'_1 in den Endpunkt des in ihm angebrachten Vektors übergehen soll, wird F'_1 derart auf einen Teil von F' abgebildet, daß diese Abbildung g' auf dem Rande mit f'_t übereinstimmt und in den Q'_μ Fixpunkte mit den Indizes q_μ hat, im übrigen aber fixpunktfrei ist. Der Abbildung g' entspricht in F_1 eine analoge Abbildung g ; ersetzen wir nun f_t im Innern von F_1 durch g , während wir im Äußern und auf dem Rande von F_1 f_t unverändert lassen, so haben wir eine Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert. Damit ist bewiesen:

Satz IV. Sind $Q_1, \dots, Q_m$ ($m \geq 0$) beliebige innere Punkte der Mannigfaltigkeit M^n , $q_1, \dots, q_m$ beliebige ganze Zahlen, deren Summe gleich der mit $(-1)^n$ multiplizierten Charakteristik von M^n ist, so gibt es beliebig kleine Transformationen von M^n in sich, die in den Q_μ ($\mu = 1, \dots, m$) Fixpunkte mit den Indizes q_μ besitzen, im übrigen aber fixpunktfrei sind²³⁾.

Ein Spezialfall dieses Satzes ist:

Satz IVa. Jede Mannigfaltigkeit, deren Charakteristik 0 ist, gestattet beliebig kleine fixpunktfreie Transformationen in sich.

Da für jede unberandete geschlossene Mannigfaltigkeit ungerader Dimensionenzahl die Charakteristik 0 ist, so gilt insbesondere

Satz IVb. Jede geschlossene unberandete Mannigfaltigkeit ungerader Dimensionenzahl gestattet beliebig kleine fixpunktfreie Transformationen in sich.

Wir betrachten nun Vektorfelder, die stetig im gewöhnlichen Sinne sind: In einer Umgebung $U(P)$ jedes Punktes P von M^n sei eine Menge kartesischer Koordinatensysteme derart ausgezeichnet, daß die Koordinaten von je 2 (zu demselben Punkt oder zu verschiedenen

Punkten gehörigen) Koordinatensystemen in jedem ihnen gemeinsamen Stück durch stetig differenzierbare Transformationen auseinander hervorgehen; Randmannigfaltigkeiten von M^n sollen in diesen Koordinatensystemen stetig differenzierbar sein. Dann ist klar, was unter Stetigkeit eines Vektorfeldes¹⁵⁾ zu verstehen ist. Um die Untersuchung der Indizes eines solchen Vektorfeldes direkt auf die Betrachtung unserer komplexstetigen Felder zurückführen zu können, müßten wir eine Darstellung von M^n besitzen, in der die Ränder jedes einzelnen Simplexes T_{μ}^n auch in bezug auf eins der in M^n ausgezeichneten Koordinatensysteme ebenen Räumen angehörten. Die Existenz einer solchen Darstellung ist nicht selbstverständlich. Wir beschränken uns, um die hiermit angedeutete Schwierigkeit zu vermeiden, auf den Spezialfall, daß M^n eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist; d. h. in jedem Punkt ist in bezug auf jedes ausgezeichnete Koordinatensystem eine stetig von dem Punkt abhängige symmetrische Matrix (g_{ik}) ($i, k = 1, \dots, n$) gegeben, deren zugehörige quadratische Form $\sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k = ds^2$ positiv definit ist und ihren Wert beim Übergang von einem ausgezeichneten Koordinatensystem zu einem anderen nicht ändert. In jeder derartigen Riemannschen Mannigfaltigkeit entspricht nun jedem hinreichend kleinen Vektor eine Verschiebung des Punktes, in dem er angebracht ist, und jeder hinreichend kleinen Verschiebung ein Vektor in dem betreffenden Punkt. Mithin folgt aus den Sätzen II und IV

Satz V. Die Summe der Indizes eines Vektorfeldes in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist gleich der mit $(-1)^n$ multiplizierten Charakteristik; man kann stets²²⁾ ein Vektorfeld mit vorgeschriebenen Singularitäten und Indizes konstruieren, sofern deren Summe gleich der genannten Zahl ist; es existiert dann und nur dann ein singularitätenfreies Vektorfeld, wenn die Charakteristik 0 ist; insbesondere läßt sich in jeder unberandeten geschlossenen Mannigfaltigkeit ungerader Dimensionenzahl ein solches anbringen.

Unter den hiermit behandelten Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind z. B. diejenigen enthalten, die in den $(n+k)$ -dimensionalen euklidischen Raum ($k \geq 0$) in stetig differenzierbarer Weise eingebettet sind; im Fall $k=0$ also die von endlich vielen stetig differenzierbaren $(n-1)$ -dimensionalen geschlossenen unberandeten Hyperflächen begrenzten Teilmannigfaltigkeiten des Raumes; ferner die Clifford-Kleinschen Mannigfaltigkeiten, sowie viele andere, in denen sich eine Riemannsche Metrik definieren läßt; als Beispiel seien etwa noch die komplexen projektiven Räume Z_k genannt, d. h. die Gesamtheiten aller Verhältnisse $z_0 : \dots : z_k$ von komplexen, nicht

sämtlich verschwindenden Zahlen; in ihnen läßt sich eine Maßbestimmung mit dem Bogenelement

$$ds^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^k z_i \bar{z}_i\right)^2} \cdot \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^k z_i \cdot \bar{z}_i & \sum_{i=0}^k z_i \cdot d\bar{z}_i \\ \sum_{i=0}^k dz_i \cdot \bar{z}_i & \sum_{i=0}^k dz_i \cdot d\bar{z}_i \end{vmatrix}$$

definieren²⁴⁾.

Wir verweilen noch einen Augenblick bei dem Fall der von geschlossenen Hyperflächen begrenzten Teilmannigfaltigkeit des n -dimensionalen Raumes; M^n sei durch die geschlossene unberandete Hyperfläche M^{n-1} begrenzt. Die Vektoren eines Feldes der betrachteten Art gehören alle M^n an, sind also auf M^{n-1} überall entweder ins Innere von M^n gerichtet oder tangential an M^{n-1} . Die durch diese Vektoren gelieferte Abbildung von M^{n-1} auf die Richtungskugel hat den Grad $(-1)^n \cdot c$, wenn wieder c die Charakteristik von M^n ist; die zu dieser Abbildung diametrale Abbildung, die durch ein Feld nirgends ins Innere von M^n gerichteter Vektoren vermittelt wird, hat daher den Grad $(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot c = c$. Dieser Grad ist die „Curvatura integra“ von M^n ⁴⁾. Damit ist bewiesen:

Satz VI. *Die Curvatura integra einer im n -dimensionalen Raum liegenden, stetig differenzierbaren, eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit begrenzenden, Jordanschen Hyperfläche ist gleich der Charakteristik der begrenzten Mannigfaltigkeit.*

Diesen Satz habe ich früher nur für den Spezialfall bewiesen, daß die begrenzte Mannigfaltigkeit ein *Element* ist. Ferner ergab sich an der genannten Stelle: Die $2k$ -dimensionale geschlossene, nicht notwendig Jordansche, stetig differenzierbare Hyperfläche m des $(2k+1)$ -dimensionalen euklidischen Raums sei ein „Modell“ der zweiseitigen, geschlossenen, unberandeten Mannigfaltigkeit M^{2k} ; dann ist ihre Curvatura integra $C(m)$ eine topologische Invariante von M^{2k} , und die Indexsumme der Singularitäten jedes an m tangentialen Vektorfeldes ist, vorausgesetzt, daß nur endlich viele Singularitäten vorhanden sind, gleich $2C(m)$. Hieraus folgt nunmehr:

Satz VII. *Die Curvatura integra einer geschlossenen, nicht notwendig Jordanschen, stetig differenzierbaren Hyperfläche des $(2k+1)$ -dimensionalen Raumes, die ein Modell der zweiseitigen, geschlossenen, unberandeten Mannigfaltigkeit M^{2k} ist, ist gleich der halben Charakteristik von M^{2k} .*

²⁴⁾ In § 5 der unter 4) zitierten Arbeit habe ich auf einfache Weise eine beliebige kleine Transformation bzw. ein Vektorfeld in Z_k mit der Indexsumme $k+1$ angegeben und außerdem in etwas umständlicher Weise gezeigt, daß die Charakteristik den Wert $k+1$ hat; diese Bestimmung der Charakteristik ist nunmehr auf Grund von Satz V überflüssig.

Daraus ergibt sich weiter (vgl. die mehrfach zitierte frühere Arbeit), da die *Curvatura integra* stets eine ganze Zahl ist:

Satz VIII. *Eine geschlossene, unberandete, zweiseitige Mannigfaltigkeit M^n mit ungerader Charakteristik besitzt im $(n+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum keine stetig differenzierbare Hyperfläche als Modell, auch nicht bei Zulassung von Selbstdurchdringungen.*

Das einfachste Beispiel für eine solche M^n ist die als „komplexe projektive Ebene“ definierte vierdimensionale Mannigfaltigkeit Z_2 (s. Fußnote 24).

Ein Analogon zu Satz VIII ist die Tatsache, daß eine $2k$ -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit M^{2k} , die die vollständige Berandung einer geschlossenen M^{2k+1} bildet, stets eine *gerade* Charakteristik hat, nämlich die doppelte Charakteristik von M^{2k+1} ²⁵). Eine M^{2k} mit ungerader Charakteristik, also z. B. Z_2 , kann daher *durchdringungsfrei* überhaupt in keinen einfach zusammenhängenden, nicht notwendig mit dem gewöhnlichen Raum homöomorphen, geschlossenen $(2k+1)$ -dimensionalen Raum R^{2k+1} eingebettet sein — wenigstens nicht im Sinne der kombinatorischen Topologie, d. h. so, daß sie durch einen Teil des Randkomplexes einer Darstellung von R^{2k+1} repräsentiert wird —, da sie dann die Begrenzung jedes der beiden Teile bilden würde, in die sie R^{2k+1} zerlegen müßte²⁶).

²⁵) Dies folgt daraus, daß die unberandete $(2k+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch Identifizierung entsprechender Randpunkte zweier Exemplare von M^{2k+1} entsteht, die Charakteristik 0 besitzt; vgl. Dyck, Beiträge zur Analysis Situs II, Math. Ann. 37 (1890).

²⁶) H. Kneser, Ein topologischer Zerlegungssatz, Koninkl. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam Proc. 27, Sept. 1924.

(Eingegangen am 11. 8. 1925.)

Zusatz.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, daß der Begriff der „komplexstetigen Vektorfelder“, auf dessen Verwendung die Ergebnisse der obigen Arbeit im wesentlichen beruhen, nicht klar genug definiert worden ist und zu Mißverständnissen Anlaß gegeben hat. Ich formuliere daher diese Definition noch einmal ausführlicher als früher:

$\mathfrak{U}^n$ sei eine reduzierte affine Darstellung des Komplexes C^n . Eine Zuordnung $\mathfrak{B}$ von Vektoren $\mathfrak{v}(P)$ zu den Punkten P von $\mathfrak{U}$ heißt ein in C^n

(in bezug auf $\mathfrak{U}^n$) „komplexstetiges Vektorfeld“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

A. Im Inneren und auf dem Rande jedes einzelnen $T_{\mu^n}^n$ [$\mu^n = 1, \dots, \beta^n$] ist $\mathfrak{B}$ eindeutig und stetig, abgesehen höchstens von endlich vielen im Inneren gelegenen Punkten.

B. P_0 sei ein Randpunkt von $T_{\mu_0^n}^n$, T_0^{n-k} [$1 \leq k \leq n$] sei irgendein Randsimplex — nicht notwendig dasjenige niedrigster Dimensionenzahl —, dem P_0 angehört. T_ϱ^{n-k} [$\varrho = 1, \dots, r$] seien die mit T_0^{n-k} in C^n als identisch zu betrachtenden Randsimplexe anderer $T_{\mu^n}^n$, P_ϱ die P_0 entsprechenden Punkte der T_ϱ^{n-k} , $(W_k^n)_\varrho$ [$\varrho = 0, 1, \dots, r$] die k -fachen Winkel, deren Scheitel diejenigen ebenen Räume E_ϱ^{n-k} sind, zu welchen die T_ϱ^{n-k} gehören.

Dann tritt stets einer von folgenden beiden Fällen ein:

I. (Hauptfall.) Von den $r+1$ Vektoren $\mathfrak{v}(P_\varrho)$ weist genau einer ins Innere seines $(W_k^n)_\varrho$, während alle anderen ins Äußere ihrer $(W_k^n)_\varrho$ gerichtet sind.

II. (Grenzfall.) Einer der Vektoren $\mathfrak{v}(P_\varrho)$, etwa $\mathfrak{v}(P_0)$, gehört dem Rande seines $(W_k^n)_0$ an; dann kann es unter den Vektoren $\mathfrak{v}^*$, welche vermög der zwischen den Randräumen bestehenden affinen und transitiven Zuordnungen dem Vektor $\mathfrak{v}(P_0)$ entsprechen, einen oder mehrere geben, die ebenfalls zu $\mathfrak{B}$ gehören; *es brauchen aber nicht* — im Gegensatz zu dem am Schluß des § 2 herangezogenen Spezialfall des im gewöhnlichen Sinn stetigen Vektorfeldes in einer Mannigfaltigkeit — *alle diese $\mathfrak{v}^*$ zu $\mathfrak{B}$ zu gehören*. Alle übrigen Vektoren $\mathfrak{v}(P_\varrho)$, welche nicht Vektoren $\mathfrak{v}^*$ sind, zeigen ins Äußere ihrer $(W_k^n)_\varrho$.

(Eingegangen am 26. 5. 1926.)