

Article

Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.

Hopf, Heinz

in: Journal für die reine und angewandte

Mathematik - 163 | Periodical

18 page(s) (71 - 88)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.

Von *Heinz Hopf* in Berlin.

Die Versuche der kombinatorischen Topologie, die Zusammenhangsverhältnisse der n -dimensionalen Komplexe und Mannigfaltigkeiten zu beschreiben, führen zu algebraischen Betrachtungen, nämlich zur Betrachtung von *Gruppen*, die mit dem geometrischen Gebilde topologisch invariant verknüpft sind: es sind dies die Fundamentalgruppe und die Gruppen der i -dimensionalen Homologieklassen ($i = 0, 1, \dots, n$). Handelt es sich um (geschlossene und orientierbare) *Mannigfaltigkeiten*, so läßt sich diesen von Poincaré eingeführten Begriffen dadurch etwas wesentlich Neues hinzufügen, daß man die Homologiegruppen der verschiedenen Dimensionszahlen zu einem *Ring* verschmilzt: man hat — wie unten ausführlicher auseinandergesetzt werden wird — den *Schnitt* zweier Zyklen (geschlossener Komplexe) in der Mannigfaltigkeit als *Produkt* zu deuten, was auf Grund neuerer Untersuchungen von Alexander und Lefschetz auf keine Schwierigkeit stößt. Diese Gruppen und Ringe bilden nach dem gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse im wesentlichen das algebraische Gerüst der Mannigfaltigkeiten, das deren Zusammenhangsverhältnisse schildert, freilich ohne sie zu erschöpfen.

Eine eindeutige und stetige (nicht notwendigerweise eindeutig umkehrbare) Abbildung f einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit μ bewirkt eine eindeutige Abbildung des Ringes und der Fundamentalgruppe der ersteren auf Ring und Fundamentalgruppe der letzteren. Die Gesamtheit der Eigenschaften dieser Gruppen- und Ringbeziehungen möge als *Algebra* der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden; von *Topologie* der Abbildungen wird man sprechen, wenn man nicht die Gruppen- und Ringelemente, sondern die Punkte der beiden Mannigfaltigkeiten und die durch f zwischen ihnen vermittelten Beziehungen betrachtet. Es ist von besonderem Interesse, den Zusammenhängen zwischen Algebra und Topologie einer Abbildung nachzugehen; ein Beispiel eines solchen Zusammenhanges ist der Lefschetzsche Fixpunktsatz ¹⁾, der die Fixpunktzahl einer Abbildung von M auf sich — also eine topologische Eigenschaft — mit den Spuren der Substitutionen, denen die Homologiegruppen unterworfen werden, — also mit algebraischen Eigenschaften — in Verbindung bringt; ein anderes einfacheres Beispiel liefert die Betrachtung des Abbildungsgrades c von f : er läßt sich einerseits algebraisch durch die Homologie $f(M) \sim c\mu$ definieren und kann andererseits (wenigstens seinem absoluten Betrage nach) topologisch als die Mindestzahl der eineindeutigen Bedeckungen eines Gebietes von μ charakterisiert werden, die sich durch stetige Abänderung von f erreichen läßt ²⁾, woraus insbesondere die wesentliche topologische Verschiedenheit der Abbildungen mit $c \neq 0$ von denen mit $c = 0$ erhellt: die ersteren sind dadurch *gekennzeichnet*, daß man

¹⁾ *S. Lefschetz*, (a) *Intersections and transformations of complexes and manifolds*; (b) *Manifolds with a boundary and their transformations*; Trans. Am. Math. Soc. **XXVIII** (1926), **XXIX** (1927).

²⁾ *H. Hopf*, Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Zweiter Teil, Math. Annalen **102** (1929); *H. Kneser*, Glättung von Flächenabbildungen, Math. Annalen **100** (1928).

keinen Punkt von μ durch stetige Änderung von f von der Bedeckung durch die Bildmenge befreien kann.

In dieser Arbeit werden Sätze über die durch Abbildungen von M auf μ zwischen den Homologiegruppen und -ringen der beiden Mannigfaltigkeiten hergestellten Beziehungen bewiesen; die Fundamentalgruppen werden nur gelegentlich und dann im wesentlichen als Hilfsmittel herangezogen. Die Sätze zeigen, daß auch diese algebraischen Beziehungen wesentlich verschiedenartig ausfallen, je nachdem der *Abbildungsgrad* von 0 verschieden oder 0 ist, und daß überhaupt der Betrag des Grades eine beherrschende Rolle spielt. Sie liefern unter anderem für die Gesamtheit der möglichen Abbildungen von M auf μ Einschränkungen, die man aus den Eigenschaften der beiden Ringe ablesen kann; die einfachste derartige Bedingung lautet, daß man M auf μ nicht mit einem von 0 verschiedenen Grade abbilden kann, falls für irgendein i die i -te Bettische Zahl von M kleiner ist als die i -te Bettische Zahl von μ . Als wesentliches Hilfsmittel beim Beweis des Hauptsatzes (Satz I, § 3), aus dem sich alles andere leicht ergibt, dient die *Produktmannigfaltigkeit* von M und μ , deren Wert für die Untersuchung der Abbildungen seit den Arbeiten von Lefschetz ¹⁾ feststeht. ³⁾

§ 1. Der Homologiering einer Mannigfaltigkeit.

Es sei zunächst kurz an einige Grundbegriffe und -tatsachen aus der kombinatorischen Topologie erinnert, deren Kenntnis hier als bekannt vorausgesetzt werden muß ⁴⁾.

Unter dem Orientieren eines n -dimensionalen Komplexes C^n versteht man ein willkürliches Orientieren seiner n -dimensionalen Zellen. Der Rand einer orientierten n -dimensionalen Zelle ist ein wohlbestimmter orientierter $(n - 1)$ -dimensionaler Komplex; der Rand von C^n ist die Summe der Ränder seiner n -dimensionalen Zellen. Dabei ist diese Summe algebraisch zu bilden, sie ist also eine Linearform in den $(n - 1)$ -dimensionalen Zellen von C^n ; ist sie 0, so heißt C^n geschlossen.

Unter einem in C^n liegenden i -dimensionalen Zyklus versteht man das eindeutige und stetige Bild eines geschlossenen i -dimensionalen Komplexes, das nicht lediglich als Punktmenge in C^n , sondern in bestimmter Weise als Bild seines Originalkomplexes aufzufassen ist. Ein i -dimensionaler Zyklus z^i heißt homolog 0, geschrieben: $z^i \sim 0$, wenn er das Bild des Randes eines in C^n hinein abgebildeten $(i + 1)$ -dimensionalen Komplexes ist. Da z^i (d. h. sein Original) orientiert ist, ist klar, was man unter $z^i = +z^i$ und unter $-z^i$ zu verstehen hat. Ferner ist die Summe und nach der eben über das Vorzeichen gemachten Bemerkung auch die Differenz zweier Zyklen in naheliegender Weise zu erklären. Statt $z_1^i - z_2^i \sim 0$ sagt man auch: $z_1^i \sim z_2^i$; aus $z_1^i \sim z_2^i$, $z_2^i \sim z_3^i$ folgt $z_1^i \sim z_3^i$; man nennt dann die Zyklen zu derselben Homologiekategorie gehörig.

Die i -dimensionalen Homologieklassen bilden bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe. Es gilt der Satz, daß dies eine Gruppe von endlich vielen Erzeugenden ist; sie

³⁾ Der größte Teil der Sätze dieser Arbeit ist bereits — mit wesentlich umständlicheren, rechnerischen Beweisen — in der folgenden Note mitgeteilt worden: H. Hopf, On some properties of one-valued transformations of manifolds, Proc. Nat. Acad. of Sciences U. S. A. 14 (1928), S. 206—214; Druckfehlerberichtigung dazu S. 600.

⁴⁾ Zur Einführung in die kombinatorische Topologie können das Buch von O. Veblen, Analysis situs, Cambridge Colloquium 1922, und die folgenden Arbeiten dienen: J. W. Alexander, Combinatorial analysis situs, Trans. Am. Math. Soc. XXVIII (1926); E. R. van Kampen, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Dissertation Leiden 1929.

hat also einen endlichen Rang und endlich viele Elementarteiler und ist durch diese Zahlen vollständig bestimmt. Den Rang nennt man die i -te Bettische Zahl, die Elementarteiler die i -ten Torsionskoeffizienten von C^n . Bei dieser Art von Definition ist es klar, daß dies topologische Invarianten von C^n sind. Die genannte Endlichkeitseigenschaft beruht darauf, daß es in jeder Homologieklassse einen Zyklus gibt, der aus i -dimensionalen Zellen der vorgelegten Zelleinteilung von C^n aufgebaut ist, (und in den Beweis dieser Tatsache ist bei der hier skizzierten Darstellung die Schwierigkeit des Beweises der Invarianz von Bettischen Zahlen und Torsionskoeffizienten im wesentlichen verschoben).

Ist $C^n = M$ eine orientierte und geschlossene Mannigfaltigkeit — wir übergehen die verschiedenen Möglichkeiten und Schwierigkeiten bei der Mannigfaltigkeitsdefinition —, so lassen sich ⁵⁾ aus irgend zwei Homologieklassen H^i, H^j der Dimensionen i, j Zyklen z^i, z^j auswählen, die aus Zellen von Unterteilungen der gegebenen Zelleinteilung von M aufgebaut sind und sich zueinander in allgemeiner Lage befinden; d. h. eine Zelle Z^i von z^i und eine Zelle Z^j von z^j haben entweder keinen Punkt gemeinsam oder schneiden sich in einer $(i + j - n)$ -dimensionalen Zelle einer weiteren Unterteilung; letzteres kommt nur in Frage, wenn $i + j \geq n$ ist. Es gelten die Sätze, daß der von diesen Durchschnittszellen gebildete Komplex selbst eine Zyklus ist und daß die Homologieklassse, der er angehört, nicht von z^i, z^j , sondern nur von den Klassen H^i, H^j abhängt; sie wird mit $H^i \cdot H^j$ bezeichnet; dabei ist die Orientierung der Durchschnittszelle zweier orientierter Zellen in der orientierten M durch eine einfache Festsetzung gegeben. Die Schnittbildung ist bis auf das Vorzeichen kommutativ; die eben erwähnte Festsetzung liefert $H^i \cdot H^j = (-1)^{(n-i)(n-j)} H^j \cdot H^i$. Sie ist ferner distributiv; daraus folgt, daß man die Schnittklasse irgendeiner i -dimensionalen Klasse H^i mit irgendeiner j -dimensionalen Klasse H^j kennt, wenn nur die Schnitte der Elemente $H_1^i, H_2^i, \dots$ einer Basis der i -dimensionalen Homologieklassengruppe mit den Elementen $H_1^j, H_2^j, \dots$ einer j -dimensionalen Basis bekannt sind ⁶⁾:

$$(1) \quad H_r^i \cdot H_s^j \sim \sum_u a_{rs}^u H_u^k,$$

dabei durchlaufen die H_u^k eine k -dimensionale Basis mit $k = i + j - n$. Beim Übergang zu anderen i -, j - und k -dimensionalen Basen ändert sich das Koeffizientenschema a_{rs}^u , es besitzt jedoch gewisse Invarianten; eine solche ist z. B. der Rang der Gruppe derjenigen k -dimensionalen Klassen, die als Schnitte i -dimensionaler Klassen mit j -dimensionalen Klassen auftreten. Diese gegenüber Basiswechsel invarianten Größen sind bei homöomorphen Mannigfaltigkeiten einander gleich, sie sind also topologische Invarianten, die „Alexanderschen Schnittinvarianten“ von M .

Die Schnittbildung erfüllt außer dem distributiven auch das assoziative Gesetz: $H^h \cdot (H^i \cdot H^j) = (H^h \cdot H^i) \cdot H^j = H^h \cdot H^i \cdot H^j$ ⁷⁾. Man kann nun die eben geschilderten

⁵⁾ Die Sätze über die Schnitte von Zyklen in einer Mannigfaltigkeit sind im Teil I der in Fußnote 1 genannten Arbeit (a) von Lefschetz enthalten.

⁶⁾ Die Homologiesysteme (1) und die sich daraus ergebenden Invarianten sind von Alexander eingeführt worden: *J. W. Alexander*, New topological invariants expressible as tensors; On certain new topological invariants of a manifold; Topological invariants of manifolds; On the intersection invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. of Sciences U. S. A. 10 (1924), S. 99—103 und S. 493—494; 11 (1925), S. 143—146. — Auf die in diesen Noten eingeführten Begriffe „mod. π “ gehen wir hier nicht ein; auf Grund von ihnen dürfte sich ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit verschärfen und verallgemeinern lassen.

⁷⁾ Die zum Beweis assoziativen Gesetzes notwendige Vorzeichenbetrachtung ist bei Lefschetz ausgelassen, aber leicht nachzuholen.

Schnittinvarianten, und gleichzeitig die Bettischen und Torsionszahlen, auch folgendermaßen zusammenfassend beschreiben: Wir betrachten nicht mehr wie bisher Zyklen und Homologieklassen einzelner fester Dimensionszahlen, sondern auch Zyklen gemischter Dimension und entsprechende Homologieklassen; wir betrachten also jetzt die Gruppe *aller* Homologieklassen, d. h. die direkte Summe der Gruppen der Homologieklassen der einzelnen Dimensionszahlen i für $i = 0, 1, \dots, n$. In dieser additiven Gruppe ist auf Grund des distributiven Gesetzes und der Gleichungen (1) für je zwei Elemente ein „Produkt“, nämlich die Schnittklasse, definiert, und diese Multiplikation genügt dem assoziativen und zusammen mit der Addition dem distributiven Gesetz. *Die Homologieklassen bilden nunmehr ein System hyperkomplexer Zahlen oder einen Ring mit einer endlichen Basis.* Die Aussage der topologischen Invarianz der Alexanderschen Schnittinvarianten sowie der Bettischen und Torsionszahlen läßt sich in den Satz zusammenfassen: *Die Ringe homöomorpher Mannigfaltigkeiten sind einander dimensionstreu-isomorph.* Dabei ist klar, was unter der Dimensionstreue des Isomorphismus zu verstehen ist: jedem Ringelement reiner, d. h. ungemischter, Dimension muß bei dem Isomorphismus ein Element ebenfalls reiner, und zwar derselben, Dimension entsprechen.

Für manche Zwecke ist es bequem und ausreichend, die Betrachtungen durch eine Modifikation des Homologiebegriffes zu vereinfachen: ein Zyklus z soll „divisions-homolog“ 0, oder kurz: „d.-homolog“ 0, geschrieben: $z \approx 0$, heißen, wenn es eine von 0 verschiedene Zahl a gibt, so daß $az \sim 0$ ist. Rechnet man mit D.-Homologien statt mit gewöhnlichen Homologien, so bedeutet das, daß man alle „Nullteiler“, — d. h. die im Fall der Existenz von Torsionskoeffizienten vorhandenen Klassen H mit $H \sim 0$, $aH \sim 0$, $a \neq 0$ —, gleich 0 setzt; der Name „divisions-homolog“ ist dadurch gerechtfertigt, daß aus $aH \approx 0$ stets $H \approx 0$ folgt. Die D.-Homologieklassen bilden ebenfalls bezüglich Addition und Schnittbildung einen Ring; man erhält ihn aus dem früheren durch Nullsetzen aller Nullteiler, d. h. der neue Ring ist der Restklassenring des aus den Nullteilern bestehenden Ideals in dem alten Ring.

Wir werden uns im folgenden ausschließlich mit dem Ring der D.-Homologieklassen beschäftigen und ihn kurz „den Ring von M “ nennen. Er soll mit $\mathfrak{R}(M)$, sein Rang, also die Summe aller Bettischen Zahlen, soll mit $P(M)$, die einzelnen Bettischen Zahlen sollen mit $p^i(M)$ bezeichnet werden ($i = 0, 1, \dots, n$).

$\mathfrak{R}(M)$ besitzt eine Eins, nämlich M selbst; denn es ist, wie aus der Definition des Schnittes unmittelbar hervorgeht,

$$(2) \quad M \cdot z = z \cdot M = z$$

für jeden Zyklus z .

Wichtig sind die Dualitätseigenschaften von $\mathfrak{R}(M)$: Nach dem Poincaréschen Dualitätssatz ⁸⁾ ist

$$p^i(M) = p^{n-i}(M) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Insbesondere ist $p^0(M) = p^n(M) = 1$; für $i = 0$ und $i = n$ gibt es überdies keine Nullteiler; also ist jeder 0-dimensionale Zyklus einem mit einer Vielfachheit versehenen Punkt homolog, und erst recht d.-homolog. In den Relationen (1) fällt daher für $i + j = n$, $k = 0$ der Index u fort, und die Koeffizienten a_{rs} bilden nach dem Dualitätssatz eine quadratische Matrix. Ihre Betrachtung liefert im Gegensatz zu den anderen Dimensionszahlen keine Alexanderschen Invarianten von M . Nach einem Satz von Veblen ⁹⁾ hat

⁸⁾ Beweise finden sich z. B. in dem Buch von Veblen und in der Arbeit von van Kampen (s. Fußn. 4).

⁹⁾ O. Veblen, The intersection numbers, Trans. Am. Math. Soc. XXV (1923); s. auch die Arbeit von van Kampen.

nämlich ihre Determinante stets den Wert ± 1 , und daraus folgt, daß bei geeigneter Basenwahl die Schnittrelationen die Gestalt bekommen:

$$H_r^{n-j} \cdot H_s^j \sim 0 \quad \text{für } r \neq s; \quad H_r^{n-j} \cdot H_r^j \sim H^0,$$

wobei H^0 die durch einen positiv signierten, einfach gezählten Punkt bestimmte 0-dimensionale Homologiekategorie ist. Diese Basis $H_1^{n-j}, H_2^{n-j}, \dots, H_{p^j}^{n-j}$ heißt die zu der Basis $H_1^j, H_2^j, \dots, H_{p^j}^j$ „duale“ Basis; aus dem Veblenschen Satz folgt leicht, daß es zu jeder j -dimensionalen Basis eine und nur eine duale $(n-j)$ -dimensionale Basis gibt.

§ 2. Algebraische Abbildungsinvarianten.

Im folgenden sind stets M und μ zwei n -dimensionale, orientierte, geschlossene Mannigfaltigkeiten, und M ist einer eindeutigen und stetigen Abbildung f auf μ unterworfen.

Aus den am Anfang des § 1 genannten Tatsachen folgt unmittelbar, daß die f -Bilder homologer Zyklen in M homologe Zyklen in μ sind und daß das Bild der Summe oder Differenz zweier Zyklen die Summe bzw. Differenz der Bilder der beiden Zyklen ist. Daraus ergibt sich, daß f eine eindeutige Abbildung des Ringes $\mathfrak{R}(M)$ in den Ring $\mathfrak{R}(\mu)$ bewirkt und daß diese Abbildung ein additiver Homomorphismus ist, d. h. daß für jedes Paar von Elementen H_1, H_2 aus $\mathfrak{R}(M)$ die Gleichung $f(H_1 + H_2) \approx f(H_1) + f(H_2)$ gilt.

Da wir Eigenschaften dieser Ringabbildung untersuchen wollen, werden wir zwei Abbildungen f, g von M auf μ als nur unwesentlich voneinander verschieden betrachten, wenn sie dieselbe Ringabbildung bewirken, wenn also $f(z) \approx g(z)$ für jeden Zyklus z aus M ist. Die Gesamtheit aller Abbildungen von M auf μ , die zu f in dieser Beziehung stehen, möge der durch f bestimmte „Abbildungskreis“ heißen. Die Sätze, die wir beweisen werden, beziehen sich also auf Eigenschaften, die allen Abbildungen des ganzen Kreises gemein sind und daher als „Kreisinvarianten“ von Abbildungen bezeichnet werden können. Da sich die Homologiekategorie eines Zykels bei stetiger Abänderung des Zykels nicht ändert, gehören zwei Abbildungen, die sich durch stetige Modifikation auseinander herstellen lassen, die also derselben „Abbildungskategorie“ angehören, erst recht demselben Kreis an; ein solcher zerfällt also im allgemeinen in ein System von Abbildungskategorien, und die Kreisinvarianten, die in der in der Einleitung gebrauchten Ausdrucksweise zu den „algebraischen“ Invarianten der Abbildung gehören, sind a fortiori „Klasseninvarianten“.

Es ist leicht, numerische Kreisinvarianten anzugeben. Da die Ringabbildung ein additiver Homomorphismus ist, wird sie für jede Dimensionszahl i durch eine lineare Substitution einer i -dimensionalen D.-Homologiebasis $z_1^i, z_2^i, \dots, z_{p^i}^i$ von M in eine i -dimensionale D.-Homologiebasis $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \dots, \zeta_{\pi^i}^i$ von μ dargestellt; dabei ist $p^i(M) = p^i$, $p^i(\mu) = \pi^i$ gesetzt. Wechsel der Basen geschieht durch unimodulare Substitutionen; die gegenüber unimodularen Substitutionen der Variablenreihen invarianten Größen einer linearen Substitution sind daher Kreisinvarianten der Abbildungen. Es sind dies der Rang und die Elementarteiler der Substitution. Der geometrische Sinn des Ranges ist klar: diejenigen i -dimensionalen Homologiekategorien von μ , die Bilder von Homologiekategorien von M sind, bilden eine Untergruppe aller i -dimensionalen Homologiekategorien von μ , und der Rang der Substitution ist der Rang dieser Untergruppe. Er heiße der „ i -te Rang von f “ und werde mit p_i^f bezeichnet; $\sum_i p_i^f = P_f$ heiße der „Gesamtrang von f “; die Elementarteiler mögen die „ i -dimensionalen Elementarteiler von f “ heißen und mit $c_1^i, c_2^i, \dots$ bezeichnet werden.

Für $i = 0$ liefern diese Begriffe nichts; denn das Bild eines einfach gezählten Punktes von M ist stets ein einfach zu zählender Punkt von μ ; es ist also immer $p_i^0 = 1$, und es gibt immer einen und nur einen 0-dimensionalen Elementarteiler $c^0 = 1$. Die Substitution der n -dimensionalen Zyklen wird, da die Mannigfaltigkeiten M bzw. μ hier Basen sind, durch

$$(3) \quad f(M) \approx c\mu$$

dargestellt; hierin ist $c = c^n$ der Grad der Abbildung¹⁰⁾. Es wird sich zeigen, daß der Grad vor den anderen Elementarteilern wesentlich ausgezeichnet ist.

Diese Invarianten beziehen sich nur auf additive Eigenschaften der Ringabbildungen und haben mit der Produktbildung in den Ringen, also mit den Eigenschaften, die M und μ als Mannigfaltigkeiten vor anderen Komplexen auszeichnen, nichts zu tun. Zweckmäßige Definitionen von Invarianten, die sich auf multiplikative Eigenschaften der Ringe beziehen, liegen viel weniger nahe, und das dürfte seinen Grund in dem Umstand haben, daß die Ringabbildung zwar, wie wir sahen, ein additiver, aber im allgemeinen kein multiplikativer Homomorphismus ist, d. h. daß im allgemeinen nicht die D.-Homologie $f(z_1 \cdot z_2) \approx f(z_1) \cdot f(z_2)$ gilt; denn ist z. B. $z_1 = M$ und z_2 ein Punkt, so ist $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_2) \approx \zeta$, wobei ζ ein Punkt in μ ist, aber $f(z_1) \approx c\mu$, also $f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c\mu \cdot \zeta \approx c\zeta$; hiernach könnte man vielleicht vermuten, daß immer $f(z_1) \cdot f(z_2) \approx cf(z_1 \cdot z_2)$ sei; daß jedoch dies nicht zutrifft, zeigt das Beispiel einer Abbildung einer Torusfläche auf eine Kugel; bei ihr sind die Bilder zweier geschlossener Kurven, deren Schnitt ein einfacher Punkt ist, homolog 0, also ist auch ihr Schnitt ≈ 0 ; hier ist also $f(z_1 \cdot z_2) \approx 0$, $f(z_1) \cdot f(z_2) \approx 0$, wenn z_1, z_2 die eben genannten Kurven sind. Es ist leicht, an weiteren Flächenabbildungen zu zeigen, daß die Bilder der Schnitte geschlossener Kurven sich sehr verschiedenartig zu dem Schnitte der Bilder der Kurven verhalten können.

Es ist also wünschenswert, Gesetze aufzufinden, die einen Ersatz für den fehlenden multiplikativen Homomorphismus schaffen; es besteht ferner die Aufgabe, festzustellen, ob die oben auf Grund des additiven Homomorphismus definierten numerischen Invarianten voneinander unabhängig sind oder ob Bindungen zwischen ihnen bestehen. Die Sätze, die im folgenden bewiesen werden, sind Beiträge zur Beantwortung dieser Fragen. Das erstrebenswerte Ziel ist, algebraische Abbildungseigenschaften anzugeben, die bei beliebigen Mannigfaltigkeiten M und μ notwendige und hinreichende Bedingungen dafür sind, daß eine vorgegebene Abbildung von $\mathfrak{R}(M)$ auf $\mathfrak{R}(\mu)$ durch eine Abbildung f von M auf μ bewirkt wird. Dieses Ziel wird nicht erreicht, denn alle allgemeinen Sätze, die hier bewiesen werden, haben nur den Charakter notwendiger Bedingungen.

§ 3. Der Umkehrhomomorphismus einer Abbildung.

Alle unsere Sätze folgen im wesentlichen aus der Tatsache, daß eine gewisse Ringabbildung existiert, die eine Art „Umkehrung“ der durch f bewirkten Ringabbildung ist:

Satz I: Es gibt eine eindeutige Abbildung φ des Ringes $\mathfrak{R}(\mu)$ in den Ring $\mathfrak{R}(M)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1) φ ist ein Ringhomomorphismus (d. h. additiver und multiplikativer Homomorphismus)¹¹⁾;

2) für jedes Element z von $\mathfrak{R}(M)$ und jedes Element ζ von $\mathfrak{R}(\mu)$ gilt

$$(4) \quad f(\varphi(\zeta) \cdot z) \approx \zeta \cdot f(z).^{11a)}$$

¹⁰⁾ L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911).

¹¹⁾ Dabei braucht nicht jedes Element von $\mathfrak{R}(M)$ Bild eines Elements von $\mathfrak{R}(\mu)$ zu sein.

^{11a)} Der Satz ist trivial, wenn man Summe und Produkt nicht im algebraischen Sinne, sondern als Vereinigung und Durchschnitt von Punktmenge in M bzw. μ auffaßt und $\varphi(\zeta)$ als die Menge derjenigen Punkte von M erklärt, die durch f auf Punkte von ζ abgebildet werden.

Dem Beweise, der die Konstruktion von φ enthält, schicken wir einige Folgerungen aus dem Satze voran, die von der Art dieser Konstruktion nicht abhängen und die wir später hauptsächlich benutzen werden:

Satz Ia: φ ist durch die in Satz I genannten Eigenschaften eindeutig bestimmt. Sind nämlich $z_1^i, z_2^i, \dots, z_p^i$ bzw. $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \dots, \zeta_{\pi}^i$ i -dimensionale Basen in $\mathfrak{R}(M)$ bzw. $\mathfrak{R}(\mu)$, $z_1^{n-i}, z_2^{n-i}, \dots, z_p^{n-i}$ bzw. $\zeta_1^{n-i}, \zeta_2^{n-i}, \dots, \zeta_{\pi}^{n-i}$ ihre dualen Basen (s. § 1, Schluß), und ist

$$f(z_r^i) \approx \sum_s a_{rs}^i \zeta_s^i,$$

so ist

$$\varphi(\zeta_s^{n-i}) \approx \sum_r a_{rs}^i z_r^{n-i}. \quad {}^{11b)}$$

Beweis: Es sei

$$\varphi(\zeta_{\sigma}^{n-i}) \approx \sum_{\varrho} \alpha_{\sigma\varrho}^{n-i} z_{\varrho}^{n-i};$$

dann folgt

$$\varphi(\zeta_{\sigma}^{n-i}) \cdot z_r^i \approx \sum_{\varrho} \alpha_{\sigma\varrho}^{n-i} z_{\varrho}^{n-i} \cdot z_r^i \approx \alpha_{\sigma r}^{n-i} z^0,$$

worin z^0 die durch einen einfachen Punkt bestimmte Homologiekategorie von $\mathfrak{R}(M)$ ist, und, wenn ζ^0 die analoge Bedeutung in $\mathfrak{R}(\mu)$ hat,

$$f(\varphi(\zeta_{\sigma}^{n-i}) \cdot z_r^i) \approx \alpha_{\sigma r}^{n-i} \zeta^0.$$

Andererseits ist

$$\zeta_{\sigma}^{n-i} \cdot f(z_r^i) \approx \sum_s a_{rs}^i \zeta_{\sigma}^{n-i} \cdot \zeta_s^i \approx a_{r\sigma}^i \zeta^0,$$

also nach (4)

$$\alpha_{\sigma r}^{n-i} = a_{r\sigma}^i.$$

Satz Ib: Für jedes Element ζ von $\mathfrak{R}(\mu)$ ist

$$(5) \quad f(\varphi(\zeta)) \approx c \zeta,$$

wobei c der Grad von f ist.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (2), (3) und (4), wenn man in (4) $z = M$ setzt.

Satz Ic: Wenn f eineindeutig ist, so ist φ die durch f^{-1} bewirkte Ringabbildung.

Beweis: Wegen der Eineindeutigkeit ist die Ringabbildung f^{-1} ein Ringisomorphismus; denn diese Tatsache ist mit der topologischen Invarianz des Ringes (§ 1) gleichbedeutend. Ebenso folgt aus der Eineindeutigkeit von f

$$f(f^{-1}(\zeta) \cdot z) \approx ff^{-1}(\zeta) \cdot f(z) \approx \zeta \cdot f(z).$$

Die Ringabbildung f^{-1} hat also die in Satz I von φ ausgesagten Eigenschaften und ist daher nach Satz Ia mit φ identisch.

Beweis von Satz I: Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M \times \mu$ und setzen die einfachsten Eigenschaften der Produktmannigfaltigkeiten als bekannt voraus¹²⁾; die Bezeichnungen sind dieselben wie bei Lefschetz; nur soll die Bildung des Schnittes in $M \times \mu$ zur besseren Unterscheidung von den Schnittbildungen in M und μ nicht durch einen Punkt, sondern durch einen kleinen Kreis angedeutet werden. Wir nennen zunächst einige einfache Tatsachen, die wir brauchen werden:

^{11b)} Als additiver Homomorphismus ist φ hierdurch vollständig bestimmt. Die multiplikativ-homomorphe Eigenschaft ist für den Satz Ia ohne Bedeutung.

¹²⁾ S. z. B. Teil II der in Fußn. 1 genannten Arbeit (a) von Lefschetz; wir brauchen aber nur die einfachsten Tatsachen und z. B. nicht die Bildung der Homologiebasen in dem Produktkomplex.

1) In $M \times \mu$ ist durch die Orientierungen von M und μ eine Orientierung ausgezeichnet. Sind $t, \bar{t}$ bzw. $\tau, \bar{\tau}$ Zellenpaare aus „dualen“ Zelleinteilungen von M bzw. μ , so ist die Gleichung

$$(t \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = \pm (t \cdot \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau})$$

bis auf das Vorzeichen selbstverständlich; die Orientierungsfestsetzungen liefern, wenn t α -dimensional, $\bar{t}$ $\bar{\alpha}$ -dimensional ist,

$$(t \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = (-1)^{(n-\alpha)(n-\bar{\alpha})} (t \cdot \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau})^{12a)},$$

also insbesondere, wenn $t = t^n$ n -dimensional ist,

$$(t^n \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = t^n \cdot \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau}.$$

Hieraus folgt durch Summation über alle n -dimensionalen Zellen t^n von M

$$(M \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau},$$

und wenn π ein i -dimensionaler polyedraler Zyklus in μ ist, durch Summation über dessen i -dimensionalen Zellen τ

$$(6) \quad (M \times \pi) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = \bar{t} \times \pi \cdot \bar{\tau}.$$

Sind ζ_1, ζ_2 zwei beliebige Zyklen in μ , so liefern polyedrale Approximationen und nochmalige Summierungen

$$(7a) \quad (M \times \zeta_1) \circ (M \times \zeta_2) \approx M \times \zeta_1 \cdot \zeta_2.$$

Ferner ist

$$(7b) \quad (M \times \zeta_1) + (M \times \zeta_2) \approx M \times (\zeta_1 + \zeta_2).$$

2) Jeder Punkt von $M \times \mu$ ist in eindeutiger Weise durch $x \times \xi$ zu bezeichnen, wobei x, ξ Punkte von M bzw. μ sind. Ordnet man dem Punkt $x \times \xi$ den Punkt ξ zu, so ist das eine eindeutige und stetige Abbildung von $M \times \mu$ auf μ , die wir mit F bezeichnen. Sind wieder t, τ Zellen von M bzw. μ , so ist

$$(8) \quad F(t \times \tau) = \tau.$$

3) Sind $t_1^i, t_2^i, \dots$ bzw. $\tau_1^j, \tau_2^j, \dots$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) die Zellen von Zerlegungen von M und μ , so gibt es eine Zelleneinteilung von $M \times \mu$, deren Zellen die Produkte $t_r^i \times \tau_s^j$ sind. Folglich ist jeder Zyklus in $M \times \mu$ einer linearen Verbindung der $t_r^i \times \tau_s^j$ d.-homolog.

4) Wir brauchen noch folgende Bemerkung, die sich nicht nur auf Produktmannigfaltigkeiten bezieht: $\bar{M}$ sei eine in einer Mannigfaltigkeit N gelegene Mannigfaltigkeit, Z_1 ein Zyklus in N , Z_2 ein Zyklus in $\bar{M}$. Die Schnittbildung in $\bar{M}$ bezeichnen wir durch einen Punkt, die in N durch einen Kreis. Dann ist klar, daß die Schnitte $(Z_1 \circ \bar{M}) \cdot Z_2$ und $Z_1 \circ Z_2$ sich höchstens um das Vorzeichen unterscheiden; es gilt aber der Satz ¹³⁾, daß auch die Vorzeichen übereinstimmen, daß also

$$(9) \quad (Z_1 \circ \bar{M}) \cdot Z_2 = Z_1 \circ Z_2$$

ist. Wenden wir dies an auf $N = M \times \mu$, $Z_1 = M \times \zeta_1$, $Z_2 = (M \times \zeta_2) \circ \bar{M}$, wobei ζ_1, ζ_2 Zyklen in μ , Z_1, Z_2 also Zyklen in $M \times \mu$ sind, so ergibt sich unter Verwendung des assoziativen Gesetzes

$$((M \times \zeta_1) \circ \bar{M}) \cdot ((M \times \zeta_2) \circ \bar{M}) = (M \times \zeta_1) \circ (M \times \zeta_2) \circ \bar{M},$$

^{12a)} Lefschetz (a), S. 35, Nr. 55; die dort unterdrückte Vorzeichenbetrachtung läßt sich auf Grund von (a), Nr. 53, leicht durchführen.

¹³⁾ Lefschetz (b), Nr. 1.

also nach (7 a)

$$(10) \quad ((M \times \zeta_1) \circ \bar{M}) \cdot ((M \times \zeta_2) \circ \bar{M}) \approx (M \times \zeta_1 \cdot \zeta_2) \circ \bar{M}.$$

Wir gehen zum Beweis von Satz I über. Die Punkte $x \times f(x)$ bilden, wenn x alle Punkte von M durchläuft, ein eindeutiges Bild $\bar{M}$ von M . Wir fassen f als Abbildung von $\bar{M}$ auf μ auf; dann ist

$$f(x) = F(x \times f(x)).$$

Wir setzen nun für jeden Zyklus ζ aus μ

$$\varphi(\zeta) \approx (M \times \zeta) \circ \bar{M}.$$

Aus dieser Konstruktion ist die Tatsache ersichtlich, daß φ die Rolle einer „Umkehrung“ von f spielt. Wir haben zu zeigen, daß φ ein Ringhomomorphismus ist und (4) erfüllt.

Aus (7 b) folgt durch rechtsseitiges Schneiden mit $\bar{M}$, daß φ ein additiver, aus (10), daß φ ein multiplikativer Homomorphismus ist.

Nach (9) ist, wenn $\bar{z}$ ein Zyklus in $\bar{M}$ ist,

$$\varphi(\zeta) \cdot \bar{z} = ((M \times \zeta) \circ \bar{M}) \cdot \bar{z} = (M \times \zeta) \circ \bar{z};$$

die Behauptung (4) läßt sich daher schreiben:

$$(4') \quad F((M \times \zeta) \circ \bar{z}) \approx \zeta \cdot F(\bar{z}).$$

Ist z' ein Zyklus in $M \times \mu$, so daß

$$z' \approx \bar{z} \quad \text{in } M \times \mu$$

ist, so folgt, da Zyklen, die in $M \times \mu$ d.-homolog sind, durch F auf Zyklen abgebildet werden, die in μ d.-homolog sind, die Behauptung (4') aus

$$(4'') \quad F((M \times \zeta) \circ z') = \zeta \cdot F(z'),$$

wo wir auch ζ als aus Zellen einer Zerlegung von μ bestehend annehmen; (4'') ist also für einen geeigneten z' zu beweisen.

$t_1^i, t_2^i, \dots$, und $\tau_1^j, \tau_2^j, \dots$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$) seien die Zellen von Zerlegungen von M und μ . Wir können z' so wählen, daß

$$(11) \quad z' = \sum_{r,s} u_{rs} (t_r \times \tau_s)$$

ist; dann folgt aus (9) durch Summierung über r und s

$$(12) \quad F(z') = \sum_{r,s} u_{rs} \tau_s.$$

Nach (6) und (11) ist

$$(11') \quad (M \times \zeta) \circ z' = \sum_{r,s} u_{rs} (t_r \times \zeta \cdot \tau_s);$$

ζ darf man als zu den τ_s in allgemeiner Lage befindlich annehmen; dann ist $\zeta \cdot \tau_s$ eine Zelle; aus (11') und (8) folgt durch Summierung

$$F((M \times \zeta) \circ z') = \sum_{r,s} u_{rs} \zeta \cdot \tau_s = \zeta \cdot \sum_{r,s} u_{rs} \tau_s,$$

also nach (12) die Behauptung (4'').

§ 4. Sätze über algebraische Eigenschaften einer Abbildung.

Die Sätze dieses Paragraphen sind rein algebraische Folgerungen aus der Tatsache, daß es eine ringhomomorphe Abbildung φ des Ringes $\mathfrak{R}(M)$ in den Ring $\mathfrak{R}(\mu)$ gibt, die die Eigenschaften I a und I b besitzt. Weitere Eigenschaften von φ werden nicht herangezogen, Gleichung (4) wird also nicht voll ausgenutzt. c ist immer der Grad

von f , und es gelten überhaupt die im § 2 eingeführten Bezeichnungen. Es bedeute ferner $\mathfrak{R}_f$ die additive Untergruppe von $\mathfrak{R}(M)$, die aus denjenigen Elementen besteht, deren f -Bilder ≈ 0 sind.

Satz II: Ist $c \neq 0$, so hat f folgende Eigenschaften:

- 1) jeder c -fache Zyklus $c\zeta$ aus μ ist dem Bild eines Zyklus aus M d.-homolog;
- 2) die (additive) Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$, deren Bilder c -fache Elemente ¹⁴⁾ von $\mathfrak{R}(\mu)$ sind, — die also alle c -fachen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$ als Untergruppe enthält —, ist die direkte Summe der Gruppe $\mathfrak{R}_f$ und eines mit $\mathfrak{R}(\mu)$ dimensionstreu-isomorphen Ringes $\mathfrak{R}_f$;
- 3) der eben genannte Isomorphismus wird durch Ausübung der Abbildung $\frac{1}{c}f$ auf die Elemente von $\mathfrak{R}_f$ vermittelt; für je zwei Elemente z_1, z_2 von $\mathfrak{R}_f$ gilt also

$$\frac{1}{c}f(z_1) \cdot \frac{1}{c}f(z_2) \approx \frac{1}{c}f(z_1 \cdot z_2)$$

oder, was dasselbe ist,

$$(13) \quad f(z_1) \cdot f(z_2) \approx cf(z_1 \cdot z_2).$$

Beweis: 1) Nach I b ist $c\zeta \approx f(\varphi(\zeta))$.

2) Der Homomorphismus φ ist eineindeutig; denn aus

$$\varphi(\zeta_1) \approx \varphi(\zeta_2)$$

folgt nach I b

$$c\zeta_1 \approx c\zeta_2,$$

also

$$\zeta_1 \approx \zeta_2.$$

Die Gesamtheit aller Elemente $\varphi(\zeta)$ ist also ein zu $\mathfrak{R}(\mu)$ dimensionstreu-isomorpher Unterring $\mathfrak{R}_f$ von $\mathfrak{R}(M)$. Ist

$$(14) \quad f(z) \approx c\zeta,$$

so ist nach I b

$$f(z - \varphi(\zeta)) \approx 0,$$

also

$$z \approx y + \varphi(\zeta),$$

wobei

$$y \in \mathfrak{R}_f$$

ist. Mithin ist jedes z , das (14) erfüllt, Summe eines Elements aus $\mathfrak{R}_f$ und eines Elements aus $\mathfrak{R}_f$. Diese Summendarstellung ist eindeutig bestimmt; denn aus

$$y_1 + \varphi(\zeta_1) \approx y_2 + \varphi(\zeta_2)$$

mit $y_1, y_2 \in \mathfrak{R}_f$ folgt

$$y_2 - y_1 \approx \varphi(\zeta_1 - \zeta_2),$$

also nach I b

$$0 \approx c(\zeta_1 - \zeta_2)$$

und daher

$$\zeta_1 \approx \zeta_2$$

¹⁴⁾ Ein Element A heißt c -fach, wenn es ein Element B gibt, so daß $A \approx cB$ ist.

sowie

$$y_1 \approx y_2.$$

Diese eindeutige Darstellbarkeit jedes Elements z , das (14) erfüllt, als Summe besagt, daß die Gesamtheit dieser Elemente die direkte Summe von $\mathfrak{R}_I$ und $\mathfrak{R}_f$ ist.

3. Sind z, ζ einander entsprechende Elemente von $\mathfrak{R}_f$ bzw. $\mathfrak{R}(\mu)$, so ist $z \approx \varphi(\zeta)$, also nach Ib: $f(z) \approx c\zeta$, $\zeta \approx \frac{1}{c} f(z)$.

Satz IIa: Ist $c \neq 0$, so ist

$$p_f^i = p^i(\mu) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

und mithin

$$P_f = P(\mu).$$

(Die Bezeichnungen sind in den §§ 1, 2 erklärt.)

Beweis: Die Gruppe der c -fachen, i -dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}(\mu)$ hat den Rang $p^i(\mu)$; nach Satz II, 1 sind alle diese Elemente Bilder. Folglich ist $p_f^i \geq p^i(\mu)$, und da nach Definition von p_f^i immer $p_f^i \leq p^i(\mu)$ ist, gilt die Behauptung.

Satz IIb: Ist $c = \pm 1$, so ist $\mathfrak{R}(M)$ die direkte Summe der Gruppe $\mathfrak{R}_f$ und des mit $\mathfrak{R}(\mu)$ dimensionstreu-isomorphen Ringes $\mathfrak{R}_I$.

Der Beweis ist in II, 2 enthalten.

Satz IIc: Ist für jedes i $p^i(M) = p^i(\mu)$, — ist also z. B. $M = \mu$, — und $c \neq 0$, so ist für je zwei Zyklen z_1, z_2

$$f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c f(z_1 \cdot z_2).$$

Beweis: Da die i -dimensionalen Elemente z , die (14) erfüllen, stets den Rang $p^i(M)$ und die i -dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}_f$ nach II, 2 stets den Rang $p^i(\mu)$ haben, haben die i -dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}_I$ nach II, 2 stets den Rang $p^i(M) - p^i(\mu)$, in unserem Fall also den Rang 0, d. h. $\mathfrak{R}_I$ besteht nur aus dem Nullelement. Da nach II, 2 stets $cz < \mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_I$ ist, ist also unter unseren Voraussetzungen $cz < \mathfrak{R}_f$ für jedes Element z . Folglich ist nach II, 3 für zwei beliebige Elemente z_1, z_2

$$c^2 f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c^3 f(z_1 \cdot z_2),$$

woraus die Behauptung folgt.

Aus diesem Satz und aus II, 1 folgt unmittelbar:

Satz IIId: Ist unter den Voraussetzungen von II c noch $c = 1$, so ist die Ringabbildung f ein dimensionstreuer Isomorphismus zwischen $\mathfrak{R}(M)$ und $\mathfrak{R}(\mu)$. Also bewirkt f , wenn sie M auf sich mit $c = 1$ abbildet, einen dimensionstreuen Automorphismus von $\mathfrak{R}(M)$.

In Satz II, 2 ist enthalten

Satz III: Eine notwendige Bedingung für die Abbildbarkeit mit von 0 verschiedenem Grade von M auf μ ist die Existenz eines zu $\mathfrak{R}(\mu)$ dimensionstreu-isomorphen Unterrings von $\mathfrak{R}(M)$.

Dieser Satz enthält den schwächeren

Satz IIIa: Notwendige Bedingungen für die eben genannte Abbildbarkeit sind die Ungleichungen

$$p^i(M) \geq p^i(\mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Hieraus ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Satzes von der topologischen Invarianz der Bettischen Zahlen:

Satz IIIb: Zwei Mannigfaltigkeiten, von denen man jede auf die andere mit einem von 0 verschiedenen Grade abbilden kann, haben für jede Dimension gleiche Bettische Zahlen.

Ebenso ergibt sich aus II d eine Verallgemeinerung des Satzes von der topologischen Invarianz des Ringes einer Mannigfaltigkeit:

Satz IIIc: Haben M und μ in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen, und kann man M auf μ mit dem Grade 1 abbilden, so sind die beiden Ringe dimensionstreu-isomorph.

Nach Satz II a gibt es $p^i(\mu)$ i -dimensionale Elementarteiler (s. § 2) von f ; sie seien — in ihrer natürlichen Reihenfolge — $c_1^i, c_2^i, \dots, c_{p^i(\mu)}^i$. Unter den Voraussetzungen von Satz II c besteht zwischen den i -dimensionalen und den $(n-i)$ -dimensionalen Elementarteilern eine gewisse Dualität:

Satz IV: Haben M und μ in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen p^i , — ist also z. B. $M = \mu$, — und ist $c \neq 0$, so ist

$$c_r^i \cdot c_{p^i-r+1}^{n-i} = |c| \quad (i = 0, 1, \dots, n; r = 1, 2, \dots, p^i).$$

Beweis: Man kann i -dimensionale Basen $z_1^i, z_2^i, \dots, z_{p^i}^i$ und $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \dots, \zeta_{p^i}^i$ in M und μ so wählen, daß

$$f(z_r^i) \approx c_r^i \zeta_r^i \quad (r = 1, 2, \dots, p^i)$$

ist. Ihre dualen Basen seien $z_1^{n-i}, z_2^{n-i}, \dots, z_{p^i}^{n-i}$ bzw. $\zeta_1^{n-i}, \zeta_2^{n-i}, \dots, \zeta_{p^i}^{n-i}$; dann ist nach I a

$$(15) \quad \varphi(\zeta_r^{n-i}) \approx c_r^i z_r^{n-i} \quad (r = 1, 2, \dots, p^i).$$

Es sei

$$(16) \quad f(z_r^{n-i}) \approx \sum_s a_{rs} \zeta_s^{n-i} \quad (r = 1, 2, \dots, p^i);$$

wendet man f auf (15) an, so ergibt sich nach II b und (16)

$$c \zeta_r^{n-i} \approx c_r^i \sum_s a_{rs} \zeta_s^{n-i},$$

also ist $a_{rs} = 0$ für $r \neq s$ und $c = c_r^i a_{rr}$, d. h. (16) hat die Gestalt

$$(16') \quad f(z_r^{n-i}) \approx \frac{c}{c_r^i} \zeta_r^{n-i} \quad (r = 1, 2, \dots, p^i).$$

Da c_r^i Teiler von c_{r+1}^i ist, ist $\frac{c}{c_{r+1}^i}$ Teiler von $\frac{c}{c_r^i}$. Schreibt man die Gleichungen (16')

in der umgekehrten Reihenfolge auf als bisher, also zuerst die Gleichung mit $r = p^i$, zuletzt die mit $r = 1$, so hat man die $(n-i)$ -dimensionale f -Substitution durch Einführung neuer Basen auf eine Diagonalform gebracht, in der jedes Element durch das vorhergehende teilbar ist; dann sind aber die Elemente der Substitutionsmatrix bis auf das Vorzeichen die Elementarteiler der Substitution. Es ist also

$$c_{p^i-r+1}^{n-i} = \left| \frac{c}{c_r^i} \right|, \quad c_r^i \cdot c_{p^i-r+1}^{n-i} = |c|.$$

Der folgende Satz ist ein Gegenstück zu dem Satz II a:

Satz V: Ist $c = 0$, so ist

$$p_i^i + p_i^{n-i} \leq p^i(M) = \frac{p^i(M) + p^{n-i}(M)}{2} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

und mithin

$$P_f \leq \frac{1}{2} P(M).$$

Beweis: $\mathfrak{N}_f^i$ sei die (additive) Gruppe derjenigen i -dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$, deren Bilder ≈ 0 sind. Ist $\mathfrak{B}^i$ die Gruppe aller i -dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$, so wird die Gruppe der Restklassen (Faktorgruppe) von $\mathfrak{N}_f^i$ in $\mathfrak{B}^i$ isomorph auf die Gruppe der i -dimensionalen Bilder in $\mathfrak{R}(\mu)$ abgebildet. Folglich hat die Restklassengruppe den Rang p_f^i , und da der Rang einer Untergruppe stets gleich dem Rang der ganzen Gruppe, vermindert um den Rang der Restklassengruppe ist, hat $\mathfrak{N}_f^i$ den Rang $p^i(M) - p_f^i$. Andererseits sind infolge I b und $c = 0$ alle Elemente $\varphi(\zeta^i)$ in $\mathfrak{N}_f^i$ enthalten, der Rang von $\mathfrak{N}^i$ ist also mindestens gleich dem Rang der i -dimensionalen φ -Substitution; der letztgenannte Rang ist nach I a gleich dem Rang der $(n - i)$ -dimensionalen f -Substitution, also gleich p_f^{n-i} . Folglich ist $p^i(M) - p_f^i \geq p_f^{n-i}$, w. z. b. w.

Für den Fall $M = \mu$ und seine mehrfach herangezogene Verallgemeinerung seien die Sätze II a und V noch einmal gegenübergestellt:

Satz Va: Haben M und μ in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen, ist also z. B. $M = \mu$, so ist entweder

$$c \neq 0, \quad p_f^i = p^i(M) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad P_f = P(M)$$

oder

$$c = 0, \quad p_f^i + p_f^{n-i} \leq p^i(M) = \frac{p^i(M) + p^{n-i}(M)}{2} \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad P_f \leq \frac{1}{2} P(M).$$

§ 5. Beispiel: die komplexen projektiven Räume.

In diesem Paragraphen sind obere Indizes immer Exponenten, nicht Dimensionszahlen.

K_n sei die Gesamtheit der komplexen Punkte des n -dimensionalen projektiven Raumes, d. h. aller Verhältnisse komplexer Zahlen $z_0 : z_1 : \dots : z_n$ unter Ausschluß des Verhältnisses $0 : 0 : \dots : 0$. Man zeigt leicht, daß K_n eine $2n$ -dimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit ist; die Orientierbarkeit folgt z. B. daraus, daß K_n aus dem $2n$ -dimensionalen euklidischen Raum R_{2n} durch Hinzufügung eines K_{n-1} entsteht und eine Orientierung des R_{2n} durch Hinzufügung eines $(2n - 2)$ -dimensionalen Gebildes nicht zerstört wird.

Durch das Gleichungssystem

$$z_{m+1} = z_{m+2} = \dots = z_n = 0$$

wird in K_n ein K_m ausgezeichnet, den wir kurz mit K_m bezeichnen. Wir behaupten, daß K_m eine vollständige $2m$ -dimensionale Homologiebasis bildet (d. h. daß $K_m \sim 0$ und daß jeder $2m$ -dimensionale Zyklus einem Vielfachen von K_m homolog ist), und daß es Homologiebasen ungerader Dimension nicht gibt (d. h. daß jeder Zyklus ungerader Dimension ~ 0 ist).

Für $n = 0$, also für einen Punkt K_0 , ist die Behauptung richtig; wir nehmen sie für K_{n-1} als bewiesen an. Ist dann Z ein höchstens $(2n - 1)$ -dimensionaler Zyklus in K_n , so dürfen wir annehmen, daß der Punkt $0 : \dots : 0 : 1$ nicht auf Z liegt. Dann ist, wenn $z_0 : \dots : z_{n-1} : z_n$ irgendein Punkt von Z ist, $z_0 : \dots : z_{n-1} : tz_n$ für jeden Wert von t ein Punkt in K_n . Wir deformieren Z , indem wir den eben eingeführten Parameter t von 1 bis 0 laufen lassen, in einen zu Z homologen, in K_{n-1} gelegenen Zyklus $\bar{Z}$. Hat Z ungerade Dimension, so ist nach Annahme $\bar{Z} \sim 0$ in K_{n-1} , also $Z \sim \bar{Z} \sim 0$ in K_n . Hat Z die Dimension $2m$, so ist nach Annahme $\bar{Z} \sim aK_m$ in K_{n-1} , also $Z \sim \bar{Z} \sim aK_m$ in K_n ; wir haben noch zu zeigen daß $K_m \sim 0$ in K_n ist. Wäre $K_m \sim 0$ in K_n , so gäbe es einen von K_m berandeten

$(2m + 1)$ -dimensionalen Komplex Y in K_n , von dem wir wieder annehmen dürften, daß der Punkt $0 : \dots : 0 : 1$ nicht auf ihm liegt. Wir könnten ihn durch das schon oben angewandte Verfahren in einen Komplex $\bar{Y}$ in K_{n-1} deformieren; dabei würde an dem Rand K_m von Y nichts geändert, K_m würde also $\bar{Y}$ in K_{n-1} beranden, im Widerspruch zu der über K_{n-1} gemachten Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen; die Bettischen Zahlen von K_n sind also 1 für die geraden, 0 für die ungeraden Dimensionszahlen. Torsionskoeffizienten sind nicht vorhanden, Homologien und D.-Homologien sind daher miteinander identisch.

K_{n-1} hatten wir durch die Gleichung $z_n = 0$ definiert; ist $\bar{K}_{n-1}$ das durch $z_{n-1} = 0$ definierte Gebilde, so ist K_{n-2} der Schnitt¹⁵⁾ von K_{n-1} und $\bar{K}_{n-1}$; ferner sind K_{n-1} und $\bar{K}_{n-1}$ einander homolog, da sie sich eineindeutig ineinander deformieren lassen; dabei haben wir die Vorzeichen vernachlässigt. Jedenfalls ist

$$K_{n-2} \sim \pm K_{n-1}^2.$$

Allgemein ist, da jeder durch eine Gleichung $z_i = 0$ definierte Zyklus bis auf das Vorzeichen zu K_{n-1} homolog und K_m der Schnitt von $n - m$ dieser Zyklen ist,

$$K_m \sim \pm K_{n-1}^{n-m}.$$

Die Potenzen von $X = K_{n-1}$ bilden also eine Basis des Homologieringes von K_n ; dabei sind aber von der $(n + 1)$ -ten Potenz an alle Potenzen gleich 0 zu setzen, da die entsprechenden Schnitte nicht mehr existieren. Der Ring von K_n ist isomorph dem Ring der ganzzahligen Polynome einer Variablen X , die die Gleichung $X^{n+1} = 0$ erfüllt.

Wir betrachten nun eine Abbildung f von K_n auf eine mit K_n homöomorphe Mannigfaltigkeit κ_n , die auch mit K_n identisch sein darf. Die den K_m analogen Basiselemente in κ_n bezeichnen wir mit κ_m , und setzen $\kappa_{n-1} = \xi$, so daß also bei geeigneter Orientierung der K_m und κ_m

$$(17) \quad K_m \sim X^{n-m}, \quad \kappa_m \sim \xi^{n-m} \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

wird, wobei $K_0 \sim X^n$, $\kappa_0 \sim \xi^n$ Punkte sind. Es sei

$$(18) \quad f(K_m) \sim u_m \kappa_m;$$

dann ist nach Satz I a, da K_{n-m} zu $\pm K_m$, κ_{n-m} zu $\pm \kappa_m$ dual ist,

$$(19) \quad \varphi(\kappa_{n-m}) \sim u_m K_{n-m},$$

also nach (17) insbesondere

$$\varphi(\xi) \sim u_1 X.$$

Hieraus folgt, da φ ein multiplikativer Homomorphismus ist,

$$\varphi(\xi^l) \sim u_1^l X^l, \quad {}^{16)}$$

also nach (17), wenn wir $u_1 = u$ setzen,

$$\varphi(\kappa_{n-m}) \sim u^m K_{n-m}$$

und nach I a

$$(20) \quad f(K_m) \sim u^m \kappa_m, \quad \text{d. h.} \quad u_m = u^m \quad (m = 0, 1, \dots, n). \quad {}^{16)}$$

Die Gleichungen (20) sind notwendige Bedingungen für f ; die Gleichung mit $m = n$ besagt, daß der Grad von f eine n -te Potenz sein muß. Es bleibt noch die Frage zu be-

¹⁵⁾ Man hat hier und im folgenden streng genommen noch zu zeigen, daß die sich schneidenden Zyklen als Polyeder aufgefaßt werden können, die sich zueinander in allgemeiner Lage befinden; dieser Nachweis stößt auf keine Schwierigkeit. — Hierzu vergl. man: *B. L. van der Waerden*, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, *Math. Annalen* 102 (1929), wo im „Anhang II“ speziell K_n betrachtet wird.

¹⁶⁾ Hier ist immer $u^0 = 1$ zu setzen, auch dann, wenn $u = 0$ ist.

antworten, ob es zu jedem u eine Abbildung f gibt. Diese Frage ist (für $n \geq 1$) zu bejahen. Denn ist κ_n die Gesamtheit der Verhältnisse $\zeta_0 : \zeta_1 : \dots : \zeta_n$, so liefert für $u \geq 0$ die Abbildung

$$(21 \text{ a}) \quad \zeta_i = z_i^u \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

für $u \leq 0$ die Abbildung

$$(21 \text{ b}) \quad \zeta_i = \bar{z}_i^u \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

wobei $\bar{z}_i$ die zu z_i konjugiert komplexe Zahl ist, je ein Beispiel der gewünschten Art. Denn in jedem Fall wird der — mit einer Kugelfläche homöomorphe — Zyklus K_1 , der durch $z_2 = \dots = z_n = 0$ definiert ist, auf die entsprechende Fläche in κ_n mit dem Grade u abgebildet, und dies bedeutet $f(K_1) \sim u\kappa_1$.

Wir fassen zusammen:

Satz VI: Die Kreise der Abbildungen des komplexen projektiven Raumes K_n auf einen gleichdimensionalen komplexen projektiven Raum lassen sich vollständig aufzählen: sie werden durch die Abbildungen repräsentiert, die durch die Gleichungen (21 a), (21 b) gegeben sind. Als Abbildungsgrade treten nur n -te Potenzen auf.

Auf Grund der Kenntnis dieser Abbildungskreise können wir einen Fixpunktsatz aussprechen, der bekannte Eigenschaften der reellen projektiven Räume ins Komplexe überträgt:

Satz VII: Ist n gerade, so hat jede Abbildung von K_n auf sich einen Fixpunkt. Ist n ungerade, so ist der einzige Kreis, der fixpunktfreie Abbildungen enthält, der vom Grade -1 , in dem also $f(K_m) \sim (-1)^m K_m$ ($m = 0, 1, \dots, n$) ist. Eine fixpunktfreie Abbildung ist z. B.

$$f(z_{2i}) = \bar{z}_{2i+1}, \quad f(z_{2i+1}) = -\bar{z}_{2i} \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}\right).$$

Beweis: Nach der Lefschetz'schen Fixpunktformel¹⁾ und nach (20) hat die Summe der Indizes der Fixpunkte den Wert $\sum_{m=0}^n u^m$; diese Zahl ist dann und nur dann gleich 0, wenn n ungerade und $u = -1$ ist. — Daß die in dem Satz angegebene Abbildung fixpunktfrei ist, ist daraus ersichtlich, daß für einen Fixpunkt $f(z_{2i}) : f(z_{2i+1}) = z_{2i} : z_{2i+1}$, also $|z_{2i}|^2 + |z_{2i+1}|^2 = 0$ für $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$, also $z_j = 0$ für alle j sein müßte, was unmöglich ist.

§ 6. Der Index und weitere algebraische Eigenschaften einer Abbildung.

In diesem Paragraphen wird die durch f zwischen den Fundamentalgruppen von M und μ hergestellte Beziehung in unsere Untersuchungen einbezogen; ein Teil der sich dabei ergebenden Sätze — nämlich die Sätze VIII a, X a, X b — läßt sich aber ebenso wie die oben im § 4 bewiesenen Sätze so aussprechen, daß nur von Homologiebegriffen die Rede ist.

Es sei zunächst kurz über einige Tatsachen berichtet, die an anderer Stelle¹⁷⁾ ausführlich dargestellt worden sind.

Zwei durch einen Punkt gehende geschlossene Wege heißen „äquivalent“, wenn man sie unter Festhaltung des Punktes ineinander deformieren kann; die zu einem Punkt gehörigen Äquivalenzklassen repräsentieren die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit.

¹⁷⁾ In der in Fußn. 2 genannten Arbeit des Verfassers, §§ 1—3. Die im obigen Text formulierten Sätze (A), (B), (C) sind die Sätze I, VII, VII a der zitierten Arbeit.

Denjenigen unter den zu einem Punkt $\xi = f(x)$ gehörigen Äquivalenzklassen, die Bilder geschlossener Wege durch den Punkt x von M enthalten, entspricht eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Fundamentalgruppe Φ von μ ; $\mathfrak{U}$ ist bis auf innere Automorphismen von Φ eindeutig bestimmt und von x unabhängig; der Index j von $\mathfrak{U}$ in Φ heißt der „Index von f “. Die Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* von μ , die man erhält, wenn man unter den Wegen durch ξ nur diejenigen als geschlossen betrachtet, die zu $\mathfrak{U}$ gehören, hat j Blätter; die durch die Überlagerung gegebene Abbildung von μ^* auf μ heiße $\psi^{18)}$. Man beweist leicht:

(A) *Es gibt eine Abbildung f^* von M auf μ^* , die den Index $j^* = 1$ hat, so daß für jeden Punkt y von M $f(y) = \psi f^*(y)$ ist.*

Wenn $j = \infty$ ist, so ist μ^* offen und f^* hat den Grad 0; dann hat nach (A) auch f den Grad 0, also gilt:

(B) *Ist $c \neq 0$, so ist j endlich.*

Ferner folgt nach der Produktregel für die Grade, nach der diese bei Zusammensetzung von Abbildungen sich multiplizieren:

(C) *Ist $c \neq 0$, so ist j ein Teiler von c , und zwar ist $c = c^* j$, wenn c^* der Grad von f^* ist.*

Dies sind die Tatsachen, die wir brauchen werden. (B) ist ein Analogon zu Satz II a; denn die in diesem ausgesagte Gleichung $p_j^i = p^i(\mu)$ bedeutet, daß die Gruppe derjenigen i -dimensionalen Homologieklassen, die Bilder i -dimensionaler Homologieklassen von M sind, eine Untergruppe mit endlichem Index in der Gruppe aller i -dimensionalen Homologieklassen von μ bilden. Dieser Index ist das Produkt der i -dimensionalen Elementarteiler von f .

Der Zusammenhang zwischen dem Index j und den früher behandelten Begriffen wird durch den folgenden Satz vermittelt:

Satz VIII: *Ist j endlich — also z. B. $c \neq 0$ —, so ist $p_j^1 = p^1(\mu)$ und das Produkt der 1-dimensionalen Elementarteiler ein Teiler von j .*

Beweis: Die Zusammensetzung zweier Wege, also die gruppenbildende Operation der Fundamentalgruppe, wird im folgenden ebenso wie die Zusammensetzung bei Homologien als Addition bezeichnet. Wir fassen die Äquivalenzklassen der geschlossenen Wege durch den Punkt $\xi = f(x)$ dadurch in „A-Klassen“ zusammen, daß wir bestimmen: zwei Äquivalenzklassen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ gehören dann und nur dann zu derselben A-Klasse, wenn die Äquivalenzklasse $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2$ das Bild eines geschlossenen Weges durch x enthält. Nach Definition von j ist j die Anzahl der A-Klassen. Faßt man die Äquivalenzklassen nicht als Gruppenelemente, sondern als Mengen der in ihnen enthaltenen Wege auf, so liegt eine Einteilung aller geschlossenen Wege durch ξ in j A-Klassen durch die Bestimmung vor, daß zwei Wege C_1, C_2 dann und nur dann zu derselben A-Klasse gehören, wenn $C_1 - C_2$ dem Bilde eines geschlossenen Weges durch x äquivalent ist. Bezeichnet man die Gruppe der geschlossenen Wege, die den eben genannten Bildern äquivalent sind, mit $\mathfrak{A}$, die Gruppe aller geschlossenen Wege durch ξ mit $\mathfrak{G}$, so ist dies die Restklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ modulo $\mathfrak{A}$.

Stellt man die eben für Äquivalenzklassen durchgeführte Überlegung für D.-Homologieklassen an, so kommt man zu einer Einteilung aller geschlossenen Wege durch ξ in „B-Klassen“ durch die Bestimmung, daß zwei Wege C_1, C_2 dann und nur dann zu derselben B-Klasse gehören, wenn $C_1 - C_2$ dem Bilde eines geschlossenen Weges durch x d.-homolog ist; diese Einteilung ist die Restklassenzerlegung von $\mathfrak{G}$ modulo der Gruppe $\mathfrak{B}$ derjenigen geschlossenen Wege durch ξ , die Bildern geschlossener Wege durch x d.-homolog

¹⁸⁾ A. a. O. heißt diese Abbildung φ ; dieser Buchstabe bezeichnet aber in unserem § 3 eine andere Abbildung.

sind. Da jede 1-dimensionale D.-Homologiekategorie von μ geschlossene Wege durch ξ enthält, ist — ebenso wie oben die Anzahl der A-Klassen j war — die Anzahl der B-Klassen gleich dem Index der Untergruppe derjenigen D.-Homologiekategorien, die Bilder sind, in der Gruppe aller D.-Homologiekategorien, also entweder unendlich oder gleich dem Produkt der Elementarteiler.

$\mathfrak{A}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{B}$; daher kommt der Beweis von Satz VIII nunmehr auf den Beweis des folgenden gruppentheoretischen Tatbestandes hinaus: „ $\mathfrak{B}$ sei Untergruppe von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ Untergruppe von $\mathfrak{B}$; die Indizes von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$ seien a bzw. b , a sei endlich; dann ist auch b endlich und Teiler von a “.

Gehören C_1, C_2 zu einer Restklasse modulo $\mathfrak{A}$, so ist $C_1 - C_2 \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, also gehören sie auch zu einer Restklasse modulo $\mathfrak{B}$; somit lassen sich die Restklassen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_a$ in die $\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{A}$ zerfällt, durch Zusammenfassung zu den Restklassen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_b$ vereinigen, in die $\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{B}$ zerfällt; folglich ist b endlich, (also $p_j^1 = p^1(\mu)$). $\mathfrak{B}_i$ bestehe aus r_i der Restklassen $\mathfrak{A}_k$. Es ist zu zeigen, daß $r_1 = r_2 = \dots = r_b$ ist; denn daraus ergibt sich $a = r_1 b$.

$\mathfrak{B}_1$ bestehe aus den Klassen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_{r_1}$; $C_1, C_2, \dots, C_{r_1}$ seien Elemente aus diesen Klassen; C' sei ein Element aus $\mathfrak{B}_2$, und es sei $C' = C_1 + \bar{C}$. Dann gehören die Elemente $C^{(k)} = C_k + \bar{C}$ ($k = 1, 2, \dots, r_1$) zu verschiedenen Klassen $\mathfrak{A}_k$, da $C^{(k_1)} - C^{(k_2)} = C_{k_1} + \bar{C} - C_{k_2} - \bar{C} = C_{k_1} - C_{k_2} \notin \mathfrak{A}$ ist; sie gehören aber alle zu derselben Klasse $\mathfrak{B}_2$, da die eben aufgeschriebene Differenz $\in \mathfrak{B}$ ist; folglich ist $r_2 \geq r_1$, und da sich ebenso $r_1 \geq r_2$ ergibt, $r_1 = r_2$ und allgemein $r_1 = r_i$, womit alles bewiesen ist.

Aus (C) und Satz VIII folgt:

Satz VIIIa: Das Produkt der 1-dimensionalen Elementarteiler ist ein Teiler des Grades.

Aus den Sätzen IV, V a und VIII folgt:

Satz VIIIb: Haben M und μ gleiche Bettische Zahlen, — ist also z. B. $M = \mu$ —, und ist $j = 1$, so gibt es in M bzw. μ 1- und $(n-1)$ -dimensionale Basen z_r^1, z_r^{n-1} bzw. ζ_r^1, ζ_r^{n-1} ($r = 1, 2, \dots, p^1$), für die die durch f bewirkten Substitutionen die Gestalt haben:

$$(22 a) \quad f(z_r^1) \approx \zeta_r^1$$

$$(22 b) \quad f(z_r^{n-1}) \approx c \zeta_r^{n-1}.$$

Satz IX: Es gebe in M n $(n-1)$ -dimensionale Zyklen, deren (0-dimensionaler) Schnitt ≈ 0 sei; dann ist bei jeder Abbildung von M auf eine Mannigfaltigkeit μ mit denselben Bettischen Zahlen — also z. B. auf M selbst —, bei der $c \neq 0$ ist, $|c| = j$.

Beweis: Die in (A) genannte Mannigfaltigkeit μ^* hat dieselben Bettischen Zahlen wie M und μ ; denn einerseits ist, da f^* (s. (C)) einen von 0 verschiedenen Grad hat, nach III a $p^i(M) \geq p^i(\mu^*)$; andererseits ist, da auch ψ einen von 0 verschiedenen Grad hat, nach III a $p^i(\mu^*) \geq p^i(\mu) = p^i(M)$.

Folglich ist, da der Index von $f^* j^* = 1$ ist, nach VIII b, Gl. (22 b), das f^* -Bild jedes $(n-1)$ -dimensionalen Zyklus ein c^* -facher Zyklus in μ^* , wobei c^* der Grad von f^* ist. Mithin gehört, in der Terminologie von Satz II, 2, jeder $(n-1)$ -dimensionale Zyklus von M zu $\mathfrak{R}_{f^*} + \mathfrak{R}_{f^*}$; da aber der i -dimensionale Rang von $\mathfrak{R}_{f^*}$ infolge des Isomorphismus von $\mathfrak{R}_{f^*}$ und $\mathfrak{R}(\mu^*)$ stets gleich $p^i(M) - p^i(\mu^*)$ ist, ist er in unserem Fall 0, $\mathfrak{R}_{f^*}$ besteht also nur aus dem Nullelement, und jeder $(n-1)$ -dimensionale Zyklus gehört daher zu $\mathfrak{R}_{f^*}$. Da $\mathfrak{R}_{f^*}$ ein Ring ist, gehört auch jeder Schnitt $(n-1)$ -dimensionaler Zyklen zu $\mathfrak{R}_{f^*}$ und hat daher nach Satz II, 2 einen c^* -fachen Zyklus in μ^* als Bild.

Nach Voraussetzung gibt es in $Mn(n-1)$ -dimensionale Zyklen mit

$$z_1^{n-1} \cdot z_2^{n-1} \cdots z_n^{n-1} \approx az^0, \quad a \neq 0,$$

wobei z^0 einen einfach gezählten Punkt bezeichnet. Nach dem eben Bewiesenen ist $f^*(az^0) = af^*(z^0)$ ein c^* -facher Zyklus, also ist, da $f^*(z^0)$ ein einfacher Punkt ist, a durch c^* teilbar.

Dieselbe Betrachtung gilt für die k -te Iteration von f^* ; da diese den Grad $(c^*)^k$ hat, ist a durch $(c^*)^k$ teilbar. Dies ist, da k beliebig groß sein kann und $a \neq 0$ ist, nur möglich, wenn $|c^*| = 1$ ist.

Dann ist nach (C) $|c| = j$.

Unter der „Charakteristik“ einer Mannigfaltigkeit versteht man die alternierende Summe der Bettischen Zahlen:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i p^i(M).$$

Die „Euler-Poincarésche Formel“¹⁹⁾ besagt, daß, wenn bei einer Zelleneinteilung von Ma^i i -dimensionale Zellen auftreten,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a^i$$

ist.

Satz X: Ist $\chi(M) \neq 0$, hat μ dieselben Bettischen Zahlen wie M und ist $c \neq 0$, so ist $j = 1$.

Beweis: Wie im Beweis von Satz IX folgt, daß μ^* dieselben Bettischen Zahlen hat wie M und μ ; folglich ist $\chi(\mu^*) = \chi(\mu)$. Andererseits bewirkt eine Zelleneinteilung von μ , bei der a^i die Anzahl der i -dimensionalen Zellen ist, eine Zelleneinteilung der j -blättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* von μ mit $j \cdot a^i$ Zellen für jedes i ; daher ist mit Rücksicht auf die Euler-Poincarésche Formel $\chi(\mu^*) = j \cdot \chi(\mu)$. Folglich ist, da $\chi(\mu) = \chi(M) \neq 0$ ist, $j = 1$.

Aus den Sätzen X und VIII b folgt:

Satz Xa: Unter den Voraussetzungen von Satz X gibt es 1- und $(n-1)$ -dimensionale Basen z_r^1, z_r^{n-1} bzw. ζ_r^1, ζ_r^{n-1} in M bzw. μ , für die die durch f bewirkten Substitutionen die Gestalt (22 a), (22 b) haben.

Aus den Sätzen IX und X folgt:

Satz Xb: Die Charakteristik von M sei von 0 verschieden und es gebe in M $n(n-1)$ -dimensionale Zyklen, deren Schnitt nicht homolog 0 ist; μ habe dieselben Bettischen Zahlen wie M , es sei also z. B. $M = \mu$; dann kommen als Grade für Abbildungen von M auf μ nur die Zahlen 0 und ± 1 in Frage.

Da die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht p eine von 0 verschiedene Charakteristik hat, wenn $p \neq 1$ ist, und da es auf ihr zwei geschlossene Wege mit einem einfachen Schnittpunkt gibt, wenn $p \neq 0$ ist, besagt dieser letzte Satz, daß die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $p > 1$ nur Abbildungen mit den Graden 0, ± 1 , -1 auf sich zuläßt. Diese Tatsache ist in dem allgemeineren Satz enthalten, daß, wenn $p > 0$ ist, der Grad einer Abbildung der geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht p auf die vom Geschlecht q stets die Ungleichung $|c| \cdot (q-1) \leq p-1$ erfüllt; diesen Satz, der von H. Kneser auf geometrisch-topologischem Wege bewiesen wurde²⁰⁾, mit den in dieser Arbeit verwendeten „algebraischen“ Methoden zu beweisen, habe ich vergeblich versucht.

¹⁹⁾ S. z. B. Gl. (10.6) der in Fußnote 4 genannten Arbeit von Alexander.

²⁰⁾ H. Kneser, Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen, § 7, Math. Annalen 103 (1930).