Inventiones math. 6, 35–40 (1968)

Charakterisierung der Signatur von Mannigfaltigkeiten durch eine Additivitätseigenschaft

KLAUS JÄNICH (Bonn)

§ 1. Einleitung

Es sei M eine orientierte kompakte differenzierbare $4k$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Dann ist durch die Schnittzahl eine symmetrische Bilinearform

$$H_{2k}(M, \mathbf{R}) \times H_{2k}(M, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$$

erklärt, deren Signatur mit $\tau(M)$ bezeichnet wird. Ist $\dim M \not\equiv 0 \bmod 4$, so setzt man $\tau(M)=0$. Man nennt $\tau(M)$ die *Signatur* oder den *Index* der Mannigfaltigkeit M. (Siehe Thom [6, 7] und Hirzebruch [3].)

Wie zuerst von Novikov bemerkt wurde (vgl. [4], § 2), hat die Signatur die folgende erstaunliche Additivitätseigenschaft:

(A): *Sind Y und Y' kompakte berandete orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\varphi: X \to X'$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus einer Vereinigung X von Randkomponenten von Y auf eine Vereinigung X' von Randkomponenten von Y', so gilt*

$$\tau(Y \cup_\varphi (-Y')) = \tau(Y) - \tau(Y'). \tag{1}$$

Einen einfachen Beweis dafür findet man in Atiyah-Singer [1], Proposition (7.1). Dort wird zwar angenommen, daß $Z = Y \cup_\varphi - Y'$ unberandet ist; aber abgesehen davon, daß sich der Beweis in [1] entsprechend modifizieren ließe, erhält man (1) aus (7.1) sofort so: Falls das Komplement von X in ∂Y und das Komplement von X' in $\partial Y'$ orientierte Mannigfaltigkeiten W und W' beranden, erhält man (1), indem man (7.1) statt auf Y und Y' zuerst auf $Y + W'$ und $Y' + W$ und dann auf Z und $W + (-W')$ anwendet. Nennt man die so erzielte Verallgemeinerung von (7.1) einmal (7.1'), so erhält man schließlich (1) für den allgemeinen Fall, indem man (7.1') auf $Y + (-Y')$ und $Y' + (-Y)$ anwendet.

In der vorliegenden Note präzisieren und beweisen wir die von Hirzebruch geäußerte Vermutung, daß die Signatur im wesentlichen die einzige Invariante mit dieser Additivitätseigenschaft ist.

§ 2. Der Eindeutigkeitssatz

Wählt man für jede Dimension k eine Zahl $m(k)$ und definiert $\sigma(M^k) = m(k)\tau(M^k)$, dann hat natürlich auch σ die genannte Additivitätseigenschaft. Unser Resultat ist nun:

Satz. *Es bezeichne σ eine reelle Invariante des orientierten Diffeomorphietyps kompakter berandeter orientierter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. σ habe die Additivitätseigenschaft* (A). *Dann gibt es für jede Dimension k eine Zahl $m(k)$, so daß für alle unberandeten M^k gilt:*

$$\sigma(M^k) = m(k)\,\tau(M^k).$$

Beweis. Aus der Additivitätseigenschaft (A) für σ folgt natürlich, daß $\sigma(\emptyset) = 0$ ist, und deshalb erhalten wir $\sigma(-M) = -\sigma(M)$, wenn wir (A) auf $Y = X = \emptyset$, $Y' = M$ anwenden. Infolgedessen verschwindet σ für alle Mannigfaltigkeiten, die einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus auf sich selbst zulassen. Diese Tatsache werden wir im Laufe des Beweises sehr oft ausnutzen.

Wir beweisen zuerst, daß σ für Mannigfaltigkeiten ohne Rand eine Cobordismusinvariante ist. Dazu benutzen wir einen Satz von Wallace ([8], Theorem 2, p. 513; dieses Resultat wurde unabhängig auch von Milnor bewiesen, vgl. [5], S. 40), wonach zwei orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 genau dann dasselbe Element in Ω_* repräsentieren, wenn M_2 durch eine endliche Folge von (orientierbaren) sphärischen Modifikationen aus M_1 hervorgeht. Wir müssen also zeigen, daß durch eine sphärische Modifikation die Invariante σ nicht geändert wird. Was geschieht aber bei einer sphärischen Modifikation? Eine gewisse n-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit A von M_1 wird herausgenommen und durch eine n-dimensionale berandete orientierte Mannigfaltigkeit B mit $\partial B \cong \partial A$ „ersetzt". Wegen der Additivitätseigenschaft ändert sich bei diesem Vorgang die Invariante σ gerade um den Betrag $\sigma(B) - \sigma(A)$. Bei einer sphärischen Modifikation kann man aber stets A und B durch einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus φ der Ränder zur n-Sphäre zusammensetzen, und deshalb ist $\sigma(B) - \sigma(A) = \sigma(B \bigcup_\varphi -A) = \sigma(S^n) = 0$, weil S^n einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus gestattet. Damit ist die Cobordismusinvarianz von σ bewiesen.

Wir können nun also davon ausgehen, daß σ für unberandete Mannigfaltigkeiten durch einen additiven Homomorphismus $\Omega_* \to \mathbf{R}$ gegeben ist. Nach den wohlbekannten Resultaten über τ und die Struktur von $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ (vgl. z.B. [3], zweites Kapitel) haben wir daher unseren Satz bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\sigma\big(\mathbf{P}_{2j_1}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \mathbf{P}_{2j_r}(\mathbf{C})\big)$$

für alle $(j_1, \dots, j_r)$ nur von $\sum j_\nu$, also der Dimension dieses kartesischen Produktes von komplexen projektiven Räumen abhängt. Dazu genügt es natürlich zu zeigen, daß für jedes gerade n und jede orientierte unberandete Mannigfaltigkeit M

$$\sigma\big(M \times \mathbf{P}_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_2(\mathbf{C})\big) = \sigma\big(M \times \mathbf{P}_{n+2}(\mathbf{C})\big) \tag{2}$$

gilt. Das wollen wir jetzt tun. Zuvor aber eine Verabredung: Sind Y, Y' und φ wie in (A) gegeben, dann ist natürlich auch

$$\sigma\big(M \times Y \textstyle\bigcup_{\mathrm{Id}\,\times\varphi} -(M \times Y')\big) = \sigma(M \times Y) - \sigma(M \times Y'),$$

und gestattet Y einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus, so auch $M \times Y$, und wir haben dann deshalb nicht nur $\sigma(Y)=0$, sondern auch $\sigma(M \times Y)=0$. Da der Beweis von (2) nur aus der wiederholten Anwendung dieser beiden Bemerkungen besteht, erlauben wir uns, das M dabei wegzulassen. Wir beweisen also statt (2)

$$\sigma\big(\mathbf{P}_n(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}_2(\mathbf{C})\big) = \sigma\big(\mathbf{P}_{n+2}(\mathbf{C})\big), \tag{2'}$$

unter strikter Beschränkung auf die genannten Schlußweisen.

Einige Bezeichnungen: S^{2n+1} bezeichnet nicht nur die $(2n+1)$-dimensionale Sphäre, sondern auch das S^1-Prinzipalfaserbündel $S^{2n+1} \to \mathbf{P}_n(\mathbf{C})$. N_k^m ist das Normalbündel von $\mathbf{P}_k(\mathbf{C})$ in $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ und DN_k^m das zugehörige Disk-Bündel. Das Hopfsche Geradenbündel N_1^2 bezeichnen wir jedoch mit H. Wird $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ als S^1-Mannigfaltigkeit aufgefaßt, so ist das in bezug auf die durch Multiplikation in $\mathbf{C}^m$ via $U(m) \subset U(m+1)$ definierte Aktion auf $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ zu verstehen. Man hat dann $\mathbf{P}_0(\mathbf{C})$ als Fixpunkt.

Nun also zum Beweis. $\mathbf{P}_m(\mathbf{C}) = DN_k^m \bigcup_{SN} DN_{m-k-1}^m$, daher nach der Additivitätseigenschaft: $\sigma\big(\mathbf{P}_m(\mathbf{C})\big) = \sigma(DN_k^m) + \sigma(DN_{m-k-1}^m)$. Ist $k \geqq m/2$, so besitzt DN_{m-k-1}^m aus Dimensionsgründen einen nirgends verschwindenden Schnitt $f\colon \mathbf{P}_{m-k-1}(\mathbf{C}) \to DN_{m-k-1}^m$. Wenn wir dann in jeder Faser an der zu $f(x)$ orthogonalen (reellen) Hyperebene spiegeln, erhalten wir einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus von DN_{m-k-1}^m auf sich, deshalb ist $\sigma(DN_{m-k-1}^m) = 0$, also

$$\sigma\big(\mathbf{P}_m(\mathbf{C})\big) = \sigma(DN_k^m) \qquad \text{für } k \geqq \frac{m}{2}.$$

Insbesondere ist $\sigma(\mathbf{P}_{n+2}) = \sigma(DN_n^{n+2}) = \sigma(S^{2n+1} \times_{S^1} D^4)$. Wir möchten nun gerne, ohne σ dabei zu verändern, dieses D^4-Bündel über $\mathbf{P}_n$ zu einem $\mathbf{P}_2$-Bündel über $\mathbf{P}_n$ ergänzen, damit wir besser mit $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2$ vergleichen können. Als ein solches Bündel käme $S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbf{P}_2 = S^{2n+1} \times_{S^1} D^4 \cup S^{2n+1} \times_{S^1} DH$ in Frage, wir müßten also

$$\sigma(S^{2n+1} \times_{S^1} DH) = 0 \tag{3}$$

zeigen. Das soll jetzt geschehen. Wir haben kanonische Diffeomorphismen $S^{2n+1} \times_{S^1} DH = S^{2n+1} \times_{S^1} (S^3 \times_{S^1} D^2) = S^3 \times_{S^1} (S^{2n+1} \times_{S^1} D^2) = S^3 \times_{S^1} DN_n^{n+1}$. Weiter ist $S^3 \times_{S^1} DN_n^{n+1} \bigcup_\varphi S^3 \times_{S^1} D^{2n+2} = S^3 \times_{S^1} \mathbf{P}_{n+1}$, also erhalten wir $\sigma(S^{2n+1} \times_{S^1} DH) = \sigma(S^3 \times_{S^1} \mathbf{P}_{n+1}) - \sigma(S^3 \times_{S^1} D^{2n+2})$. Dieses letztgenannte σ verschwindet, weil $S^3 \times_{S^1} D^{2n+2}$ (außer in dem uns nicht interessierenden Falle $n=0$) einen überall nichtverschwindenden Schnitt und damit einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus zuläßt. Das nun noch zu betrachtende $S^3 \times_{S^1} \mathbf{P}_{n+1}$ ist ein Bündel X über S^2 mit unberandeter Faser F. Zerlegen wir ein solches Bündel in seine beiden Einschränkungen auf die obere und untere Halbsphäre, so erhalten wir wegen (A):

$$\sigma(X) = 2\sigma(D^2 \times F) = 0, \tag{4}$$

weil $D^2 \times F$ einen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus gestattet. Damit ist (3) bewiesen.

Als letzten Schritt im Beweis von (2′) haben wir also nun

$$\sigma(\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2) = \sigma(S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbf{P}_2) \tag{5}$$

zu zeigen. Es ist $\mathbf{P}_n = DN_{n-1}^n \bigcup_{S^{2n-1}} D^{2n}$. Wir schränken zuerst beide Bündel, das triviale $\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2$ und das nichttriviale $S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbf{P}_2$ auf DN_{n-1}^n ein. Dadurch ändern sich die Invarianten σ nicht, denn $\sigma(D^{2n} \times \mathbf{P}_2) = 0$. Über dem nun entstandenen Rand $SN_{n-1}^n = S^{2n-1}$ sind beide Bündel trivial. Deshalb können wir sie zu einem orientierten Bündel B über $DN_{n-1}^n \bigcup_{S^{2n-1}} - DN_{n-1}^n$ zusammensetzen, dessen Invariante σ dann gerade $\sigma(\mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_2) - \sigma(S^{2n+1} \times_{S^1} \mathbf{P}_2)$ ist.

Die Basis $DN_{n-1}^n \bigcup_{S^{2n-1}} - DN_{n-1}^n$ ist selbst ein Faserbündel über $\mathbf{P}_{n-1}$ mit Faser S^2. Dadurch wird B zu einem Faserbündel über $\mathbf{P}_{n-1}$, dessen Faser X selbst über S^2 gefasert ist. Wir behaupten, daß für ein solches B die Invariante σ verschwindet:

Lemma. *Ist die geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit B Totalraum eines differenzierbaren Faserbündels $B \to \mathbf{P}_m(\mathbf{C})$, dessen Faser X selbst Totalraum eines Faserbündels $X \to S^2$ ist, dann gilt $\sigma(B) = 0$.*

Beweis. Induktion nach m. Für $m=0$ ist dies die Aussage (4). Beim Induktionsschluß vergleichen wir B mit $\mathbf{P}_m \times X$. Wir haben $\sigma(\mathbf{P}_m \times X) = 0$, weil mit X natürlich auch $\mathbf{P}_m \times X$ über S^2 gefasert ist. Wie oben ändern sich die jeweiligen Invarianten σ nicht, wenn wir B und $\mathbf{P}_m \times X$ auf DN_{m-1}^m einschränken, und wie oben heften wir diese Einschränkungen zu einem Bündel B' über $DN_{m-1}^m \cup - DN_{m-1}^m$ zusammen, für das $\sigma(B') = \sigma(B) - \sigma(\mathbf{P}_m \times X) = \sigma(B)$ gilt. Dann ist B' über P_{m-1} gefasert, die Faser X' ihrerseits ist über S^2 gefasert, nach Induktionsannahme ist also $\sigma(B') = \sigma(B) = 0$, *qed.*

Damit sind (5) und (2′) bewiesen, und mit Bezug auf die „Vereinbarung“ auch (2) und damit der Satz.

§ 3. Ergänzende Bemerkungen

Bemerkung 1. Zur vollständigen Bestimmung aller Invarianten σ mit der Additivitätseigenschaft (A) fehlt nun noch die Bestimmung derjenigen Invarianten δ, die die Eigenschaft (A) haben und für geschlossene Mannigfaltigkeiten verschwinden. Man kann sich solche δ z. B. verschaffen, indem man für geschlossene zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeiten eine Invariante Δ des orientierten Diffeomorphietyps mit der einzigen Bedingung

$$\Delta(-X) = -\Delta(X)$$

willkürlich festlegt und dann $\delta(M)$ als die Summe der Δ der Randkomponenten von M definiert.

Herr Tits machte mich darauf aufmerksam, daß man so in der Tat alle diese δ bekommt. Um das einzusehen, wähle man für jede orientierte zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit X eine Zahl $m \neq 0$ und eine „Linearkombination" L von kartesischen Produkten geradedimensionaler komplexer projektiver Räume, so daß $mX - L$ eine orientierte Mannigfaltigkeit W berandet. Ist dann δ gegeben, so erhält man durch $\Delta(X) = \frac{1}{m}\,\delta(W)$ ein dazu passendes Δ.

Genauer kann man sogar sagen: Ist Φ eine Menge orientierter Diffeomorphieklassen zusammenhängender geschlossener Mannigfaltigkeiten, in der M genau dann nicht vorkommt, wenn $M = -M$ oder $M = \pm \mathbf{P}_{2j_1}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \mathbf{P}_{2j_r}(\mathbf{C})$ oder wenn bereits $-M \in \Phi$, dann stellt die oben geschilderte Zuordnung $\delta \to \Delta$ einen Isomorphismus des reellen Vektorraumes aller δ auf $\mathbf{R}^{\Phi}$ her.

Bemerkung 2. Sei ein differenzierbares Faserbündel gegeben, in dem der Totalraum E, die Basis B und die Faser F kompakte zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeiten ohne Rand sind. Die Orientierung von E sei in der üblichen Weise durch die Orientierungen von B und F gegeben. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Fundamentalgruppe von B trivial auf $H^*(F)$ operiert, gilt

$$\tau(E) = \tau(B)\,\tau(F),$$

wie von Chern, Hirzebruch und Serre in [2] gezeigt wurde. In unserem § 2 sind nun mehrere Beispiele dafür aufgetreten, daß der Satz von Chern, Hirzebruch und Serre nicht mehr allgemein richtig bleibt, wenn man F als berandet zuläßt. Das einfachste Beispiel ist das in die Hopfsche Faserung eingespannte Disk-Bündel DH: Es ist $\tau(DH) = \tau(\mathbf{P}_2(\mathbf{C})) - \tau(D^4) = 1$, aber $\tau(S^2)\,\tau(D^2) = 0$, obwohl $\pi_1(B)$ und $H^*(F)$ in diesem Falle verschwinden.

Problem. Wie beschreibt man für Bündel mit berandeter Faser die Differenz $\tau(E) - \tau(B)\,\tau(F)$?

Literatur

1. Atiyah, M. F., and I. M. Singer: The index of elliptic operators III. (Erscheint demnächst.)
2. Chern, S. S., F. Hirzebruch, and J. P. Serre: On the index of a fibred manifold. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 587–596 (1957).
3. Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie. Zweite Auflage. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.
4. – Involutionen auf Mannigfaltigkeiten. Proceedings of the Conference on Transformation Groups, Tulane 1967. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer (erscheint demnächst).
5. Milnor, J.: A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math. **III**, 39–55 (1961).
6. Thom, R.: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. **69**, 109–182 (1952).
7. – Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math. Helv. **28**, 17–86 (1954).
8. Wallace, A. H.: Modifications and cobounding manifolds. Canadian J. Math. **12**, 503–528 (1960).

Klaus Jänich
Mathematisches Institut der Universität
5300 Bonn, Wegelerstraße 10

(Eingegangen am 28. Mai 1968)