Topology Vol. 5, pp. 301–320. Pergamon Press, 1966. Printed in Great Britain

DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEITEN MIT RAND ALS ORBITRÄUME DIFFERENZIERBARER G-MANNIGFALTIGKEITEN OHNE RAND†

KLAUS JÄNICH

(*Eingegangen* 26. *April* 1966)

EINE KOMPAKTE Liegruppe operiere differenzierbar auf einer unberandeten Mannigfaltigkeit X. Sei V_x der Normalraum an den Orbit Gx im Punkte x und $G_x \to GL(V_x)$ die induzierte Darstellung der Standgruppe in diesem Vektorraum. Unser Gegenstand sind G-Mannigfaltigkeiten (wir nennen sie "*spezielle G-Mannigfaltigkeiten*"), bei denen diese Darstellungen einer Bedingung unterworfen sind, die X/G in kanonischer Weise zu einer berandeten differenzierbaren Mannigfaltigkeit macht. Wir verlangen nämlich, daß $G_x \to GL(V_x)$ direkte Summe einer trivialen und einer "transitiven" Darstellung ist, d.h. $V_x = F_x \oplus W_x$, und die Standgruppe läßt F_x punktweise fest und operiert transitiv auf der Sphäre in W_x. Ein Punkt $x \in X$ liegt dann in einem "Randorbit", wenn $\dim W_x > 0$ ist. Ist X/G unberandet, dann ist X Totalraum eines Faserbündels, und die Operation von G darauf stammt von einer transitiven, mit der Strukturgruppe verträglichen Operation auf der typischen Faser. Ist X/G berandet, so ist X ein Faserbündel über dem Inneren von X/G, aber am Rand sind die Fasern in geeigneter Weise "kleiner", so daß sich X, statt ebenfalls berandet zu sein, über dem Rand von X/G zu einer unberandeten Mannigfaltigkeit schließt.

Unser Hauptresultat ist ein gewisser Klassifikationssatz für spezielle G-Mannigfaltigkeiten mit vorgegebener Orbitmannigfaltigkeit X/G. Im Abschnitt 1 führen wir unsere Objekte, die speziellen G-Mannigfaltigkeiten ein. Im zweiten Abschnitt führen wir eine Vorklassifizierung durch, im dritten wird der Klassifikationssatz formuliert und im vierten bewiesen. Der fünfte Abschnitt enthält einige einfache Beispiele, die zur Illustration des Begriffes und des Satzes gedacht sind. Für eine Anwendung in Hirzebruch [4] untersuchen wir im Abschnitt 6 eine gewisse Klasse von G-Mannigfaltigkeiten mit Orbitraum D^4, deren Fixpunktmengen jeweils einen Knoten in S^3 darstellen und die im Komplement ihrer Fixpunktmenge spezielle G-Mannigfaltigkeiten sind.

Ein zu dem Klassifikationssatz sehr nahe verwandtes Resultat wurde unabhängig und früher auch von W. C. Hsiang und W. Y. Hsiang gefunden. Es ist dies das Theorem 3 in ihrem Research Announcement [6] der zu erscheinenden Arbeit [7]. Die ersten fünf Abschnitte meiner Arbeit sind unabhängig davon entstanden. Bei dem später hinzugefügten

† This research was supported by NSF Grant GP 4216.

sechsten Abschnitt habe ich mich an Theorem 5 in [6] orientiert†. Ich bin Herrn Professor W. C. Hsiang für eine ausführliche Diskussion, die ich inzwischen mit ihm führen konnte, sehr zu Dank verpflichtet. Herrn Professor J. Eells danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

§1. SPEZIELLE G-MANNIGFALTIGKEITEN

1.0.

Es sei X eine unberandete differenzierbare (d.h. $C^\infty -$) Mannigfaltigkeit und G eine kompakte Liesche Gruppe. Unter einer differenzierbaren G-Aktion (von links) auf X versteht man eine differenzierbare Abbildung $G \times X \to X$, geschrieben als $(g,x) \to gx$, mit den Eigenschaften (1) $1x = x$ für alle $x \in X$ und (2) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ für alle $x \in X$ und $g_i \in G$. Der *Orbit* $\{gx \mid g \in G\}$ von x wird mit Gx, die *Standgruppe* $\{g \mid gx = x\}$ am Punkte x mit G_x bezeichnet. $\tau : X \to X'$ sei die Projektion auf den Raum der Orbits X', der mit der Quotiententopologie versehen sei. Das Paar $(X, G \times X \to X)$ heiße *G-Mannigfaltigkeit* und wird meist einfach mit X bezeichnet; Morphismen sind die G-verträglichen ("*äquivarianten*") differenzierbaren Abbildungen zwischen G-Mannigfaltigkeiten.

1.1. Gefaserte G-Mannigfaltigkeiten

In dem folgenden Beispiel ist X der Totalraum eines Faserbündels und die Orbits sind die Fasern. Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G, N_H der Normalisator von H und $\Gamma = N_H/H$. Dann operiert Γ von rechts auf G/H, verträglich mit der G-Aktion (von links) auf G/H. Es sei ferner M eine differenenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand und P ein differenzierbares rechts-Γ-Prinzipalfaserbündel über M. Dann ist der Totalraum des zu P assoziierten Faserbündels $G/H\ {}_\Gamma\!\times P$ offenbar eine G-Mannigfaltigkeit, deren Orbits gerade die Fasern dieses Bündels sind.

Definition 1. Eine G-Mannigfaltigkeit X heißt *gefasert bezüglich* H (oder einfach *gefasert*), wenn es P und M so gibt, daß $G/H\ {}_\Gamma\!\times P$ als G-Mannigfaltigkeit zu X isomorph ist.

Bemerkung zur Terminologie: Wir unterscheiden zu gelegentlich bequemerer Formulierung zwischen rechts- und links-Prinzipalbündeln, je nachdem die Gruppe auf der Faser durch Multiplikation von rechts oder links operiert. Auf dem Totalraum eines rechts-Prinzipalfaserbündels operiert die Gruppe dann von links. Entsprechend schreiben wir assoziierte Bündel als $F\ {}_\Gamma\!\times P$ oder $P \times_\Gamma F$.

Bemerkung: Ist X der Totalraum eines rechts-Faserbündels mit irgend einer Strukturgruppe G', und operiert G von links und verträglich mit G' auf der typischen Faser, dann ist X mit der induzierten G-Aktion eine gesfaserte G-Mannigfaltigkeit im Sinne der obigen Definition, denn die typische Faser ist dann als G-Mannigfaltigkeit isomorph zu G/H (H eine der Standgruppen), und Γ ist universell in Bezug auf G-verträgliche rechts-Aktionen auf G/H, d.h. die Aktion von G' auf G/H ist durch einen Homomorphismus $G' \to \Gamma$ gegeben.

Es spielt bei unserem Vorhaben eine besondere Rolle, daß eine gefaserte G-Mannigfaltigkeit die Daten M und P reproduziert. Sei X eine bezüglich H gefaserte G-Mannigfal-

† *Zusatz bei der Korrektur:* Wie mir Herr Prof. W. C. Hsiang mitteilte, ist in [7] ebenfalls ein solches Resultat enthalten. Es war aus Platzmangel in der Ankündigung [6] nicht erwähnt worden.

tigkeit. Dann trägt der Orbitraum X', der ja in diesem Falle eine topologische Mannigfaltigkeit sein muß, in kanonischer Weise eine differenzierbare Strucktur: Die Einbettungen offener Teilmengen von $\mathbf{R}^k$, deren Bilder in einem ihrer Punkte "slices" sind (vergl. z.B. [8], [11]) und die transversal zu den Orbits sind, die sie treffen, erzeugen einen differenzierbaren Atlas für X'. Die so erhaltene differenzierbare Mannigfaltigkeit sei mit $M(X)$ bezeichnet. Ist $P(X) = \{x \in X \mid G_x = H\}$, dann ist $P(X) \to M(X)$ in kanonischer Weise ein differenzierbares rechts-Γ-Prinzipalfaserbündel (vergl. Borel [3], Abschnitt 1, "Some fiberings"), und die durch $\varphi(gH,p) = gp$ definierte Abbildung $G/H\ {}_\Gamma\!\times P(X) \to X$ ist ein Isomorphismus der G-Mannigfaltigkeiten. Ist P ein anderes differenzierbares rechts-Γ-Prinzipalfaserbündel über einer Mannigfaltigkeit M und $\psi : G/H\ {}_\Gamma\!\times P \to X$ ein Isomorphismus der G-Mannigfaltigkeiten, dann induziert $\psi^{-1}\varphi$ einen Diffeomorphismus $M(X) \to M$ und einen Bündelisomorphismus zwischen $P(X)$ und dem von $\psi^{-1}\varphi$ induzierten Bündel:

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \to & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(X) & \to & M. \end{array}$$

Die gefaserten G-Mannigfaltigkeiten können auch durch das Verhalten ihrer Standgruppen charakterisiert werden. Es sei X eine G-Mannigfaltigkeit, $x \in X$. Dann ist Gx eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von X. Seien T_xX und T_xGx die Tangentialräume am Punkte x an X bzw. Gx. Die Standgruppe G_x operiert auf T_xX mit T_xGx als invariantem Teilraum. Bezeichnen wir T_xX/T_xGx mit V_x, so erhalten wir zu jedem x eine Darstellung $G_x \to GL(V_x)$. Ist X eine gefaserte G-Mannigfaltigkeit, dann sind alle diese Darstellungen trivial. Es gilt aber auch die Umkehrung: Ist X eine G-Mannigfaltigkeit mit zusammenhängendem Orbitraum, und ist für jedes $x \in X$ die Darstellung $G_x \to GL(V_x)$ trivial, dann gilt: (i) Die Gesamtheit der Standgruppen bildet eine Konjugiertenklasse und (ii) Ist $H = G_x$ eine der Standgruppen, dann ist X eine bezüglich H gefaserte G-Mannigfaltigkeit.

1.2. Spezielle G-Mannigfaltigkeiten

Wir verallgemeinern den Begriff der gefaserten G-Mannigfaltigkeit, indem wir eine schwächere Bedingung an das Verhalten der Standgruppen stellen. Eine Darstellung einer kompakten Liegruppe H in einem n-dimensionalen reellen Vektorraum heiße *transitiv*, wenn ihere von $\{0\}$ verschiedenen Orbits zu S^{n-1} homeomorph sind. Eine im Nullpunkt beginnende Halbgerade trifft dann jeden Orbit genau einmal, und mit der dadurch erklärten Abbildung der Halbgeraden auf den Orbitraum geben wir diesem seine "kanonische" Struktur als (eindimensionale) *differenzierbare* berandete Mannigfaltigkeit.

Definition 2. Eine G-Mannigfaltigkeit X heißt *speziell*, wenn für jedes $x \in X$ die Darstellung $G_x \to GL(V_x)$ direkte Summe einer trivialen und einer transitiven Darstellung ist.

Ist X eine spezielle G-Mannigfaltigkeit mit zusammenhängendem Orbitraum X', dann ist X' eine topologische berandete Mannigfaltigkeit und ist in kanonischer Weise mit einer differenzierbaren Struktur versehen. Bemerkung: Die Projektion $X \to X'$ ist genau an den Punkten von $\tau^{-1}(\partial X')$ nicht differenzierbar, sondern verhält sich dort etwa wie $(x_1, \ldots, x_{n+r}) \to \|(x_1, \ldots, x_n)\| \times (x_{n+1}, \ldots, x_{n+r})$ am Nullpunkt.

1.3. Spezielle G-Mannigfaltigkeiten über M

Der Hauptgegenstand unserer Betrachtungen sind die speziellen G-Mannigfaltigkeiten mit vorgegebenem Orbitraum. Wir definieren dazu:

Definition 3. Sei M eine berandete differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine *spezielle G-Mannigfaltigkeit über M* ist ein Paar (X, π), bestehend aus einer speziellen G-Mannigfaltigkeit X und einer Abbildung $\pi : X \to M$, die jeden Orbit auf einen Punkt von M abbildet und dabei einen Diffeomorphismus von X' auf M induziert.

Ist X gefasert, dann heiße (X, π) gefaserte G-Mannigfaltigkeit über M.

Von nun an sei M immer als zusammenhängend vorausgesetzt, M_0 bezeichne das Innere von M und $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ die Familie der Randkomponenten von M. Ist X eine spezielle G-Mannigfaltigkeit über M, so ist ihre Einschränkung X_0 auf M_0 eine gefaserte G-Mannigfaltigkeit über M_0. Ist daher H Standgruppe eines Punktes x mit $\pi(x) \in M_0$, so bildet die Gesamtheit der Standgruppen über M gelegener Punkte die Klasse (H) der zu H konjugierten Untergruppen von G. Ebenso sind die Einschränkungen Y_α von X auf B_α gefasert über B_α, die Standgruppen bilden jeweils eine Konjugiertenklasse (U_α). Die Y_α sind abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von X. Die Zuordnung der Konjugiertenklassen (H) zu M_0 und (U_α) zu B_α nennt man die "*Orbitstruktur*" von X. (Siehe z.B. [11].)

1.4. Der Isomorphiebegriff

Unser Ziel ist eine gewisse Klassifizierung der speziellen G-Mannigfaltigkeiten über M. Wir motivieren und formulieren jetzt den Isomorphiebegriff, nach dem dies geschehen soll. Auf jeden Fall soll es für "isomorphe" G-Mannigfaltigkeiten X_1 und X_2 über M einen äquivarianten Diffeomorphismus $f: X_1 \to X_2$ geben, der dann natürlich auf M einen Diffeomorphismus f' induziert:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ M & \xrightarrow{f'} & M \end{array}$$

Wir könnten darauf verzichten, an f irgendwelche weiteren Forderungen zu stellen. Das wäre der weiteste in Frage kommende Isomorphiebegriff. Wir wollen jedoch einen engeren Isomorphiebegriff haben, bei dem es, wie bei der üblichen Klassifikation von Faserbündeln, auch von Belang ist, *wie* X über M liegt. Es liegt also nahe, $f' = Id_M$ zu verlangen. Es zeigt sich jedoch, daß dies im Falle $\partial M \neq \varnothing$, wo X kein Faserbündel ist, eine ungeeignet scharfe Einschränkung ist. Wir betrachten dazu den einfachsten, noch nicht völlig entarteten Fall: $G = Z_2$ operiere auf $X = S^1 \subset \mathbf{C}$ durch Spiegelung an der reellen Achse. Damit ist S^1 eine spezielle Z_2-Mannigfaltigkeit und wird z.B. mit $\pi(e^{2\pi i t}) = |2t - 1|$ für $0 \leqq t \leqq 1$ zu einer speziellen Z_2-Mannigfaltigkeit über $I = [0, 1]$. Ist nun $\varphi : I \to I$ ein Diffeomorphismus mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, dann gibt es genau zwei äquivariante Homeomorphismen $S^1 \to S^1$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & S^1 \arrow[dl, "\varphi\pi"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, und sie sind beide genau dann am Punkte $e^{\pi i}$ differenzierbar, wenn alle geraden Ableitungen von φ am Punkte Null verschwinden. Würden wir also $f' = Id$ verlangen, so hätten wir zwischen unendlich vielen Isomorphieklassen von speziellen Z_2-Mannigfaltigkeiten über I zu unterscheiden, was wohl nicht wünschenswert wäre.

Definition 4. Zwei spezielle G-Mannigfaltigkeiten (X_1, π_1) und (X_2, π_2) über M heißen *isomorph*, wenn es einen äquivarianten Diffeomorphismus $f: X_1 \to X_2$ gibt, so daß der von f induzierte Diffeomorphismus $f': M \to M$ zur Identität auf M stark diffeotop ist, unter einer Diffeotopie, die den Rand von M punktweise festläßt.

Dabei ist (vergl. Milnor [9]) eine starke Diffeotopie $F: M \times I \to M$ eine differenzierbare Abbildung, bei der jedes F_t ein Diffeomorphismus ist.

§2. ORBIT-STRUKTUR UND ORBIT-FEINSTRUKTUR

2.0.

Sei wieder $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ die Familie der Randkomponenten von M.

Definition 5. Eine *zulässige Standgruppenauswahl* (H, U_A) über M ist ein Paar, bestehend aus einer abgeschlossenen Untergruppe H von G und einer Familie $U_A = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von H enthaltenden abgeschlossenen Untergruppen von G mit der Eigenschaft, daß für jedes $\alpha \in A$ eine transitive Darstellung von U_α existiert, bei der H als Standgruppe eines von Null verschiedenen Punktes vorkommt.

Definition 6. Zwei zulässige Standgruppenauswahlen (H, U_A) und (H', U_A') heißen *fein-äquivalent*, wenn es ein $g \in G$ und für jedes $\alpha \in A$ ein $a_\alpha \in N_H$ gibt, so daß $H' = gHg^{-1}$ und $U_\alpha' = (ga_\alpha)U_\alpha(ga_\alpha)^{-1}$. Die "fein-Äquivalenzklassen" $[H, U_A]$ heißen *zulässige Orbit-Feinstrukturen über M*.

Definition 7. (H, U_A) und (H', U_A') heißen *äquivalent*, wenn für die Konjugiertenklassen gilt: $(H) = (H')$ und $(U_\alpha) = (U_\alpha')$ für alle α. Die Äquivalenzklassen $[[H, U_A]]$ heißen *zulässige Orbit-Strukturen über M*.

2.1.

Jetzt sei X eine spezielle G-Mannigfaltigkeit über M. Sei E_α das Normalenbündel von $Y_\alpha = \pi^{-1}(B_\alpha)$. Durch die induzierte Operation von G in E_α wird E_α zu einem G-Vektorraumbündel (Atiyah–Segal [1]), und es gibt einen äquivarianten Diffeomorphismus einer offenen invarianten Umgebung des Nullschnittes von E_α auf eine offene invariante Umgebung von Y_α in X. Sei H Standgruppe eines Punktes über M_0 und $y \in Y_\alpha$. Die Darstellung $G_y \to GL(E_{\alpha,y})$ ist transitiv, und die Standgruppen dieser Darstellung sind auch Standgruppen der Aktion von G auf E_α und für $v \neq 0$ folglich zu H konjugiert.

Definition 8. *H berührt y*, wenn H eine der Standgruppen von $G_y \to GL(E_{\alpha,y})$ ist.

Offenbar gibt es in jedem Y_α, ja sogar in jedem Orbit über B_α einen Punkt y_α, den H berührt, weil in jedem Orbit über M_0 alle zu H konjugierten Gruppen, insbesondere H selbst, als Standgruppen vorkommen. Wählen wir für jedes α einen solchen Punkt y_α und setzen $U_\alpha = G_{y_\alpha}$, so erhalten wir eine zulässige Standgruppenauswahl (H, U_A) über M. $[[H, U_A]]$

ist von der Wahl des H und der y_α natürlich unabhängig und nichts anderes als die Orbitstruktur von X.

Definition 9. $[H, U_A]$ ist von der Wahl des H und der y_α unabhängig und heißt die *Orbit-Feinstruktur* von X.

Beweis der dabei gemachten Behauptung: Es seien (H, U_A) und (H', U_A') zwei in der oben beschriebenen Weise zu X gehörige zulässige Standgruppenauswahlen. Berührt H den Punkt y, dann berührt gHg^{-1} den Punkt gy, und $G_{gy} = gG_yg^{-1}$. Daher dürfen wir $H = H'$ annehmen. Es genügt, die Unabhängigkeit von der Wahl der y_α für ein einzelnes α zu zeigen, sei also $U_\beta = U_\beta'$ für $\beta \in A - \{\alpha\}$. Sei $E|b$ die Einschränkung von E_α auf den Orbit über dem Punkte $b \in B_\alpha$. Wir führen in E_α eine G-invariante Riemannsche Metrik ein. Dann ist $\{v \in E|b \mid \|v\| = 1\}$ ein Orbit der G-Aktion auf E_α, und wenn v die Standgruppe H hat, dann haben in $\{v \in E|b \mid \|v\| = 1\}$ genau die Punkte von $N_H v$ ebenfalls die Standgruppe H, und wenn daher y der Fußpunkt von v ist, so sind es genau die Punkte von $N_H y$, die in Gy liegen und von H berührt werden. Deshalb ändert sich $[H, U_A]$ nicht, wenn y_α durch ein y_α' im selben Orbit ersetzt wird, und so erhalten wir für jedes $b \in B_\alpha$ eine zulässige Orbit-Feinstruktur. Wegen des Zusammenhangs von B_α genügt es zu zeigen, daß jedes $b \in B_\alpha$ eine Umgebung besitzt, in der diese Orbit-Feinstruktur konstant ist. Dazu sei y von H berührt. Da es sich nur um eine lokale Aussage handelt, dürfen wir statt X das Normalenbündel V des Orbits Gy in X betrachten. Sei V_y die Faser am Punkte y und F_y der Fixpunktraum von $G_y \to GL(V_y)$. Für $v \in F_y$ gilt dann $G_v = G_y$ und H berührt v. Folglich ist die Orbit-Feinstruktur in einer Umgebung von b konstant. Q.E.D.

Offenbar ist die Orbit-Feinstruktur eine Isomorphie-Invariante.

Definition 10. Ist $[H, U_A]$ eine zulässige Orbit-Feinstruktur über M, dann bezeichne $\mathbf{S}[H, U_A]$ die Menge der Isomorphieklassen spezieller G-Mannigfaltigkeiten über M, deren Orbit-Feinstruktur $[H, U_A]$ ist.

Unsere Klassifikationsaufgabe soll in der Bestimmung von $\mathbf{S}$ bestehen, also in der Klassifizierung der speziellen G-Mannigfaltigkeiten über M mit vorgegebener Orbit-Feinstruktur.

2.2.

Sei (H, U_A) eine zulässige Standgruppenauswahl über M. Wir sagen dann, $[H, U_A]$ sei eine Feinstruktur von $[[H, U_A]]$. In den meisten Fällen scheint eine zulässige Orbitstruktur nur eine einzige Feinstruktur zu besitzen, so daß man dann nur von der Orbitstruktur zu sprechen braucht. Mir ist kein Beispiel einer Orbitstruktur mit mehreren Orbit-Feinstrukturen bekannt. Wir geben einige hinreichende Bedingungen für $[H, U_A] = [[H, U_A]]$ an: Unmittelbar aus der Definition folgt, daß $[[H, U_A]]$ nur eine Feinstruktur gestattet, wenn, H normal in G oder alle U_α normal in G sind. Nichttriviale Beispiele, wo weder H in U_α noch die U_α in G Normalteiler zu sein brauchen, erhalten wir durch Anwendung bekannter Sätze über transitive Transformationsgruppen auf Sphären (vergl. Tits [14], p. 166 oder die Resultate von Montgomery und Samelson [10], Borel [2] und Poncet [12] über kompakte zusammenhängende Liegruppen, die transitiv und effektiv auf Sphären operieren; zusammengefaßt in Abschnitt 1 von [5]). Man kann folgern: Ist

(H, U_A) eine zulässige Standgruppenauswahl und ist für jedes α entweder U_α ein Normalteiler in G oder U_α zusammenhängend und die Aktion von U_α auf U_α/H effektiv, so ist $[[H, U_A]] = [H, U_A]$.

§3. KLASSIFIZIERUNG DER SPEZIELLEN G-MANNIGFALTIGKEITEN ÜBER M MIT VORGEGEBENER ORBIT-FEINSTRUKTUR

3.0.

Wir geben zuerst eine für unsere Zwecke geeignete Beschreibung von $\tilde{X} = X -$ *Tubenumgebung einer Untermannigfaltigkeit*. Es sei X eine differenzierbare G-Mannigfaltigkeit ohne Rand und Y eine geschlossene G-Untermannigfaltigkeit. Das Normalenbündel von Y in X ist dann ein G-Vektorraumbündel über Y.

Definition 11. Unter einer *G-Tubenabbildung* verstehen wir eine Abbildung $T: \{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\} \to X$, wobei $\| \, .. \, \|$ irgend eine G-invariante Riemannsche Metrik in E bezeichnet, die die Eigenschaften hat:

(i) T ist ein äquivarianter Diffeomorphismus auf eine abgeschlossene Umgebung von Y in X und

(ii) T stimmt auf dem Nullschnitt mit der Inklusion von Y in X überein.

Es gibt immer G-Tubenabbildungen, ist z.B. eine G-invariante Metrik auf ganz X erklärt und die Metrik in E davon induziert, dann ist für genügend kleines ε die Hintereinanderanwendung der Multiplikation mit ε und der Exponentialabbildung eine G-Tubenabbildung. Ist eine Tubenabbildung gegeben, so definieren wir eine berandete differenzierbare G-Mannigfaltigkeit $\tilde{X}$ und eine äquivariante differenzierbare Abbildung $\rho : \tilde{X} \to X$ wie folgt: Sei $SE = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$. Wir erhalten $\tilde{X}$, indem wir $[0, 1) \times SE$ und $X_0 = X - Y$ längs $(0, 1) \times SE$ und $T(\{v \in E \mid 0 < \|v\| < 1\})$ zusammenkleben. Die Identifizierungsabbildung $(0, 1) \times SE \to X_0$ ist durch $(t, v) \to T(tv)$ gegeben. Wir fassen $[0, 1) \times SE$ und X_0 als Teilräume von $\tilde{X}$ auf und definieren $\rho : \tilde{X} \to X$ als die Inklusion auf X_0 und als die Bündelprojektion $SE \to Y$ auf $\{0\} \times SE$. Für diese Konstruktion gilt die folgende Eindeutigkeitsaussage: Es sei E mit zwei verschiedenen Riemannschen Metriken ausgestattet, wir schreiben E_1 und E_2 für die Bündel mit Metrik. Seien T_1 und T_2 zwei Tubenabbildungen bezüglich dieser Metriken. Die Identität auf X_0 läßt sich dann, wenn überhaupt, natürlich nur auf eine weise zu einer stetigen Abbildung $\tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ fortsetzen.

LEMMA. (i) *$Id : X_0 \to X_0$ läßt sich auf genau eine Weise zu einer differenzierbaren äquivarianten Abbildung $\tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ fortsetzen.*

Dies ist dann also ein Diffeomorphismus, der mit den ρ_i verträglich ist, folglich ist die Einschränkung auf den Rand ein fasertreuer äquivarianter Diffeomorphismus $\lambda : \{0\} \times SE_1 \to \{0\} \times SE_2$.

(ii) *Sind zusätzlich die Darstellungen $G_y \to GL(E_y)$ transitiv für alle y, so ist λ die Einschränkung eines isometrischen Isomorphismus der G-Vektorraumbündel E_1 und E_2.*

3.1.

Der Einfachheit halber soll von nun an M als kompakt vorausgesetzt werden. Es sei (H, U_A) eine zulässige Standgruppenauswahl über M und X eine spezielle G-Mannigfaltigkeit über M mit der Orbit-Feinstruktur $[H, U_A]$. Es ist $\Gamma = N_H/H$ und wir definieren für jedes α eine Untergruppe von Γ:

Definition 12. $\Omega_\alpha = N_H \cap N_{U_\alpha}/H$.

Wir erklären $Y = \pi^{-1}(\partial M)$ und $Y_\alpha = \pi^{-1}(B_\alpha)$. Y ist eine abgeschlossene invariante Untermannigfaltigkeit von möglicherweise nicht konstanter Dimension. Die Standgruppen G_y für $y \in Y$ operieren durch transitive Darstellungen $G_y \to GL(E_y)$ auf den Fasern des Normalenbündels E von Y in X. Wir wählen eine invariante Metrik in E und definieren $\rho : \tilde{X} \to X$ wie in 3.0.

Definition 13. $\{x \in X \mid G_x = H\} \xrightarrow{\pi\rho} M$ ist in kanonischer Weise ein differenzierbares rechts-Γ-Prinzipalfaserbündel P über M. Wir bezeichnen $P \mid B_\alpha$ mit P_α.

Die charaketerisierenden Daten für X, die wir definieren wollen, bestehen gerade aus diesem Bündel P und jeweils einer differenzierbaren Reduktion σ_α des Bündels P_α auf die Strukturgruppe Ω_α. Eine solche Reduktion ist ein Schnitt in dem Faserbündel P_α/Ω_α über B_α.

Definition 14. Sei $b \in B_\alpha$. Dann erklären wir

$$\sigma_\alpha(b) = \{\tilde{x} \in P_{\alpha,b} \mid G_{\rho(\tilde{x})} = U_\alpha\}$$

BEHAUPTUNG. *$\sigma_\alpha(b) \neq \varnothing$ und für $\tilde{x} \in \sigma_\alpha(b)$ gilt $\sigma_\alpha(b) = \Omega_\alpha \tilde{x}$.*

Beweis. Sei $p : SE_\alpha \to Y_\alpha$ die Bündelprojektion. Nach Konstruktion ist $P_\alpha = \{v \in SE_\alpha \mid G_v = H\}$ uns es ist $\rho(v) = p(v)$. Sei $E_\alpha \mid b$ die Einschränkung von E_α auf den Orbit über b. Nach Voraussetzung berührt H einen Punkt $y \in \pi^{-1}(b)$ mit $G_y = U_\alpha$, und deshalb ist $\sigma_\alpha(b)$ nicht leer. Sei nun $v \in \sigma_\alpha(b)$, $p(v) = y$ und $g \in N_H \cap N_{U_\alpha}$. Dann ist $p(gv) = gy$, $G_{gv} = H$ und $G_{gy} = U_\alpha$, also ist $\Omega_\alpha v \subset \sigma_\alpha(b)$. Sei andererseits $v' \in \sigma_\alpha(b)$ und $p(v') = y'$. Dann gibt es ein $g \in G$ mit $gv = v'$, weil $SE_\alpha \mid b$ ein Orbit ist. Dann ist aber $G_{v'} = gG_vg^{-1} = H$, also $g \in N_H$, und ebenso $U_\alpha = gU_\alpha g^{-1}$, also $gH \in \Omega_\alpha$, daher ist $\sigma_\alpha(b) \subset \Omega_\alpha v$, qed.

$\sigma_\alpha : B_\alpha \to P_\alpha/\Omega_\alpha$ ist ein differenzierbarer Schnitt. Für $(P, \sigma_A) = (P, \{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A})$ folgt aus dem Lemma in 3.0, (ii): Sind T und T' zwei Tubenabbildungen und (P, σ_A) bzw. (P', σ'_A) die mittels T bzw. T' konstruierten Daten, dann induziert der kanonisch gegebene Isomorphismus von $P \mid M_0$ auf $P' \mid M_0$ einen Isomorphismus $P \to P'$, der die Reduktionen σ_α in σ'_α überführt. Wir nennen nun zwei Paare (P, σ_A) und (P', σ'_A) von differenzierbaren rechts-Γ-Prinzipalfaserbündeln über M mit Reduktionen auf Ω_α über B_α isomorph, wenn es einen Isomorphismus $P \to P'$ gibt, der die Reduktionen respektiert und bezeichnen mit $\Pi(\Gamma, \Omega_A)$ die Menge dieser Isomorphieklassen. Unsere Konstruktion ordnet dann jedem X mit der Orbit-Feinstruktur $[H, U_A]$ ein wohlbestimmtes Element $\Delta(X) = [P, \sigma_A] \in \Pi(\Gamma, \Omega_A)$ zu. Darüber hinaus hängt $\Delta(X)$ nur von der Isomorphieklasse $[X] \in S[H, U_A]$ ab, Δ definiert also eine Abbildung $S[H, U_A] \to \Pi(\Gamma, \Omega_A)$. Beweis: Sei $[X_1] = [X_2] \in S[H, U_A]$ und

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f'"] & M \end{tikzcd}$$

ein Isomorphismus. Wir wählen eine Tubenabbildung T_1 für X_1 und erklären T_2 als mit f verträglich. Dann induziert f einen Isomorphismus $P_1 = f'^*P_2$, der die Reduktionen respektiert; und weil f' zur Identität stark diffeotop ist (∂M dabei festlassend), so gibt es einen Isomorphismus $f'^*P_2 = P_2$, der über ∂M die Identität ist. qed. Wir können nun unser Ergebnis formulieren, der Beweis wird in Abschnitt 4 gegeben.

KLASSIFIKATIONSSATZ. $\Delta : S[H, U_A] \to \Pi(\Gamma, \Omega_A)$ *ist bijektiv.*

3.2.

Wir machen noch eine Bemerkung über $\Pi(\Gamma, \Omega_A)$. Es sei $B\Gamma$ ein klassifizierender Raum für Γ und $E\Gamma \to B\Gamma$ ein universelles rechts-Γ-Bündel. Dann ist $B\Omega_\alpha = E\Gamma/\Omega_\alpha$ klassifizierender Raum für Ω_α, und wir haben ein Bündel $B\Omega_\alpha \to B\Gamma$ mit Faser Γ/Ω_α. Sind $f: M \to B\Gamma$ und $\sigma_\alpha : B_\alpha \to B\Omega_\alpha$, $\alpha \in A$, stetige Abbildungen, so daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} B_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "\subset"] & B\Omega_\alpha \arrow[d] \\ M \arrow[r] & B\Gamma \end{tikzcd}$$

kommutativ sind, so bedeutet σ_α eine Reduktion über B_α des von f induzierten Γ-Bündels auf die Strukturgruppe Ω_α; und wenn $[M, B_A; B\Gamma, B\Omega_A]$ die Menge der Homotopieklassen solcher kommutativer Diagramm-Familien $\{f, \sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ bezeichnet, dann gibt es eine kanonische bijektive Abbildung $\Pi(\Gamma, \Omega_A) \to [M, B_A; B\Gamma, B\Omega_A]$, so daß also der Klassifikationssatz auch als

$$S[H, U_A] \cong [M, B_A; B\Gamma, B\Omega_A]$$

formuliert werden kann.

§4. BEWEIS DES KLASSIFIKATIONSSATZES

4.0.

Wir erklären eine Umkehrabbildung $C: \Pi \to S$. *Sei* $[P, \sigma_A] \in \Pi(\Gamma, \Omega_A)$. Es ist klar, daß der über M_0 gelegene Teil des zu konstruierenden X als gefaserte G-Mannigfaltigkeit über M_0 zu $G/H_\Gamma \times (P \mid M_0)$ isomorph sein muß. In diesem Abschnitt geben wir an, wie man auch Y und sein ($G-$) Normalenbündel E aus den Daten $[P, \sigma_A]$ zu konstruieren hat, und in 4.1 definiteren wir X durch Zusammenkleben von X_0 mit einer Umgebung des Nullschnittes in E.

Sei $\alpha \in A$. Nach Voraussetzung gibt es eine transitive Darstellung von U_α, bei der H als Standgruppe vorkommt. Wir dürfen die Darstellung als orthogonal annehmen: $U_\alpha \to O(k_\alpha)$ und uns H als Standgruppe am Punkte $e_k = (0, \dots, 0, 1) \in S^{k-1}$ denken. Wir montieren

$\mathbf{R}^k$ vermöge dieser Darstellung an das U_α-Prinzipalfaserbündel $G \to G/U_\alpha$ und erhalten ein G-Vektorraumbündel $F_\alpha = G \times_{U_\alpha} \mathbf{R}^k$ über G/U_α mit einer invarianten Riemannschen Metrik. Der Totalraum des Sphärenbündels $SF_\alpha = G \times_{U_\alpha} S^{k-1}$ von F_α ist ein Orbit unter G, die Zuordnung $g \to (g, e_k)$ induziert einen äquivarianten Diffeomorphismus von G/H auf $G \times_{U_\alpha} S^{k-1}$. Wir können daher Γ mit der vom rechts operierenden Gruppe äquivarianter Diffeomorphismen von SF_α auf sich identifizieren. Ebenso ist N_{U_α}/U_α die von rechts operierende Gruppe äquivarianter Diffeomorphismen auf G/U_α. Die geometrische Bedeutung von Ω_α im Zusammenhang mit F_α ist die folgende: Da U_α transitiv auf S^{k-1} ist, kann man jedes Element von $G \times_{U_\alpha} \mathbf{R}^k$ durch ein Paar $(g, \lambda e_k)$, $\lambda \geqq 0$ repräsentieren. Ist $\omega \in N_H \cap N_{U_\alpha}$, dann wird durch $(g, \lambda e_k) \to (g\omega, \lambda e_k)$ ein äquivarianter Diffeomorphismus von $F_\alpha = G \times_{U_\alpha} \mathbf{R}^k$ auf sich definiert, der offenbar nur von $[\omega] \in N_H \cap N_{U_\alpha}/H = \Omega_\alpha$ abhängt. Auf diese Weise operiert Ω_α: (1) von rechts durch äquivariante Diffeomorphismen auf F_α und zwar so, daß (2) jede Faser linear und isometrisch auf eine andere Faser abgebildet wird. (Es zeigt sich sogar, daß dies ein Isomorphismus von Ω_α auf die durch (1) und (2) definierte Gruppe ist.) Die Inklusion $\Omega_\alpha \subset \Gamma$ und die kanonische Abbildung $\Omega_\alpha \to N_{U_\alpha}/U_\alpha$ sind verträglich mit den Aktionen von Ω_α, Γ und N_{U_α}/U_α auf F_α, SF_α und G/U_α respektive. Es sei nun Σ_α das von σ_α bestimmte rechts-Ω_α-Prinzipalfaserbündel über B_α. Dann erklären wir:

$$E_\alpha = F_{\alpha\ \Omega_\alpha} \times \Sigma_\alpha$$

und

$$Y_\alpha = G/U_{\alpha\ \Omega_\alpha} \times \Sigma_\alpha,$$

und mit der kanonischen Projektion ist $E_\alpha \to Y_\alpha$ ein G-Vektorraumbündel über Y_α mit einer invarianten Reimannschen Metrik. $E \to Y$ bezeichne die disjunkte Vereinigung der $E_\alpha \to Y_\alpha$.

4.1.

Γ operiert von rechts auf G/H, und die Einschränkung dieser Operation auf $\Omega_\alpha \subset \Gamma$ ist gerade die oben beschriebene Operation von Ω_α auf $SF_\alpha \cong G/H$. Weil σ_α eine Reduktion von $P_\alpha = P \mid B_\alpha$ ist, so haben wir einen kanonischen äquivarianten Diffeomorphismus $i_\alpha : SF_{\alpha\ \Omega_\alpha} \times \Sigma_\alpha \to G/H_{\ \Gamma} \times P_\alpha$, der mit den Projektionen auf B_α verträglich ist. $SF_{\alpha\ \Omega_\alpha} \times \Sigma_\alpha$ ist gerade das Sphärenbündel SE_α von E_α, und die zu konstruierende G-Mannigfaltigkeit wird im wesentlichen $\{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\} \cup_i (G/H_{\ \Gamma} \times P)$ sein. Da wir jedoch auf die differenzierbare Struktur und auf die Projektion auf M Rücksicht zu nehmen haben, gehen wir so vor: Wir wählen einen Kragen κ, das ist ein Diffeomorphismus von $\partial M \times I$ auf eine abgeschlossene Umgebung von ∂M in M, wobei $\partial M \times \{0\} \to M$ die Inklusion ist. Sei $p : \partial M \times I \to \partial M$ die Projektion. Dann ist $p^*(P \mid \partial M) \cong \kappa^* P$, und wir wählen einen solchen Isomorphismus aus, der über ∂M die Identität ist. Damit haben wir alle Requisiten für das folgende kommutative Diagramm genannt:

$$\begin{tikzcd}
\{v \in E \mid \|v\| < 1\} \arrow[d, "(1)"] & \supset & \{v \in E \mid 0 < \|v\| < 1\} \arrow[r, "(2)"] \arrow[d] & SE \times (0,1) \arrow[r, "i \times Id"] \arrow[d] & {} \\
\partial M \times [0,1) & \supset & \partial M \times (0,1) \arrow[r] & \partial M \times (0,1) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc} (G/H_{\Gamma}\times P\,|\,\partial M)\times(0,1) & \xrightarrow{\cong} & G/H_{\Gamma}\times P\,|\,\kappa(\partial M\times(0,1)) & \subset & G/H_{\Gamma}\times P_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \partial M\times(0,1) & \xrightarrow{\kappa} & \kappa(\partial M\times(0,1)) & \subset & M_0 \end{array}$$

Dabei ist (1) durch die Projektion auf ∂M und $\|\,..\,\|$ gegeben und (2) durch $v \to v/\|v\| \times \|v\|$ definiert.

Definition 15. $X \to M$ enstehe aus der disjunkten Vereinigung von $\{v \in E \mid \|v\| < 1\} \to \partial M \times [0, 1)$ und $G/H_{\Gamma} \times P_0 \to M_0$ durch identifizieren einander entsprechender Punkte unter

$$\begin{array}{ccc} \{v\in E\,|\,0<\|v\|<1\} & \longrightarrow & G/H_{\Gamma}\times P_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial M\times(0,1) & \longrightarrow & M_0 \end{array}$$

Damit ist X eine spezielle G-Mannigfaltigkeit über M mit der vorgeschriebenen Orbit-Feinstruktur $[H, U_A]$.

4.2.

Wir zeigen jetzt, daß die Isomorphieklasse $[X] \in S[H, U_A]$ nur von $[P, \sigma_A]$ abhängt. Danach können wir definieren: $C[P, \sigma_A] = [X]$.

Wir haben folgende Auswahlen getroffen:

(a) Darstellungen $U_\alpha \to O(k_\alpha)$

(b) Einen Kragen κ und einen Isomorphismus $p^*(P \mid \partial M) \cong \kappa^* P$

(c) Repräsentanten $(P, \sigma_A) \in [P, \sigma_A]$.

(a): Es genügt zu wissen, daß je zwei solche Darstellungen (d.h. transitiv und mit gegebener Standgruppe) äquivalent sind. Dies kann ebenfalls aus den in 2.2 zitierten Resultaten gefolgert werden.

(b): Seien κ_1 und κ_2 zwei Kragen von M und $h_1 : p^*(P \mid \partial M) \cong \kappa_1^* P$ und $h_2 : p^*(P \mid \partial M) \cong \kappa_2^* P$ zwei Isomorphismen, die über ∂M die Identität sind. Wir wählen einen Diffeomorphismus $f\colon M \to M$, der zur Identität stark diffeotop ist (dabei ∂M punktweise festlassend), so daß $f\kappa_1 = \kappa_2$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\bar{f}$ zwischen f^*P und P, und wir haben ein würfelförmiges kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} p^*(P\,|\,\partial M) & \xrightarrow{h_1} & P & & \partial M\times I & \xrightarrow{\kappa_1} & M \\ {\scriptstyle h_2^{-1}\bar{f}h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \longrightarrow & {\scriptstyle Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ p^*(P\,|\,\partial M) & \xrightarrow{h_2} & P & & \partial M\times I & \xrightarrow{\kappa_2} & M \end{array}$$

Ist nun allgemein P ein Prinzipalfaserbündel über M, U eine Umgebung von ∂M und $\varphi_0 : P \mid U \to P \mid U$ ein Bündelisomorphismus, dessen Einschränkung auf ∂M die Identität ist, dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi : P \to P$, der über einer Umgebung $V \subset U$ von ∂M mit φ_0 übereinstimmt. In unserem Falle können wir uns deshalb $\bar{f}$ so gewählt denken, daß $h_2^{-1}\bar{f}h_1$ über einer Umgebung von ∂M die Identität ist. Schreibt man die Diagramme in 4.1 für κ_1, h_1 und κ_2, h_2 übereinander, so induziert $\bar{f}$ eine kommutative "Abbildung" des einen Diagramms auf das andere. Die so definierte Abbildung von X_1 auf X_2 ist dann der gesuchte Isomorphismus der beiden G-Mannigfaltigkeiten über M. Bemerkung: Die identische Abbildung $P_0 \to P_0$ induziert einen äquivarianten Homeomorphismus $X_1 \to X_2$, der jedoch im allgemeinen nicht differenzierbar ist (vergl. Abschnitt 1.4).

(c): Sind (P_1, σ_{1A}) und (P_2, σ_{2A}) isomorphe Ausgangsdaten, so hat man nur κ_1, h_1 und κ_2, h_2 mit einem Isomorphismus $(P_1, \sigma_{1A}) \cong (P_2, \sigma_{2A})$ verträglich zu wählen, um einen Isomorphismus $X_1 \cong X_2$ zu bekommen. Damit ist nun durch $C[P, \sigma_A] = [X]$ eine Abbildung $C : \Pi(\Gamma, \Omega_A) \to S[H, U_A]$ definiert. Wir zeigen nun, daß C die zu Δ inverse Abbildung ist.

4.3. (1) $C\Delta = Id_S$

Zunächst eine Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Bei der Definition von Δ hatten wir zu X das Bündel $E \to Y$ und schließlich P und σ_A definiert. Bei der Definition von C hatten wir die analogen Stücke mit denselben Symbolen benannt. Um jetzt umständliche Benennungen wie $Y(P, \sigma_A)$ zu vermeiden, bezeichnen wir so: Wir beginnen mit X und konstruieren daraus E, Y, (P, σ_A), $\hat{E}$, $\hat{Y}$, $\hat{X}$. Dann haben wir $[X] = [\hat{X}]$ zu zeigen. In E sei eine invariante Riemannsche Metrik gegeben. Wir definieren eine Abbildung $\hat{E} \to E$ wie folgt: Es ist $\hat{E}_\alpha = (G \times_{U_\alpha} \mathbf{R}^{k_\alpha})_{\Omega_\alpha} \times \Sigma_\alpha$. Wegen der Transitivität der Darstellung $U_\alpha \to O(k)$ können wir jedes Element von $\hat{E}_\alpha$ durch ein Tripel $((g, \lambda e_k), e)$ repräsentieren, wobei $g \in G$, $\lambda \geqq 0$, $e_k = (0, \dots, 0, 1) \in S^{k-1}$ und $e \in \Sigma_\alpha$. Dann ist durch $((g, \lambda e_k), e) \to g\lambda e$ eine Abbildung $\hat{E} \to E$ gegeben, die ein äquivarianter Diffeomorphismus ist, jede Faser isometrisch und linear wieder auf eine Faser abbildet und dabei einen äquivarianten Diffeomorphismus $\hat{Y} \to Y$ induziert. (Dabei muß wieder ausgenutzt werden, daß U_α im wesentlichen nur eine transitive Darstellung mit H als Standgruppe zuläßt.) Nun wählen wir eine Tubenabbildung $T : \{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\} \to X$. Wir definieren $\{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\} \to \partial M \times [0, 1]$ durch $v \to (y, \|v\|)$, wobei $v \to y$ unter $E \to Y$. Dann erhalten wir durch

$$\begin{array}{ccc} \{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\} & \xrightarrow{T} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial M \times I & \xrightarrow{\kappa} & M \end{array}$$

nicht nur einen Kragen κ in M, sondern mittels $SE \times [0, 1] \to \{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\} \to X$ auch gleich noch einen Isomorphismus $p^*(P \mid \partial M) \cong \kappa^* P$. Erklärt man X mit diesen Daten, so erhält man den gewünschten Isomorphismus $\hat{X} \to X$ durch die oben erklärte Abbildung $\hat{E} \to E$ für die Punkte $\hat{x} \in \{v \in \hat{E} \mid \|v\| < 1\}$ und durch $(g, a) \to ga$ für die Punkte $\hat{x} = [(g, a)] \in G/H_\Gamma \times P_0$.

(2) $\Delta C = Id_\Pi$.

Zur Bezeichnungsweise: Wir beginnen mit Daten $(\hat{P}, \hat{\sigma}_A)$ und konstruieren daraus über $\hat{E}$, $\hat{Y}$ die G-Mannigfaltigkeit X, aus der wir E, Y und schießlich (P, σ_A) erhalten. Wir müssen dann $[P, \sigma_A] = [\hat{P}, \hat{\sigma}_A]$ zeigen.

In kanonischer Weise ist $\hat{Y} \cong Y$ und $\hat{E} \cong E$, wir übernehmen auch die Riemannsche Metrik von $\hat{E}$. Dann definiert $\{v \in \hat{E} \mid \|v\| \leqq 1\} \subset X$ eine Tubenabbildung für E. Definieren wir $\tilde{X}$ wie in 3.0 durch diese Tubenabbildung, dann ist in kanonischer Weise $G/H\ {}_\Gamma\!\times \hat{P} \cong X$, und die durch $p \to (1, p)$ gegebene Abbildung $\hat{P} \to \tilde{X}$ induziert einen Isomorphismus $\hat{P} \to P = \{\tilde{x} \in \tilde{X} \mid G_{\tilde{x}} = H\}$, der die Reduktionen $\hat{\sigma}_A$ und σ_A respektiert.

Damit ist der Klassifikationssatz bewiesen.

§5. BEISPIELE

5.0.

Der Klassifikationssatz besagt insbesondere, daß es zu jedem M und jeder zulässigen Orbit-Feinstruktur über M spezielle G-Mannigfaltigkeiten über M mit dieser Feinstruktur gibt. Wir wollen in einigen einfachen Beispielen feststellen, welche *Mannigfaltigkeiten* es sind, die als spezielle G-Mannigfaltigkeiten über M vorkommen. Die dabei auftretenden Orbitstrukturen lassen jeweils nur eine Feinstruktur zu, so daß wir nur von der Orbitstruktur zu sprechen brauchen. Wir unterschlagen keine interessanten Fälle, wenn wir nur spezielle G-Mannigfaltigkeiten betrachten, bei denen G *effektiv* operiert. Da wir M als zusammenhängend annehmen, operiert G auf X genau dann effektiv, wenn $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{1\}$. Ist G abelsch, dann genügt es also, die Fälle mit $H = \{1\}$ zu betrachten. Es gilt dann $\Omega_\alpha = \Gamma = G$, so daß man die Reduktionen vergessen kann. Der Klassifikationssatz besagt dann:

Korollar 1. *Ist G abelsch und $H = \{1\}$, dann ist*

$$\mathbf{S}[H, U_A] \cong \Pi(G, \{G\}_{\alpha \in A}) \cong [M, BG].$$

Ist also M auch noch zusammenziehbar, so gibt es bis auf Isomorphie jeweils genau *eine* spezielle G-Mannigfaltigkeit mit vorgegebener Orbit-Struktur. Es sei, um das einfachste Beispiel zu nennen, $M = I$ und G eine endliche abelsche Gruppe. Wenn es eine effektive spezielle G-Mannigfaltigkeit über M gibt, dann muß G ein Element der Ordnung 2 besitzen. Seien a und b Elemente der Ordnung 2. Dann ist $[\{1\}, \{1, a\}, \{1, b\}] = [H, U_1, U_2]$ eine zulässige Orbit-Struktur. Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der (eindimensionalen) Mannigfaltigkeit X ist dann: $\frac{1}{2}$Ordnung(G) für $a = b$ und $\frac{1}{4}$Ordnung(G) für $a \neq b$. Offenbar ist für jedes einfach zusammenhängende M die "Verdoppelung" die einzige spezielle Z_2-Mannigfaltigkeit über M.

Wenn $G = S^1$ ist, so kommen als U_α nur $Z_2 = \{1, -1\}$ und S^1 selbst in Frage. Für $M = I$ gilt

Korollar 2.

$$U_1 = U_2 = S^1 \Rightarrow X = S^2$$

$$U_1 = Z_2,\ U_2 = S^1 \Rightarrow X = \textit{reelle projektive Ebene}$$

$$U_1 = U_2 = Z_2 \Rightarrow X = \textit{Kleinscher Schlauch.}$$

Setzen wir $M = D^n$, so haben wir nur ein U zu wählen. Im Falle $U = S^1$ ist $X = S^{n+1}$; im Falle $U = Z_2$ kann man X so beschreiben: Man erhält X, wenn man in $S^{n-1} \times P^2$ die $(n-1)$-Sphäre $S^{n-1} \times \{pt\}$ durch "surgery" entfernt.

5.1.

Es sei $G = S^1 \times S^1$ und $M = I$. Dies scheint der einfachste Fall zu sein, bei dem unendlich viele verschiedene Mannigfaltigkeiten als X auftreten. Als U_α kommen nur die drei Untergruppen von der Ordnung 2 und die zu S^1 isomorphen Untergruppen in Frage. Wir wollen hier die Mannigfaltigkeiten X für den Fall bestimmen, daß sowohl U_1 als auch U_2 zu S^1 isomorph sind. Für teilerfremde $p, q \in \mathbf{Z}$ sei $U(p, q) = \{e^{2\pi ipt} \times e^{2\pi iqt} \mid t \in \mathbf{R}\}$. Die $U(p, q)$ sind genau die zu S^1 isomorphen Untergruppen von $S^1 \times S^1$, und wir setzen $U_1 = U(p_1, q_1)$ und $U_2 = U(p_2, q_2)$. Wendet man die Konstruktion $C : \Pi \to \mathbf{S}$ an, so ergibt sich, daß man X erhält, indem man $S^1 \times D^2$, $I \times S^1 \times S^1$ und $D^2 \times S^1$ an den Rändern durch gewisse Automorphismen des Torus zussammenklebt. Stattdessen kann man aber auch $S^1 \times D^2$ und $D^2 \times S^1$ mittels eines geeigneten $a : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ aneinander kleben. a ist durch eine ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} x & p \\ y & q \end{pmatrix}$ gegeben, deren Determinante ± 1 ist:

$$a(e^{2\pi it} \times e^{2\pi is}) = e^{2\pi i(xt+ps)} \times e^{2\pi i(yt+qs)}.$$

Definition 16. Da die so entstehende Mannigfaltigkeit nur von p und q abhängt, bezeichnen wir sie mit $X(p, q)$.

Es seien x_2 und y_2 ganze Zahlen und $x_2 q_2 - y_2 p_2 = 1$. Die Berechnung von a ergibt:

KOROLLAR 4(i). *Fur* $U_1 = U(p_1, q_1)$ *und* $U_2 = U(p_2, q_2)$ *gilt* $X = X(x_2 q_1 - y_2 p_1, p_2 q_1 - q_2 p_1)$.

Es bleibt also übrig, die $X(p, q)$ genauer zu bestimmen. Man erkennt leicht, daß $X(p, q) = X(-p, -q) = X(p + \lambda q, q)$ für $\lambda \in \mathbf{Z}$. Deshalb dürfen wir *oBdA*. $q \geqq 0$ und für $q > 0$ auch $0 \leqq p < q$ annehmen, und wegen $qx - py = \pm 1$ auch $0 < p$ für $q > 1$. Unmittelbar zu sehen ist

KOROLLAR 4(ii).

$$X(1, 0) = S^1 \times S^2$$
$$X(0, 1) = S^3.$$

Für die übrigen: Es ist wohlbekannt, daß man jeden dreidimensionalen Linsenraum in zwei Volltori mit gemeinsamem Rand zerlegen kann ([13], p. 216), und es stellt sich in der Tat heraus, daß unsere $X(p, q)$ für $q \neq 0$ sämtliche dreidimensionale Linsenräume sind, nämlich so: Es möge $S^1 \times S^1$ in der üblichen Weise auf $S^3 \subset \mathbf{C}^2$ operieren. Mit der Projektion $(z_1, z_2) \to (2/\pi) \arcsin |z_1|$ ist S^3 eine spezielle $S^1 \times S^1$-Mannigfaltigkeit über I. Nun sei $Z_q(1, p)$ die zyklische Untergruppe der Ordnung q von $U(1, p) \subset S^1 \times S^1$. Dann ist $S^3/Z_q(1, p)$ der Linsenraum $L(q, p)$. Die Gruppe $S^1 \times S^1/Z_q(1, p)$ operiert auf $S^3/Z_q(1, p)$, und auf diese Weise wird $L(q, p)$ zu einer speziellen effektiven $S^1 \times S^1/Z_q(1, p)$-Mannigfaltigkeit über I. Ferner ist aber $S^1 \times S^1/Z_q(1, p) \cong S^1 \times S^1$, so daß nun $L(q, p)$ als spezielle effektive $S^1 \times S^1$-Mannigfaltigkeit über I erscheint, d.h. mit $H = \{1\}$. Berechnet man (nach Wahl eines bestimmten Isomorphismus $S^1 \times S^1/Z_q(1, p) \cong S^1 \times S^1$) die Standgruppen U_1 und U_2, so erhält man $U_1 = U(p, q)$ und $U_2 = U(1, 0)$, und aus (i) folgt daher

KOROLLAR 4(iii). *Für* $q \neq 0$ *gilt* $X(p, q) = L(q, p)$.

5.2.

Schließlich wollen wir noch zwei Fälle betrachten, bei denen $\Omega_\alpha \neq \Gamma$ ist und die Reduktionen σ_α wirklich eine Rolle spielen.

(a) G sei eine endliche Gruppe und $M = I$. a_1 und a_2 seien Elemente der Ordnung 2, wir setzen $H = \{1\}$, $U_1 = \{1, a_1\}$ und $U_2 = \{1, a_2\}$. Ω_1 und Ω_2 sind hier die Normalisatoren von U_1 und U_2. Die Reduktionen σ_1 und σ_2 können wir uns einfach durch Angabe je eines Elements $b_1 \in \sigma_1(0)$ und $b_2 \in \sigma_2(1)$ gegeben denken. $\sigma_1(0)$ und $\sigma_2(1)$ sind dann die Nebenklassen $\Omega_1 b_1$ und $\Omega_2 b_2$.

KOROLLAR 5. *Unter diesen Umständen ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von X gleich*

$$\frac{\text{Ordnung}(G)}{2 \cdot \text{Ordnung}(b_1^{-1}a_1b_1b_2^{-1}a_2b_2)}$$

(b) Sei $G = O(2)$, $M = D^2$, $H = \{1\}$ und das U für die einzige Randkomponente sei $O(1)$. Dann ist $\Gamma = G$ und $\Omega = N_U = O(1) \times O(1) \subset O(2)$. Da M zusammenziehbar ist, reduziert sich $\mathbf{S}[H, U_A]$ einfach auf $[S^1, G/\Omega] = [S^1, O(2)/O(1) \times O(1)] \cong \mathbf{Z}$. Der so erklärte Isomorphismus $\mathbf{S}[H, U_A] \cong \mathbf{Z}$ ist bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt, es bezeichne p den Betrag der $X \in \mathbf{S}$ zugeordneten Zahl. Weil die Mannigfaltigkeit X nur von p abhängt, sei sie mit $X(p)$ bezeichnet. Die Durchführung der Konstruktion C ergibt

KOROLLAR 6.

$$X(0) = S^1 \times S^2$$

$$X(p) = L(p, 1) \quad \textit{für } p > 0.$$

§6. KNOTEN-G-MANNIGFALTIGKEITEN

6.0.

Es sei G eine kompakte Liegruppe und $\rho : G \to O(n)$, $n \geqq 2$, eine transitive Darstellung mit der folgenden Eigenschaft: Die Strandgruppe U am Punkte $e_n = (0, \ldots, 0, 1) \in S^{n-1}$ operiert transitiv auf S^{n-2}, und die Standgruppe H dieser U-Aktion am Punkte e_{n-1} operiert transitiv auf S^{n-3}. Wir betrachten die Diagonaldarstellung $G \to O(2n)$ von $\rho : G$ operiert auf $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ durch $(x, y) \to (gx, gy)$. Dadurch wird S^{2n-1} zu einer speziellen G-Mannigfaltigkeit. Um eine Abbildung $S^{2n-1} \to D^2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqq 1\}$ anzugeben, mit der S^{2n-1} zu einer speziellen G-Mannigfaltigkeit über D^2 wird, identifizieren wir zuerst den von e_n und e_{n-1} aufgespannten Teilraum von $\mathbf{R}^n$ mit $\mathbf{C}$, und zwar indem wir $e_n = 1$ und $e_{n-1} = i$ setzen. Dann führen wir in $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \subset \mathbf{R}^{2n}$ die orthonormale $\mathbf{C}$-Basis $\{1/\sqrt{2}(1, i), 1/\sqrt{2}(1, -i)\}$ ein, bezüglich derer wir die Punkte von $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ als Paare (z_1, z_2) schreiben. Dann ist

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset S^{2n-1},$$

und durch

$$(z_1, z_2) \to \begin{cases} z_1 : z_2 & \text{für } |z_1| \leqq |z_2| \\ \bar{z}_2 : \bar{z}_1 & \text{für } |z_1| \geqq |z_2| \end{cases}$$

ist eine Abbildung $S^3 \to D^2$ gegeben, die sich eindeutig zu einer G-invarianten Abbildung $S^{2n-1} \to D^2$ fortsetzen läßt und dabei S^{2n-1} zu einer speziellen G-Mannigfaltigkeit über D^2 macht. Projizieren wir D^2 stereographisch auf die obere Halbsphäre $S_+^2 \subset \mathbf{R}_3^+ = \{(z, t) \mid z \in \mathbf{C}, t \geqq 0\}$, so erhalten wir daraus eine Abbildung $\pi : S^{2n-1} \to S_+^2$, die wir homogen zu $\pi : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}_+^3$ fortsetzen.

6.1.

Die von rechts operierende Gruppe Φ der mit G verträglichen Isometrien von $\mathbf{R}^{2n}$ auf sich ist $O(2)$. Identifizieren wir einmal $\mathbf{R}^{2n}$ durch $(x, y) \to x + iy$ mit $\mathbf{C}^n$, $SO(2)$ mit S^1 und setzen $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, so operiert $\zeta \in S^1 \subset \Phi = O(2)$ durch Multiplikation auf $\mathbf{C}^n$ und $\tau \in \Phi$ durch Konjugation. Die dabei auf $\mathbf{R}^{2n}/G = \mathbf{R}_+^3$ induzierte Aktion von Φ heißt: $\zeta(z, t) = (z\zeta^2, t)$ für $\zeta \in S^1$ und $\tau(z, t) = (\bar{z}, t)$.

6.2.

Wir betrachten nun differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten X mit den drei folgenden Eigenschaften:

(i) Ist F die Menge der Fixpunkte von X, so ist X-F eine spezielle G-Mannigfaltigkeit.

(ii) Für jedes $x \in F$ ist die induzierte Darstellung $G \to GL(T_x)$ direkte Summe einer eindimensionalen trivialen Darstellung und einer $2n$-dimensionalen Darstellung, die zur Diagonaldarstellung $G \to O(2n)$ von ρ äquivalent ist.

(iii) X/G ist zusammenhängend und F ist nicht leer.

X/G ist dann eine berandete vierdimensionale Mannigfaltigkeit und F entspricht darin einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit K des Randes. K und $X/G - K$ sind in kanonischer Weise mit einer differenzierbaren Struktur versehen. Eine differenzierbare Struktur für ganz X/G, verträglich mit der von K und $X/G - K$, können wir auf die folgende Weise erhalten: Wir wählen im Normalenbündel E von F in X eine G-invariante Riemannsche Metrik. Sei $BE = \{v \in E \mid \|v\| \leqq 1\}$ und T: $BE \to X$ eine "Tubenabbildung" wie in 3.0. BE ist ein rechts-Faserbündel mit Faser D^{2n} und Gruppe $\Phi = O(2)$. Sei Q das zu BE assoziierte rechts-Φ-Prinzipalfaserbündel. Dann haben wir durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} BE = D^{2n} {}_{\Phi}\!\times Q & \xrightarrow{T} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_+^3 {}_{\Phi}\!\times Q & \longrightarrow & X/G \end{array}$$

einen Homeomorphismus von $D_+^3 {}_{\Phi}\!\times Q$ auf eine Umgebung W von K, der auf dem Nullschnitt die Inklusion ist und das Komplement des Nullschnittes diffeomorph auf W-K abbildet. Wir legen die differenzierbare Struktur auf X/G durch die Forderung fest, daß die ganze Abbildung ein Diffeomorphismus sei.

Wählen wir eine andere Metrik und eine andere Tubenabbildung, so erhalten wir im allgemeinen eine andere differenzierbare Struktur (d.h. die Identität auf X/G ist kein Diffeomorphismus), aber die beiden Strukturen sind diffeomorph, und man kann zu jeder Umgebung von K einen Diffeomorphismus finden, der auf K und außerhalb der Umgebung die Identität ist. Der Diffeomorphietyp von $(X/G, K)$ ist also wohldefiniert.

Definition. Eine solche G-Mannigfaltigkeit X heißt *Knoten-G-Mannigfaltigkeit*, wenn X/G diffeomorph zu D^4 ist und K einen Knoten in S^3 bildet, d.h. zusammenhängend ist.

Zwei Knoten-G-Mannigfaltigkeiten sollen *isomorph* heißen, wenn sie als G-Mannigfaltigkeiten isomorph sind, also wenn es einen äquivarianten Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt. Sei $\mathscr{S}$ die Menge der Isomorphieklassen von Knoten-G-Mannigfaltigkeiten und $\mathscr{K}$ die Menge der Isomorphieklassen differenzierbarer Knoten in S^3. Offenbar haben wir durch $X \to (\partial X/G, K)$ eine Abbildung Δ: $\mathscr{S} \to \mathscr{K}$.

SATZ: Δ: $\mathscr{S} \to \mathscr{K}$ ist bijektiv.

6.3.

Die folgenden Abschnitte dienen nur noch dem Beweis dieses Satzes. Sei K ein differenzierbarer Knoten in S^3. Wir wählen und benennen zuerst einige beim Beweis zu benutzende Gegenstände. Sei $0 < \varepsilon < \delta < 1$. Wir wählen einen rotationssymmetrischen Kragen von S^2_+ und setzen ihn homogen zu einem Kragen von $\mathbf{R}^3_+ - \varepsilon D^3_+$ fort. Ferner sei N das Normalenbündel von K in S^3 mit der induzierten Metrik und $B(N \times \mathbf{R}_+) = \{x \in N \times \mathbf{R}_+ \mid \|x\| \leqq 1\}$. Wir wählen einen Diffeomorphismus ψ von $B(N \times \mathbf{R}_+)$ auf eine abgeschlossene Umgebung von K in D^4, der auf dem Nullschnitt die Inklusion ist und definieren für $a < b \leqq 1$: $M_a^b = \psi(\{x \in B(N \times \mathbf{R}_+) \mid a < \|x\| < b\})$ und $M_a = D^4 - \psi(\{x \in B(N \times \mathbf{R}_+) \mid \|x\| \leqq a\})$. Das sind berandete Teilmannigfaltigkeiten von D^4. Der Kragen von $\mathbf{R}^3_+ - \varepsilon D^3_+$ induziert mittels ψ einen Kragen von M_ε^δ, und wir wählen für M_ε einen Kragen $\kappa: \partial M_\varepsilon \times I \to M_\varepsilon$, der auf $\partial M_\varepsilon^\delta \times I$ mit diesem Kragen übereinstimmt.

6.4.

Wir benutzen wieder die Bezeichnungen $\Gamma = N_H/H$ und $\Omega = N_H \cap N_U/H$. $\Gamma_0 = S^1 \times \{0\} \cup \{0\} \times S^1 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C} \subset \mathbf{R}^{2n}$ (Inklusion wie in 6.0) ist nach unseren Annahmen über ρ gerade die Menge der Punkte mit der Standgruppe H in dem Orbit $\pi^{-1}(0, 1)$ der speziellen G-Mannigfaltigkeit S^{2n-1} über S^2_+. Γ operiert von links frei und transitiv auf Γ_0, und indem wir $(1, 0) \to 1 \in \Gamma$ festlegen, erhalten wir eine bijektive Abbildung $\gamma: \Gamma_0 \to \Gamma$. Diese benutzen wir nur, um eine weitere Abbildung $\varphi: O(2) \to \Gamma$ zu definieren: Es sei $\varphi(\zeta) = \gamma(\zeta, 0)$ für $\zeta \in S^1$ und $\varphi(\zeta\pi) = \gamma(0, \zeta)$. φ ist dann tatsächlich ein *Isomorphismus* der Gruppen $O(2)$ und Γ, den wir benutzen um von nun an Γ mit $O(2)$ zu identifizieren. Es ist dann $\Omega = \{1, -1, \tau, -\tau\} = O(1) \times O(1) \subset O(2)$.

Sei M eine berandete Mannigfaltigkeit mit einem Kragen. Eine Abbildung $\sigma: \partial M \to O(2)/O(1) \times O(1)$ (Rechtsnebenklassen) definiert dann eine Reduktion des trivialen Γ-

Bündels über ∂M auf die Gruppe Ω, und mit der in 4.1 beschriebenen Konstruktion erhalten wir aus diesen Daten eine wohlbestimmte spezielle G-Mannigfaltigkeit über M. Ist insbesondere $M = S^2_+$ und $\sigma_0 : S^1 \to O(2)/O(1) \times O(1)$ durch $\sigma_0(\zeta) = (O(1) \times O(1))\sqrt{\zeta}$ gegeben, so erhalten wir eine zu S^{2n-1} isomorphe G-Mannigfaltigkeit über S^2_+. Wir können den Isomorphismus f so wählen, daß auf $S^2_+ \times \Gamma$ folgende Operation von Φ induziert wird: $\Phi = O(2)$ operiert auf $\Gamma = O(2)$ durch Multiplikation von rechts und auf S^2_+ in der in 6.1 beschriebenen Weise. σ_0 ist dann ein unter dieser Aktion invarianter Schnitt in $\partial S^2_+ \times \Gamma/\Omega$. Wir benutzen σ_0, um Γ/Ω mit S^1 zu identifizieren und geben Abbildungen in Γ/Ω als Abbildungen in S^1 an. Ist $a \geqq \varepsilon$, $\partial M^b_a \subset S^3$ und $\sigma : A \to S^1$ differenzierbar auf ∂M^b_a, so bezeichnen wir mit $X^b_a(\sigma)$ die zugehörige spezielle G-Mannigfaltigkeit über M^b_a.

Sei jetzt SN das Sphärenbündel von N, das ist der Rand von $M = S(N \times \mathbf{R}_+)$. Sei $\sigma : SN \to S^1 = \Gamma/\Omega$ eine differenzierbare Abbildung, die jede Faser isometrisch auf S^1 abbildet. Dann erhalten wir eine spezielle G-Mannigfaltigkeit X über $S(N \times \mathbf{R}_+)$, und f induziert einen äquivarianten Diffeomorphismus $X \to K \times S^{2n-1}$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & K \times S^{2n-1} \arrow[d] \\ S(N \times \mathbf{R}_+) \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] & K \times S^2_+ \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dabei ist $\tilde{\sigma}$ auf jeder Faser die isometrische Fortsetzung von σ.

Eine differenzierbare Abbildung $\sigma : S^3 - K \to S^1$ habe die Eigenschaft (*), wenn sich die durch $\sigma\psi$ gegebene Abbildung $\{x \in BN \mid 0 < \|x\| < \delta\} \to S^1$ als $\sigma' r$ schreiben läßt, wobei r die durch $x \to x/\|x\|$ gegebene Abbildung auf SN ist und σ' jede Faser von SN isometrisch auf S^1 abbildet. Für solche Abbildungen σ haben wir dann einen kanonischen Isomorphismus zwischen $X^\delta_\varepsilon(\sigma)$ und $K \times \{x \in D^{2n} \mid \varepsilon < \|x\| < \delta\}$. Wir können daher eine G-Mannigfaltigkeit $X(\sigma)$ definieren, indem wir in der disjunkten Vereinigung von $X_\varepsilon(\sigma)$ und $K \times \{x \in D^{2n} \mid \|x\| < \delta\}$ die einander entsprechenden Punkte von $X^\delta_\varepsilon(\sigma)$ und $K \times \{x \in D^{2n} \mid \varepsilon < \|x\| < \delta\}$ identifizieren. $X(\sigma)$ ist dann eine Knoten-G-Mannigfaltigkeit mit dem Fixpunktknoten K. Wir haben nun noch die drei folgenden Aussagen zu beweisen: (1) *Es gibt ein σ mit der Eigenschaft* (*), (2) *Haben σ_1 und σ_2 die Eigenschaft* (*), *so sind $X(\sigma_1)$ und $X(\sigma_2)$ isomorph* und (3) *Ist X eine Knoten-G-Mannigfaltigkeit mit $\Delta[X] = [K]$, so ist X isomorph zu einem $X(\sigma)$.*

6.5.

Sei $i : S^1 \to SN$ eine Isometrie auf eine Faser. Dann repräsentiert ψi ein erzeugendes Element in $H_1(S^3 - K) \cong \mathbf{Z}$, und deshalb gibt es genau zwei Homomorphismen von $\pi_1(S^3 - K)$ in $\pi_1(S^1)$, die $[\psi i] \in \pi_1(S^3 - K)$ in ein erzeugendes Element abbilden. Diesen beiden Homomorphismen entsprechen zwei Homotopieklassen von Abbildungen $S^3 - K \to S^1$, die sie realisieren (Satz von Bruschlinsky). Sei $\sigma : S^3 - K \to S^1$ eine solche Realisierung. Die durch $\sigma\psi$ gegebenen Abbildungen der Fasern von SN in S^1 sind dann alle vom Grade ± 1, und daher kann σ leicht als homotop zu einer Abbildung mit der Eigenschaft (*) erkannt werden. Damit ist (1) gezeigt. Es mögen nun σ_1 und σ_2 die Eigenschaft (*) haben. Für den Beweis von (2) genügt es, die folgenden beiden Fälle zu betrachten:

(i): σ_1 ist homotop zu σ_2, (ii): $\sigma_2(x) = \tau\sigma_1(x)$, wobei $\tau : S^1 \to S^1$ die Spiegelung an der reellen Achse ist. Wir haben $X(\sigma_1) \cong X(\sigma_2)$ zu zeigen. (i): Sei $a : S^3 - K \to S^1$ durch $a(x) = \sigma_1(x)^{-1}\sigma_2(x)$ gegeben. a ist zur konstanten Abbildung homotop, daher gibt es eine differenzierbare Abbildung $b : S^3 - K \to S^1$ mit $b(x)^2 = a(x)$. Für $x \in \partial M_0$ hängt $b(x)$ nur vom Fußpunkt $k \in Kab$. Wir setzen b zu einer Abbildung $c : (S^3 - K) \cup M_0^\delta \to S^1$ fort, so daß diese Eigenschaft auch in M_0^δ noch gilt. Da die Abbildung dann natürlich immer noch nullhomotop ist, kann man c zu einer differenzierbaren Abbildung $d : D^4 - K \to S^1$ fortsetzen. Wir fassen nun $d(x)$ als Element in $O(2) = \Phi$ auf. Die Multiplikation von rechts mit d definiert einen Bündelautomorphismus von $(D^4 - K) \times \Gamma$ auf sich, der σ_1 in σ_2 überführt und dabei einen Isomorphismen der G-Mannigfaltigkeiten $X_\varepsilon(\sigma_1)$ und $X_\varepsilon(\sigma_2)$ über M_ε induziert. Die Einschränkung auf $X_\varepsilon^\delta(\sigma_1) \to X_\varepsilon^\delta(\sigma_2)$ ist aber gleichzeitig ein Isomorphismus von $K \times \{x \in D^{2n} \mid \varepsilon < \|x\| < \delta\}$ auf sich; und dieser Isomorphismus ist für festes $k \in K$ durch $d(x) = d(k) \in \Phi$ gegeben und läßt sich daher zu einem isometrischen äquivarianten Bündelisomorphismus von $K \times \{x \in D^{2n} \mid \|x\| < \delta\}$ auf sich fortsetzen. Damit ist der gesuchte Isomorphismus $X(\sigma_1) \to X(\sigma_2)$ hergestellt.

(ii): Der durch Rechtsmultiplikation mit τ gegebene Isomorphismus von $M_\varepsilon \times \Gamma$ auf sich führt σ_1 in σ_2 über, und der induzierte Isomorphismus $X_\varepsilon(\sigma_1) \to X_\varepsilon(\sigma_2)$ ist verträglich mit dem durch $\tau \in \Phi$ gegebenen Isomorphismus von $K \times \{x \in D^{2n} \mid \|x\| < \delta\}$ auf sich. Damit ist (2) bewiesen.

6.6.

Nun sei also eine Knoten-G-Mannigfaltigkeit X gegeben mit $\Delta[X] = [K] \in \mathscr{K}$. Sei F die Fixpunktmenge in X und K' ihr Bild in X/G. Wir wählen eine invariante Riemannsche Metrik und eine Tubenabbildung $BE \to X$ für das Normalenbündel E von F. Mit der dadurch erklärten differenzierbaren Struktur ist dann $(\partial X/G, K')$ zu (S^3, K) diffeomorph. Isomorphe differenzierbare Knoten in S^3 können jedoch auch stets durch einen Diffeomorphismus von D^4 auf sich ineinander übergeführt werden. Daher ist auch $(X/G, K')$ diffeomorph zu (D^4, K). Darüber hinaus können wir diesen Diffeomorphismus so wählen, daß (vergl. das Diagramm in 6.2) $D^3_+ {}_\Phi\!\times Q$ auf $\psi(B(N \times \mathbf{R}_+))$ abgebildet wird und die dadurch gegebene Abbildung $D^3_+ {}_\Phi\!\times Q \to B(N \times \mathbf{R}_+)$ jede Faser isometrisch auf die entsprechende Faser abbildet. Sei mit $\pi : X \to D^4$ eine derart festgelegte Projektion bezeichnet. Das Bündel Q ist trivial, weil das Normalenbündel von K in S^3 und daher auch Q/Z_2 trivial sind ($Z_2 = \{1, -1\} \subset SO(2)$). Wir wählen eine feste Trivialisierung von Q und identifizieren auf diese Weise $\pi^{-1}(\psi(B(N \times \mathbf{R}_+)))$ mit $K \times D^{2n}$. $\pi^{-1}(M_\varepsilon)$ läßt sich durch ein rechts-Γ-Prinzipalfaserbündel P über M_ε und eine Reduktion $\sigma : \partial M_\varepsilon \to (P \mid \partial M_\varepsilon)/\Omega$ beschreiben. Die Trivialisierung von Q bewirkt auch eine Trivialisierung von $P \mid M_\varepsilon^\delta$, die man zu einer Trivialisierung von ganz P fortsetzen kann. So wird σ zu einer Abbildung von ∂M_ε in $\Gamma/\Omega = S^1$ mit der Eigenschaft (*) und $X(\sigma)$ ist isomorph zu X. Damit ist der Satz bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. M. F. Atiyah and G. B. Segal: Equivariant K-theory, University of Warwick, 1965.
2. A. Borel: Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, *C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **230** (1950), 1378–1381.
3. A. Borel: Fixed point theorems for elementary commutative groups I, Seminar on transformation groups, *Ann. Math. Studies* No. 46 (1960), 157–172.
4. F. Hirzebruch: $O(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären, kuriose Involutionen (in Vorbereitung).
5. Wu-chung Hsiang and Wu-yi Hsiang: Classification of differentiable actions on S^n, R^n and D^n with S^k as the principal orbit type, *Ann. Math.* **82** (1965), 421–433.
5. Wu-chung Hsiang and Wu-yi Hsiang: Some results on differentiable actions, *Bull. Am. Math. Soc.* **72** (1966), 134–137.
7. Wu-chung Hsiang and Wu-yi Hsiang: Differentiable actions of compact connected classical groups, (*erscheint demnächst*).
8. J. L. Koszul: Sur certains groupes de transformations de Lie, *Coll. Int. Centre Nat. Rech. Sci. v.* 52, *Géométrie Différentielle* (1953), 137–142.
9. J. Milnor: *Differentiable Structures*, Princeton (verviel fältigt). 1960.
10. D. Montgomery and H. Samelson: Transformation groups of spheres, *Ann. Math.* **44** (1943), 454–470.
11. R. Palais, Slices and equivariant imbeddings, Seminar on transformation groups, *Ann. Math. Studies* No. 46 (1960), 101–115.
12. J. Poncet: Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les sphères comme espaces homogènes, *Comment. Math. Helvet.* **33** (1959), 109–120.
13. H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie*, B. G. Teubner, Leipzig (1934).
14. J. Tits: Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mem. Acad. R. Belg. Cl. Sci.* **29** (1955).

Cornell University