

LIBRARY OF THE
NORWEGIAN
OSLO

ÜBER DIE INVARIANZ DER TOPOLOGISCHEN
WECHSELSUMME $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots$ GEGENÜBER
DIMENSIONSÄNDERUNGEN

VON
INGEBRIGT JOHANSSON

MIT 7 TEXTFIGUREN

AVHANDLINGER UTGITT AV DET NORSKE VIDENSKAPS-AKADEMI I OSLO
I. MATEM.-NATURVID. KLASSE. 1932. No. 1

UTGITT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

OSLO
I KOMMISSJON HOS JACOB DYBWAD
1932

NA Joh



**Skrifter utgitt av
Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo.
Matematisk-naturvidenskapelig klasse.**

1927.

- No. 1. Rolf Nordhagen. Die Vegetation und Flora des Sylene-Gebietes. Eine pflanzensoziologische Monographie. Kr. 50,00.
- » 2. L. Vegard and Alf Refsum. Further Investigations on the Structure of Crystals belonging to the Scheelite Group. Kr. 2,00.
 - » 3. L. Vegard und Th. Hauge. Mischkristalle und ihre Bildung durch Kontakt fester Phasen und durch Fällung von Lösungen. Kr. 1,50.
 - » 4. S. O. F. Omang. Die Hieraciumflora im Talgebiete Gudbrandsdalen. II. Kr. 9,00.
 - » 5. L. Vegard. Gitterschwankungen bei Mischkristallbildung durch Fällung von Lösungen. Kr. 1,50.
 - » 6. L. Vegard. The Structure of Xenotime and the Relation between Chemical Constitution and Crystal Structure. Kr. 1,50.
 - » 7. L. Vegard. Results of Continued Investigations on the Luminescence from Solidified Gases at extremely Low Temperature. Kr. 1,50.
 - » 8. Tom Barth. Die Pegmatitgänge der kaledonischen Intrusivgesteine im Seiland-Gebiete. Kr. 12,50.
 - » 9. Knut Dahl. The "Blege" or Dwarf-Salmon. A Landlocked Salmon from Lake Bygglandsfiord in Setesdal. Kr. 4,00.
 - » 10. L. Vegard and Karl Sollesnes. The Structure of the Isomorphic Substances $N(CH_3)_4J$, $N(CH_3)_4Br$, $N(CH_3)_4Cl$. Kr. 1,70.
 - » 11. K. E. Schreiner. Norske skjelettfunn fra folkevandringstiden og den yngre jernalder. Kr. 4,00.
 - » 12. Th. Skolem. Zur Theorie der assoziativen Zahlensysteme. Kr. 4,00.
 - » 13. Sigurd Einbu (Enebo). Beobachtungen veränderlicher Sterne angestellt auf Dombaas (Norwegen). X. Kr. 6,00.
 - » 14. L. Vegard und Hjalmar Dale. Untersuchungen über Mischkristalle und Legierungen. Kr. 1,50.

1928.

- No. 1. Anatol Heintz. Einige Bemerkungen über den Panzerbau bei Homosteus und Heterosteus. Kr. 1,50.
- » 2. L. Vegard. Results of Observations from the Solar Eclipse in Norway, June 29. 1927 and the Constitution of the Solar Corona and Sunspots. Kr. 3,50.
 - » 3. Asche Moe. Dates of Flowering for Native and Garden Plants at Stavanger 1897—1926.
 - » 4. William Houlder Zachariasen. Kristallstruktur von Verbindungen A_2O_3 und ABO_3 . Kr. 12,00.
 - » 5. Johan Holst. Die pathogenetischen Grundlagen der Thyreotoxikotherapie. Kr. 14,00.
 - » 6. Edgar B. Schieldrop. Two-Dimensional Fluid Motion. Kr. 2,00.
 - » 7. L. Vegard und Alf Maurstad. Die Kristallstruktur der wasserfreien Alaune $R'R''(SO_4)_2$. Kr. 3,00.
 - » 8. Johan Lofthus. Eksperimentelle undersøkelser av folkeskolebarns abstraksjons-evne. Kr. 2,50.
 - » 9. Christian Rosing Bull. Experimentelle Studien über Knochentransplantation und Knochenregeneration. Kr. 10,00.
 - » 10. Birgithe Ruud Føyn. Investigation of the Phytoplankton at Lofoten. Kr. 6,00.



82GA07372

ÜBER DIE INVARIANZ DER TOPOLOGISCHEN
WECHSELSUMME $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots$ GEGENÜBER
DIMENSIONSÄNDERUNGEN

VON
INGEBRIGT JOHANSSON

MIT 7 TEXTFIGUREN

AVHANDLINGER UTGITT AV DET NORSKE VIDENSKAPS-AKADEMI I OSLO
I. MATEM.-NATURVID. KLASSE. 1932. No. 1

UTGITT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

OSLO
I KOMMISSJON HOS JACOB DYBWAD
1932

UNIVERSITETSBIBLIOTEKET
ØSLO

Fremlagt i fellesmøtet den 11. september 1931 av Heegaard.

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

1. Um die Art der hier vorzuführenden Untersuchung zu veranschaulichen, betrachten wir zunächst als Beispiel das in der Fig. 1 a dargestellte Komplex von $\alpha_0' = 4$ Punkten und $\alpha_1' = 5$ Strecken. Der Wert der Wechselsumme ist hier

$$\alpha_0' - \alpha_1' = 4 - 5 = -1.$$

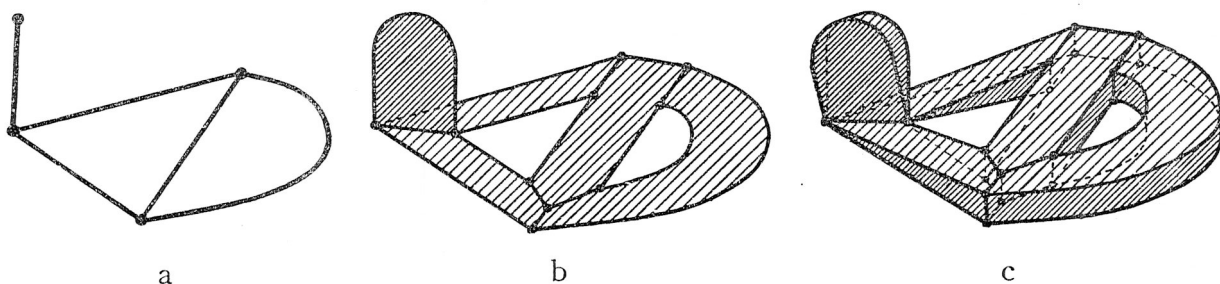


Fig. 1.

Wenn wir die Strecken mit Dicke versehen, so daß sie in Bände (Elementarflächen) übergehen, etwa so wie in der Fig. 1 b, so entsteht ein Komplex von $\alpha_0'' = 10$ Punkten, $\alpha_1'' = 16$ Strecken und $\alpha_2'' = 5$ Elementarflächen, dessen Wechselsumme

$$\alpha_0'' - \alpha_1'' + \alpha_2'' = 10 - 16 + 5 = -1$$

denselben Wert hat.

Und wenn wir die Verdickung in eine dritte Dimension fortsetzen, indem wir die Elementarflächen in Elementarräume überführen, etwa so wie in der Fig. 1 c, so entsteht ein Komplex von $\alpha_0''' = 18$ Punkten, $\alpha_1''' = 39$ Strecken, $\alpha_2''' = 25$ Elementarflächen und $\alpha_3''' = 5$ Elementarräumen, dessen Wechselsumme

$$\alpha_0''' - \alpha_1''' + \alpha_2''' - \alpha_3''' = 18 - 39 + 25 - 5 = -1$$

auch denselben Wert hat.

Man wird vielleicht einwenden, daß man die Bänder in der Fig. 1 b auch in vielen anderen Weisen hätte zusammenheften können, und daß eine noch verwickeltere Mehrdeutigkeit bei der Bildung der Fig. 1 c vorhanden ist. Man versuche aber das Zusammenheften anders zu gestalten! Es wird sich zeigen, daß die Wechselsumme auch dann den Wert -1 annimmt, wohlgemerkt, wenn man (anschaulich gesprochen) keine neuen Zusammenhänge einführt und keine alten Zusammenhänge wegläßt.

Durch dies Beispiel wird die Hoffnung erregt, daß man einen Satz über die Invarianz der Wechselsumme gegenüber Dimensionsänderungen aufstellen darf. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß ein solcher Satz wirklich gilt.

2. Von jetzt an sollen unsere Entwicklungen exakt sein. Wir müssen deshalb zunächst die Dimensionsänderung genau definieren, und zwar muß in dieser Definition die (anschauliche) Forderung der Nicht-Einführung neuer Zusammenhänge sowie die Nicht-Weglassung alter Zusammenhänge irgendwie enthalten sein. — Wir setzen die kombinatorische Grundlegung der Topologie voraus¹.

Definition: Eine elementare Erweiterung eines gegebenen Kontinuums C heißt die Hinzufügung von einem E_n (Elementarkontinuum n -ter Dimension), das mit dem Kontinuum C ein E_{n-1} (und weiter nichts) gemeinsam hat (vgl. Fig. 2).

Eine elementare Zusammenziehung des Kontinuums C heißt umgekehrt die Wegnahme von einem E_n , das mit dem Rest ein E_{n-1} (und weiter nichts) gemeinsam hat.

Eine Dimensionsänderung heißt eine Folge von elementaren Erweiterungen und Zusammenziehungen (oder eine einzige elementare Erweiterung oder eine einzige elementare Zusammenziehung oder gar keine Änderung).

Es wird natürlich bei einer Dimensionsänderung nicht immer die Dimensionszahl des Gesamtkontinuums geändert (vgl. Fig. 2).

Wenn wir die Dimensionsänderungen des Kontinuums C nicht nur abstrakt fassen, sondern verlangen, daß sich alles innerhalb eines

¹ Enzykl. d. math. Wiss. III A B 3: Dehn und Heegaard: Analysis Situs.

gewissen umfassenderen Kontinuums K vollziehen soll, so sind unter den Dimensionsänderungen von C innerhalb K unter anderen alle stetigen Deformationen (Homotopien) von C innerhalb K (vgl. Fig. 3) sowie alle „gleitenden“ Deformationen von C innerhalb K (vgl. Fig. 4) enthalten.

3. Wir betrachten nun ein beliebiges Kontinuum (Fig. 5 a), das sich in gewöhnlicher Weise durch die Angabe von α_0 Punkten (E_0),

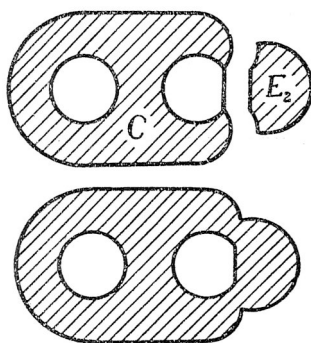


Fig. 2.



Fig. 3.

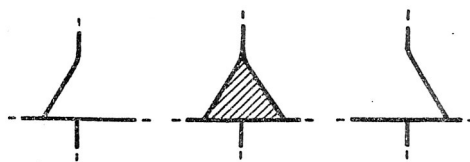


Fig. 4.

α_1 Strecken (E_1), α_2 Elementarflächen (E_2) u. s. w. kennzeichnen läßt, und bemerken, daß ein beliebig gewählter Punkt dieses Kontinuums entweder einer der α_0 Punkten ist, oder im Innern einer der α_1 Strecken liegt, oder im Innern einer der α_2 Elementflächen liegt, u. s. w. Wir können uns deshalb vorstellen, daß unser Kontinuum in α_0 Punkten (I_0), α_1 Streckeninneren (I_1), α_2 Elementarflächeninneren (I_2) u. s. w. zerlegt ist (Fig. 5 b), und zwar haben wir hier mit einer wirklichen Zerlegung zu tun, bei der jeder Punkt des ursprünglichen Kontinuums nur einem der Teile angehört.

Die Wechselsumme $\alpha_0 - \alpha_1 + \dots$ kann man sich dadurch gebildet denken, daß jedes I_0 (Punkt) den Beitrag $+1$ liefert, jedes I_1 (Streckeninnere) den Beitrag -1 , jedes I_2 (Elementarflächeninnere) den Beitrag $+1$, u. s. w., kurz dadurch, daß jedes I_n den Beitrag $(-1)^n$ liefert.

Und die bekannte Tatsache, daß diese Wechselsumme von der Zerlegungsweise unabhängig ist, beruht bei dieser Auffassung letzten Endes darauf, daß diese Zahl bei der Zerlegung von einem I_n in zwei I_n und ein I_{n-1} (vgl. Fig. 6) ungeändert bleibt. Denn mit Hilfe

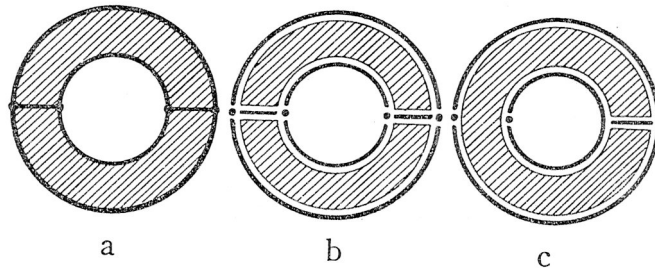


Fig. 5.

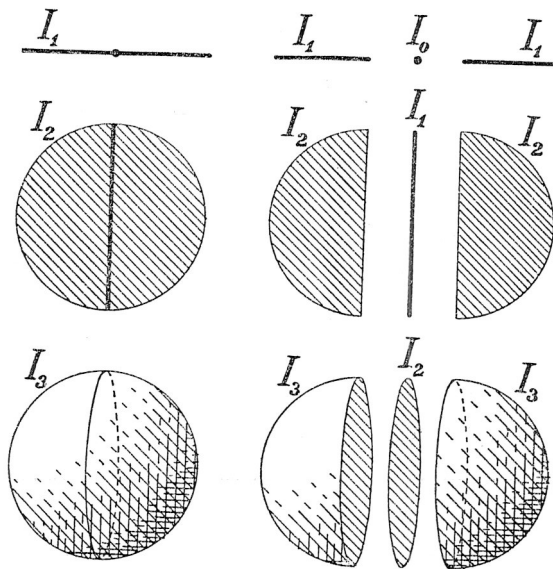


Fig. 6.

von diesen speziellen Zerlegungen läßt sich jede Weiterzerlegung einer gegebenen Zerlegung ermitteln, und je zwei gegebene Zerlegungen haben (in der kombinatorischen Topologie) eine Weiterzerlegung gemeinsam.

Natürlich kann man auch umgekehrt zwei I_n und ein I_{n-1} (wenn sie in der richtigen Weise zusammenstoßen) in ein einziges I_n zusammenfassen. Und es ist zu bemerken, daß diese Zusammenfassung viel weiter getrieben werden darf als man sich gewöhnlich vorstellt (vgl. Fig. 5 c). Das wesentliche bei der Zerlegung ist nämlich (erstens), daß

jeder Punkt des Komplexes genau einem der Teile angehört, und (zweitens) daß jeder Teil ein I_n ist.

4. Wir wollen jetzt eine beliebige elementare Erweiterung (s. Definition oben) betrachten. Diese läßt sich als Hinzufügung von einem I_n und einem I_{n-1} auffassen (vgl. Fig. 7). Bei dieser Operation bleibt aber die Wechselsumme ungeändert; denn der Beitrag von dem I_n ist $(-1)^n$, und der Beitrag von dem I_{n-1} ist $(-1)^{n-1}$; und diese beiden heben einander auf. — Eine andere Weise diese Invarianz der Wechsel-

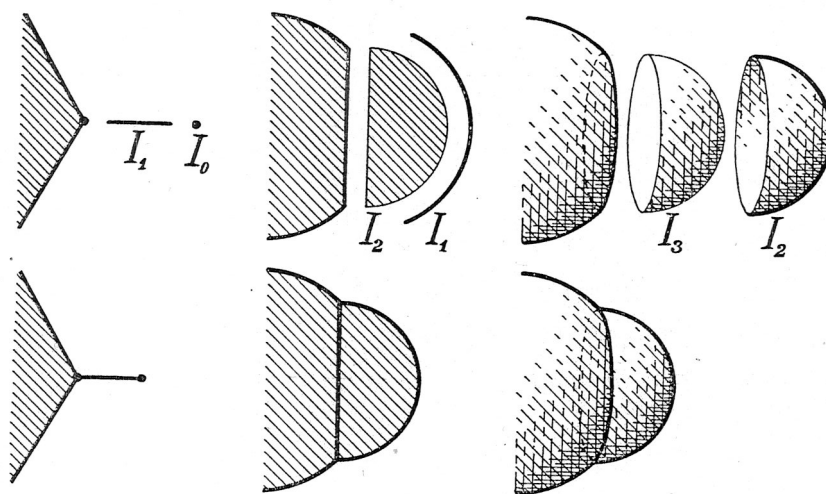


Fig. 7.

summe einzusehen ist die folgende: Das, was bei einer elementaren Erweiterung hinzugefügt wird, ist ein E_n von dem ein E_{n-1} weggenommen ist. Nun hat aber die Wechselsumme sowohl für das E_n wie für das E_{n-1} den Wert $+1$ (was man durch Betrachtung von einem Simplex sieht), und für ein $E_n - E_{n-1}$ also den Wert 0 .

Ganz analog sieht man ein, daß die Wechselsumme auch bei einer elementaren Zusammenziehung ungeändert bleibt. Es gilt folglich der

Satz: Die Wechselsumme $\alpha_0 = \alpha_1 + \dots$ eines Komplexes ist (nicht nur gegenüber Änderung der Zerlegung, sondern auch) gegenüber Dimensionsänderung invariant.

5. Durch Dimensionsänderung kann die Dimensionszahl eines Kontinuums offenbar erhöht werden. Dagegen kann sie nicht beliebig heruntergedrückt werden; eine geschlossene Fläche z. B. kann nicht

eindimensional werden (was jede berandete Fläche kann). Überhaupt gilt folgendes: Wenn ein Kontinuum eine singularitätenfreie (d. h. sich selbst nicht schneidende) n -dimensionale geschlossene Hyperfläche enthält, so kann dessen Dimensionszahl nicht kleiner als n gemacht werden.

Wenn wir an Stelle der homöomorphen Abbildungen die abstrakten Dimensionsänderungen setzen und an Stelle der stetigen Deformationen (Homotopien) innerhalb eines Kontinuums die Dimensionsänderungen innerhalb desselben setzen, so erhalten wir eine *dimensionenfreie Topologie*, in der keinem Kontinuum eine bestimmte Dimensionszahl zukommt. Wohl aber hat jedes Kontinuum eine bestimmte kleinste Dimensionszahl.

Von Invarianten eines Kontinuums in dieser dimensionsfreien Topologie kennen wir außer der betrachteten Wechselsumme noch die POINCARÉSCHE Fundamentalgruppe sowie die mehrdimensionalen Verallgemeinerungen derselben¹. Schließlich sei erwähnt, daß bei einer Dimensionsänderung eines Kontinuums auch alle Überlagerungskontinuen bloße Dimensionsänderungen erleiden.

¹ Siehe Kerékjártó: Topologie, S. 12 ff. .

1929.

- No. 1. Halvdan Bryn und K. E. Schreiner. Die Somatologie der Norweger. Kr. 80,00.
- » 2. Alette Schreiner. Die Nord-Norweger. Anthropologische Untersuchungen an Soldaten. Kr. 30,00.
- » 3. Alette Schreiner. Anthropologische Lokaluntersuchungen in Norge. Valle, Hålandsdal und Eidfjord. Kr. 14,00.
- » 4. Th. Skolem. Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. Kr. 3,00.
- » 5. Andr. M. Hansen. Bre og biota. Kr. 14,00.
- » 6. J. H. L. Vogt. The Physical Chemistry of the Magmatic Differentiation of Igneous Rocks. III. First Half. Kr. 10,00.
- » 7. L. Vegard. Continued Investigations on the Luminescence from solidified Gases at the Temperature of liquid Hydrogen. Kr. 4,50.
- » 8. Einar Klaumann Broch. Untersuchungen über Kristallstrukturen des Wolf ramittypus und des Scheelittypus. Kr. 5,00.
- » 9. K. Wagner. Rezente Hunderassen. Eine osteologische Untersuchung. Kr. 16,00.
- » 10. F. G. Gade: Further Investigations on the Cancerous Diseases in Norway (1912—1926). Kr. 2,50.
- » 11. Øystein Ore: Der wissenschaftliche Nachlass von Richard Birkeland. Kr. 1,00.
- » 12. Th. Skolem: Lösung gewisser Gleichungssysteme in ganzen Zahlen oder ganzzahligen Polynomen mit beschränktem gemeinschaftlichem Teiler. Kr. 1,50
- » 13. L. Vegard. Continued Investigations on the Luminescence from solidified Gases at the Temperature of liquid Hydrogen. II. Kr. 2,50.

1930.

- No. 1. Knut Dahl. A Study on the Supplies of Fish Food Organisms in Norwegian Lakes. Kr. 4,50.
- » 2. L. Vegard. Spectra from solidified Gases and their Interpretation. Kr. 6,50.
- » 3. J. H. L. Vogt. The Physical Chemistry of the Magmatic Differentiation of Igneous Rocks. III. Second Half. Kr. 20,00.
- » 4. Leif Størmer. Scandinavian Trinucleidae with special References to Norwegian Species and Varieties. Kr. 15,00.
- » 5. H. H. Gran: The Spring Growth of the Plankton at Møre in 1928—29 and at Lofoten in 1929 in Relation to its limiting Factors. Kr. 6,00.
- » 6. W. C. Brøgger: Die Eruptivgesteine des Oslogebietes. V. Der grosse Hurumvulkan. Kr. 14,00.
- » 7. Th. Skolem: Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik. Kr. 3,00.
- » 8. L. Vegard: The Luminescence from solidified Gases and its Variation with the Velocity of the exciting cathode Rays. Kr. 4,50.

1931.

- No. 1. Ingebrigt Johansson: Topologische Untersuchungen über unverzweigte Überlagerungsflächen. Kr. 6,00.
- » 2. Georg H. M. Waaler: Über die Erbllichkeit des Krebses. Kr. 6,00.
- » 3. Jakob Lund: Forgiftningsfaktor ved katalytisk hydrering av tran. Kr. 3,50.
- » 4. Knut Dahl: Influence of Water Storage on Food Conditions of Trout in Lake Paalsbuffjord. Kr. 5,00.
- » 5. Birger Bergersen: Beiträge zur Kenntnis der Haut einiger Pinnipeden. Kr. 20,00.
- » 6. Th. Skolem: Über die symmetrisch allgemeinen Lösungen im identischen Kalkul. Kr. 2,00.
- » 7. J. H. L. Vogt †: On the Average Composition of the Earth's Crust, with particular Reference to the Contents of Phosphoric and Titanic Acid. Kr. 3,50.
- » 8. Fr. Lange-Nielsen: Dødeligheten blandt sanatoriebehandlede tuberkuløse. Kr. 3,00.
- » 9. Hanna Resvoll-Holmsen: Om planteveksten i grensetrakter mellem Hallingdal og Valdres. Kr. 5,75.
- » 10. Niels Danbolt: Undersøkelser over stafylokokker med særlig henblik på furunkulosens epidemiologi. Kr. 7,75.

Avhandlingar utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo.

Matematisk-naturvidenskapelig klasse.

1930.

- No. 1. Th. Thjøtta: Three Cases of Tularemia, a Disease hitherto not diagnosed in Norway. Kr. 1,00.
- » 2. L. Vegard. Neue Typen von Emmissionsspektren. Kr. 1,00.
 - » 3. Carl Fred. Holmboe. Über die Passivität des anodisch polarisierten Eisens. Kr. 1,50.
 - » 4. Knud Bryn: Elektrisitetsvesenets utvikling i de siste 50 år. Kr. 1,20.
 - » 5. Trygve Nagell: Zahlentheoretische Sätze. Kr. 1,00.
 - » 6. R. Tambs Lyche: Sur les polynomes à plusieurs variables qui prennent des valeurs données en un ensemble fini de points. Kr. 2,00.
 - » 7. Trygve Nagell: Einige Gleichungen von der Form $ay^2 + by + c = dx^3$. Kr. 1,00.
 - » 8. Werner Werenskiöld: On the Computation of the Correlation Coefficient. Kr. 1,00.
 - » 9. P. A. Øyen: Foreløbige bemerkninger om det centrale Norges serpentinkonglomerater. Kr. 1,50.
 - » 10. Herman Hedström: Om ordoviciska fossil från Ottadalen i det centrale Norge. Kr. 1,20.
 - » 11. John Sebelien und W. Fuchs: Weitere Untersuchungen über das Holz einer 800 Jahre alten Hafenanlage. Kr. 0,80.
 - » 12. Otto L. Mohr: Genetisk og cytologisk bevis for somatisk eliminasjon av et kromosom. Kr. 1,00.
 - » 13. Kristine Bonnevie: Vererbbarer Cerebrospinaldefekt (?) bei Mäusen, mit sekundären Augen- und Fuss-Anomalien, nebst Turmschädelanlage. Kr. 2,50.
 - » 14. Trygve Braarud und Birgithe Føyn: Beiträge zur Kenntnis des Stoffwechsels im Meere. Kr. 1,50.

1931.

- No. 1. L. Vegard: Die Struktur von festem H_2S und H_2Se bei der Temperatur von flüssiger Luft. Kr. 1,50.
- » 2. L. Vegard: Die Struktur von festem N_2O_4 bei der Temperatur von flüssiger Luft. Kr. 2,50.
 - » 3. Einar Lea: Guanin from Fish Skin as an Indicator for Fluid Motion. Kr. 1,00.
 - » 4. L. Vegard: Mischkristallbildung in Molekülgittern durch unregelmässigen Austausch der Moleküle. Kr. 0,80.
 - » 5. S. Rosseland: On the Stability of Gaseous Stars. Kr. 4,00.
 - » 6. L. Vegard: Die Struktur von festem Kohlenoxysulfid (COS) bei der Temperatur von flüssiger Luft. Kr. 1,60.
 - » 7. S. Rosseland: On the Theory of Oscillating Fluid Globes. Kr. 1,50.
 - » 8. Ottar Rygh: Kjemiske undersøkelser over det antiskorbutiske vitamin. Kr. 2,00.
 - » 9. Henrik L. Selberg: Beiträge zur Theorie der algebroiden Funktionen. Kr. 1,50.
 - » 10. Henrik L. Selberg: Über einige transzendente Gleichungen. Kr. 0,80.
 - » 11. Ole Peder Arvesen: Un théorème sur le rayon de courbure de certaines courbes de direction. Kr. 1,00.
 - » 12. L. Vegard und Leif Bilberg: Die Kristallstruktur der Nitrate von Ca, Sr, Ba und Pb. Kr. 2,25.
 - » 13. Kaare Aanerud: Mischkristallbildung der Scheelitgruppe durch Fällung von Lösungen. Kr. 1,50.

1932.

- No. 1. Ingebrigt Johansson: Über die Invarianz der topologischen Wechselsumme $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ gegenüber Dimensionsänderungen. Kr. 1,00.

Register til Forhandlingar og Skrifter utgitt av Videnskapsselskapet i Kristiania
1858—1924. Kr. 2,00.