C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada - Vol. VII, No. 4 Aug. 1985 août

δ-ANNEAUX ET λ-ANNEAUX

ANDRE JOYAL

Presented by P. Ribenboim, F.R.S.C.

Résumé

Nous montrons comment obtenir la théorie des λ-anneaux [3] à partir de celle des δ-anneaux [4]. La suite d'opérations $(\lambda^n | n\in N)$ est remplacée par une suite d'opérations $(\delta_p | p$ nombre premier) satisfaisant à des identités explicites. En conséquence, nous pouvons exhiber pour chaque $n\in N$ une base remarquable des caractères du groupe symétrique S_n.

1- δ-opérations sur un λ-anneau

Soit $(\psi^n | n\geq 1)$ la suite d'opérations d'Adams en théorie des λ-anneaux. On sait que ψ^n est un endomorphisme d'anneau et que

$$\psi^n\circ\psi^m=\psi^{nm} \quad \text{pour tout } n,m\geq 1.$$

Pour chaque nombre premier p soit c^p l'opération de puissance cyclique d'ordre p [1]. On vérifie l'identité

$$pc_p(x) = x^p + (p-1)\psi^p(x).$$

Posons

$$\delta_p(x) = \psi^p(x) - c^p(x).$$

On a alors

$$\psi^p(x) = x^p + p\,\delta_p(x)$$

Comme le λ-anneau libre sur un générateur est sans p-torsion et que ψ^p est un endomorphisme, on conclut que l'opération δ_p donne à cet anneau une structure de δ-anneau [4]. Plus généralement, on voit que tout λ-anneau est un δ-anneau relativement à chaque nombre premier p. Nous désirons expliciter les relations entre δ_{p_1} et δ_{p_2} pour des nombres premiers distincts p_1 et p_2.

Soient $q_1 = p_1^{r_1}$ et $q_2 = p_2^{r_2}$ où p_1 et p_2 sont des nombres premiers distincts. Soit A un anneau commutatif muni de deux opérations unaires δ_1 et δ_2. On suppose que (A,δ_1) est un δ-anneau relativement à (p_1,q_1) et que (A,δ_2) est un δ-anneau relativement à (p_2,q_2).

DEFINITION Les opérations δ_1 et δ_2 sont <u>permutables</u> si l'identité suivante est vérifiée:

$$\delta_1(\delta_2(x)) + \frac{p_1^{q_2-1} - 1}{p_2}\,\delta_1(x)^{q_2} + \sum_{i=1}^{q_2-1} \frac{1}{p_2}\binom{q_2}{i} p_1^{i-1}\delta_1(x)^i x^{q_1(q_2-i)}$$

$$= \delta_2(\delta_1(x)) + \frac{p_2^{q_1-1} - 1}{p_1}\,\delta_2(x)^{q_1} + \sum_{i=1}^{q_1-1} \frac{1}{p_1}\binom{q_1}{i} p_2^{i-1}\delta_2(x)^i x^{q_2(q_1-i)}$$

La permutabilité des opérations δ_1 et δ_2 entraîne la commutation des endomorphismes de Frobenius $f_1(x) = x^{q_1} + p_1\delta_1(x)$ et $f_2(x) = x^{q_2} + p_2\delta_2(x)$. Réciproquement, si A est sans p_1p_2-torsion, la relation $f_1f_2 = f_2f_1$ entraîne la permutabilité de δ_1 et δ_2.

2- P-anneaux

Soit P un ensemble de nombres premiers.

DEFINITION Un P-anneau A est un anneau commutatif muni d'une opération unaire $\delta_p: A \to A$ pour chaque $p \in P$. On demande que soient réalisées les conditions suivantes:

i) A muni de δ_p est un δ-anneau relativement au couple (p,p)

ii) δ_p et δ_ℓ sont permutables pour tout couple d'éléments distincts $p,\ell \in P$

Exemple 1 Tout λ-anneau est naturellement muni d'une structure de P-anneau où P est l'ensemble de tous les nombres premiers.

Exemple 2 Soit n un entier ≥ 1 et soit $\zeta_n \in \mathbb{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité. Soit R_n l'anneau des entiers du corps cyclotomique $Q(\zeta_n)$. Soit P_n l'ensemble des nombres premiers ne divisant pas n. Pour chaque $p \in P_n$, soit f_p l'unique automorphisme de R_n tel que $f(\zeta_n) = \zeta_n^p$. On a pour tout $x \in R_n$,

$$f_p(x) = x^p \mod pR_n$$

Ceci montre que R_n est un δ-anneau relativement au couple (p,p). Comme $f_p f_\ell = f_\ell f_p$ pour tout $p,\ell \in R_n$, on conclut que R_n est un P_n-anneau.

Un morphisme de P-anneaux est un homomorphisme d'anneaux qui préserve chaque opération $\delta_p (p \in P)$. On vérifie que chaque endomorphisme de Frobenius $f_p (p \in P)$ est un morphisme de P-anneaux.

Soit A un P-anneau et soit M(P) l'ensemble des suites finies d'éléments de P. Pour chaque $\sigma = (p_1,\ldots,p_n) \in M(P)$, posons

$$\delta_\sigma = \delta_{p_1} \circ \delta_{p_2} \circ \ldots \circ \delta_{p_n}$$

Désignons par $C(P) \subset M(P)$ le sous-ensemble des suites croissantes pour l'ordre naturel de P.

THEOREME 1 Soit $A = \mathbb{Z}[x_\sigma | \sigma \in C(P)]$ l'anneau des polynômes sur des indéterminés $x_\sigma (\sigma \in C(P))$. Il y a une seule structure de P-anneau sur A pour laquelle $\delta_\sigma(x_0) = x_\sigma$ pour tout $\sigma \in C(P)$. Muni de cette structure, A est le P-anneau libre sur x_0.

Désignons par A la catégorie des anneaux et par PA celle des P-anneaux.

THEOREME 2 Le foncteur oubliant $U: PA \to A$ possède un adjoint à droite $V: A \to PA$.

COROLLAIRE Le foncteur V est représentable par l'anneau $\mathbb{Z}[x_\sigma | \sigma \in C(P)]$. On a une bijection naturelle.

$$V(A) \simeq A^{C(P)}$$

3- Λ-anneaux

Dans ce qui suit nous supposerons que P est l'ensemble de tous les nombres premiers. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit un endomorphisme de Frobenius

$$f_n = f_{p_1}^{r_1} \circ \ldots \circ f_{p_k}^{r_k}$$

où $p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ est une décomposition de n en facteurs premiers.

PROPOSITION 1 On peut définir en théorie des P-anneaux une suite unique d'opérations unaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ vérifiant les identités

$$f_n(x) = \sum_{r|n} r\, \alpha_r(x)^{n/r} \quad (n \geq 1)$$

PROPOSITION 2 Il y a sur $Z[A_1,A_2,\ldots]$ une seule structure de P-anneaux pour laquelle $\alpha_n(A_1) = A_n$ pour tout $n\geq 1$. Muni de cette structure, $Z[A_1,A_2,\ldots]$ est un P-anneau libre sur A_1.

THEOREME 3 Lorsque P est l'ensemble de tous les nombres premiers, les concepts de P-anneaux et de λ-anneaux sont équivalents.

La démonstration de ce théorème utilise l'approche de Cartier [2].

Exemple 3 Soit R_n l'anneau de l'exemple 2. On peut munir $R_n[1/n]$ d'une structure de λ-anneau. En effet, il suffit de définir f_p = identité pour $p\notin P_n$. En particulier, $Z[i,\frac{1}{2}]$ est un λ-anneau.

Le λ-anneau $\Lambda[x]$ libre sur un générateur est un anneau de polynômes $Z[x, \lambda x,\lambda^2 x,\ldots]$. On introduit sur $\Lambda[x]$ une graduation naturelle en posant deg $\lambda^n x = n$ pour tout $n\in N$. Cet anneau gradué peut encore se décrire en utilisant la théorie des caractères des groupes symétriques $S_n (n\geq 0)$ [1]. Soit $R(S_n)$ le groupe des caractères de S_n. Considérons l'inclusion $S_n\times S_m \subset S_{n+m}$. On définit une opération bilinéaire

$$R(S_n) \times R(S_m) \to R(S_n\times S_m) \to R(S_{n+m})$$

et par suite, une structure d'anneau gradué sur

$$\bigoplus_{n\geq 0} R(S_n)$$

Cet anneau est isomorphe à $\Lambda[x]$ [5]. Soit maintenant $Z[\delta_\sigma(x)|\sigma\in C(P)]$ l'anneau des polynômes mentionné dans le théorème 1. On introduit unegraduation sur cet anneau en posant

$$\deg \delta_\sigma(x) = p_1p_2\ldots p_n$$

lorsque $\sigma = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

COROLLAIRE *Les anneaux gradués* $\bigoplus_{n\geq 0} R(S_n)$ *et* $Z[\delta_\sigma(x) | \sigma \in C(P)]$ *sont isomorphes.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Atiyah. Power Operations in K-theory. Quart. J. Math. (2) 17 (1966), 165-93.

[2] P. Cartier. Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés. C.R. Acad. Sc. Paris, t.265, 1967, A-49-52.

[3] A. Grothendieck. Classes de Faisceaux et Théorème de Riemann-Roch. Lect. Notes in Math. No 225 (1972) Springer Verlag.

[4] A. Joyal. δ-anneaux et vecteurs de Witt. C.R. Math. Société Royale du Canada.

[5] D. Knutson. λ-rings and the representation theory of the symmetric group. Lect. Notes in Math. 308 (1973) Springer Verlag.

Département de Mathématiques
et d'informatique
Université du Québec à Montréal

Received March 28, 1985