Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x=a$, $y=b$.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Marburg (Bz. Kassel).

Einleitung.

Es sei durch $f(z, x, y) = 0$ ein algebraischer Körper K zweier unabhängigen Veränderlichen definiert. Dann kann man die Funktionen des Körpers entweder in der Umgebung irgend einer irreduktiblen Kurve $A(x, y) = 0$ betrachten oder in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$. Die erste Aufgabe ist von Herrn *Hensel* behandelt in einem Aufsatze: Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen (Act. math. 23, 1900). Er beweist dort folgendes: Ist y_0 eine Wurzel von $A(x,y) = 0$, so kann man jede Funktion R aus K nach Potenzen von $y - y_0$ entwickeln mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von x sind, und zwar erhält man eine endliche Anzahl solcher Entwicklungen. Dabei schreitet die Entwicklung im allgemeinen nach ganzen Potenzen von $y - y_0$ fort und nur für eine endliche Anzahl von Kurven, die sogenannten Verzweigungskurven, nach gebrochenen Potenzen von $y - y_0$.

Ist $x = a$ ein Wert von x und wird für ihn $y_0 = b$ und betrachten wir eine der Entwicklungen der Funktion R in der Umgebung der Stelle a, b, so konvergiert die Entwicklung im allgemeinen in einem Gebiete $|x-a| < r$, $|y-b| < s$. Geht aber durch die Stelle a, b die Projektion einer oder mehrerer Verzweigungskurven oder Unendlichkeitskurven der betrachteten Funktion, so können die Koeffizienten der Entwicklung $x - a$ im Nenner enthalten. Dann aber läßt sich für jede der Entwicklungen eine positive Zahl ε so bestimmen, daß man die Entwicklung als Reihe nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $\frac{y-y_0}{(x-a)^\varepsilon}$ darstellen kann mit Koeffizienten, die gewöhnliche Potenzreihen von $x-a$ oder einer gebrochenen Potenz von $x-a$ sind. Die Reihe konvergiert dann in einem Gebiete

$$|x-a|<r, \quad \left|\frac{y-y_0}{(x-a)^\varepsilon}\right|<s.$$

Der Konvergenzradius der Reihe wird dann, wenn wir sie als Reihe nach Potenzen von $y-y$ auffassen, gleichzeitig mit $|x-a|$ unendlich klein. Wir bekommen also durch die Entwicklungen nicht die ganze Umgebung der Stelle a, b. Es ist daher für die Stellen, wo sich zwei oder mehrere Verzweigungskurven schneiden, die *Hensel*sche Darstellung zu ergänzen.

Die Aufgabe, die hier behandelt werden soll, ist also, die Funktionen von K in der Umgebung einer Stelle $x=a$, $y=b$ darzustellen. Wir können und wollen die Stelle $a=0$, $b=0$ nehmen. Diese Aufgabe ist schon öfters behandelt, zuletzt eingehend von Herrn *Black* in der Arbeit: The parametric representation of the neighborhood of a singular point of an analytic surface. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. 37, Nr. 11, Boston. Aber die Darstellung von Herrn *Black* ist nicht einfach und läßt vor allem nicht hervortreten, wie die notwendigen Transformationen von der Art der singulären Stellen abhängen. Nun kann man mit Benutzung der *Hensel*schen Resultate die Aufgabe einfacher und klarer lösen und dabei eine deutlichere Einsicht in die Art der singulären Stellen gewinnen. Die Vereinfachung des Beweises besteht vor allem darin, daß es mir gelingt, mit Transformationen zwischen den unabhängigen Veränderlichen auszukommen.

Das Resultat ist folgendes: *Man kann Funktionenpaare u, v des Körpers K bestimmen derart, daß x und y gewöhnliche Potenzreihen von u, v werden, die für $u=v=0$ verschwinden, während alle anderen Funktionen von K entweder gewöhnliche Potenzreihen von u, v werden, oder Quotienten solcher. Eine endliche Anzahl solcher Funktionenpaare und Entwicklungen genügt, die Funktionen von K für die ganze Umgebung von $x=0$, $y=0$ darzustellen.*

*Neu an dem Resultat ist, soviel ich weiß, daß man die Hilfsgrößen u, v als Funktionen des Körpers K wählen kann.**)

*) Man kann übrigens die Darstellung von Herrn *Black* leicht so umformen, daß auch aus ihr folgt, daß u, v als Funktionen des Körpers gewählt werden können. Ich gedenke an anderer Stelle darauf zurückzukommen.

Betrachten wir eine dieser Darstellungen. Alle Funktionen aus K sind also entweder gewöhnliche Potenzreihen zweier passend gewählten Größen u, v des Körpers oder Quotienten solcher. Setzen wir nun $u=v=0$, so nehmen die Funktionen von K zum Teil bestimmte Werte an, zum Teil werden sie ganz unbestimmt $\left(\frac{0}{0}\right)$. Wir nennen die Gesamtheit der so sich ergebenden Werte, (wenn wir $\frac{0}{0}$ der Kürze halber auch mit Wert bezeichnen dürfen), eine Stelle des Körpers K, und ferner die Werte, die wir für kleine Werte von u, v bekommen, die Umgebung dieser Stelle oder auch ein Element des Körpers oder algebraischen Gebildes. Eine Stelle ist natürlich nicht immer bestimmt durch Angabe der Werte, die zwei oder auch mehr Funktionen an ihr annehmen, wohl aber durch Angabe der Entwicklungen von drei passend gewählten Größen nach den Hilfsgrößen u, v.

I. *Die Funktionen von K in der Umgebung von $x=0$, $y=0$.*

§ 1.

Wir können annehmen, daß z eine ganze Funktion für die Umgebung von $x=0$, $y=0$ ist. Es sei Q die Diskriminante von $f(z, x, y)$ in bezug auf z und es sei

$$Q=x^{\delta}(y-t_1)(y-t_2)\dots(y-t_m)E,$$

wo E eine Einheit für $x=0$, $y=0$ ist und wo die t_i Potenzreihen von x sind, die für $x=0$ verschwinden. Die Projektionen der Verzweigungskurven, die durch die Stelle $x=0, y=0$ hindurchgehen, sind dann unter den Kurven $y=t_i$ enthalten, wozu noch $x=0$ kommen kann.

Wir beschränken x auf das Gebiet $|x|<r$ und y auf das Gebiet $|y|<s$, wobei wir uns vorbehalten, r und s noch passend zu wählen. Geben wir x einen konstanten Wert, so wird z eine algebraische Funktion von y allein, und diese Funktion hat, wenn wir r und s hinreichend klein wählen, im Gebiete $|y|<s$ als Verzweigungspunkte nur Stellen, die unter den Stellen $y=t_i$ enthalten sind, und bei genügend kleiner Wahl von r können wir auch erreichen, daß diese Stellen für alle Werte von x, für die $|x|<r$, alle im Gebiete $|y|<s$ bleiben. Für einen bestimmten Wert von x innerhalb $|x|<r$ können wir z als algebraische Funktion von y auf einer *Riemann*schen Fläche ausbreiten. Von dieser Fläche betrachten wir nur das Stück, für dessen Stellen $|y|<s$. Dies bezeichnen wir, da seine Gestalt von x abhängt, mit $\overline{R}(x)$. Die Fläche $\overline{R}$ kann in mehrere nicht zusammenhängende

Stücke $R, R^{(1)}, \dots$ zerfallen. Die Gesamtheit dieser einzelnen Stücke ist durch x eindeutig bestimmt. Beschreibt x im Gebiete $|x| < r$ eine geschlossene Kurve γ, so geht daher die Gesamtheit der Flächen $R, R^{(1)}, \dots$ wieder in sich selbst über. Geht dabei z. B. R in eine andere Fläche über, so muß innerhalb γ ein Punkt α liegen derart, daß, wenn x auch nur den Punkt α in einem kleinen Kreise umläuft, dann schon R in eine andere Fläche übergeht. Dann aber muß $x-\alpha=0$ eine singuläre Kurve für z sein, also, da es andere Singularitäten nicht gibt, eine Verzweigungskurve. Wir nehmen nun r so klein an, daß innerhalb $|x|<r$ außer etwa $x=0$ keine solche Verzweigungskurve liegt. Dann kann höchstens R in eine andere Fläche übergehen, wenn die Kurve γ, die x durchläuft, den Nullpunkt umschließt. Ist nun $x=0$ eine Verzweigungskurve und umläuft x den Nullpunkt einmal, so wird unter den $R, R^{(1)} \dots$ eine Permutation eintreten. Diese läßt sich in Zyklen ordnen; einer von diesen sei $R, R^{(1)}, \dots R^{(c-1)}$, so daß also nach c-maligem Umlauf von x um den Nullpunkt die Fläche R wieder in sich selbst übergeht. Dabei braucht aber nicht etwa z wieder denselben Wert anzunehmen, da eine Stelle von R sehr wohl in ein anderes Blatt hineingeraten kann, auch wenn y bei der Bewegung von x konstant bleibt, da die Verzweigungsschnitte sich unter y fortbewegen können.

§ 2.

Die Fläche R sei b-blättrig. Dann gehören zu einem Werte x und einem Werte y b Werte z von dem auf der Fläche R ausgebreiteten Zweige z. Diese Werte seien $z_1, z_2, \dots z_b$. Bilden wir

$$g=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_b),$$

so ist g eine ganze rationale Funktion von z und ihre Koeffizienten sind für die Umgebung von $y=0$ eindeutige Funktionen von y. Dagegen können die Koeffizienten nicht eindeutige Funktionen von x sein für die Umgebung von $x=0$, wenn $c>1$ ist. Denn wenn x den Nullpunkt einmal umkreist, müssen die $z_1, z_2, \dots z_b$ in andere Funktionen übergehen, da die Fläche R in die von ihr verschiedene Fläche $R^{(1)}$ übergeht; erst nach c-maligem Umlauf von x um den Nullpunkt geht g wieder in sich selbst über. Es werden daher die Koeffizienten von g gewöhnliche Potenzreihen von $x^{\frac{1}{c}}$. Sind $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}, \dots z_b^{(\varkappa)}$ die Werte, die aus $z_1, z_2, \dots z_b$ hervorgehen*), wenn x den

*) In *welchen* der Werte $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}, \dots z_b^{(\varkappa)}$ dabei z. B. z_1 übergeht, hängt von dem Werte ab, den y hat.

Nullpunkt $\varkappa$-mal umkreist, so ist

$$g^{(\varkappa)}=(z-z_1^{(\varkappa)})(z-z_2^{(\varkappa)})\dots(z-z_b^{(\varkappa)})$$

die Funktion, die aus g hervorgeht, wenn x denselben Weg durchläuft. Das Produkt

$$F=g\,g^{(1)}\,g^{(2)}\dots g^{(c-1)}$$

wird eine ganze rationale Funktion von z vom Grade bc und ihre Koeffizienten sind gewöhnliche Potenzreihen von x, y. Wir nennen nun eine ganze rationale Funktion von z, deren Koeffizienten gewöhnliche Potenzreihen von x, y sind, zerlegbar für den Bereich von $x=0$, $y=0$, wenn sie sich in ganze rationale Funktionen von z zerlegen läßt, deren Koeffizienten wieder gewöhnliche Potenzreihen von x, y sind. Dann ist die Funktion F unzerlegbar. Denn angenommen, F zerfiele in zwei Faktoren G und H der eben angegebenen Art, und es sei z_1 eine Wurzel von G, dann würde z_1 bei beliebigen Umläufen von x und y in $|x|<r$, $|y|<s$ immer wieder in eine Wurzel von G übergehen, da sich ja dabei G nicht ändert. Andererseits aber kann dadurch z_1 in jede der bc Wurzeln von F übergeführt werden. Es muß daher G bis auf einen konstanten Faktor mit F identisch sein. Die bc Wurzeln von $F=0$ hängen in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ mit einander zusammen.

Sind durch die Flächen R, $R^{(1)}, \dots R^{(c-1)}$ noch nicht alle Flächen R erschöpft, so gilt für die anderen Analoges. Und wir bekommen das Resultat: Für den Bereich von $x=0$, $y=0$ zerfällt die Funktion $f(z)$, durch deren Nullsetzen der Körper K definiert wird, in irreduktible Faktoren,

$$f(z)=F F_1 \dots F_{\lambda-1}.$$

§ 3.

Es genügt, einen der Zweige von z, die durch die Gleichungen $F=0$, $F_1=0, \dots F_{\lambda-1}=0$ definiert werden, zu betrachten, etwa den durch die Gleichung $F=0$ definierten. Wir verstehen also im folgenden unter z immer den Zweig von z, der der Gleichung $F=0$ genügt und auf den Flächen $R(x)$, $R^{(1)}(x), \dots R^{(c-1)}(x)$ ausgebreitet ist.

Die Verzweigungspunkte der b-blättrigen Fläche $R(x)$ seien $t_1(x), t_2(x), \dots t_l(x)$. Es gilt dann folgender Satz: Liegt an der Stelle t_i ein

Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha-1$, so ist α ein Teiler von b und es liegen $\frac{b}{\alpha}$ Verzweigungspunkte der Ordnung $\alpha-1$ an der Stelle t_i über einander. Die Fläche $R(x)$ ist also mit anderen Worten eine Fläche, wie sie zu einer *Galois*schen Gleichung gehört. Zum Beweise nehmen wir an, daß an der Stelle t_i Verzweigungspunkte der Ordnungen $\alpha-1$, $\beta-1$, ... über einander liegen. Dann zerfällt die im Anfang von § 2 definierte Funktion g, aufgefaßt als Funktion von z und y, für den Bereich von $y=t_i$ in Faktoren vom Grade α, β, ... in z mit Koeffizienten, die ganze Potenzreihen von $y-t_i$ sind, und diese Faktoren sind insofern irreduktibel, als sie sich nicht in Faktoren derselben Art zerlegen lassen. Aber die einzelnen Faktoren lassen sich innerhalb des Gebietes $|x|<r$, $|y|<s$, in dem auch t_i liegt, in einander überführen, da in diesem Gebiete die Wurzeln von g alle mit einander zusammenhängen. Das aber ist nur möglich, wenn die einzelnen irreduktiblen Faktoren denselben Grad haben. Also ist, wie behauptet wurde, $\alpha=\beta=\cdots$. Ebenso folgt, daß auch $x=0$ für den von uns betrachteten Zweig z nur Verzweigungskurve *einer* Ordnung sein kann, etwa der Ordnung $a-1$. Da dann bei einem a-maligen Umlauf um den Nullpunkt $R(x)$ in sich selbst übergeht, so ist a ein Vielfaches der oben definierten Zahl c.

§ 4.

Es sei $P(x, y)$ diejenige ganze rationale Funktion niedrigsten Grades, die die Faktoren $y-t_1(x)$, $y-t_2(x)$, $\ldots y-t_l(x)$ enthält. Ist dann $y-t$ ein Faktor von P von der Art, daß t für $x=0$ verschwindet, so muß t eine der Funktionen t_i sein. Ist nämlich A die ganze *irreduktible* Funktion, die $y-t$ als Faktor enthält, so ist A ein Faktor von P, und wenn $y-t$ keine Verzweigungskurve wäre, so könnte A fortgelassen werden und es wäre P nicht von möglichst niedrigem Grade. Sind die Glieder niedrigster Dimension von P bei der Entwicklung nach Potenzen von x, y durch x teilbar, und ist ferner $x=0$ eine Verzweigungskurve, so setzen wir $D=xP$, in allen anderen Fällen $D=P$ und nennen die so definierte Funktion D *die zu $R(x)$ gehörende Verzweigungsfunktion.* Sind die Glieder niedrigster Dimension von D bei der Entwicklung nach Potenzen von x, y von der Dimension μ, so nennen wir μ den *Rang der Verzweigung von R.*

Wir werden in Abschnitt III. zeigen, daß wir die Fälle, wo $\mu>1$ auf die Fälle $\mu=0$ oder $\mu=1$ zurückführen können. Diese Fälle aber behandeln wir in Abschnitt II.

II. *Die einfachsten Fälle.*

§ 1.

1.) Es sei $\mu=0$. Es ist dann $D=P$ und es muß $P=1$ sein. Die Fläche R hat keinen Verzweigungspunkt. Die weitere Behandlung erfolgt unter 2.).

2.) Es sei $\mu=1$. Es ist dann sicher $D=P$ und P enthält bei der Entwicklung nach Potenzen von x, y Glieder erster Dimension, also das Glied mit y oder x (oder beide). Kommt das Glied mit y vor, so setzen wir $P=\overline{y}$ und nehmen als neue Veränderliche $x, \overline{y}$. Da y aus der Gleichung $P=\overline{y}$ sich als gewöhnliche Potenzreihe von $x, \overline{y}$ ergibt, so wird durch diese Transformation nichts Wesentliches geändert, und wir können daher von vornherein annehmen, es sei $P\equiv y$. Es hat dann die Fläche R nur den Verzweigungspunkt $y=0$. Dieser muß von der Ordnung $b-1$ sein, weil sonst die Blätter von R nicht zusammenhängen würden. Unser Zweig z hat dann die Verzweigungskurve $y=0$ und vielleicht noch die Verzweigungskurve $x=0$, sonst aber keine in der Umgebung von $x=0$, $y=0$.

Kommt das Glied mit y in P nicht vor, so kommt sicher das Glied mit x vor, es ist also das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension durch x teilbar, und daher ist $x=0$ keine Verzweigungskurve; denn sonst wäre $D=xP$ und also μ gegen unsere Annahme gleich zwei. Wir führen statt x durch die Gleichung $P=\overline{x}$ die neue Veränderliche $\overline{x}$ ein. Dadurch wird wieder nichts Wesentliches geändert. Vor allem bleiben die Zusammenhangsverhältnisse der einzelnen z-Zweige ungeändert, während sich die Fläche R allerdings ändern wird. Unser Zweig z hat dann nur die Verzweigungskurve $\overline{x}=0$ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$. Wir schreiben für $\overline{x}$ wieder x.

Alle in diesem Abschnitt zu behandelnden Fälle können wir hiernach dahin zusammenfassen, daß der von uns betrachtete Zweig z in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ als Verzweigungskurven nur haben soll $x=0$ und $y=0$. Die erste sei von der Ordnung $a-1$, die zweite von der Ordnung $b-1$, wobei nicht ausgeschlossen sein soll, daß a und b den Wert 1 haben.

Es wird unser Zweig z eine eindeutige endliche, stetige Funktion von $x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}$, also in eine gewöhnliche Potenzreihe dieser Größen entwickelbar, die uns alle Werte unseres Zweiges z für die Umgebung von $x=0$, $y=0$ liefert. Diese Potenzreihe schreiben wir so:

$$z = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha\beta}\, x^{\frac{\alpha}{a}} y^{\frac{\beta}{b}}, \tag{1.}$$

wo die $a_{\alpha\beta}$ gewöhnliche Potenzreihen von x, y sein sollen, und wo ferner

$$0 \leqq \alpha \leqq a-1, \quad 0 \leqq \beta \leqq b-1. \tag{2.}$$

In (1.) können einige der Größen $a_{\alpha\beta}$ Null sein. Diese denken wir uns fortgelassen und verstehen also unter α, β nur solche Zahlenpaare, denen in (1.) wirklich vorkommende Glieder entsprechen. Die übrigbleibenden Zahlen α, β haben die Eigenschaft, daß der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen α teilerfremd zu a ist und der der Zahlen β zu b. Denn sonst wären die Kurven $x=0$, $y=0$ nicht Verzweigungskurven der Ordnungen $a-1$, $b-1$, sondern niedrigerer Ordnung.

Für ein gegebenes Wertepaar x, y kann z offenbar höchstens ab Werte annehmen, aber natürlich in besonderen Fällen auch weniger. Nimmt z genau $a\,b$ verschiedene Werte für gegebenes x, y an, so setzen wir einfach

$$x = u^a, \quad y = v^b. \tag{3.}$$

Dann wird z eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v.

Die hier benutzten Hilfsgrößen u, v gehören im allgemeinen nicht dem Körper K an. Aber man kann statt ihrer immer Funktionen des Körpers einführen. Es läßt sich nämlich zeigen, daß es unter denjenigen Funktionen des Körpers, die sich als gewöhnliche Potenzreihen von u, v darstellen lassen, immer solche gibt, deren Glieder niedrigster Dimension sich auf u oder v reduzieren. Eine Funktion der ersten Art sei u_1, eine der zweiten v_1. Da dann u, v gewöhnliche Potenzreihen von u_1, v_1 werden, so können wir statt u, v die Größen u_1, v_1 einführen. Daß sich die Größen u_1, v_1 in der angegebenen Weise bestimmen lassen, möchte ich bei einer anderen Gelegenheit beweisen.

§ 2.

Ist die Anzahl der verschiedenen Werte von z aus der Reihe (1.) des vorigen Paragraphen für gegebenes x, y kleiner als $a\,b$, so kann es unter Umständen brauchbar und praktisch sein, und zwar wegen der großen Einfachheit, auch zu setzen

$$x=u^a, \quad y=v^b,$$

aber es können dann zu verschiedenen Wertepaaren u, v dieselben Stellen des Gebildes gehören, und es ist infolgedessen sicher nicht möglich, u und v in der Art wie eben durch Funktionen des Körpers zu ersetzen. Wir müssen daher anders verfahren. Dabei benutzen wir zunächst Größen, die nicht dem Körper K anzugehören brauchen. Damit wir diese aber einfach durch Größen des Körpers ersetzen können, wählen wir sie immer so, daß zu verschiedenen Werten der benutzten Hilfsgrößen verschiedene Stellen des Körpers gehören.

Es sei m das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und d der größte gemeinschaftliche Teiler von a, b. Es sei ferner $a=a'd$, $b=b'd$, so daß also a', b' teilerfremd sind. Dann setzen wir zunächst

$$x=x_1^{a'}, \quad y=y_1^{b'}, \tag{4.}$$

so daß wir bekommen

$$z=\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha\beta} \sqrt[d]{x_1^{\alpha} y_1^{\beta}}. \tag{5.}$$

Das dürfen wir; denn zu verschiedenen Wertepaaren x_1, y_1 gehören auch verschiedene Stellen x, y, z. Es gehöre nämlich etwa zu den Wertepaaren x_1, y_1 und $\overline{x}_1, \overline{y}_1$ dieselbe Stelle. Dann folgt aus (4.)

$$\overline{x}_1=\omega_1 x_1, \quad \overline{y}_1=\omega_2 y_1,$$

wo ω_1 eine a'-te und ω_2 eine b'-te Einheitswurzel ist. Sollen nun aber die beiden Stellen übereinstimmen, so müssen sie auch in allen zugehörigen Werten von z übereinstimmen. Daraus folgt, daß für alle in (5.) vorkommenden Zahlenpaare α, β

$$\omega_1^{\frac{\alpha}{d}}\, \omega_2^{\frac{\beta}{d}}=1$$

sein muß. Erheben wir dies zur Potenz $b'd$, so folgt $\omega_1^{\alpha b'}=1$. Da aber der größte gemeinsame Teiler der α und ebenso b' zu a' teilerfremd sind, so geht das nur, wenn $\omega_1=1$ ist. Ebenso folgt, daß $\omega_2=1$ ist, so daß also $x_1=\overline{x}_1$, $y_1=\overline{y}_1$ wird.

Wir können jetzt die Reihe für z etwas einfacher schreiben, nämlich

$$(6.)\qquad z=\Sigma_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha\beta}\sqrt[d]{x_1^\alpha\, y_1^\beta},$$

wo die b gewöhnliche Potenzreihen von x_1, y_1 sind und wo die Exponenten α, β jetzt den Bedingungen

$$(7.)\qquad 0\leqq\alpha\leqq d-1,\quad 0\leqq\beta\leqq d-1$$

genügen. Da die früheren Zahlen α die Eigenschaft hatten, daß ihr größter gemeinsamer Teiler zu a teilerfremd war, so haben die in (7.) vorkommenden Zahlen α die Eigenschaft, daß ihr größter gemeinsamer Teiler zu d teilerfremd ist. Ebendie Eigenschaft haben die β.

Es sei ε eine primitive d-te Einheitswurzel. Dann sind alle Werte, die z für gegebenes x_1, y_1 annehmen kann, in der Form enthalten

$$(8.)\qquad z_{\lambda\mu}=\Sigma_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\lambda\alpha+\mu\beta}\sqrt[d]{x_1^\alpha y_1^\beta}. \qquad (\lambda,\mu=0,1,\dots d-1)$$

Von diesen d^2 Werten sind dann und nur dann zwei $z_{\lambda'\mu'}$ und $z_{\lambda''\mu''}$ einander gleich, wenn für alle in (6.) vorkommenden Zahlenpaare α, β

$$(\lambda'-\lambda'')\alpha+(\mu'-\mu'')\beta\equiv 0 \quad (d).$$

Es sind also unter den d^2 Größen (8.) so viele immer unter einander gleich, als es Zahlenpaare λ, μ gibt, deren beide Zahlen nicht negativ und kleiner als d sind, und für die

$$(9.)\qquad \lambda\alpha+\mu\beta\equiv 0 \quad (d).$$

Es seien λ, μ; λ_1, μ_1; ... diese Paare. Der größte gemeinsame Teiler, den die Größen $\lambda, \lambda_1, \dots$ mit d gemeinsam haben, sei δ' und es sei $d=\delta'\delta$. Dann ist der größte gemeinsame Teiler, den die Größen $\mu, \mu_1, \dots$ mit d gemeinsam haben, auch δ'. Denn aus (9.) folgt, daß δ' in $\mu\beta$ aufgeht, also in μ, da der größte gemeinsame Teiler der β zu d teilerfremd ist. Daher ist die Kongruenz (9.) nur so zu lösen, daß λ und μ durch δ' teilbar sind. Wir setzen

$$(10.)\qquad x_1=\xi^{\delta'},\quad y_1=\eta^{\delta'}.$$

Das dürfen wir; denn zu verschiedenen Wertepaaren ξ, η gehören verschiedene Stellen des Gebildes. Gehört nämlich zu den Wertepaaren ξ, η und $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ dieselbe Stelle x_1, y_1, z, so folgt zunächst aus (10.), daß $\bar{\xi} = \xi\omega^\lambda$, $\bar{\eta} = \eta\omega^\mu$ sein muß, wo ω eine δ'-te Einheitswurzel ist. Ferner müssen aber auch die verschiedenen Werte von z, die zu ξ, η und $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ gehören, einander gleich sein. Daraus folgt, daß für alle in (6.) vorkommenden Zahlenpaare α, β die Kongruenz

$$\lambda\alpha + \mu\beta \equiv 0 \quad (d)$$

bestehen muß. Das aber ist, wie wir gesehen haben, nur so möglich, daß λ und μ beide durch δ' teilbar sind, so daß $\bar{\xi} = \xi$ und $\bar{\eta} = \eta$ wird.

§ 3.

Wir können jetzt die Reihe für z wieder etwas einfacher schreiben, nämlich in der Form

$$z = \Sigma_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \sqrt[\delta]{\xi^\alpha \eta^\beta}, \tag{11.}$$

wo die c gewöhnliche Potenzreihen von ξ, η sind und wo die Zahlen α, β jetzt den Bedingungen

$$0 \leqq \alpha \leqq \delta - 1, \quad 0 \leqq \beta \leqq \delta - 1$$

genügen. Dabei haben sowohl die in (11.) vorkommenden Zahlen α als auch die β die Eigenschaft, daß ihr größter gemeinsamer Teiler teilerfremd zu δ ist. Ferner gibt es nach dem vorigen zwei unter sich und zu δ teilerfremde ganze Zahlen $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}$, so daß für alle in (11.) vorkommenden Zahlenpaare α, β die Kongruenz

$$\mathfrak{l}\alpha + \mathfrak{m}\beta \equiv 0 \quad (\delta) \tag{12.}$$

gilt. Die δ^2 Werte, die z für gegebenes ξ, η annehmen kann, ergeben sich hieraus zu je δ einander gleich, sodaß nur δ von einander verschieden sind, und es folgt also, daß z für gegebenes x, y statt ab nur $\frac{ab}{\delta}$ verschiedene Werte hat.

Wollen wir ξ, η, z als ganze Potenzreihen zweier Größen u, v darstellen, so ist es am einfachsten, wir setzen

$$\xi = u^\lambda v^{\lambda_1}, \quad \eta = u^\mu v^{\mu_1}, \tag{13.}$$

wo $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1$ ganze positive Zahlen sind, die so zu bestimmen sind, daß z eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v wird und daß zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Stellen des Gebildes gehören. Dazu ist zunächst notwendig, daß die Kongruenzen bestehen

$$(14.)\qquad \lambda\alpha+\mu\beta\equiv 0 \ \ (\delta), \quad \lambda_1\alpha+\mu_1\beta\equiv 0 \ \ (\delta),$$

und zwar für alle in (11.) vorkommenden Zahlenpaare α, β. Diese Bedingungen können wir in eine zusammenfassen. Da der größte gemeinsame Teiler der α zu δ teilerfremd ist, lassen sich ganze Zahlen $g_{\alpha\beta}$ so bestimmen, daß

$$\mathfrak{a}=\Sigma_{\alpha,\beta}\, g_{\alpha\beta}\,\alpha$$

zu δ teilerfremd ist. Setzen wir ferner

$$\mathfrak{b}=\Sigma_{\alpha,\beta}\, g_{\alpha\beta}\,\beta,$$

so folgt aus (12.)

$$(15.)\qquad \mathfrak{l}\mathfrak{a}+\mathfrak{m}\mathfrak{b}\equiv 0 \ \ (\delta)$$

und daraus, daß auch $\mathfrak{b}$ zu δ teilerfremd ist. Wir können dann die Bedingung (14.) durch die Bedingung

$$(16.)\qquad \lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}\equiv 0 \ \ (\delta)$$

ersetzen. Denn aus (15.) und (16.) folgt, da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd zu δ sind, daß die Determinante

$$(17.)\qquad \mathfrak{l}\mu-\mathfrak{m}\lambda\equiv 0 \ \ (\delta).$$

Hieraus und aus (12.) ergibt sich

$$\mathfrak{m}(\lambda\alpha+\mu\beta)\equiv\mathfrak{l}\mu\alpha+\mathfrak{m}\mu\beta=\mu(\mathfrak{l}\alpha+\mathfrak{m}\beta)\equiv 0 \ \ (\delta),$$

also, da $\mathfrak{m}$ zu δ teilerfremd ist, die Bedingung (14.). Setzen wir daher

$$(18.)\qquad \zeta=\sqrt[\delta]{\xi^{\mathfrak{a}}\eta^{\mathfrak{b}}},$$

so wird durch (13.) z dann und nur dann eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v wenn durch (13.) ζ rational wird, wenn also $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1$ den Kongruenzen

$$(19.)\qquad \lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}\equiv 0\ (\delta),\quad \lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}\equiv 0\ (\delta)$$

genügen.

Nun sollen aber auch zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Stellen des Gebildes gehören. Da die in (11.) vorkommenden Wurzeln $\sqrt[\delta]{\xi^\alpha\eta^\beta}$ bis auf ganzzahlige Potenzen von ξ und η gleich Potenzen von ζ sind, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Wertetripel ξ, η, ζ gehören. Das ist sicher der Fall, wenn durch ξ, η, ζ die Größen u, v eindeutig bestimmt sind, wenn es also ganze Zahlen $a, b, c;\ a_1, b_1, c_1$ gibt, so daß

$$(20.)\qquad u=\xi^a\eta^b\zeta^c,\quad v=\xi^{a_1}\eta^{b_1}\zeta^{c_1}$$

wird. Um die Bedingungen dafür aufzustellen, schreiben wir die Kongruenzen (19.) als Gleichungen in der Form

$$(19'.)\qquad \lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}=\nu\delta,\quad \lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}=\nu_1\delta.$$

Dann wird

$$(18'.)\qquad \zeta=u^\nu v^{\nu_1}.$$

Die Gleichungen (20.) sind nun identisch mit

$$(21.)\qquad \begin{array}{ll} a\lambda+b\mu+c\nu=1, & a_1\lambda+b_1\mu+c_1\nu=0,\\ a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1=0, & a_1\lambda_1+b_1\mu_1+c_1\nu_1=1. \end{array}$$

Sollen diese Gleichungen lösbar sein, so ist notwendig und hinreichend, daß die Unterdeterminanten der Matrix

$$(22.)\qquad \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu\\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{pmatrix}$$

keinen gemeinsamen Teiler haben. Es heiße die Unterdeterminante, die durch Fortlassen der i-ten Kolonne entsteht, Δ_i. Dann ist nach (19'.)

$$(23.)\qquad \Delta_3\mathfrak{a}=-\Delta_1\delta,\quad \Delta_3\mathfrak{b}=\Delta_2\delta.$$

Es muß also Δ_3 durch δ teilbar sein. Hätte aber Δ_3 noch einen anderen Faktor, so ginge dieser in Δ_1 und Δ_2 auf, wäre also gemeinsamer Teiler von $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Daher ist $\Delta_3=\pm\delta$. Dann aber haben $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ keinen gemeinsamen Teiler; denn aus (23.) folgt jetzt $\mathfrak{a}=\mp\Delta_1$, $\mathfrak{b}=\pm\Delta_2$, und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind teilerfremd zu $\delta=\pm\Delta_3$. Wir nennen zwei Zahlenpaare λ, μ; λ_1, μ_1, die allen Anforderungen genügen, zu einander adjungiert, und zwar nennen wir, wenn $\Delta_3=\lambda\mu_1-\lambda_1\mu=+\delta$ ist, λ, μ das erste und λ_1, μ_1 das zweite Paar.

§ 4.

Nun liefert uns aber *eine* Entwicklung, wie wir sie für z mit Hilfe von (13.) erhalten, nicht alle Werte von z. Es genügt aber, wie wir jetzt zeigen wollen, eine endliche Anzahl derartiger Entwicklungen. Wir beweisen zunächst folgenden Satz. Es seien λ, μ zwei ganze Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen

$$(24.)\qquad \begin{aligned} &1.)\ \lambda>0,\ \mu\geqq 0,\\ &2.)\ \lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}=\nu\delta, \text{ wo } \nu \text{ eine ganze Zahl},\\ &3.)\ \lambda, \mu, \nu \text{ teilerfremd.}\end{aligned}$$

Dann läßt sich zu λ, μ als erstem Paar ein adjungiertes λ_1, μ_1 als zweites so bestimmen, daß $0\leqq\lambda_1<\lambda$, $\mu_1>0$ ist. Um diesen Satz zu beweisen, haben wir nach dem vorigen die Zahlen λ_1, μ_1 so zu bestimmen, daß sie den Bedingungen genügen

$$(25.)\qquad \begin{aligned} &\text{I.)}\ 0\leqq\lambda_1<\lambda,\quad \mu_1>0,\\ &\text{II.)}\ \lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}\equiv 0\quad (\delta),\\ &\text{III.)}\ \lambda\mu_1-\lambda_1\mu=\delta.\end{aligned}$$

Die Zahlen λ, μ können einen gemeinsamen Teiler δ_1 haben. Dieser muß aber ein Teiler von δ sein, da aus (24.) 2.) folgen würde, daß er sonst auch in ν aufgeht. Dieser Teiler ist nach (24.) 3.) teilerfremd zu ν. Es sei $\delta=\delta_1\delta_2$, $\lambda=\lambda'\delta_1$, $\mu=\mu'\delta_1$.

Es seien $\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$ zwei ganze Zahlen, die der Bedingung

$$\lambda'\mu^{(0)}-\mu'\lambda^{(0)}=\delta_2$$

genügen. Sie seien so gewählt, daß $\lambda^{(0)}$ nicht negativ und möglichst klein, also kleiner als λ', ist. Dann läßt sich jede Lösung von (25.) III.) in der Form schreiben

$$(26.)\qquad \lambda_1=\lambda^{(0)}+g\lambda',\quad \mu_1=\mu^{(0)}+g\mu',$$

wo g eine ganze Zahl ist. Hieraus folgt

$$(27.)\qquad \lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}=\lambda^{(0)}\mathfrak{a}+\mu^{(0)}\mathfrak{b}+g\delta_2\nu.$$

Es ergibt sich aber aus den Kongruenzen

$$\mu^{(0)}\lambda'-\lambda^{(0)}\mu'\equiv 0\ (\delta_2),\quad \mathfrak{a}\lambda'+\mathfrak{b}\mu'\equiv 0\ (\delta_2),$$

da λ', μ' zu δ_2 teilerfremd sind, daß die Determinante

$$\lambda^{(0)}\mathfrak{a}+\mu^{(0)}\mathfrak{b}\equiv 0\ (\delta_2).$$

Daher ist nach (27.) $\lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}$ jedenfalls durch δ_2 teilbar. Da aber ν zu δ_1 teilerfremd ist, so läßt sich in (27.) g so bestimmen, daß $\lambda_1\mathfrak{a}+\mu_1\mathfrak{b}$ durch $\delta_1\delta_2=\delta$ teilbar wird. Dabei können wir noch annehmen, daß g kleiner als δ_2 und nicht negativ ist. Die sich so ergebenden Zahlen λ_1, μ_1 erfüllen dann sicher die Bedingungen (25.) I.) und III.), aber auch die Bedingung II.); denn zunächst ist $\lambda_1 \geqq 0$ da $\lambda^{(0)} \geqq 0$ und $g \geqq 0$, ferner ist aber $\lambda^{(0)}<\lambda'$, $g<\delta_1$, also $\lambda_1=\lambda^{(0)}+g\lambda'<\lambda=\delta_1\lambda'$ und schließlich folgt aus III.), daß $\mu_1=\frac{\delta+\lambda_1\mu}{\lambda}>0$. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Wir gehen nun von dem Zahlenpaare

$$\lambda_0=\delta,\quad \mu_0=0$$

aus, das die Bedingungen (24.) erfüllt, und bestimmen dazu ein zweites adjungiertes Paar λ_1, μ_1, so daß $\lambda_1<\lambda$. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so können wir, da dann auch λ_1, μ_1 den Bedingungen (24.) genügen, zu λ_1, μ_1 ein zweites adjungiertes Paar λ_2, μ_2 bestimmen, und zwar so, daß $\lambda_2<\lambda_1$. Ist auch $\lambda_2 \neq 0$, so können wir fortfahren. Wir erhalten auf diese Weise eine Reihe von Zahlenpaaren λ_i, μ_i, von denen immer zwei auf einander folgende zu einander adjungiert sind, und zwar ist immer von zwei adjungierten Zahlenpaaren das frühere das erste und das spätere das zweite Paar. Diese Reihe muß abbrechen, da die positiven Zahlen λ_i immer kleiner werden, so daß schließlich ein λ_i auftritt, das Null ist. Dies sei λ_n. Setzen wir

$$\xi=u_i^{\lambda_{i-1}}v_i^{\lambda_i},\quad \eta=u_i^{\mu_{i-1}}v_i^{\mu_i},\qquad (i=1,2,\dots n)$$

so wird für jede dieser n Annahmen z eine gewöhnliche Potenzreihe von u_i, v_i. Diese Entwicklungen von z nennen wir der Reihe nach die erste, zweite, bis n-te Entwicklung von z.

Es konvergiere die Reihe für z in dem Gebiete $|\xi|\leqq\varrho$, $|\eta|\leqq\sigma$. Dann müssen wir die Größen u_i, v_i so beschränken, daß ξ, η sicher in dem Gebiete $|\xi|\leqq\varrho$, $|\eta|\leqq\sigma$ bleiben. Das ist der Fall, wie man sich leicht durch Ausrechnung überzeugt, wenn wir die Größen u_i, v_i den Bedingungen

$$|u_i|^\delta\leqq\sigma^{-\lambda_i}\varrho^{\mu_i},\quad |v_i|^\delta\leqq\sigma^{\lambda_{i-1}}\varrho^{-\mu_{i-1}}$$

unterwerfen. Geben wir ξ einen festen Wert im Gebiete $|\xi|\leqq\varrho$, so liefert uns die i-te der Entwicklungen für z alle Werte von z für diejenigen Werte von η, die den Bedingungen

$$|u_i|^\delta=\left|\frac{\xi^{\mu_i}}{\eta^{\lambda_i}}\right|\leqq\sigma^{-\lambda_i}\varrho^{\mu_i},\quad \text{d. h.}\quad |\eta|\geqq\sigma\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_i}{\lambda_i}},$$

$$|v_i|^\delta=\left|\frac{\eta^{\lambda_{i-1}}}{\xi^{\mu_{i-1}}}\right|\leqq\sigma^{\lambda_{i-1}}\varrho^{-\mu_{i-1}},\quad \text{d. h.}\quad |\eta|\leqq\sigma\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}}$$

genügen. Wir setzen der Übersichtlichkeit halber

$$\tau_i=\sigma\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_i}{\lambda_i}}, \qquad (i=0,1,\ldots n)$$

so daß also wegen $\mu_0=0$ und $\lambda_n=0$

$$\tau_0=\sigma \quad\text{und}\quad \tau_n=0$$

wird. Da allgemein $\lambda_{i-1}\mu_i-\mu_{i-1}\lambda_i=\delta$, so folgt

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i}=\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}+\frac{\delta}{\lambda_i\lambda_{i-1}}$$

und, da alle Größen positiv sind,

$$\frac{\mu_i}{\lambda_i}-\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}>0.$$

Daher ist für $|\xi|<\varrho$

$$\frac{\tau_i}{\tau_{i-1}}=\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{\frac{\mu_i}{\lambda_i}-\frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}}}<1,$$

$$\sigma=\tau_0>\tau_1>\tau_2>\cdots>\tau_n=0.$$

Die erste Entwicklung für z gibt uns daher, wenn ξ im Gebiete $|\xi|\leqq\varrho$ gegeben ist, alle Werte von z für diejenigen Werte von η, für die

$$\sigma \geqq |\eta| \geqq \tau_1,$$

die zweite Entwicklung für diejenigen Werte von η, für die

$$\tau_1 \geqq |\eta| \geqq \tau_2$$

usw. und schließlich die n-te Entwicklung für diejenigen Werte von η, für die

$$\tau_{n-1} \geqq |\eta| \geqq 0.$$

Alle Entwicklungen zusammen geben uns also für irgend einen Wert von ξ in $|\xi| \leqq \varrho$ alle Werte von z für die Werte von η in $|\eta| \leqq \sigma$.

Es sind noch die Größen u_i, v_i durch Größen des Körpers K zu ersetzen. Nun gelten folgende Sätze, die ich bei anderer Gelegenheit beweisen möchte. Es lassen sich Funktionen ξ_1, η_1, ζ_1 aus K so bestimmen, daß sie sich von ξ, η, ζ um Faktoren unterscheiden, die sich, wenn wir für z die Reihe (1.) des § 1 einführen, als gewöhnliche Potenzreihen von $x^{\frac{1}{a}}, y^{\frac{1}{b}}$ darstellen lassen, die für $x=y=0$ nicht verschwinden. Nun waren aber die Hilfsgrößen u_i, v_i so gewählt, daß sie sich in der Form darstellen ließen

$$u_i = \xi^{g_i} \eta^{h_i} \zeta^{k_i}, \quad v_i = \xi^{a_i} \eta^{b_i} \zeta^{c_i},$$

wo die Exponenten von ξ, η, ζ ganze Zahlen sind. Setzen wir

$$\overline{u}_i = \xi_1^{g_i} \eta_1^{h_i} \zeta_1^{k_i}, \quad \overline{v}_i = \xi_1^{a_i} \eta_1^{b_i} \zeta_1^{c_i},$$

so wird

$$\overline{u}_i = u_i E_{1i}, \quad \overline{v}_i = v_i E_{2i},$$

wo E_{1i} und E_{2i} gewöhnliche Potenzreihen von u_i, v_i werden, die für $u_i = v_i = 0$ nicht verschwinden. Daher werden die u_i, v_i auch gewöhnliche Potenzreihen von $\overline{u}_i$, $\overline{v}_i$ und können durch die Funktionen $\overline{u}_i, \overline{v}_i$ des Körpers K ersetzt werden.

§ 5.

Ein einfaches Beispiel hierzu ist

$$\zeta = \sqrt[5]{\xi^3 \eta}.$$

Hier haben wir $\delta = 5$, $\mathfrak{a} = 3$, $\mathfrak{b} = 1$. Wir finden der Reihe nach

$$\lambda_0=5,\quad \lambda_1=3,\quad \lambda_2=1,\quad \lambda_3=0,$$
$$\mu_0=0,\quad \mu_1=1,\quad \mu_2=2,\quad \mu_3=5,$$

haben also zur ganzen Darstellung von ζ in der Umgebung von $\zeta=0, \eta=0$ die drei Entwickelungen:

I.) $\xi=u_1^5v_1^3,\quad \eta=v_1,\quad \zeta=u_1^3v_1^2,$

II.) $\xi=u_2^3v_2,\quad \eta=u_2v_2^2,\quad \zeta=u_2^2v_2,$

III.) $\xi=u_3\ ,\quad \eta=u_3^2v_3^5,\quad \zeta=u_3v_3.$

III. *Der allgemeine Fall.*

§ 1.

Es sei kurz an die Definitionen des § 4 des Abschnittes I erinnert. Es seien $t_i(x)$ die Verzweigungsstellen von $R(x)$. Es sei wieder $P(x, y)$ die schon am Ende von Abschnitt I. definierte ganze rationale Funktion niedrigsten Grades, die die Faktoren $y-t_i(x)$ enthält. Ist das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension von P bei der Entwicklung von P nach Potenzen von x, y durch x teilbar und ist ferner $x=0$ eine Verzweigungskurve, so setzten wir $xP=D$, in allen anderen Fällen $P=D$ und nannten die so definierte Funktion D die zu $R(x)$ gehörende Verzweigungsfunktion. Die Glieder niedrigster Dimension von D in x, y seien von der Dimension μ. Diese Zahl μ nannten wir den Rang der Verzweigung. Die Fälle $\mu=0$ oder $\mu=1$ haben wir im Abschnitt II erledigt.

Wir nehmen daher $\mu>1$ an und zeigen, daß man diesen Fall auf die einfachen Fälle des Abschnittes II zurückführen kann.

Wir führen statt x, y neue Veränderliche ξ, η ein durch eine lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante. Der Umgebung der Stelle $x=0$, $y=0$ entspricht dann eindeutig die Umgebung der Stelle $\xi=0$, $\eta=0$. Auch sind die Zusammenhangsverhältnisse der z-Werte für die beiden Umgebungen dieselben. Dadurch gehe D in $\varDelta$ über. Die Transformation soll so gewählt werden, daß in $\varDelta$ die Glieder mit ξ^μ, η^μ vorkommen. In dem Falle, wo in D das Glied y^μ vorkommt, nehmen wir bei der Transformation $x=\xi$; wir können dann immer noch erreichen, daß in $\varDelta$ die Glieder mit ξ^μ, η^μ vorkommen.

Für die neuen Veränderlichen gelten dieselben Überlegungen wie für die Veränderlichen x, y. Die Projektionen der Verzweigungskurven für die neuen Veränderlichen werden uns, soweit sie durch die Stelle $\xi=0$, $\eta=0$ hindurchgehen, bei unseren Festsetzungen über D und die lineare Transformation, gegeben durch $\Delta=0$, wozu noch $\xi=0$ kommen kann.

Wir beschränken ξ, η auf ein Gebiet $|\xi|<\varrho$, $|\eta|<\sigma$ und denken uns die Werte von z für einen bestimmten Wert von ξ wieder auf einem Stück einer *Riemann*schen Fläche, das den Punkt $\eta=0$ umgibt, ausgebreitet. Wir bezeichnen dies Stück mit $P(\xi)$. Es habe β Blätter. Die Verzweigungspunkte dieser Fläche P finden wir durch Zerlegung von Δ. Es sei

$$\Delta=(\eta-\vartheta_1)(\eta-\vartheta_2)\dots(\eta-\vartheta_\mu)E,$$

wo E eine Einheit für $\xi=0$, $\eta=0$ ist und wo die ϑ_i für $\xi=0$ verschwinden. Dann sind die ϑ_i die Verzweigungspunkte von P, wenn nur ϱ und σ passend gewählt sind.

Nach unseren Voraussetzungen beginnen die Potenzreihen ϑ_i mit der ersten Potenz von ξ. Im genaueren sei

$$\vartheta_i=a_i\xi+a_{i1}\xi^{\varepsilon_1}+a_{i2}\xi^{\varepsilon_2}+\cdots, \qquad (1<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\dots)$$

wo die a_i nicht Null sind.

§ 2.

Wir setzen

$$\eta=\xi w.$$

Dadurch wird die Fläche P auf eine Fläche abgebildet, die die w-Ebene in der Umgebung des Nullpunktes β-fach überdeckt. Wir bezeichnen sie mit $W(\xi)$. Die Abbildung besteht in einer Drehung um den Nullpunkt und einer Ähnlichkeitstransformation und ist natürlich von ξ abhängig. Die Verzweigungspunkte von W entsprechen den Verzweigungspunkten von P, sind also die Stellen $\xi^{-1}\vartheta_i$ oder, wenn wir setzen

$$a_{i1}\xi^{\varepsilon_1-1}+a_{i2}\xi^{\varepsilon_2-1}+\cdots=t_i^{(1)}, \qquad (i=1,2,\dots\mu)$$

die Stellen $a_i+t_i^{(1)}$.

Die μ Größen a_i können alle oder zum Teil einander gleich sein. Es seien etwa die ersten λ unter einander gleich, also gleich a_0 und die letzten

$\mu - \lambda$, also gleich a_μ. Dieser Fall genügt, um den allgemeinen Fall deutlich zu übersehen. Da die Funktionen $t_i^{(1)}$ für $\xi = 0$ verschwinden, so liegen die Verzweigungspunkte in der Umgebung der Stellen a_i, mithin der beiden Stellen a_1 und a_μ. Wir können daher um diese Punkte Kreise mit den Radien r_1' und r_2' beschreiben, so daß für $|\xi| < \varrho$ die Punkte $\xi^{-1}\vartheta_1, \xi^{-1}\vartheta_2, \ldots \xi^{-1}\vartheta_\lambda$ innerhalb des ersten und die Punkte $\xi^{-1}\vartheta_{\lambda+1}, \xi^{-1}\vartheta_{\lambda+2}, \ldots \xi^{-1}\vartheta_\mu$ innerhalb des zweiten Kreises bleiben. Ferner zeichnen wir einen Kreis mit dem Radius r_0' um den Nullpunkt, der die beiden anderen Kreise einschließt. Wir wollen die beiden Kreise um a_0 und a_μ so wählen, daß sie sich nicht schneiden, was bei hinreichend klein gewähltem ϱ möglich ist. Es seien ferner r_0' und ϱ so gewählt, daß für $|w| < r_0'$ und $|\xi| < \varrho$ sicher $|\eta| < \sigma$ wird. Die drei Kreise denken wir uns in der Fläche W in jedem ihrer β Blätter gezeichnet. Das von den 3β Kreisen eingeschlossene Gebiet heiße G'. Wir zeichnen ferner um die Punkte a_0, a_μ und den Nullpunkt Kreise mit den Radien $r_1 > r_1', r_2 > r_2'$ und $r_0 < r_0'$, die sich nicht schneiden, und deren letzter die beiden ersten einschließt. Das von ihnen begrenzte Gebiet heiße G. Die Gebiete G, G' bestehen aus β kongruenten in den β Blättern von W über einander liegenden Stücken. Ihre Gestalt ist von ξ unabhängig. Dem Gebiete G entspricht in der Fläche $\boldsymbol{P}$ ein Gebiet, das wir $\boldsymbol{\Gamma}$ nennen; es besteht auch aus β kongruenten Stücken, deren jedes von drei Kreisen begrenzt wird, nämlich von drei Kreisen um die Stellen $a_0\xi$, $a_\mu\xi$ und den Nullpunkt mit den Radien $r_1\xi, r_2\xi, r_0\xi$. Dies Gebiet hängt von ξ ab und wird gleichzeitig mit $|\xi|$ unendlich klein. Es liegt zufolge der über r_0 und ϱ gemachten Voraussetzung für jedes ξ, für das $|\xi| < \varrho$, ganz im Gebiete $|\eta| < \sigma$. Wir bezeichnen ferner das durch die β Kreise mit dem Radius r_1 um a_0 begrenzte Gebiet von W mit G_1 und das durch die β Kreise um a_μ mit dem Radius r_2 begrenzte Gebiet von W mit G_2. Die G_1, G_2 in $\boldsymbol{P}$ entsprechenden Gebiete nennen wir Γ_1, Γ_2. Das Gebiet von $\boldsymbol{P}$, das noch nicht benannt ist und das außerhalb der β um den Nullpunkt mit dem Radius $r_0|\xi|$ beschriebenen Kreise liegt, heiße Γ_0.

§ 3.

Das Gebiet Γ. Wir können das Gebiet G mit einer endlichen Anzahl von Kreisen ganz überdecken, die zwar die Grenze von G schneiden, aber nicht die von G'. Es liegen dann in keinem dieser Kreise für $|\xi| < \varrho$ Verzweigungspunkte, da diese nach unseren Voraussetzungen für $|\xi| < \varrho$ nicht aus den Gebieten G_1, G_2 herauskönnen. Einer dieser Kreise sei k. Im Innern dieses Kreises ist z eine algebraische Funktion von w und ξ, die höchstens die Verzweigungskurve $\xi=0$ hat. Wir haben also den Fall 1.) von Abschnitt II, § 1. Die Entwicklung, die wir nach dem dort angegebenen Verfahren für z bekommen, kann uns übrigens unter Umständen außer den in dem Kreise k ausgebreiteten Werten von z auch solche Werte von z liefern, die in einem oder mehreren der über oder unter k liegenden, mit k kongruenten Kreise ausgebreitet sind. Denn, wenn auch diese einzelnen Kreisflächen für konstantes ξ nicht mit einander zusammenhängen, so ist es doch nicht ausgeschlossen, daß sie durch Variieren von ξ in einander übergeführt werden können. Da für jeden der das Gebiet G überdeckenden Kreise Gleiches gilt, so können wir alle im Gebiete G, also auch alle im Gebiete Γ, ausgebreiteten Werte von z in der am Schlusse der Einleitung angegebenen Weise darstellen, und zwar für jedes ξ, für das $|\xi| < \varrho$.

Das Gebiet Γ_0. Wir können nach den Resultaten von Herrn *Hensel* einen Teil des von uns betrachteten Zweiges z nach Potenzen von ξ entwickeln mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von η sind. Da $\xi=0$ eine Verzweigungskurve sein kann, so kann diese Entwicklung nach gebrochenen Potenzen von ξ fortschreiten, etwa nach Potenzen von $\xi^{\frac{1}{\alpha}}$. Die Koeffizienten lassen sich nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von η entwickeln und können negative Potenzen von η enthalten. Denken wir uns η als konstant, so wird z eine algebraische Funktion von ξ allein. Die Verzweigungspunkte dieser Funktion bekommen wir, indem wir die Funktion $\varDelta$ in folgender Weise zerlegen

$$\varDelta = (\xi - \theta_1)(\xi - \theta_2)\ldots(\xi - \theta_\mu)\,\overline{E},$$

wo $\overline{E}$ eine Einheit ist und wo die θ_i Potenzreihen von η sind, die für $\eta=0$ verschwinden. Dann sind die Verzweigungspunkte die Stellen θ_i, zu denen noch, wenn $\xi=0$ eine Verzweigungskurve ist, die Stelle $\xi=0$ kommt. Es ist aber

$$\theta_i = a_i^{-1}\eta + \cdots,$$

wo die a_i die in den Entwicklungen der Verzweigungspunkte $\vartheta_i(\xi)$ von P vorkommenden Anfangskoeffizienten sind. Da die Größen a_i der Bedingung $|a_i| < r_0$ genügen, so kann man σ so klein gewählt annehmen, daß für $|\eta| < \sigma$ alle Verzweigungspunkte außer $\xi = 0$ außerhalb des um den Punkt $\xi = 0$ mit dem Radius $|\eta| r_0^{-1}$ beschriebenen Kreises liegen. Die Reihe für z konvergiert dann innerhalb dieses Kreises, d. h. also wenn

$$|\xi| < |\eta| r_0^{-1} \quad \text{oder} \quad \left|\frac{\xi}{\eta}\right| < r_0^{-1}, \ |\eta| < \sigma.$$

Schreiben wir daher die Reihe als Potenzreihe von $\frac{\xi}{\eta}$ und ihre Koeffizienten als Potenzreihen von η, so wird sie eine im allgemeinen nach gebrochenen Potenzen dieser Größen fortschreitende Reihe, die aber keine negativen Potenzen mehr enthält, da sie sonst nicht in dem ganzen angegebenen Gebiet konvergieren könnte. Wir setzen

$$\frac{\xi}{\eta} = x_1, \quad \eta = y_1,$$

dann wird z eine Potenzreihe von x_1, y_1, und diese stellt uns Werte von z dar, die in dem Gebiete

$$|\eta| < \sigma, \ |\eta| > |\xi| r_0$$

ausgebreitet sind, also im Gebiete Γ_0. Jedoch bekommen wir eventuell nur die auf einem oder mehreren, aber nicht allen, der β Blätter, aus denen Γ_0 besteht, ausgebreiteten Werte von z. Für die auf den anderen Stücken ausgebreiteten Werte z gilt aber analoges. Die so erhaltene Reihe ist nach Abschnitt II weiter zu behandeln.

§ 4.

Die Gebiete Γ_1 und Γ_2. Es genügt, von diesen beiden Gebieten eins zu betrachten, da für das andere analoges gilt. Wir betrachten das Gebiet Γ_1 oder statt dessen das Gebiet G_1. Damit dem Mittelpunkte a_1 des Gebietes der Nullwert der Variablen entspricht, setzen wir $w = a_1 + y_1$ und der Gleichmäßigkeit wegen $\xi = x_1$. Das Gebiet G_1 kann in mehrere für konstantes x_1 nicht zusammenhängende Teile zerfallen, die aber eventuell zum Teil oder alle in einander übergeführt werden können durch Variieren von x_1. Diese Teile sind einander kongruent, da die Fläche G_1 nach dem am Schlusse von § 2 des Abschnittes I bewiesenen Satze folgende Eigenschaft hat. Liegt an einer Stelle von G_1 ein Verzweigungspunkt der Ordnung $\alpha - 1$, so ist α ein Teiler von β und es liegen an der Stelle $\frac{\beta}{\alpha}$ Verzweigungspunkte der Ordnung $\alpha-1$ über einander. Wir betrachten eins der Gebiete, in die G_1 bei konstantem x_1 zerfällt, und nennen es $R_1(x_1)$. Für die anderen Teilgebiete von G_1 gilt analoges wie für R_1.

Das Gebiet R_1 hat vollkommen die wesentlichen Eigenschaften des Gebietes $R(x)$. Die zugehörige Verzweigungsfunktion erhalten wir aus $\varDelta$, indem wir darin für ξ, η die neuen Größen x_1, y_1 einführen. Es ist

$$\xi = x_1, \quad \eta = x_1(a_1 + y_1).$$

Führen wir dies in $\varDelta$ ein, so wird $\varDelta$ durch x_1^μ teilbar. Es sei

$$\varDelta = x_1^\mu P_1(x_1, y_1).$$

Die Funktion P_1 entspricht dann der für das Gebiet R mit P bezeichneten Funktion. Wir setzen wieder, wenn $x_1 = 0$ eine Verzweigungskurve ist und das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension in x_1, y_1 von P_1 durch x_1 teilbar ist, $x_1 P_1 = D_1$, in allen anderen Fällen $P_1 = D_1$. Es ist dann D_1 die Verzweigungsfunktion von R_1. Es handelt sich noch darum, den Rang μ_1 der Verzweigung des Gebietes R_1 zu bestimmen. Es seien die Glieder niedrigster Dimension von P_1 von der Dimension λ_0. Nun sind die Glieder der niedrigsten Dimension in $\varDelta$

$$(\eta - a_1\xi)(\eta - a_2\xi)\ldots(\eta - a_\mu\xi)$$

oder nach unseren Annahmen über die Größen $a_1, a_2, \ldots a_\mu$

$$(\eta - a_1\xi)^\lambda(\eta - a_\mu\xi)^{\mu-\lambda}.$$

Führen wir hierin x_1, y_1 ein und lassen den Faktor x_1^μ fort, so bekommen wir folgende in P_1 vorkommenden Glieder

$$y_1^\lambda(a_1 - a_\mu + y_1)^{\mu-\lambda}.$$

Daraus folgt $\lambda_0 \leqq \lambda$. Ist nun $\lambda_0 = \lambda$, so kommt in P_1 das Glied mit $y_1^{\lambda_0}$ vor, es sind also die Glieder niedrigster Dimension nicht durch x_1 teilbar, so daß in diesem Falle $D_1 = P_1$ ist und der Rang $\mu_1 = \lambda$. Ist $\lambda_0 < \lambda$, so kann $D_1 = x_1 P_1$ sein. Es ist aber jedenfalls $\mu_1 \leqq \lambda$. Wir finden also $\mu_1 \leqq \lambda$, und da $\lambda \leqq \mu$, so wird

$$\mu_1 \leqq \mu.$$

Das Gleichheitszeichen kann nur stehen, wenn $\lambda=\mu$ ist, wenn also die Glieder niedrigster Dimension in Δ die μ-te Potenz einer linearen Funktion von ξ, η sind und also die in D die μ-te Potenz einer linearen Funktion von x, y. Ist $\mu_1 < \mu$, so ist eine Vereinfachung eingetreten. Das Gebiet R_1 ist nun genau so zu behandeln, wie das Gebiet R. Können wir zeigen, daß der Rang der sich aus R_1 ergebenden Gebiete schließlich gleich Null oder Eins werden muß, so ist damit gezeigt, daß wir schließlich auf die Fälle des Abschnittes II zurückkommen, die sich auf die dort angegebene Art behandeln lassen. Da der Rang, wie wir gesehen haben, nicht größer werden kann, so genügt es zu zeigen, daß er nicht fortwährend konstant bleiben kann. Wir beweisen also im nächsten Paragraphen, daß es auf einen Widerspruch führt, wenn wir annehmen, daß der Rang fortgesetzt gleich μ bleibt.

§ 5.

Es sei also der Rang von R_1 wieder gleich μ. Das kann auf zwei Arten eintreten. Zunächst muß jedenfalls $\lambda=\mu$ sein. Ist dann die Dimension der Anfangsglieder von P_1 auch μ, so kommt in P_1 das Glied mit y_1^μ vor und es ist dann $D_1=P_1$. Das ist die erste Art. Ist ferner die Dimension der Anfangsglieder von P_1 gleich $\mu-1$ und $x_1=0$ eine Verzweigungskurve, so ist $D_1=x_1 P_1$, und der Rang von R_1 wird auch μ. Das ist die zweite Art.

Wir zeigen zunächst, daß die zweite Art höchstens einmal eintreten kann, wenn der Rang fortwährend gleich μ bleiben soll. Es genügt, anzunehmen, daß die zweite Art gleich im Anfang auftritt. Es sei also $D_1=x_1 P_1$. Da der Rang bei weiterer Transformation gleich μ bleiben soll, so muß, wie wir in § 4 sahen, das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension in D_1 die μ-te Potenz einer linearen Funktion sein, folglich, da D_1 den Faktor x_1 enthält, von der Form $c x_1^\mu$, wo c eine Konstante ist. Die Transformation, die zu P_2 und D_2 führt und die der Transformation entspricht, die von x, y (über ξ, η) zu x_1, y_1 führt, können wir dann in der Form annehmen

$$x_1 = x_2 y_2, \quad y_1 = x_2 (y_2 + \text{konst.}).$$

Soll der Rang auch bei der nächsten Transformation gleich μ bleiben und wieder der zweite Fall eintreten, so muß $D_2=x_2 P_2$ werden und es muß gerade wie oben das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension gleich einer Konstanten mal x_2^μ sein. Das ist aber nicht möglich, da D_1 durch x_1 teilbar ist und also P_2 durch y_2. Es tritt also der erste Fall ein, d. h. es wird $D_2 = P_2$ und es enthält D_2 das Glied mit y_2^μ. Da aber die Glieder niedrigster Dimension in D_2 sich wieder auf die Potenz einer linearen Funktion von x_2, y_2 reduzieren müssen, so sind sie also gleich einer Konstanten mal y_2^μ. Die folgende Transformation kann daher in der Form angenommen werden

$$x_2 = x_3, \quad y_2 = x_3 y_3.$$

Es wird dann die neue Funktion P_3 durch y_3 teilbar, so daß wieder nicht der zweite Fall eintreten kann. Es wird $D_3 = P_3$, und die Glieder niedrigster Dimension in D_3 reduzieren sich auf y_3^μ mal einer Konstanten. Es verhält sich alles wieder genau wie bei D_2, und es kann daher auch bei der folgenden Transformation nicht der zweite Fall eintreten. So würde es weiter gehen, und man sieht, wenn der Rang gleich μ bleiben soll, so kann der zweite Fall überhaupt nicht mehr eintreten.

Damit ist gezeigt, daß der Rang nur dadurch konstant bleiben kann, daß unendlich oft der erste Fall eintritt. Wir zeigen jetzt, daß auch das nicht möglich ist. Es sei also $D_1 = P_1$, und D_1 enthalte das Glied mit y_1^μ, so daß der erste Fall vorliegt. Die Transformation, die zu P_2 und D_2 führt, ist nach früherem in der Form anzunehmen

$$x_1 = \xi, \quad y_1 = (c_1 \xi + \eta),$$
$$\xi = x_2, \quad \eta = \xi(c_2 + y_2),$$

wo c_1 und c_2 passend zu wählende Konstanten sind. Daraus folgt

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = (y_2 + b_1) x_2,$$

wenn wir $c_1 + c_2 = b_1$ setzen.

Es wird

$$D_1 = x_2^\mu P_2.$$

Da wiederum der erste Fall eintreten soll, so enthält P_2 das Glied mit y_2^μ und es wird $D_2 = P_2$. Die nächste Transformation ist wieder von der Form

$$x_2 = x_3, \quad y_2 = (y_3 + b_2) x_3,$$

und es wird

$$D_2 = x_3^\mu P_3 = x_3^\mu D_3.$$

So geht es fort. Wir bekommen also folgendes Resultat. Es gibt eine unendliche Folge von Transformationen

$$\begin{gathered} x_1=x_2, \quad y_1=(y_2+b_1)x_2, \\ x_2=x_3, \quad y_2=(y_3+b_2)x_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_\nu=x_{\nu+1}, \quad y_\nu=(y_{\nu+1}+b_\nu)x_\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{gathered}$$

aus denen folgt

$$D_1=x_2^\mu D_2, \quad D_2=x_3^\mu D_3, \ldots D_\nu=x_{\nu+1}^\mu D_{\nu+1}, \ldots$$

oder, da ja $x_{\nu+1}=x_1$ ist,

$$D_1(x_1, y_1)=x_1^{\mu\nu} D_{\nu+1}(x_1, y_{\nu+1}).$$

Aus den Transformationsformeln ergibt sich $\frac{\partial y_{\nu+1}}{\partial y_1}=x_1^{-\nu}$ und daher

$$\frac{\partial D_1}{\partial y_1}=x_1^{(\mu-1)\nu}\frac{\partial D_{\nu+1}}{\partial y_{\nu+1}}.$$

Nun hat aber D und also auch D_1 nach Voraussetzung keine mehrfachen Faktoren. Mithin können wir zwei ganze rationale Funktionen p und q von x_1, y_1 so bestimmen, daß

$$pD_1+q\frac{\partial D_1}{\partial y_1}=g(x_1)$$

gleich einer ganzen rationalen Funktion von x_1 allein wird. Führen wir hierin die ersten ν Transformationen aus, so wird die linke Seite mindestens teilbar durch $x_1^{\nu(\mu-1)}$, während die rechte Seite unverändert bleibt. Da wir aber die Zahl ν und damit $\nu(\mu-1)$, wenn $\mu>1$, beliebig groß annehmen können, so ergibt sich ein Widerspruch.

Es muß also schließlich der Fall eintreten, daß man nur noch Gebiete zu behandeln hat, deren Rang gleich Null oder Eins ist. Damit ist aber der am Schlusse der Einleitung aufgestellte Satz bewiesen.