

SUR LES FONCTIONS $2^n t - [2^n t] - \frac{1}{2}$

M. KAC*.

Nous allons démontrer deux théorèmes sur les fonctions

$$\mu_n(t) = 2^n t - [2^n t] - \frac{1}{2}$$

en employant la méthode des fonctions indépendantes†.

1. Nous rappelons que, si $f_1(t), \dots, f_n(t)$ sont des fonctions indépendantes, nous avons, pour tous les $\xi_1, \dots, \xi_n$ réels,

$$(1) \quad \int_0^1 \exp \left(i \sum_{\kappa=1}^n \xi_{\kappa} f_{\kappa}(t) \right) dt = \prod_{\kappa=1}^n \int_0^1 \exp \left(i \xi_{\kappa} f_{\kappa}(t) \right) dt.$$

Cette formule est vraie aussi pour $n = \infty$ si les séries

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \xi_{\kappa} \int_0^1 f_{\kappa}(t) dt$$

et

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \xi_{\kappa}^2 \int_0^1 f_{\kappa}^2(t) dt$$

sont convergentes.

Nous rappelons encore que, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp \left(-i v F_n(t) \right) dt = e^{-i v^2},$$

uniformément dans chaque intervalle fini, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| E(\alpha < F_n(t) < \beta) \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-y^2} dy \ddagger.$$

Nous employerons aussi dans la suite le lemme suivant :

$$\text{Si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} d_{\kappa n}^2 = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} d_{\kappa n}^4 = 0$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\kappa=1}^{\infty} \cos d_{\kappa n} v = e^{-a \frac{1}{2} v^2},$$

* Received 11 January, 1938; read 20 January, 1938.

† M. Kac, "Sur les fonctions indépendantes, I", *Studia Math.*, 6 (1936), 46-58.

‡ M. Kac et H. Steinhaus, "Sur les fonctions indépendantes, II", *ibid.*, 59-66, en particulier 60-62; voir aussi Paul Levy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (Paris, Gauthier-Villars, 1937). $\left| E(\alpha < F_n(t) < \beta) \right|$ denote la mesure d'ensemble ou $\alpha < F_n(t) < \beta$.

uniformément dans chaque intervalle fini. En particulier, si $a = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\kappa=1}^{\infty} \cos d_{\kappa n} v = 1.$$

Nous omettons la démonstration car elle est tout à fait simple.

2. Développons le nombre t ($0 \leq t \leq 1$) en fraction dyadique

$$t = \frac{\epsilon_1(t)}{2} + \frac{\epsilon_2(t)}{2^2} + \dots$$

et remarquons que l'on a

$$t - [t] - \frac{1}{2} = -\frac{r_1(t)}{2^2} - \frac{r_2(t)}{2^3} - \dots,$$

où $r_n(t)$ sont les fonctions bien connues de Rademacher

$$r_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi t).$$

Il est facile de voir que les $r_n(t)$ sont indépendantes et que

$$r_{n+\kappa}(t) = r_n(2^\kappa t).$$

Ce dernier fait conduit immédiatement à la formule

$$\mu_l(t) = - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{r_{l+\kappa}(t)}{2^{\kappa+1}}.$$

3. THÉORÈME 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| E \left(\alpha < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sum_{\kappa=1}^n \mu_{\kappa}(t) < \beta \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-y^2} dy.$$

Il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp \left(-iv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sum_{\kappa=1}^n \mu_{\kappa}(t) \right) dt = e^{-i^2 v^2}.$$

Mais nous avons

$$- \sum_{\kappa=1}^n \mu_{\kappa}(t) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^j} \right) r_j(t) + \sum_{j=n+2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j-n}} - \frac{1}{2^{j+1}} \right) r_j(t),$$

donc, en employant (1) pour $n = \infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp \left(-iv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sum_{\kappa=1}^n \mu_{\kappa}(t) \right) dt \\ = \prod_{j=1}^{n+1} \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-2^{-j}}{\sqrt{n}} v \right) \prod_{j=1}^{\infty} \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \frac{2^{n+1}-1}{2^{j+n+2}} v \right). \end{aligned}$$

Si nous posons
$$d_{jn} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-2^{-j}}{\sqrt{n}} \quad (\text{pour } j \leq n+1),$$

$$d_{jn} = 0 \quad (\text{pour } j > n+1),$$

nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{jn}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)^2 = \frac{1}{2};$$

et en appliquant le lemme du § 1 nous obtiendrons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{n+1} \cos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1-2^{-j}}{\sqrt{n}} v \right) = e^{-\frac{1}{2}v^2}.$$

En posant

$$d_{jn} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+j+2}}$$

nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} d_{jn}^2 = 0,$$

donc (en employant encore une fois le lemme du § 1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \exp \left(-iv \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sum_{\kappa=1}^n \mu_{\kappa}(t) \right) dt = e^{-\frac{1}{2}v^2}.$$

4. THÉORÈME 2. *La série*

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa} \mu_{\kappa}(t)$$

est convergente ou divergente presque partout suivant que la somme

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\kappa}^2$$

est finie ou non.

Nous pouvons poser

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Nous avons

$$S_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{n+1} c_{\kappa} \mu_{\kappa}(t) = - \sum_{j=1}^n d_j r_j(t) - d_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_{n+j}(t)}{2^j},$$

où

$$d_j = \frac{1}{2^{j+1}} \sum_{s=0}^{j-1} 2^s c_{s+1};$$

donc

$$\left| S_n(t) + \sum_{j=1}^n d_j r_j(t) \right| < |d_n|.$$

Il est facile de prouver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

Ce fait entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| S_n(t) + \sum_{j=1}^n d_j r_j(t) \right| = 0$$

presque partout. En remarquant que

$$c_\kappa = d_\kappa - \frac{1}{2}d_{\kappa-1} \quad (\kappa > 1),$$

nous voyons que les séries

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa^2 \quad \text{et} \quad \sum_{\kappa=1}^{\infty} d_\kappa^2$$

sont simultanément convergentes ou divergentes. Ce fait, avec le théorème bien connu que la série

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} d_\kappa r_\kappa(t)$$

est convergente ou divergente presque partout suivant que la somme $\sum_{\kappa=1}^{\infty} d_\kappa^2$ est fini ou non, entraîne notre théorème.

Lwów (Poland).

ON THE NUMBER OF INTEGERS WHICH CAN BE REPRESENTED BY A BINARY FORM

P. ERDÖS and K. MAHLER*.

Let $F(x, y)$ be a binary form of degree $n \geq 3$ with integer coefficients and non-vanishing discriminant, and let $A(u)$ be the number of different positive integers $k \leq u$, for which $|F(x, y)| = k$ has at least one solution in integers x, y . We prove that

$$(a) \quad \liminf_{u \rightarrow \infty} A(u) u^{-2/n} > 0.$$

The proof is simple, but not elementary, since it depends on the p -adic generalization of the Thue-Siegel theorem. The result remains true when x and y are restricted by conditions

$$x \geq 0, \quad ax \leq y \leq \beta x \quad (a, \beta \text{ constants}).$$

* Received 15 December, 1937; read 16 December, 1937.