KERVAIRE, M.
Math. Annalen, Bd. 131, S. 219—252 (1956)

Courbure intégrale généralisée et homotopie

Par
MICHEL KERVAIRE à Berne

Introduction

Le but de ce travail est de mettre en évidence une relation entre les valeurs d'un caractère des groupes d'homotopie des sphères (noté γ) et les possibilités de généraliser le théorème de la curvatura integra (H. HOPF [3]).

Si une variété fermée M_k (de classe C^1) est immergée (par une application localement biunivoque de classe C^1) dans l'espace euclidien R_{k+1} de dimension $k+1$, les normales en chaque point du modèle de M_k dans R_{k+1} fournissent une application continue (l'application sphérique de GAUSS):

$$\varphi : M_k \to S_k$$

de la variété M_k dans la sphère des directions dans R_{k+1} et le degré de BROUWER de φ est la «curvatura integra». Le théorème mentionné [3] affirme que, pour les dimensions paires $k = 2r$, ce degré est égal à la moitié de la caractéristique d'EULER de M_k (celle-ci est paire dans la situation considérée).

La généralisation envisagée de la situation ci-dessus est du type suivant: une variété fermée M_k étant plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_n$ (généralisant la normale à M_k dans R_{k+1}), ce champ détermine une application continue

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

de M_k dans la variété de STIEFEL des suites ordonnées de n vecteurs orthonormés de R_{k+n} et ayant pour origine un point fixe A: l'application φ fait correspondre à chaque point x de M_k les n vecteurs équipollents à ceux du champ F_n au point x et ayant pour origine le point A. L'application φ généralise l'application de GAUSS; pour $n = 1$, en effet, $V_{k+1,1}$ n'est autre que la sphère des directions dans R_{k+1}.

D'après les résultats de E. STIEFEL [9] sur les groupes d'homologie à coefficients entiers $H_i(V_{k+n,n})$ des variétés $V_{n+k,n}$:

$$H_i(V_{k+n,n}) = 0 \text{ pour } 1 \leqq i < k,\ H_k(V_{k+n,n}) = \begin{cases} \mathbf{Z} \text{ pour } k \text{ pair ou } n = 1, \\ \mathbf{Z}_2 \text{ pour } k \text{ impair et } n > 1, \end{cases}$$

(où $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}_2$ désignent les groupes des nombres entiers et restes modulo 2 respectivement), on peut, comme pour le cas de l'application de GAUSS, représenter la classe de φ par un nombre, disons $\overline{\varphi}(M_k)$, entier ou reste modulo 2. Le nombre $\overline{\varphi}(M_k)$ qui, pour $k = 2$, $n = 1$, est à un facteur près l'intégrale (étendue à M_2) de la courbure de GAUSS, peut être appelé *curvatura integra généralisée* du modèle de M_k dans R_{k+n}. Il faut remarquer que la définition de $\bar{\varphi}(M_k)$ est subordonnée à l'existence du champ F_n de repères normaux à M_k dans R_{k+n}.

Le théorème qui sera démontré[1]) est du type suivant: *dans certaines conditions, la curvatura integra généralisée $\bar{\varphi}(M_k)$ est indépendante du plongement et du champ F_n: c'est un invariant de la variété différentiable M_k.* Lorsque ces «conditions», sur lesquelles nous allons revenir, sont réalisées, $\bar{\varphi}(M_k)$ est déterminée par la «*semi-caractéristique*» $\chi^*(M_k)$ de M_k égale à la moitié de la caractéristique d'EULER $\frac{1}{2}\chi(M_k)$ pour k pair et à

$$\chi^*(M_k) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i p_i(M_k)$$

pour $k = 2r + 1$, impair ($p_i(M_k)$ est le nombre de BETTI mod 2 de dimension i de M_k).

La condition qui doit être réalisée pour l'invariance de la curvatura integra généralisée d'une variété M_k plongée dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux est qu'un certain invariant d'homotopie γ des applications de la sphère S_{k+n} dans S_n soit nul sur toute classe d'applications.

Cette condition est toujours réalisée pour k pair; on obtient ainsi, pour k pair, une généralisation proprement dite du théorème de H. HOPF (cf. théorème VI, § 7).

Pour k impair, il y a des cas où γ (alors reste mod 2) peut prendre les valeurs 0 et 1. Ceci se présente p. ex. pour $k = 1, 3, 7$. Il est probable (cf. conjecture du § 6) que $\gamma(f)$ pour une application $f: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec k impair n'est autre que l'invariant de H. HOPF de f réduit modulo 2. La vérification de cette conjecture[1a]) permettrait de ramener le problème des valeurs possibles de γ à celui de l'existence d'applications sphériques d'invariant de H. HOPF impair.

La connection entre l'homotopie des applications sphériques et le théorème de la curvatura integra généralisée est fournie par un théorème d'approximation différentiable des applications sphériques continues dont l'idée remonte à L. PONTRJAGIN [6] et [7] et B. ECKMANN [2]. L. PONTRJAGIN utilise sa méthode d'approximation pour l'étude des groupes $\pi_{n+1}(S_n)$ et $\pi_{n+2}(S_n)$; B. ECKMANN se sert d'une méthode analogue pour déterminer la classe d'homotopie d'applications particulières de S_{n+1} dans S_n. L'invariant γ du présent article, défini pour tous les groupes $\pi_{n+k}(S_n)$, $k \geqq 1$, $n \geqq 1$, se réduit pour $k = 1$ à l'invariant considéré par L. PONTRJAGIN dans [6] et [7] pour le calcul de $\pi_{n+1}(S_n)$. C'est la recherche du détail des démonstrations dans ces notes de L. PONTRJAGIN, tâche que m'a proposée Monsieur le Professeur H. HOPF, qui a servi de point de départ à ce travail.

L'invariant γ sera en fait défini de façon un peu plus générale pour les classes d'homotopie d'applications $f: X_{n+k} \to S_n$ où X_{n+k} est une variété

---

[1]) Le cas $n = 1$, k quelconque a été traité indépendamment et simultanément par J. MILNOR. On the imbedding of n-manifolds in $(n + 1)$-space. Comm. Math. Helv., à paraître. Certains résultats de J. MILNOR loc. cit. recouvrent également en partie les résultats du § 8 du présent travail.

[1a]) J'ai pu démontrer que cette propriété de γ est effectivement satisfaite; la démonstration paraîtra ultérieurement. (Ajouté en Mars 1956.)

différentiable fermée que l'on peut plonger dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux. Si le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$ existe (cf. [8]), γ est un homomorphisme de ce groupe dans le groupe des entiers pour k pair et dans le groupe des restes modulo 2 pour k impair; c'est aussi ce qui se présente si X est une sphère.

En spécialisant: $X_{n+k} = S_{n+k}$, le théorème de la curvatura integra généralisée (lorsqu'il est valable) se présente comme application de l'invariance de γ.

Il est à remarquer que l'hypothèse faite sur la variété M_k de pouvoir être plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux est (même pour n arbitraire) une sérieuse restriction sur la variété M_k. On ne possède pas de méthode générale permettant de décider pour une variété donnée si un tel plongement est possible. La «Note», à la fin de l'article, apporte une faible contribution (sous forme de condition nécessaire) à cette question. Dans cet ordre d'idées, la question sans doute moins difficile, suivante n'est pas non plus tranchée (à ma connaissance): une variété M_k pouvant être plongée (topologiquement et de classe C^1) dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux, admet-elle un tel champ quel que soit le plongement envisagé ? En particulier, qu'en est-il si M_k est une sphère ? Si l'on remplace dans ces questions l'hypothèse du plongement topologique par celle plus faible d'une immersion (avec self-intersection éventuelle), il faut alors donner une réponse négative: on peut immerger la sphère S_2 dans R_4 de manière que le modèle Σ_2 ainsi obtenu n'admette pas de champ de repères normaux. On obtient un tel modèle en regardant un *plongement* $p: P_2 \to R_4$ comme une immersion $i: S_2 \to R_4$, i étant la composition de la projection naturelle $S_2 \to P_2$ et du plongement p. Le modèle $\Sigma_2 = i(S_2)$ de S_2 n'admet pas de champ de repères normaux dans R_4. Un tel champ de repères, en impliquant l'existence sur $p(P_2)$ d'un champ de *vecteurs* normaux, serait en contradiction avec un théorème de H. Whitney (cf. [11], Theorem, page 113).

Les questions posées sont des cas particuliers du problème général suivant qui ne semble pas avoir été jamais efficacement abordé (avec cette généralité): étant donnés une variété M_k et une structure fibrée sphérique de base M_k:

$$\mathfrak{B} = (B, S_{n-1}, M_k, G),$$

sous quelles conditions peut-on «réaliser» cette structure fibrée comme structure normale par un plongement ou une immersion $M_k \to R_{k+n}$?

Ce problème ne sera pas abordé dans le présent travail.

Plan

Au chapitre I, j'expose des résultats connus de façon plus ou moins détaillée suivant la place que ces résultats occupent déjà dans les articles de L. Pontrjagin [6] et [7] et R. Thom [10].

Le chapitre II est consacré à la construction de l'invariant γ.

Trois applications sont faites de l'invariance de γ au chapitre III: outre le théorème de la curvatura integra qui vient d'être discuté (au § 7), on trouve (au § 8) une condition suffisante pour qu'une variété M_k que l'on peut immerger dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux soit parallélisable (cf. théorèmes IX, X, XI); on peut ainsi traiter le cas des produits topologiques de sphères dont on voit qu'ils sont parallélisables dès que leur caractéristique d'EULER est nulle (théorème XII). Au § 9 l'un des lemmes du § 4 est utilisé pour préciser un théorème de M. MORSE sur la théorie des points critiques.

Je tiens à remercier trés vivement Monsieur le Professeur Dr. H. HOPF et Monsieur le Professeur Dr. B. ECKMANN pour leurs conseils, leur aide et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à l'élaboration de ce travail.

Chapitre I. Préliminaires

§ 1. Théorèmes d'approximation

Nous étudions les applications continues

$$f : X_{n+k} \to S_n$$

d'une variété de RIEMANN X_{n+k} fermée et orientée, de classe C^∞, dans la sphère S_n. Les indices indiquent la dimension.

Sur l'approximation d'une telle application, on trouve, énoncés par L. PONTRJAGIN [6] et [7], les théorèmes suivants dont le détail des démonstrations a été donné par R. THOM [10]:

Aussi proche qu'on le veut d'une application continue donnée, il existe une application, disons f, de classe C^∞ ayant la propriété:

i) *il existe un voisinage $V(c)$ d'un point $c \in S_n$ dont la contre-image $f^{-1}(V)$ est un ensemble de points «réguliers» de f.*

Un point $p \in X_{n+k}$ est dit «*régulier*» lorsque les fonctions

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n]$$

exprimant l'application f dans des systèmes locaux de coordonnées ont la propriété que la matrice

$$(\partial f_i / \partial x_j) \qquad [i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n+k]$$

a en p le rang maximum n. Un point c satisfaisant avec la fonction f à la propriété i) est appelé «*valeur régulière*» de la fonction f.

La propriété i) de la fonction f implique les suivantes: la contre-image $f^{-1}(c)$ du point c est une sous-variété M_k de X_{n+k}, de classe C^∞, orientable, fermée, éventuellement non-connexe. La variété M_k est représentée localement par les équations

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}) = 0 \qquad [i = 1, 2, \ldots, n].$$

La fonction f est dans $f^{-1}(V)$ une fibration, et l'on a $f^{-1}(V) \approx M_k \times V_n$[2]) où V_n est la boule ouverte de dimension n; on peut prendre V assez petit pour que $U = f^{-1}(V)$ soit un voisinage tubulaire de M_k dans X_{n+k}.

Si l'on fait choix en c d'un repère tangent à S_n, l'application f induit sur M_k un champ F_n de repères normaux dans X_{n+k}. Soit en effet, $N_n(x)$ le sous-

[2]) Le signe $\approx$ signifie «homéomorphe à».

espace linéaire de $T_{n+k}(x)$ (espace tangent en x à X_{n+k}) formé par les vecteurs normaux à M_k en x dans X_{n+k}. L'application linéaire

$$df: T_{n+k}(x) \to T_n(c)$$

donnée par

$$df(a^i \mathbf{u}_i) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} a^i \mathbf{v}_j$$

(les bases $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n+k}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de $T_{n+k}(x)$ et $T_n(c)$ étant celles déterminées par les coordonnées locales) s'avère biunivoque sur $N_n(x)$. Un repère fixe dans $T_n(c)$ a donc une contre-image bien déterminée dans $N_n(x)$. On en fait un repère orthonormé (dans $N_n(x)$) et dépendant de façon continue de x par un procédé standard d'orthogonalisation.

Le champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux sur M_k dans X_{n+k} ainsi obtenu permet de doter M_k d'une orientation déterminée; nous ferons les conventions suivantes: les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ d'un repère tangent à M_k définissant l'orientation positive de M_k, suivis des vecteurs $\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}, \ldots, \mathbf{u}_{k+n}$ du champ F_n déterminent l'orientation positive de X_{n+k}.

Soit $\mathfrak{F}_c$ la famille des applications continues de X_{n+k} dans S_n pour lesquelles un point fixe c de S_n est valeur régulière. On a

1. Dans chaque classe d'homotopie des applications $X_{n+k} \to S_n$ il existe une application de la famille $\mathfrak{F}_c$.

2. Si l'on choisit en c un repère fixe tangent à S_n, il correspond de façon univoque à chaque fonction de $\mathfrak{F}_c$ une sous-variété orientée M_k de X_{n+k} portant un champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux (dans X_{n+k}).

Réciproquement, si l'on se donne dans la variété X_{n+k} une sous-variété plongée M_k munie d'un champ $\mathbf{F}_n$ de vecteur normaux, on peut faire correspondre à un tel couple qui sera désigné par $(M_k; \mathbf{F}_n)$ une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de X_{n+k} dans S_n, appartenant à la famille $\mathfrak{F}_c$, définie de la manière suivante:

Soit U un voisinage tubulaire de M_k dans X_{n+k}; par suite de l'existence du champ $\mathbf{F}_n$, U est homéomorphe au produit cartésien $M_k \times V_n$ où V_n est la boule ouverte de dimension n; le champ $\mathbf{F}_n$ fournit un homéomorphisme déterminé de U dans $M_k \times V_n$ et permet ainsi d'associer à tout point u de U les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de sa projection dans V_n. Soit alors $r: V_n \to S_n - q$ l'homéomorphisme naturel de V_n sur la sphère trouée; l'application f est définie par

$$f(u) = r(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \text{pour } u \in U,$$

$$f(x) = q \qquad \text{pour } x \in X - U.$$

L'application f ainsi définie est continue et le point c de S_n, antipode de q, en est une valeur régulière.

Il est évident que la classe d'homotopie de f ne dépend pas du choix du voisinage tubulaire U.

Ainsi à toute application $f: X_{n+k} \to S_n$ de la famille $\mathfrak{F}_c$ correspond un couple $(M_k; \mathbf{F}_n) = \theta' f$. A tout couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$ correspond une application

$f' = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de la famille $\mathfrak{F}_c$. On a

a) $\theta'\theta(M_k; \mathbf{F}_n) = (M_k; \mathbf{F}_n)$,

b) $\theta\theta' f \simeq f$.

a) est évident; pour b), on obtient une homotopie en composant tout d'abord $f: X_{n+k} \to S_n$ avec une homotopie $r_t: S_n \to S_n$ telle que $r_0 =$ identité, r_1 est un homéomorphisme de V sur $S_n - q$ (le point q étant antipode de c) et $r_1(S_n - V) = q$; on est ainsi conduit à une application $r_1 f = f^*: X_{n+k} \to S_n$ qui ne diffère de $f' = \theta\theta' f$ que par le fait que la contre-image par df' du repère donné en c n'est pas nécessairement orthonormée; cette orthogonalisation étant une opération réalisable par une déformation continue, on a

$$f \simeq f^* \simeq f' = \theta\theta' f.$$

Les résultats de ce paragraphe s'étendent en partie aux applications continues

$$F^*: X_{n+k} \times I \to S_n,$$

où I est l'intervalle (0,1).

Si l'on se fixe $f_0 = F^*/X \times (0)$ et $f_1 = F^*/X \times (1)$ pour lesquelles le même point c (de S_n) est valeur régulière, on peut approcher F^* par une application F de classe C^q, q étant aussi grand qu'on le désire ayant la propriété i) avec le même point c et telle que $f_0 = F/X \times (0)$ et $f_1 = F/X \times (1)$. L'ensemble $F^{-1}(c)$ est alors une variété Q_{k+1} *avec bord.*

Soit inversement Q_{k+1} une variété dans $X_{n+k} \times I$ de bord $\partial\, Q_{k+1} = M'_k - M_k$ avec $M_k \subset X \times (0)$ et $M'_k \subset X \times (1)$, Q_{k+1} portant un champ de repères normaux Φ_n dans $X \times I$. Supposons en outre que la restriction de Φ_n sur M_k et M'_k fournisse des champs F_n et F'_n de repères normaux sur M_k et M'_k dans $X \times (0)$ et $X \times (1)$ respectivement; il correspond alors à $(Q_{k+1}; \Phi_n)$ une homotopie $F = \theta(Q_{k+1}; \Phi_n)$:

$$F: X_{n+k} \times I \to S_n$$

avec $F/X \times (0) = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$, $F/X \times (1) = \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n)$.

La fonction F est également définie par

$$F(u) = r(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \text{pour } u \in U,$$
$$F(x) = q \qquad \text{pour } x \notin U$$

où U désigne un voisinage tubulaire de Q_{k+1} dans $X \times I$ $(U \approx Q \times V_n)$.

Remarque: Les considérations de ce paragraphe permettent de mettre en évidence un aspect du problème de l'existence d'applications

$$\alpha: S_{2n+1} \to S_{n+1}$$

d'invariant de HOPF égal à 1.

S. EILENBERG a démontré qu'une telle application existe si et seulement si il existe une application

$$f^*: S_n \times S_n \to S_n$$

de type (1,1).

Si f^* existe, le théorème d'approximation de L. PONTRJAGIN (où $S_n \times S_n$ joue le rôle de X_{n+k}) fournit l'existence d'une application

$$f: S_n \times S_n \to S_n$$

(homotope à f^* et par suite également de type (1,1)) pour laquelle un point $c \in S_n$ est valeur régulière, c.à.d. $f^{-1}(c) = M_n$ est une sous-variété de $S_n \times S_n$ dont l'espace fibré des vecteurs normaux (à M_k dans $S_n \times S_n$) est simple. On voit aisément que M_k est homologue à la diagonale.

Réciproquement, une sous-variété M_n de $S_n \times S_n$ homologue à la diagonale et munie d'un champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux fournit suivant le procédé décrit dans ce paragraphe une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de $S_n \times S_n$ dans S_n dont on voit qu'elle a le type (1,1). En résumé, *on a un élément de* $\pi_{2n+1}(S_{n+1})$ *dont l'invariant de* HOPF *est* 1 *si et seulement si l'on peut représenter la classe d'homologie de la diagonale dans* $S_n \times S_n$ *par une sous-variété dont la structure normale (dans* $S_n \times S_n$*) est simple*[3]).

§ 2. Interprétation des groupes de cohomotopie

X_{n+k} désignant toujours une variété de RIEMANN, fermée, orientée, de classe C^∞, soit $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ l'ensemble des sous-variétés M_k fermées, de classe C^1 dans X_{n+k}, munies d'un champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux; un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ sera désigné par $(M_{n+k}; \mathbf{F}_n)$. La variété M_k peut avoir plusieurs composantes connexes. On supposera toujours la variété M_k d'un couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$ orientée de manière que les vecteurs d'un repère tangent «positif» suivis dans leur ordre des vecteurs du champ $\mathbf{F}_n$ déterminent l'orientation positive de X_{n+k}.

On introduit dans $\mathfrak{M}_k(X)$ une relation d'équivalence de la façon suivante: considérons le produit cartésien $X_{n+k} \times I$ de X par le segment unité; deux éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X)$ peuvent être plongés naturellement dans $X \times I : M_k$ est plongée avec son champ dans $X \times (0)$ et M'_k avec son champ dans $X \times (1)$, leurs images sont $M_k \times (0)$ et $M'_k \times (1)$ respectivement. Les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ seront dits équivalents, $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$, s'il existe une variété (de classe C^1) N_{k+1} dans $X_{n+k} \times I$ ayant les propriétés:

a) $\partial N_{k+1} = M'_k \times (1) - M_k \times (0)$,

b) le champ de repères normaux sur $M_k \times (0)$ et $M'_k \times (1)$ est normal à N_{k+1} et peut être étendu à un champ de repères normaux sur N_{k+1} dans $X_{n+k} \times I$.

Les propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité de cette relation d'équivalence sont banales. Sa signification est donnée par le

Lemme 1: *Les éléments* $(M_k; \mathbf{F}_n)$ *et* $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ *sont équivalents si et seulement si les applications*

$$f, f' : X_{n+k} \to S_n$$

qui leur correspondent sont homotopes ($f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$, $f' = \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n)$).

En effet, si $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$, l'homotopie cherchée est fournie par $F = \theta(N_{k+1}; \Phi_n)$ où Φ_n désigne l'extension (existant par hypothèse) sur N_{k+1} du champ de repères normaux donné sur le bord $M'_k \times (1) - M_k \times (0)$ de N_{k+1}.

---

[3]) La diagonale elle-même a dans $S_n \times S_n$ une structure normale simple si et seulement si S_n est parallélisable.

Si, réciproquement, f et f' sont homotopes, on peut choisir l'homotopie F de sorte que le point

$$c = f(M_k) = f'(M'_k)$$

soit valeur régulière pour F. En particulier

$$N_{k+1} = F^{-1}(c)$$

est une sous-variété avec bord de $X_{n+k} \times I$, ayant pour bord $M'_k \times (1) - M_k \times (0)$ et portant un champ de repères normaux qui, sur $M_k \times (0)$ et $M'_k \times (1)$ coïncide avec les champs donnés. On a donc $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$.

Soit maintenant $k + 1 < n$, ou bien $X_{n+k} = S_{n+k}$ sans limitation de dimensions; *on peut alors définir entre les classes d'équivalence de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ une relation d'addition qui fait de l'ensemble de ces classes d'équivalence un groupe abélien.*

Examinons tout d'abord le cas où $k + 1 < n$:

L'addition est alors définie comme suit: c_k et c'_k étant deux classes dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$, prenons des représentants $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de ces classes tels que les variétés M_k et M'_k n'aient pas de point commun. La classe $c_k + c'_k$ est celle de la variété $M_k + M'_k$ portant le champ de repères donné par $\mathbf{F}_n$ sur M_k et $\mathbf{F}'_n$ sur M'_k. ($M_k + M'_k$ est la réunion des ensembles M_k et M'_k). On peut toujours former la somme de deux classes, car, en vertu de l'hypothèse $k + 1 < n$, on peut éliminer les points communs éventuels à M_k et M'_k par une déformation continue de l'une des variétés, p. ex. M'_k ce qui conduit à un élément $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$ équivalent à $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ et tel que $M_k \cdot M''_k = 0$. En outre, la classe $c_k + c'_k$ ne dépend pas du choix des représentants $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ appartenant aux classes c_k et c'_k respectivement et satisfaisant à $M_k \cdot M'_k = 0$. Il suffit de démontrer que si $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$ est un autre représentant de c'_k avec $M_k \cdot M''_k = 0$, les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ et $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M''_k; \mathbf{F}''_n)$ sont équivalents. On considère pour cela dans $X_{n+k} \times I$ la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ formée dans $X \times (0)$ et la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M''_k; \mathbf{F}''_n)$ formée dans $\mathrm{X} \times (1)$. La variété N_{k+1} cherchée, ayant pour bord $(M_k + M''_k) \times (1) - (M_k + M'_k) \times (0)$ est formée

1°. du produit cartésien $M_k \times I$ sur lequel le champ de repères normaux s'étend de façon évidente,

2°. de la variété N'_{k+1} assurant l'équivalence de $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ avec $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$. Si N'_{k+1} et $M_k \times I$ avaient des points communs, on pourrait les éliminer par une déformation admissible de N'_{k+1} ou du produit $M_k \times I$ en regard de la restriction sur les dimensions $[(k + 1) + (k + 1) - (k + n + 1) < 0$ est assuré par l'inégalité $k + 1 < n]$.

Les classes d'équivalence de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ forment un groupe relativement à l'addition commutative ainsi définie.

L'*associativité* est évidente.

L'*élément zéro* du groupe est la classe des variétés M_k avec champ $\mathbf{F}_n$, telles qu'il existe dans $X_{n+k} \times I$ une variété Q_{k+1} de bord $M_k \times (0)$ portant un champ Φ_n de repères normaux dans $X \times I$ qui coïncide avec $\mathbf{F}_n$ sur $M_k \times (0)$. La classe 0 peut être en particulier représentée par l'ensemble vide.

La *classe inverse* de celle représentée par $(M_k; \mathbf{F}_n)$ peut être, représentée par $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ où M'_k est à l'orientation prés la même variété que M_k et $\mathbf{F}'_n$ est le champ obtenu à partir de $\mathbf{F}_n$ en remplaçant le premier vecteur (par exemple) par le vecteur opposé:

$$\mathbf{F}_n(x) = \{\mathbf{v}_1(x), \mathbf{v}_2(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x)\}$$
$$\mathbf{F}'_n(x) = \{-\mathbf{v}_1(x), \mathbf{v}_2(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x)\}.$$

Pour le voir, représentons la classe de $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ par le couple équivalent $(M''_k; \mathbf{F}''_n)$ où M''_k est la variété que l'on obtient en déplaçant chaque point x de M_k d'une longueur fixe (petite) ε le long de la ligne géodésique de direction $\mathbf{v}_1(x)$; le champ $\mathbf{F}''_n$ est obtenu par transport parallèle des vecteurs de F_n et changement de signe du premier vecteur:

$$\mathbf{v}''_1(x') = -\mathbf{v}_1(x')$$

où x' est le point correspondant à x (par la translation ε) et $\mathbf{v}_1(x')$ le résultat du transport parallèle de $\mathbf{v}_1(x)$ le long de la géodésique xx'. Considérons alors le produit $X_{n+k} \times I$; il s'agit de démontrer qu'il existe une variété Q_{k+1} dans $X \times I$ de bord $(M_k + M''_k) \times (0)$. La variété Q_{k+1}, homéomorphe au produit $M_k \times I$ est formée par l'ensemble des «demi-cercles» D_k définis de la manière suivante: $X_{n+k} \times I$ étant munie de la métrique Riemannienne naturelle D_x est situé sur la surface (à 2 dimensions) engendrée par les géodésiques passant par x avec un vecteur tangent (en x) dans le plan de $\mathbf{v}_1(x)$ et $\mathbf{e}_t(x)$, ce dernier vecteur donnant la direction des t croissants en chaque point (x, t) du produit $X \times I$; sur cette surface, D_x est le lieu des points à la distance (géodésique) fixe $\overline{ox}$ du milieu o du segment géodésique xx'. Il est évident que $\partial N_{k+1} = (M_k + M''_k) \times (0)$, car M''_k a l'orientation «opposée» à celle de M_k. L'extension du champ s'effectue comme suit: en tout point de D_x les $(n-1)$ derniers vecteurs sont parallèles à

$$\mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(x), \ldots, \mathbf{v}_n(x);$$

le premier vecteur $\mathbf{v}_1$ en un point de D_x est porté par la tangente au rayon géodésique passant par ce point et orienté vers le centre o du «demi-cercle» D_x.

Nous avons vu (lemme 1) que l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ est appliqué biunivoquement par l'opération θ sur l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n. Soient alors f et f' deux applications de X_{n+k} dans S_n et soit $k+1 < n$; prenons des éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ dans $\mathfrak{M}_k(X)$ tels que $M_k \cdot M'_k = 0$ et

$$f \simeq \theta(M_k; \mathbf{F}_n), \quad f' \simeq \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n).$$

On peut alors définir la classe d'homotopie $f \dotplus f'$ somme des classes de f et de f' en posant

$$f \dotplus f' = \theta[(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)].$$

Cette définition pourvoit l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n (pour $k+1 < n$) d'une structure de groupe abélien que nous désignerons (provisoirement) par $G_k(X_{n+k})$.

Dans le cas où $X_{n+k} = S_{n+k}$ et $k + 1 \geqq n$, on exigera pour former la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ que les deux variétés M_k et M'_k se trouvent dans des hémisphères séparés par un équateur S_{n+k-1} de S_{n+k}. L'addition fournie par

$$f + f' = \theta\,[(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)]$$

des classes d'homotopie de f et f' coïncide alors avec l'addition usuelle dans le groupe $\pi_{n+k}(S_n)$.

Revenons à la somme $f \dot{+} f'$ pour laquelle nous supposons seulement que les variétés en jeu n'ont pas de point commun:

Théorème I: *Dans l'hypothèse $k + 1 < n$, le groupe abélien $G_k(X_{n+k})$ qui vient d'être défini est le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$ de* BORSUK-SPANIER [8].

En vue de la démonstration, rappelons la définition de l'addition des classes d'homotopie dans $\pi^n(X_{n+k})$.

Soient f et f' deux applications continues de X_{n+k} dans S_n; on forme l'application $F = f \times f'$ de X_{n+k} dans $S_n \times S_n$ définie par $F(x) = f(x) \times f'(x)$.

Une application

$$F' : X_{n+k} \to S_n \vee S_n$$

homotope à F dans $S_n \times S_n$ est appelée une «*normalisation*» de F. ($S_n \vee S_n$ désigne la réunion de $S_n \times q$ et $q \times S_n$ dans $S_n \times S_n$). Supposons qu'une telle normalisation existe pour la fonction F donnée; l'application naturelle

$$\Omega : S_n \vee S_n \to S_n$$

définie par

$$\Omega(y \times q) = y,$$
$$\Omega(q \times y) = y,$$

permet de définir la «*somme*» des applications f et f' par la formule

$$f + f' = \Omega F'.$$

E. SPANIER [8] a démontré qu'une normalisation pour l'application $F : X_{n+k} \to S_n \times S_n$ existe pourvu que $k + 1 < n$; il a démontré également que dans ce cas la classe d'homotopie de la somme $f + f'$ ne dépend que des classes d'homotopie des applications f et f'. En outre, l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n forme un groupe, le groupe de cohomotopie $\pi^n(X_{n+k})$, relativement à l'addition qui vient d'être définie.

Soient alors α et α' deux classes d'applications de X_{n+k} dans S_n. On peut choisir dans chacune de ces classes un représentant qui est l'image par θ d'un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$:

$$f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n) \in \alpha, \quad f' = \theta(M'_k; \mathbf{F}'_n) \in \alpha',$$

les variétés M_k et M'_k n'ayant pas de point commun. Pour former $\theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $\theta(M'_k; \mathbf{F}'_n)$, on considère des voisinages tubulaires U et U' de M_k et M'_k; on peut choisir U et U' de sorte que $U \cdot U' = 0$.

Considérons alors la somme de BORSUK-SPANIER des applications f et f': on forme $F : X_{n+k} \to S_n \times S_n$, $F = f \times f'$; ici

$$F(X_{n+k}) \subset S_n \vee S_n. \tag{2.1}$$

En effet, pour $x \notin U$, $F(x) = f(x) \times f'(x) = q \times f'(x)$;
pour $x \notin U'$, $F(x) = f(x) \times f'(x) = f(x) \times q$.
L'inclusion (2.1) est alors conséquence de ce que l'alternative $x \notin U$ ou $x \notin U'$ épuise tous les cas possibles ($U \cdot U' = 0$).

L'inclusion (2.1) signifie que l'application F est sa propre normalisation; on obtient donc

$$f + f' = \Omega F.$$

D'autre part, l'égalité

$$\Omega F = \theta\,[(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)] = f \dotplus f'$$

est immédiatement vérifiée en observant que

$$\begin{aligned} (\Omega F)(x) &= q && \text{pour } x \notin U \text{ et } x \notin U', \\ (\Omega F)(x) &= f(x) && \text{pour } x \in U, \\ (\Omega F)(x) &= f'(x) && \text{pour } x \in U'. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$f + f' = \Omega F = f \dotplus f',$$

ce qui démontre le théorème I.

Remarque: Il peut se faire que dans certains cas où l'inégalité $k + 1 < n$ n'est pas satisfaite, on puisse cependant former la somme $f \dotplus f'$; on peut par exemple, sans restriction sur les dimensions, former les multiples $f \dotplus f$, $f \dotplus f \dotplus f, \ldots$ et l'inverse $\bar{f}$ (telle que $f \dotplus \bar{f} = 0$) de la classe d'homotopie d'une application $f : X_{n+k} \to S_n$ donnée. Soit, en effet, f une telle application pour laquelle c est valeur régulière; un point c' suffisament voisin de c sera également valeur régulière pour f. Soient M_k et M'_k les contre-images de c et c' par f; F_n et F'_n les champs de repères normaux que f induit sur M_k et M'_k respectivement. Les éléments $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X_{k+n})$ sont équivalents; les variétés M_k et M'_k n'ayant pas de point commun, on peut former la somme $(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)$ qui est la juxtaposition sans point commun des variétés M_k et M'_k avec leurs champs de repères normaux respectifs. On pose

$$f \dotplus f = \theta\,[(M_k; \mathbf{F}_n) + (M'_k; \mathbf{F}'_n)].$$

On vérifie que la classe de l'application multiple ainsi définie ne dépend ni du choix des points c et c' ni du choix de f dans sa classe.

La construction de l'inverse $\bar{f}$ d'une application f peut être également effectuée même si $k + 1 \geqq n$; là encore la classe de $\bar{f}$ ne dépend que de la classe de f. En effet, si $F : X \times I \to S_n$ est une homotopie entre f et f', et $F = \theta(N_{k+1}; \Phi_n)$, on obtient l'homotopie $\bar{F}$ entre $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ en posant $F = \theta(\bar{N}, \bar{\Phi})$ où $\bar{N}$ est la variété N dont on a changé l'orientation ($\bar{N} = - N$) et $\bar{\Phi}$ le champ qui diffère de Φ par le premier vecteur, opposé à celui de Φ.

Ce procédé d'addition nous fournit les multiples $f \dotplus f \dotplus f, f \dotplus f \dotplus f \dotplus f, \ldots$; on peut ainsi parler de l'ordre d'une application $f : X_{n+k} \to S_n$ sans que le groupe $\pi^n(X_{n+k})$ existe nécessairement. Il faut cependant observer que si $X_{n+k} = S_{n+k}$ et $k + 1 \geqq n$, les multiples formés de cette manière peuvent être différents des multiples au sens ordinaire [3a]).

[3a]) Comme me l'a fait observer P. Hilton, le multiple $m \cdot f$ défini de cette manière n'est autre que la composition $(m\, i_n) \circ f$, ou $i_n : S_n \to S_n$ est l'identité.

La possibilité de former la classe «inverse» même si $\pi^n(X_{n+k})$ n'existe pas sera utilisée pour démontrer le théorème IV.

Chapitre II. Construction d'un invariant

§ 3. L'invariant γ

Pour ce chapitre, il sera supposé que la variété X_{n+k} est plongée dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_{m-n-k}$ sur X_{n+k} dans R_m.

Cette situation est en particulier réalisable si X_{n+k} est une sphère S_{n+k}. Elle implique que les classes caractéristiques $z^q(X)$ de X soient toutes nulles (voir Note).

Nous prenons pour métrique dans X_{n+k} celle induite par le plongement dans R_m. En outre X_{n+k} est orienté de sorte qu'un repère définissant l'orientation positive de X_{n+k} suivis des vecteurs de $\mathbf{F}_{m-n-k}$ fournisse l'orientation positive de R_m.

D'aprés les paragraphes qui précèdent, un invariant des classes d'équivalence dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ donne lieu à un invariant d'homotopie des applications $X_{n+k} \to S_n$ et réciproquement.

Un invariant des classes d'équivalence dans $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ peut être construit de la façon suivante: soit $(M_k; \mathbf{F}_n)$ un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$; le champ $\mathbf{F}_n$ induit une application

$$\varphi : M_k \to V_{m,m-k}$$

de M_k dans la variété de STIEFEL $V_{m,m-k}$ des suites ordonnées de $(m-k)$ vecteurs orthonormés de R_m ayant pour origine un point fixe A de R_m: la fonction φ fait correspondre à chaque point x de M_k la suite des $(m-k)$ vecteurs ayant pour origine l'origine des coordonnées dans R_m et équipollents, dans l'ordre, aux n vecteurs du champ $\mathbf{F}_n$ au point x suivis des $(m-n-k)$ vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-n-k}$ en x.

D'après E. STIEFEL [9], le groupe d'homologie entière

$$H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$$

est isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers pour k pair et isomorphe au groupe cyclique d'ordre 2, $\mathbf{Z}_2$, pour k impair (Nous laissons de coté le cas $m-k=1$ qui ne peut intervenir ici).

Après avoir fait choix d'un générateur pour $H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$, il correspond à $\varphi(M_k)$ de façon univoque un nombre $\overline{\varphi}(M_k)$, entier ou reste modulo 2 qui représente la classe d'homologie du cycle singulier $\varphi(M_k)$. Le générateur que nous choisissons pour $H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$ est la classe du cycle sphérique défini par l'application

$$\varepsilon : S_k \to V_{m,m-k}$$

faisant correspondre au point

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, 0, 0, \ldots, 0)$$

de R_m avec $\mathbf{x}^2 = 1$ les vecteurs

$$\mathbf{x}, \mathbf{e}_{k+2}, \mathbf{e}_{k+3}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

($\mathbf{e}_i$ étant le vecteur unitaire de R_m dont la i-ème composante est égale à 1 et les autres nulles), la sphère S_k étant supposée orientée de manière à être le bord orienté de la boule pleine $\mathbf{x}^2 \leqq 1$ portant l'orientation $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{k+1}$. En particulier, si $\mathbf{v}(x)$ est un vecteur de R_{k+1} (dépendant de façon continue de $x \in S_k$) qui fournit

— une application $u : S_k \to S_k$ de degré de BROUWER $d(u)$ et

— une application $\varphi^* : S_k \to V_{m,m-k}$ définie par

$$\varphi^*(x) = \{\mathbf{v}(x),\ \mathbf{e}_{k+2},\ \mathbf{e}_{k+3}, \ldots, \mathbf{e}_m\}$$

dont la classe est représentée par $\bar{\varphi}^*$, on a

$$\bar{\varphi}^* = d(u) \qquad \text{(mod 2 pour } k \text{ impair).} \tag{3.1}$$

On désignera par $\chi^*(M_k)$ la moitié $\frac{1}{2}\,\chi(M_k)$ de la caractéristique d'EULER de M si k est pair, et l'expression

$$\chi^*(M_k) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M_k; \mathbf{K})$$

pour k impair, $k = 2s - 1$. Dans la somme, $p_i(M_k; \mathbf{K})$ désigne le rang du groupe $H_i(M_k; \mathbf{K})$, $\mathbf{K}$ étant un corps de coefficients. Nous appellerons $\chi^*(M_k)$ la «*semi-caractéristique*» de M_k; c'est un nombre entier (pour k pair: la caractéristique d'EULER d'une variété plongée dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux est paire; cf. E. STIEFEL [9], page 353, Satz 28 ou la Note en fin du présent article).

Formons l'expression

$$I(M_k; \mathbf{F}_n) = \bar{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k; \mathbf{K})$$

qui est un nombre entier si k est un nombre pair et que nous regardons comme un reste mod 2 (dépendant en général du corps $\mathbf{K}$ choisi) si k est impair. On notera par $I_0(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $I_2(M_k; \mathbf{F}_n)$ les expressions ci-dessus formées en prenant respectivement le corps des nombres rationnels et le corps $\mathbf{Z}_2$ comme domaine $\mathbf{K}$ de coefficients.

On a alors le théorème suivant qui sera démontré au § 5:

Théorème II': *Si* $(M_k; \mathbf{F}_n)$ *et* $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ *sont équivalents dans* $\mathfrak{M}_k(X)$, $(M_k; \mathbf{F}_n) \equiv (M'_k; \mathbf{F}'_n)$, (cf. § 2), *alors*

(3.2) $I(M_k; \mathbf{F}_n) = I(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ *pour k pair*, $\mathbf{K}$ *étant quelconque*,

(3.3) $I_2(M_k; \mathbf{F}_n) = I_2(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ mod 2 *pour k impair* ($\mathbf{K} = \mathbf{Z}_2$),

(3.4) $I_0(M_k; \mathbf{F}_n) = I_0(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ mod 2 *pour k de la forme* $k = 4r + 1$.

Si l'on donne une application $f : X_{n+k} \to S_n$, on peut choisir un élément $(M_k; \mathbf{F}_n)$ de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ pour lequel $f \simeq \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$. Posons

$$\gamma(f) = I(M_k; \mathbf{F}_n);$$

$\gamma(f)$ est un nombre entier pour k pair et un reste mod 2 pour k impair *au quel cas* $\chi^*(M_k)$ *est formée en prenant* $\mathbf{Z}_2$ *comme corps de coefficients*. On a alors (comme conséquence immédiate du théorème II') le

Théorème II: $\gamma(f)$ *ne dépend que de la classe d'homotopie de l'application* $f : X_{n+k} \to S_n$.

(Cet invariant est considéré par L. PONTRJAGIN [6] et [7] dans le cas où $k = 1$ et $X_{k+n} = S_{k+n}$).

§ 4. Deux lemmes sur les variétés à bord

Dans ce paragraphe, Q_{k+1} désigne une variété à bord; la variété bord sera désignée par M_k. Le domaine des coefficients est un corps $\mathbf{K}$. Si Q n'est pas orientable et si $\partial Q = M$ mod 2, on exige que $\mathbf{K}$ ait la caractéristique 2.

Les lemmes de ce paragraphe seront utilisés au § 5 pour la démonstration du théorème II'.

1. Supposons tout d'abord que k est impair et désignons $k+1$ par $2s = k+1$. Bien que Q_{2s} ne soit pas une variété fermée, le coefficient d'intersection $S(z,w)$ de deux classes d'homologie z et w de $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$ est bien défini. Il en est de même de la forme quadratique fondamentale $f(x, x) = \sum_1^N s_{ij} x^i x^j$, où $s_{ij} = S(z_i, z_j)$, les classes $z_1, z_2, \ldots, z_N$ formant une base pour $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$. Le rang ϱ de la matrice (s_{ij}) est indépendant du choix de la base pour $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$, mais contrairement à ce que l'on observe pour une variété compacte, ce rang n'est pas ici nécessairement maximum (égal à N). Si $\mathbf{K}$ est le corps des rationnels, le rang ϱ de la matrice (s_{ij}) est égal mod 2 à l'indice d'inertie de la forme quadratique fondamentale $f(x, x) = \sum_1^N s_{ij} x^i x^j$.

Lemme 1: *Soit Q_{k+1} une variété de bord M_k et k impair, $k = 2s-1$; soit ϱ le rang de la matrice (s_{ij}) que nous venons d'introduire. On a alors*

$$\chi(Q_{k+1}) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M_k; \mathbf{K}) + \varrho(Q; \mathbf{K}) \qquad \text{mod } 2, \tag{4.1}$$

où $\mathbf{K}$ est un corps.

Démonstration: Soit $\varDelta$ la variété obtenue en collant le long de leur bord commun M_k deux exemplaires Q_{k+1} et $\overline{Q}_{k+1}$ de la variété Q_{k+1} munis d'orientations opposées. Appliquons à la variété fermée

$$\varDelta = Q + \overline{Q}$$

la formule de MAYER-VIETORIS (cf. [1], page 299):

$$p_i(\varDelta) = 2p_i(Q) - p_i(M) + n_i + n_{i-1}.$$

Dans cette formule, n_i désigne le rang du noyau N_i de l'homomorphisme $h_* : H_i(M_k; \mathbf{K}) \to H_i(Q_{k+1}; \mathbf{K})$ induit par l'inclusion $h : M_k \to Q_{k+1}$.

Par sommation, on obtient (en posant $2s = k+1$):

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i p_i(\varDelta) = 2\sum_{i=0}^{s} (-1)^i p_i(Q) - \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M) - \\ - (-1)^s p_s(M) + (-1)^s n_s, \tag{4.2}$$

puis

$$\sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(\varDelta) = 2\sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(Q) - \sum_{i=s}^{2s-1} (-1)^{i+1} p_i(M_{2s-1}) + \\ + (-1)^{s-1} n_{s-1}. \tag{4.3}$$

En utilisant $p_i(M_k) = p_{k-i}(M_k)$ et k impair, il vient

$$\sum_{i=s}^{2s-1} (-1)^{i+1} p_i(M) = \sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(M) = \chi^*(M);$$

d'autre part

$$\sum_{i=0}^{s} (-1)^i p_i(\Delta) = \sum_{i=s}^{2s} (-1)^i p_i(\Delta).$$

On obtient ainsi en ajoutant membre à membre les équations (4.2) et (4.3):

$$(4.4)\ 0 = 2\left\{\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(Q) + \sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(Q) - \chi^*(M) + (-1)^s B\right\} + (-1)^{s-1} A$$

où l'on a posé

$$A = n_{s-1} + n_s - p_s(M_k)$$
$$B = p_s(Q) - (p_s(M) - n_s).$$

Il s'avère que

1) $A = 0$,

2) $B = \varrho$.

L'équation (4.4) fournit alors après division par 2:

$$\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i p_i(Q) + \sum_{i=s}^{2s} (-1)^{i+1} p_i(Q) - \chi^*(M) + (-1)^s \varrho = 0$$

et en réduisant modulo 2:

$$\chi(Q_{k+1}) = \chi^*(M_k) + \varrho \qquad \mod 2$$

équation qu'il fallait démontrer.

1) L'égalité

$$A = n_{s-1} + n_s - p_s(M_k) = 0$$

est connue; on peut la démontrer de la façon suivante:

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$ et $w_1, w_2, \ldots, w_p$ des bases duales de $H_s(M_k; \mathbf{K})$ et $H_{s-1}(M_k; \mathbf{K})$ respectivement ($S(v_i, w_j) = \delta_{ij}$, $s + s - 1 = k$). On peut choisir les $w_1, w_2, \ldots, w_p$ de telle sorte que les n premiers $w_1, w_2, \ldots, w_n$ constituent une base de N_{s-1}, noyau de l'homomorphisme $h_* : H_{s-1}(M_k; \mathbf{K}) \to H_{s-1}(Q_{k+1}; \mathbf{K})$. On a posé pour simplifier les notations $n = n_{s-1}$, $p = p_s (= p_{s-1})$.

On montre que les classes $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_p$ de la base duale forment une base pour N_s:

D'une part, aucune combinaison linéaire des $v_1, \ldots, v_n$ à coefficients non tous nuls n'appartient à N_s; en effet si $v = \lambda^i v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ borde dans Q_{k+1} une chaîne c, on a en posant $z = c + \bar{c}$ ($\bar{c}$ étant une chaîne de $\overline{Q}$ ayant $-v$ pour bord) un cycle de Δ dont l'intersection

$$S_\Delta(z, w_i) = S_M(v, w_i) = \lambda^i$$

avec les w_i $(i = 1, \ldots, n)$ est nulle puisque ceux-ci bordent dans Q_{k+1}. Autrement dit, $\lambda^i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.

D'autre part, chacune des classes $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_p$ appartient au noyau N_s. En effet, si $v_j (n + 1 \leqq j \leqq p)$ ne bordait pas dans Q_{k+1}, on aurait également $v_j \nsim 0$ dans Δ; il existerait un cycle z de Δ tel que $S(v_j, z) = 1$ (intersection dans Δ, les coefficients sont dans un corps $\mathbf{K}$). Soit w l'intersection $S(z, M_k)$; puisque $w \sim 0$ dans Q_{k+1} $(w = \partial\, S(z, Q_{k+1}))$, on a

$$w = a^1 w_1 + \cdots + a^n w_n$$

(nous employons la même lettre pour un cycle et sa classe d'homologie). Par suite, on aurait

$$1 = S_\Delta(v_j, z) = S_M(v_j, w) = \sum_1^n a^i S(v_j, w_i) = \sum_1^n a^i \delta_{ij} = 0;$$

la dernière égalité à cause de $n + 1 \leqq j \leqq p$. L'hypothèse $v_j \nsim 0$ dans Q_{k+1} conduisant à une contradiction, nous avons $v_j \sim 0$ dans Q_{k+1}.

De ces deux remarques suit que les classes $v_{n+1}, \ldots, v_p$ forment une base pour N_s et par suite

$$n_s = p - n = p_s - n_{s-1},$$
$$A = n_s + n_{s-1} - p_s = 0.$$

2) Démonstration de $B = \varrho$:

Formons une base pour $H_s(Q_{k+1}; \mathbf{K})$ comprenant les classes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ déjà considérées et $u_1, \ldots, u_d$ soumises tout d'abord à la seule condition $S(u_i, v_i) = 0$. On a

$$n + d = n_{s-1} + d = p_s(Q),$$

et comme d'après 1), $n_s + n_{s-1} - p_s(M) = 0$, il vient

$$d = B = p_s(Q) - (p_s(M) - n_s).$$

Soient comme précédemment $w_1, w_2, \ldots, w_n$ les classes duales de $v_1, \ldots, v_n$ dans M_k. Désignons par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les classes d'homologie de $H_s(\Delta; \mathbf{K})$ correspondant aux classes «coutures» $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (cf. [1], page 290; c_i est la somme d'une chaîne de Q_{k+1} ayant pour bord w_i et de sa «symétrique» dans $\overline{Q}_{k+1}$). On a

$$S_M(v_i, w_j) = S_\Delta(v_i, c_j) = \delta_{ij}.$$

On peut choisir les classes $u_1, u_2, \ldots, u_d$ de sorte que toutes les intersections $S(u_i, c_j)$ soient nulles: s'il n'en était pas ainsi pour un premier choix $u', u'_2, \ldots, u'_d$, on poserait

$$u_i = u'_i - \Sigma_j\, S(u'_i, c_j) \cdot v_j.$$

Les relations $S(u_i, v_j) = 0$ sont conservées. Supposons donc

$$S(u_i, c_j) = 0.$$

Désignons par $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_d$ les symétriques de $u_1, u_2, \ldots, u_d$ dans $\overline{Q}_{k+1}$.

Il s'agit d'évaluer le rang ϱ de la matrice d'intersection pour le groupe $H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$ dont une base est

$$u_1, u_2, \ldots, u_d, \quad v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

Ce rang ϱ est au plus d puisque $S(u_i, v_j) = S(v_i, v_j) = 0$ $(i = 1, \ldots, d;$ $j = 1, \ldots, n)$; il est exactement d, en effet: pour voir que la matrice $s_{ij} = S(u_i, u_j)$ $(i, j = 1, \ldots, d)$ n'est pas dégénérée supposons que l'on ait des coefficients $a^i \in \mathbf{K}$, tels que $s_{ij} a^j = 0$ pour tout i. La classe $u = a^j u_j$ aurait alors une intersection nulle avec tous les u_i : $S(u, u_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, d$. On a d'autre part également

$$S(u, v_j) = S(u, c_j) = S(u, \overline{u}_i) = 0.$$

Or les classes

$$u_1, \ldots, u_d, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d, v_1, \ldots, v_n, c_1, \ldots, c_n$$

forment une base pour $H_s(\Delta; \mathbf{K})$ (elles sont linéairement indépendantes et leur nombre $2(d+n) = 2\,p_s(Q)$ est égal à $p_s(\Delta)$); il s'ensuit, $\mathbf{K}$ étant un corps, que la classe u est nulle: $a^i u_i = 0$, ce qui implique

$$a^1 = a^2 = \cdots = a^d = 0,$$

les u_i étant linéairement indépendantes. C'est dire que la matrice

$$(S(u_i, u_j)) \qquad [i, j = 1, \ldots, d]$$

n'est pas dégénérée. On a ainsi

$$\varrho = d = B.$$

2. A partir de maintenant la variété Q_{k+1} est supposée plongée dans un espace euclidien R_{m+1} avec un champ $\mathbf{F}_{m-k}$ de repères normaux (k est quelconque, positif).

On suppose en outre que le bord de Q_{k+1} est plongé dans le sous-espace R_m de R_{m+1} et que les vecteurs de $\mathbf{F}_{m-k}$ issus d'un point de M_k se trouvent dans R_m (R_m est sous-tendu par les m premiers vecteurs d'une base orthonormée $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_m, \mathrm{e}_{m+1}$ à laquelle nous nous référerons pour l'orientation de R_{m+1}). Nous faisons les conventions d'orientations suivantes: M_k est supposée orientée par un repère tangent dont les vecteurs, suivis de ceux du champ $\mathbf{F}_{m+k}$ déterminent l'orientation positive de R_m; la normale à M_k vers l'intérieur de Q_{k+1} est équipollente au vecteur $+\,\mathrm{e}_{m+1}$. La variété Q_{k+1} est supposée orientée de manière que $\partial\, Q_{k+1} = -M_k$.

La restriction de $\mathbf{F}_{m-k}$ sur M_k dans R_m fournit une application

$$\varphi : M_k \to V_{m,m-k};$$

ayant fait choix (cf. § 3) d'un générateur pour $H_k(V_{m,m-k}; \mathbf{Z})$, la classe de $\varphi(M_k)$ est représentée par un nombre $\overline{\varphi}(M_k)$, entier si k est pair, reste mod 2 si k est impair.

Lemme 2: *Dans les conditions ci-dessus*

$$\overline{\varphi}(M_k) = \chi(Q_{k+1}) \qquad \textit{pour } k \textit{ pair},$$
$$\overline{\varphi}(M_k) = \chi(Q_{k+1}) \qquad \text{mod } 2 \textit{ pour } k \textit{ impair}.$$

Démonstration: Remarquons tout d'abord que $\overline{\varphi}(M_k)$ est numériquement égal à $\overline{\varphi}'(M_k)$ représentant la classe de l'application

$$\varphi' : M_k \to V_{m+1,m-k+1}$$

obtenue en adjoignant à *la suite* des $(m-k)$ vecteurs de $\mathbf{F}_{m-k}$ la normale à M_k dans Q_{k+1} (orientée vers l'intérieur de Q). D'après les hypothèses faites sur la situation de M_k et Q_{k+1} dans R_{m+1}, cette normale est en effet le vecteur constant e_{m+1} de R_{m+1} orthogonal à R_m.

Le champ v de vecteurs tangents à Q_{k+1} donné sur le bord M_k par la normale à M_k dans Q_{k+1} peut être prolongé comme vecteur *tangent* dans Q_{k+1} partout à l'exception de voisinages sphériques d'un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_c$. Soit encore v ce prolongement. Désignons par V^i un voisinage sphérique de x_i dans Q_{k+1} et par S^i son bord (S^i est une sphère de dimension k). L'application

$$\varphi' : M_k \to V_{m+1,m-k+1}$$

peut etre prolongée dans Q_{k+1} à l'extérieur des voisinages V^i: ce prolongement est formé des vecteurs normaux du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ (existant par hypothèse sur Q_{k+1}) au point x *suivis* du vecteur tangent du champ $\mathbf{v}$; en désignant ce prolongement également par φ':

$$\varphi' : (Q - \Sigma_i V^i) \to V_{m+1,m-k+1}.$$

On a alors

$$\partial \varphi'\Big(Q - \sum_i V^i\Big) = \varphi' \partial \Big(Q - \sum_i V^i\Big) = \varphi'\Big(-M - \sum_i S^i\Big)$$
$$= -\varphi'(M) - \sum_i \varphi'(S^i),$$

c. à. d.

$$\varphi'(M_k) \sim -\sum_i \varphi'(S^i) \quad \text{dans} \quad V_{m+1,m-k+1}$$

ou

(4.5) $$\bar{\varphi}'(M_k) = -\sum_i \bar{\varphi}'(S^i)$$

l'égalité étant comprise mod 2 si k est impair.

Il reste à démontrer que pour chaque point singulier x_i du champ $\mathbf{v}$ le nombre $\bar{\varphi}'(S^i)$ est égal (respectivement égal mod 2) à l'index j_i de la singularité du champ $\mathbf{v}$ en x_i.

On sait ensuite ([1], Satz I, page 549)[4]) que

(4.6) $$\sum_i j_i = (-1)^{k+1} \chi(Q_{k+1}),$$

d'où le lemme 2 suit immédiatement.

Pour démontrer

$$\bar{\varphi}'(S^i) = j_i \qquad \text{(resp. mod 2 pour } k \text{ impair)},$$

rapportons le plan tangent T^i_{k+1} en x_i à Q_{k+1} à une base orthonormée $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{k+1}$ déterminant l'orientation positive de Q_{k+1} et soient $\mathbf{g}_{k+2}, \mathbf{g}_{k+3}, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$ $(m-k)$ vecteurs orthonormés et perpendiculaires à Q_{k+1} en x_i et déterminant la même orientation de l'espace normal à Q_{k+1} que le champ de repères $\mathbf{F}_{m-k}$. Les vecteurs $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$ forment une base orthonormée de R_{m+1}; on a

$$\text{dét } (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (-1)^m.$$

En effet, transportons de manière continue le repère $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$ du point x_i en un point x' de M_k de sorte que les k premiers vecteurs du repère $\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \ldots, \mathbf{g}'_{m+1}$ ainsi obtenu déterminent l'orientation positive de M_k; nous supposons que durant le déplacement, les $k+1$ premiers vecteurs restent tangents à Q et que dans la position finale, en x', les k premiers sont tangents à M_k. De ce que $\partial Q_{k+1} = -M_k$ suit: le vecteur $(-1)^k \cdot \mathbf{g}'_{k+1}$ (tangent à Q_{k+1}) est dirigé

[4]) On voit aisément que ce théorème s'étend à une variété avec bord pourvu qu'en tout point du bord le vecteur du champ soit dirigé vers l'intérieur de la variété, comme c'est le cas ici.

vers l'intérieur de Q_{k+1}. D'autre part les vecteurs $\mathbf{g}'_{k+2}, \mathbf{g}'_{k+3}, \ldots, \mathbf{g}'_{m+1}$ déterminent la même orientation de l'espace normal à M_k en x' dans R_m que le champ $\mathbf{F}_{m-k}$. D'après nos conventions sur l'orientation de la variété d'un couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$, on a: les vecteurs $\mathbf{g}'_1, \ldots, \mathbf{g}'_k, \mathbf{g}'_{k+2}, \ldots, \mathbf{g}'_{m+1}, (-1)^k \mathbf{g}'_{k-1}$ dans cet ordre déterminent la même orientation de R_{m+1} que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{m+1}$; on en déduit

$$\text{dét}\,(\mathbf{g}'_i \cdot \mathbf{e}_j) = \text{dét}\,(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (-1)^m .$$

Considérons d'une part l'application $u: S^i_k \to S_k$,

$$u(x) = \{(\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{g}_1),\ (\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{g}_2), \ldots, (\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{g}_{k+1})\}$$

fournie par le champ de vecteurs $\mathbf{v}$ sur S^i_k. Par définition j_i est le degré de Brouwer de l'application u:

$$j_i = d(u).$$

D'autre part, pour évaluer $\overline{\varphi}'(S^i)$, on peut supposer que les $(m-k)$ vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ sont constants sur S^i et coincident avec $\mathbf{g}_{k+2}, \mathbf{g}_{k+3}, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$. Rapportons R_{m+1} à la base $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}$, on obtient ainsi une application

$$\varphi'': S^i \to V^{(g)}_{m+1, m-k+1}$$

donnée par

$$\varphi''(x) = \{\mathbf{g}_{k+2}, \mathbf{g}_{k+3}, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}, \mathbf{v}(x)\}$$

et telle que

$$\overline{\varphi}''(S^i) = \text{dét}\,(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \overline{\varphi}'(S^i) = (-1)^m\, \overline{\varphi}'(S^i).$$

Soit encore φ^* l'application $S^i \to V^{(g)}_{m+1, m-k+1}$:

$$\varphi^*(x) = \{\mathbf{v}(x), \mathbf{g}_{k+2}, \mathbf{g}_{k+3}, \ldots, \mathbf{g}_{m+1}\},$$

on a

$$\overline{\varphi}''(S^i) = (-1)^{m-k} \cdot \overline{\varphi}^*(S^i) = (-1)^{m-k} \cdot d(u) \qquad \text{(cf. formule (3.1))}$$

et par suite

$$\overline{\varphi}'(S^i) = (-1)^{m+m-k} \cdot d(u) = (-1)^k j_i \tag{4.7}$$

l'égalité étant comprise modulo 2 pour k impair.

En tenant compte de (4.5) et (4.6), l'égalité (4.7) démontre le lemme 2.

§ 5. Démonstration des théorèmes du § 3

Démonstration du théorème II':

Soient $(M_k; \mathbf{F}_n)$ et $(M'_k; \mathbf{F}'_n)$ deux couples équivalents de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$; cela signifie qu'il existe une sous-variété Q_{k+1} de $X_{n+k} \times I$ dont le bord est $M'_k \times (1) - M_k \times (0)$, munie d'un champ Φ_n de repères normaux qui se réduit à $\mathbf{F}_n$ et $\mathbf{F}'_n$ respectivement sur M_k et M'_k.

X_{n+k} étant plongée dans un espace euclidien R_m avec un champ $\mathbf{F}_{m-n-k}$ de repères normaux, on peut plonger $X_{n+k} \times I$ dans $R_{m+1} = R_m \times R_1$ de manière naturelle. On obtient ainsi la situation suivante: Q_{k+1} est une variété dans $R_m \times I$, portant un champ de vecteurs normaux $\mathbf{F}_{m-k}$; le bord $\partial Q_{k+1} = M'_k - M_k$ est formé de deux variétés M_k et M'_k situées dans $R_m \times (0)$ et $R_m \times (1)$ respectivement; sur M_k et M'_k le champ $\mathbf{F}_{m-k}$ se compose de vecteurs situés dans

$R_m \times (0)$ et $R_m \times (1)$ respectivement. Les variétés M_k et M'_k sont orientées de telle manière que les vecteurs de repères tangents «positifs» suivis des vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ déterminent l'orientation positive de $R_m \times (0)$ et $R_m \times (1)$.

Appelons $\overline{\varphi}(M)$ et $\overline{\varphi}'(M')$ les nombres représentant les classes des applications φ et φ' de M_k et M'_k respectivement dans la variété $V_{m,m-k}$ (applications induites par $\mathbf{F}_{m-k}$). Il s'agit de démontrer que

$$\overline{\varphi}'(M') - \chi^*(M'; \mathbf{K}) = \overline{\varphi}(M) - \chi^*(M; \mathbf{K}),$$

l'égalité étant comprise mod 2 et avec le corps $\mathbf{K}$ approprié pour k impair.

Considérons pour cela en chaque point x du bord de Q la normale $\mathbf{v}(x)$ à ce bord, orientée sur M_k *vers l'intérieur* de Q et sur M'_k *vers l'extérieur* de Q.

En faisant suivre les vecteurs du champ $\mathbf{F}_{m-k}$ (considéré seulement sur ∂Q) du vecteur $\mathbf{v}$, on obtient une application

$$\varphi_1 : \partial Q \to V_{m+1, m-k+1}$$

avec

$$\overline{\varphi}_1(M) = \overline{\varphi}(M) \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_1(M') = \overline{\varphi}'(M').$$

L'extension du champ $\mathbf{v}$ à un champ de vecteurs tangents à Q_{k+1} à l'extérieur de voisinages sphériques V^i (en nombre fini) de singularités, nous conduit en utilisant le raisonnement du lemme 2 au § 4, à

$$\overline{\varphi}_1(M') - \overline{\varphi}_1(M) = \Sigma\, \overline{\varphi}_1(S^i) = (-1)^k \Sigma j_i,$$

où $S^i = \partial V^i$; cf. (4.6) et (4.7).

Pour k impair, on voit aisément que $\Sigma j_i = \chi(Q)$, par suite

$$\overline{\varphi}_1(M') - \overline{\varphi}_1(M) = \chi(Q) \qquad \text{mod } 2.$$

Pour k pair, formons la variété

$$\Delta = Q + \overline{Q} + M \times I + M' \times I$$

obtenue en collant les bords de $M \times I$ et $M' \times I$ avec les parties des bords de Q et $\overline{Q}$ homéomorphes à M et M' respectivement. On a

$$0 = (-1)^{k+1} \chi(\Delta) = 2\, \Sigma j_i + (-1)^{k+1} \chi(M') + (-1)^k \chi(M),$$

d'où $2\, \Sigma j_i = \chi(M') - \chi(M)$.

On en tire

$$\overline{\varphi}_1(M') - \overline{\varphi}_1(M) = \tfrac{1}{2}\chi(M') - \tfrac{1}{2}\chi(M),$$

c. à. d.

$$I(M'_k; F'_n) = \overline{\varphi}'(M'_k) - \chi^*(M'_k) = \overline{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k) = I(M_k; F_n)$$

ce qui démontre l'égalité (3.2) du théorème II'.

Pour k impair, le lemme 1 du § 4 nous donne

$$\chi(Q) = \chi^*(M) + \chi^*(M') + \varrho(Q, \mathbf{K}) \qquad \text{mod } 2$$

et par suite

$$I(M_k; F_n) = I(M'_k; F'_n) \qquad \text{mod } 2$$

si et seulement si $\varrho(Q; \mathbf{K}) = 0$ mod 2.

Les égalités (3.3) et (3.4) du théorème II′ reviennent donc à démontrer que
— $\varrho(Q; \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$, le corps des coefficients $\mathbf{K}$ étant $\mathbf{Z}_2$ et k impair quelconque,
— $\varrho(Q; \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$, $\mathbf{K}$ étant un corps de caractéristique différente de 2 et k ayant la forme spéciale $k = 4r + 1$.

a) *Le cas* $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_2$.

k étant impair, désignons par $2s$ le nombre $k + 1$. Nous allons voir que pour une variété Q_{2s} (avec ou sans bord) plongée dans un espace euclidien R_N avec un champ $\mathbf{F}_{N-2s}$ de repères normaux, on a

Pour toute classe $z_s \in H_s(Q_{2s}; \mathbf{Z}_2)$, *la self-intersection* $S(z_s, z_s) \in \mathbf{Z}_2$ *est nulle.*

Ceci implique[5]) que la matrice d'intersection, d'éléments $s_{ij} = S(z_i, z_j)$, où $z_1, z_2, \ldots, z_p$ forment une base pour $H_s(Q_{2s}; \mathbf{Z}_2)$ a un rang ϱ pair.

Soit z_s une classe d'homologie quelconque de $H_s(Q_{2s}; \mathbf{Z}_2)$; d'après R. Thom [10], (théorème II. 26, page 55) on peut représenter cette classe par une sous-variété m_s de dimension s de Q_{2s}. Soient $\overline{\mathrm{w}}(t)$ et $\overline{\mathbf{W}}(t)$ les polynômes de H. Whitney [11] des structures normales à m_s dans Q_{2s} et R_N respectivement. Le théorème de dualité de H. Whitney ([12], théorème 15, page 85)[6]) donne

$$\overline{\mathbf{W}}(t) = \overline{\mathrm{w}}(t) \cup 1 = \overline{\mathrm{w}}(t) \qquad \bmod 2$$

car la restriction sur m_s de la structure normale à Q_{2s} dans R_N est par hypothèse simple. On a donc

$$\overline{\mathbf{W}}^s(m_s) = \overline{\mathrm{w}}^s(m_s) = S(z_s, z_s) \qquad \bmod 2$$

($\overline{\mathrm{w}}^s$ est l'obstruction à la construction d'un champ de vecteurs normaux à m_s dans Q_{2s}). D'autre part, on sait (cf. [11], page 131) que $\overline{\mathbf{W}}^s(m_s) = 0$ mod 2 pour toute variété m_s. On a donc

$$S(z_s, z_s) = \overline{\mathbf{W}}^s(m_s) = 0 \qquad \bmod 2.$$

b) *Le cas où* $k = 4r + 1$ *et Caract* $(\mathbf{K}) \neq 2$.

Si $k = 4r + 1$, on a pour $u, v \in H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$

$$S(u, v) = (-1)^s \cdot S(v, u) = -S(v, u)$$

($s = 2r + 1$); la matrice d'intersection (s_{ij}) est donc antisymétrique. Si la caractéristique de $\mathbf{K}$ est différente de 2, on en tire $S(z, z) = 0$ pour toute classe d'homologie $z \in H_s(Q_{2s}; \mathbf{K})$, d'où[5]) $\varrho(Q_{2s}; \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$ pour Caract $(\mathbf{K}) \neq 2$.

[5]) Si une forme bilinéaire $f(x, y) = s_{ij} x^i y^j$ $[i, j = 1, 2, \ldots, d]$ à coefficients s_{ij} dans un corps quelconque $\mathbf{K}$ satisfait à la condition $f(x, x) = 0$ pour tout x, son rang est nécessairement pair. Pour le voir, on se rendra compte de ce que dans la démonstration du théorème classique où l'on suppose $f(x, y)$ antisymétrique et la caractéristique de $\mathbf{K}$ différente de 2, on n'utilise en fait rien d'autre que l'hypothèse $f(x, x) = 0$ pour tout x, le corps $\mathbf{K}$ pouvant alors être laissé arbitraire.

[6]) La démonstration citée, due à W. T. Wu, du théorème de dualité de H. Whitney utilise la définition de L. Pontrjagin [5] (cf. Note) des classes de Stiefel-Whitney. Ici ces classes apparaissent comme obstructions à l'extension de certains champs de vecteurs (N. Steenrod: Topology of fiber bundles, page 190). L'équivalence de ces deux définitions n'a pas été publiée explicitement, pour autant que je sache; elle est cependant bien connue.

Le théorème II' est ainsi démontré. Le théorème II en est conséquence directe (compte tenu des résultats énoncés au § 1, au lemme 1 en particulier).

La discussion des cas a et b nous a montré que si la variété M_k est le bord d'une variété Q_{k+1}, on a (k étant supposé impair)

$$\chi^*(M_k; \mathbf{K}) = \chi(Q_{k+1}) \mod 2 \tag{5.1}$$

dès que

— k a la forme $k = 4r + 1$ et Caract$(\mathbf{K}) \neq 2$, ou bien

— la variété Q_{k+1} peut être plongée dans un espace euclidien avec un champ de repères normaux, le corps $\mathbf{K}$ étant $\mathbf{Z}_2$.

Les deux exemples qui suivent montrent que (5.1) n'est en général pas juste 1°. si Q_{k+1} avec $k = 4r - 1$ ne peut pas être plongée avec un champ de repères normaux dans un espace euclidien R_{m+1} (même en spécialisant le corps $\mathbf{K}$), 2°. pour un variété Q_{k+1} de dimension multiple de 4, plongée avec un champ de repères normaux dans R_{m+1} si le corps $\mathbf{K}$ n'a pas la caractéristique 2.

L'*exemple 1* est fourni par l'espace projectif complexe $PC(2)$ de dimension complexe 2 percé d'un trou sphérique V_4. Posons $Q_4 = PC(2) - V_4$. La variété $\partial Q_4 = M_3$ est une sphère de dimension 3. Pour cet exemple

$$\begin{aligned} \chi^*(M_3) &= \chi^*(S_3) = 1 && (\mathbf{K} \text{ quelconque}) \\ \chi(Q_4) &= \chi(PC(2) - V_4) = \chi(PC(2)) - \chi(V_4) \\ &= 3 - 1 = 2 \\ \varrho &= 1 && (\mathbf{K} \text{ quelconque}). \end{aligned}$$

L'*exemple 2* est fourni par l'espace fibré N_3 des vecteurs normaux à la diagonale D dans le produit cartésien $S_2 \times S_2$. La variété N_3 est homéomorphe à l'espace projectif réel P_3. La fibre F (homéomorphe au cercle S_1) de l'espace fibré satisfait à la relation d'homologie

$$2F \sim 0 \quad \text{dans } N_3.$$

Si le corps n'a pas la caractéristique 2, on en tire $F \sim 0$ dans N_3; et comme la classe de F est le seul candidat comme élément non-nul de $H_1(N_3; \mathbf{K})$, il s'ensuit $p_1(N_3; \mathbf{K}) = 0$ si $\mathbf{K}$ n'a pas la caractéristique 2. On a les égalités suivantes en prenant pour variété Q_4 un voisinage tubulaire de D dans $S_2 \times S_2$ ayant pour bord $\partial Q_4 = N_3$:

$$\begin{aligned} \chi^*(N_3) &= 1 \quad \text{si Caract}(\mathbf{K}) \neq 2, \\ &= 2 \quad \text{si Caract}(\mathbf{K}) = 2, \\ \chi(Q_4) &= \chi(D) = 2 \\ \varrho &= 1 \quad \text{si Caract}(\mathbf{K}) \neq 2, \\ &= 0 \quad \text{si Caract}(\mathbf{K}) = 2. \end{aligned}$$

En conformité avec le lemme 2, on a dans les deux cas

$$\chi^*(N_3) = \chi(Q_4) + \varrho \mod 2,$$

mais pour Caract$(\mathbf{K}) \neq 2$, le rang ϱ n'est pas congruent à 0 mod 2.

§ 6. Propriétés de l'invariant γ

γ nous fournit une fonction sur l'ensemble des classes d'homotopie des applications de X_{n+k} dans S_n à valeurs dans $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_2$ suivant que k est pair ou impair. *Si le groupe $\pi^n(X_{n+k})$ existe avec la règle d'addition du § 2, ou si X_{n+k} est une sphère, alors γ est un homomorphisme de $\pi^n(X_{n+k})$ ou de $\pi_{n+k}(S_n)$ dans $\mathbf{Z}$ respectivement $\mathbf{Z}_2$ suivant que k est pair ou impair.*

Nous avons fait la remarque au § 2 que l'inverse $\bar{f}$ et la somme avec elle-même $f \dotplus f$ d'une classe d'applications f de X_{n+k} dans S_n ont un sens même si le groupe $\pi^n(X_{n+k})$ n'existe pas. On a pour ces opérations

$$0 = \gamma(\bar{f} \dotplus f) = \gamma(\bar{f}) + \gamma(f), \quad \text{donc } \gamma(\bar{f}) = -\gamma(f)$$
$$\gamma(f \dotplus f) = 2\,\gamma(f).$$

Si $X_{n+k} = S_{n+k}$, on a le

Théorème III: *Pour une application $f \in \pi_{n+k}(S_n)$ et sa suspension $g = Ef \in \pi_{n+k+1}(S_{n+1})$, on a $\gamma(f) = \gamma(g)$.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que l'on peut interpréter la suspension de la façon suivante:

$$f : S_{n+k} \to S_n$$

étant donnée, $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$, on regarde S_{n+k} comme équateur de S_{n+k+1} dans R_{n+k+2}; on obtient Ef en substituant au champ de repères $\mathbf{F}_n$ le champ $\mathbf{F}_{n+1}$ formé des vecteurs de $\mathbf{F}_n$ suivis de la normale $\mathbf{e}_{n+k+2}$ à S_{n+k} dans S_{n+k+1}.

Appelons $\mathbf{n}$ la normale extérieure à S_{n+k+1} dans R_{n+k+2}; les champs $(\mathbf{F}_n, \mathbf{n})$ et $(\mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{n})$ déterminent des applications

$$\varphi : M_k \to V_{n+k+1,\, n+1}$$
$$\varphi' : M_k \to V_{n+k+2,\, n+2}$$

représentées par le même nombre

$$\bar{\varphi}(M_k) = \bar{\varphi}'(M_k).$$

On a donc

$$\gamma(Ef) = \bar{\varphi}'(M_k) - \chi^*(M_k) = \bar{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k) = \gamma(f).$$

Corollaire: *Si γ applique un groupe $\pi_{N+k}(S_N)$ sur zéro, il en est de même de $\pi_{n+k}(S_n)$ pour tout $n \leqq N$.*

Théorème IV: *Pour toute application $f: X_{n+k} \to S_n$ avec k pair, $k = 2r$, l'invariant γ est nul: $\gamma(f) = 0$.*

Soit en effet, $(M_k; \mathbf{F}_n)$ un élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ tel que $f \simeq \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ et soit $(\bar{M}_k; \bar{\mathbf{F}}_n)$ l'élément de $\mathfrak{M}_k(X_{n+k})$ dont la variété $\bar{M}_k$ diffère de M_k par l'orientation et le champ $\bar{\mathbf{F}}_n$ diffère de $\mathbf{F}_n$ par le premier vecteur opposé à celui de $\mathbf{F}_n$. Posons $\bar{f} = \theta(\bar{M}_k; \bar{\mathbf{F}}_n)$. On a (en désignant également par f et $\bar{f}$ les classes d'homotopie des applications f et $\bar{f}$):

$$f \dotplus \bar{f} = 0$$

(cf. § 2, en particulier la remarque finale). Donc

$$\gamma(f \dotplus \bar{f}) = \gamma(f) + \gamma(\bar{f}) = 0.$$

D'autre part

$$\chi^*(M_k) = \chi^*(\overline{M}_k)$$
$$\overline{\varphi}(M_k) = \overline{\varphi}(\overline{M}_k)$$

donc

$$\gamma(f) = \gamma(\bar{f}).$$

La dimension k étant paire, $\gamma(f)$ est un nombre entier; il s'ensuit

$$\gamma(f) = 0, \text{ c.q.f.d.}$$

Conjecture: *Pour f: $S_{2k+1} \to S_{k+1}$, $\gamma(f)$ est l'invariant de* HOPF *de l'application f, réduit modulo 2.* (k impair).

Cette conjecture[6a]) est vérifiée pour les petites valeurs de k : Pour $k = 1$, on utilise le fait que toute application $f : S_3 \to S_2$ est homotope à un multiple de l'application standard s de HOPF, pour laquelle $\gamma(s) = 1$.
Pour $k = 5$, la valeur de γ est toujours zéro car pour n grand le groupe $\pi_{n+5}(S_n)$ ne contient que l'élément 0[7]).
Pour $k = 3, 7$, on peut utiliser un théorème de P. J. HILTON et J. H. C. WHITEHEAD[8]) qui affirme que si S_k est parallélisable et si $\pi_{2k}(S_k)$ est cyclique, on a $[i_{k+1}, i_{k+1}] = 2\,\theta - Eg$, ou g est le générateur de $\pi_{2k}(S_k)$ et $[i_{k+1}, i_{k+1}]$ le produit de WHITEHEAD de l'identité $i_{k+1} : S_{k+1} \to S_{k+1}$ par elle-même. Ce théorème s'applique pour $k = 3$, 7 car $\pi_6(S_3) = \mathbf{Z}_{12}$ et $\pi_{14}(S_7) = \mathbf{Z}_{120}$ sont cycliques[7]). Comme $\gamma([i_{k+1}, i_{k+1}]) = 0$ (ceci, à cause de $\gamma([\alpha, \beta]) = \gamma(E\,[\alpha, \beta])$ $= \gamma(0) = 0$[9])), on obtient

$$\gamma(g) = \gamma(Eg) = \gamma(2\,\theta) - \gamma([i_{k+1}, i_{k+1}]) = 0;$$

on vérifie d'autre part aisément que si S_k est parallélisable, $\gamma(s) = 1$ pour l'application standard $s : S_{2k+1} \to S_{k+1}$ d'invariant de HOPF égal à 1. Pour toute application $f : S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec $k = 3$ ou 7 on a $f \simeq h(f) \cdot s + Ea$ $(a : S_{2k} \to S_k)$ avec un certain a, d'où $\gamma(f) = h(f) \cdot \gamma(s) + \gamma(a) = h(f) \bmod 2$, $h(f)$ étant l'invariant de HOPF de f.

Chapitre III. Applications

§ 7. Le théorème de la «curvatura integra»

Dans ce paragraphe nous considérons les variétés M_k (de classe C^1) ayant un modèle dans un espace euclidien R_{k+n} dont l'espace fibré des vecteurs normaux est simple.

Ce modèle $i : M_k \to R_{k+n}$ sera dit un *plongement* si l'application (supposée de classe C^1) est biunivoque; si $i : M_k \to R_{k+n}$ est *localement* biunivoque, nous dirons que la variété M_k est *immergée* dans R_{k+n} ("regular imbedding" respectivement "regular immersion" de H. WHITNEY).

[6a]) Voir note dans l'introduction.

[7]) cf. J. P. SERRE: Notes aux C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1340—1342 (1952) et **236**, 2475—2477 (1953).

[8]) Note on the WHITEHEAD product. Ann. of Math. 58, 429—442 (1953). Il s'agit du «Theorem (4.23)».

[9]) cf. Theorem (3.11) de G. WHITEHEAD: On products in homotopy groups. Ann. of Math. 47, 460—475 (1946).

L'espace fibré des vecteurs normaux sur $i(M_k)$ étant supposé simple, soit $\mathbf{F}_n$ un champ de repères normaux à $i(M_k)$ dans R_{k+n}; $\mathbf{F}_n$ définit une application

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

par la formule

$$\varphi(x) = \mathbf{F}_n(i(x)).$$

Les théorèmes qui suivent donnent des renseignements sur la classe $\overline{\varphi}(M_k)$ (respectivement c pour $n = 1$) de l'application φ. (cf. les conventions d'orientations que nous avons faites au § 3.)

Théorème V: *La variété M_k étant plongée dans R_{k+1}, on a*

$$c = \chi^*(M_k)$$

l'égalité étant comprise mod 2 pour k impair.

Comme dans les paragraphes précédents, $\chi^*(M_k)$ est la semi-caractéristique de M_k. Le théorème V est valable pour un corps de coefficients $\mathbf{K}$ quelconque.

Démonstration: Fermons l'espace R_{k+1} dans lequel est plongée M_k en une sphère S_{k+1} que nous prenons pour sphère unité dans R_{k+2}.

S_{k+1} jouant alors le rôle de X_{n+k} du § 1 et $\mathbf{F}_1$ étant le champ de vecteurs normaux à M_k dans S_{k+1}, le couple $(M_k; \mathbf{F}_1)$ détermine une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_1)$ de S_{k+1} dans S_1. Comme cette application est homotope à zéro $(\pi_{k+1}(S_1) = 0,\ k \geqq 1)$, on en déduit: $\gamma(f) = 0$, c.à.d.:

$$c = \chi^*(M_k) \qquad \text{(mod 2 pour } k \text{ impair)};$$

en effet, $\gamma(f) = c - \chi^*(M_k)$.

Lorsque k est impair, le théorème est ainsi démonstré pour $\mathbf{K} = \mathbf{Z}_2$. Remarquons que pour une variété M_k plongée dans R_{k+1} la semi-caractéristique ne dépend pas (modulo 2) du corps de coefficients $\mathbf{K}$ choisi. On le voit immédiatement en appliquant le lemme 1 du § 4 à la région Q_{k+1} bordée par M_k dans R_{k+1}.

Le théorème V est ainsi valable quel que soit le corps $\mathbf{K}$.

Théorème VI: *La variété M_k de dimension paire $k = 2r$ étant plongée dans R_{k+n} avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_n$, on a*

$$\overline{\varphi}(M_k) = \chi^*(M_k) \qquad (= \tfrac{1}{2}\chi(M_k)).$$

Démonstration: Fermons R_{k+n} en une sphère S_{k+n} plongée dans R_{n+k+1}. Au couple $(M_k; \mathbf{F}_n)$ de $\mathfrak{M}_k(S_{n+k})$ correspond une application $f = \theta(M_k; \mathbf{F}_n)$ de S_{n+k} dans S_n pour laquelle

$$\gamma(f) = \overline{\varphi}(M_k) - \chi^*(M_k).$$

Le théorème VI est alors conséquence du théorème IV affirmant que pour k pair $\gamma(f) = 0$ pour tout f.

On peut également, comme me l'a fait observer Monsieur H. Hopf démontrer le théorème VI sans utiliser l'invariance de $\gamma(f)$ en reprenant la méthode de H. Hopf [3] employée pour la démonstration originale du théorème de la curvatura integra.

Si l'on se limite au cas $k = 2r$, l'hypothèse du plongement *topologique* dans les théorèmes V et VI est superflue; on peut se contenter de supposer M_k

immergée dans R_{k+n}, l'application $i: M_k \to R_{k+n}$ étant *localement biunivoque* et de classe C^1. On obtient alors le

Théorème VI*: *La variété M_k de dimension paire, $k = 2r$, étant immergée dans R_{n+k} avec un champ de repères normaux F_n, on a*

$$\overline{\varphi}(M_k) = \tfrac{1}{2}\,\chi(M_k).$$

Démonstration: On plonge R_{k+n} dans R_m avec m assez grand de sorte que dans un voisinage arbitraire de $i(M_k)$, il existe un modèle topologique de classe C^1, $i'(M_k)$ de M_k. Sur ce modèle il y a un champ de repères normaux qui induit une application $\varphi': M_k \to V_{m,m-k}$ avec $\overline{\varphi}'(M_k) = \overline{\varphi}(M_k)$. Le théorème VI nous fournit

$$\overline{\varphi}(M_k) = \overline{\varphi}'(M_k) = \tfrac{1}{2}\,\chi(M_k).$$

Pour les théorèmes V, VI, VI*, la variété M_k est supposée orientée par un repère tangent dont les vecteurs, suivis de ceux du champ F_n déterminent l'orientation positive de l'espace euclidien ambiant R_{k+n}. Le nombre représentant la classe de l'application φ est déterminé en utilisant le générateur du groupe $H_k(V_{m,m-k}; Z)$ que nous avons choisi au § 3.

Dans le cas où k est impair, on obtient une généralisation du théorème de la curvatura integra de H. HOPF à condition que $\gamma(f)$ soit nul pour toutes les classes d'applications $f: S_{n+k} \to S_n$.

Théorème VII: *Si $\gamma(f) = 0$ pour toute classe d'applications f; $S_{n+k} \to S_n$, alors pour toute variété M_k plongée avec un champ de repères normaux F_n dans R_{n+k}, on a* $\overline{\varphi}(M_k) = \chi^*(M_k) \bmod 2$.

Si l'on admet la conjecture du § 6, l'hypothèse «$\gamma(f) = 0$ identiquement» du théorème ci-dessus est vérifiée dès que $k \neq 2^q - 1$. [C'est une conséquence de la stabilité de γ par rapport à la suspension (théorème III), des théorèmes de H. FREUDENTHAL et d'un théorème de J. ADEM[10]) affirmant la non-existence d'applications $f: S_{2k+1} \to S_{k+1}$ avec invariant de HOPF impair pour $k \neq 2^q - 1$].

§ 8. Champs de repères tangents à une variété

Les résultats de ce paragraphe qui sont à l'exception des théorèmes IX, X, XI indépendants de ce qui précède sont basés sur le lemme suivant:

La variété orientée M_k étant supposée immergée dans R_{k+n}, cette immersion $i: M_k \to R_{k+n}$ (de classe C^1) induit une «représentation tangentielle» continue de M_k

$$T: M_k \to H(k, n)$$

qui fait correspondre à chaque point x de M_k le k-plan orienté $T(x)$ passant par l'origine dans R_{k+n} qui est parallèle au plan tangent à $i(M_k)$ en $i(x)$.

Lemme: *Si la variété M_k possède un modèle $i(M_k)$ dans R_{k+n} et que la représentation tangentielle correspondante $T: M_k \to H(k, n)$ est homotope à zéro, M_k est parallélisable.*

---

[10]) The iteration of the STEENROD squares in algebraic topology. Proc. Nat. Acad. Sci. 38, 720—726 (1952).

Ce lemme est conséquence immédiate de ce que T étant homotope à zéro est une trace pour la fibration

$$\pi' : V_{n+k,k} \rightarrow H(k, n)$$

qui projette une suite de k vecteurs orthonormés sur le k-plan sous-tendu par ces vecteurs.

Il admet d'ailleurs une réciproque (que nous utiliserons pour $M_k = S_k$ et $M_k = P_k =$ espace projectif réel):

Si la variété M_k est parallélisable, tout modèle de M_k immergé dans un espace euclidien R_{n+k} avec $n \geqq k+1$ donne lieu à une représentation tangentielle de M_k homotope à zéro[11]).

Soit en effet

$$\omega : M_k \rightarrow V_{n+k,k}$$

l'application de M_k dans la variété de Stiefel $V_{n+k,k}$ fournie par un champ de repères tangents sur un modèle quelconque $i(M_k)$ de M_k dans R_{n+k}.

Comme $n \geqq k+1$ par hypothèse, ω est homotope à zéro; or l'application tangentielle

$$T : M_k \rightarrow H(k, n)$$

(induite par l'immersion i) est la composition de ω et de la projection

$$\pi' : V_{n+k,k} \rightarrow H(k, n)$$

déjà considérée. T est donc également homotope à zéro.

Pour la sphère nous utiliserons les notations suivantes: au plongement naturel de la sphère S_k dans R_{k+1} comme lieu géométrique des points $(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ avec $\mathrm{x}^2 = 1$, correspond, si l'on regarde R_{k+1} comme sous-espace de R_{n+k} une représentation tangentielle

$$\tau_n : S_k \rightarrow H(k, n).$$

Désignons par ε_n l'élément générateur du groupe $H_k(V_{n+k,n}; \mathrm{Z})$ que nous avons déjà introduit au § 3 et par π la projection

$$\pi : V_{n+k,n} \rightarrow H(k, n)$$

qui fait correspondre à toute suite de n vecteurs orthonormés de R_{n+k} le k-plan orthogonal à ces n vecteurs. On peut s'arranger (par des conventions d'orientation que nous n'avons pas besoin de préciser) pour que $\tau_n = \pi \cdot \varepsilon_n$

La sphère S_k est parallélisable si et seulement si l'application $\tau_n : S_k \rightarrow H(k,n)$ avec $n \geqq k+1$ est homotope à zéro.

Théorème VIII: *Si la sphère S_k est parallélisable, toute variété M_k qui peut être immergée avec un champ de repères normaux dans un espace euclidien R_{n+k} (n quelconque) l'est également.*

Pour le cas $n = 1$, voir J. Milnor l. c.[1]).

Démonstration: On ne restreint pas la généralité du théorème en supposant $n \geqq k+1$.

Choisissons un champ de repères normaux à M_k dans R_{k+n}; ce champ induit une application

$$\varphi : M_k \rightarrow V_{k+n,n}.$$

[11]) Et porte par conséquent un champ F_n de repères normaux.

Comme $V_{n+k,n}$ est $(k-1)$-connexe $(\pi_i(V_{n+k,n})=0$ pour $1 \leqq i \leqq k-1)$, il existe une application

$$\varphi' : M_k \to V_{k+n,n}$$

homotope à φ et pour laquelle $\varphi'(M_k^{(k-1)}) = \text{const.}$, $M_k^{(k-1)}$ désignant le squelette à $(k-1)$ dimensions d'une décomposition cellulaire quelconque mais fixe de M_k.

Pour chaque cellule $c_k^{(i)}$ de dimension k de $M_k^{(k)}$ l'application φ' définit un élément $a_i \cdot \varepsilon_n$ du groupe d'ahomotopie $\pi_k(V_{n+k,n})$.

Considérons l'application

$$T' = \pi \cdot \varphi' ;$$

elle jouit des propriétés suivantes:

a) T' est homotope à l'application tangentielle T correspondant à l'immersion $M_k \to R_{n+k}$,

b) T' est constant sur $M_k^{(k-1)}$; sur $c_k^{(i)}$, T' représente l'élément $a_i \cdot \tau_n$ du groupe d'homotopie $\pi_k(H(k, n))$.

La sphère S_k étant par hypothèse parallélisable, d'après la réciproque au lemme, l'application τ_n est homotope à zéro. D'après b), T' est également homotope à zéro; d'après a) T l'est aussi.

L'application tangentielle T correspondant à l'immersion $M_k \to R_{n+k}$ étant homotope à zéro, d'après le lemme, M_k est parallélisable.

Corollaire: *Pour pouvoir immerger l'espace projectif réel P_k dans R_{n+k} $(n \geqq k+1)$ avec un champ de repères normaux, il est nécessaire et suffisant que P_k soit parallélisable.*

Si P_k est parallélisable, l'existence d'un champ de repères normaux est donnée par la note[11]).

Si P_k est immergé dans R_{n+k} (n quelconque) avec un champ de repères normaux, la sphère S_k est parallélisable (car la composition des applications $p : S_k \to P_k$ et $T : P_k \to H(k, n)$ est alors homotope à zéro), et par suite du théorème VIII, l'espace projectif P_k possède également un champ de repères tangents.

Théorème IX: *Pour qu'une variété de dimension paire $M_k (k = 2r)$ que l'on peut immerger dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ de repères normaux (n quelconque) soit parallélisable, il est nécessaire et suffisant que sa caractéristique* d'EULER *soit nulle.*

Démonstration: Le champ $\mathbf{F}_n$ de repères normaux à M_k dans R_{k+n} induit une application

$$\varphi : M_k \to V_{k+n,n}$$

dont la classe, d'après le théorème VI*, est donnée par

$$\overline{\varphi}(M_k) = \tfrac{1}{2}\chi(M_k) \qquad (k = 2r).$$

Par ailleurs, on a

$$T = \pi \cdot \varphi,$$

où T est l'application tangentielle correspondant à l'immersion donnée $M_k \to R_{n+k}$.

Si $\chi(M_k) = 0$, la classe $\overline{\varphi}(M_k)$ étant également nulle l'application φ est homotope à zéro. L'application tangentielle T étant, par suite de $T = \pi\,\varphi$, également homotope à zéro, M_k est (d'après le lemme) parallélisable.

La réciproque est connue.

Théorème X: *Si une variété M_k plongée dans R_{k+1}, k impair, a une semi-caractéristique paire, elle est parallélisable.*

Démonstration: R_{k+1} étant fermé en une sphère que nous prenons pour sphère unité dans R_{k+2}, on obtient sur M_k un champ de repères normaux formé de deux vecteurs. La classe de l'application

$$\varphi : M_k \to V_{k+2,\,2}$$

fournie par ce champ de repères, $\overline{\varphi}(M_k)$, est égale mod 2 à la semi-caractéristique de M_k; si celle-ci est paire, φ est homotope à zéro et par suite M_k est parallélisable.

Le théorème X est un cas particulier du résultat suivant:

Théorème XI: *Si une variété M_k peut être plongée avec un champ de repères normaux dans un espace euclidien R_{k+n} de dimension $k+n$ telle que pour toute application $f : S_{k+n} \to S_n$ on ait $\gamma(f) = 0$, et si sa semi-caractéristique est nulle, elle est parallélisable.*

La signification de l'hypothèse $\gamma(f) = 0$ dépend de la conjecture du § 6.

En appliquant les théorèmes IX et X aux produits de sphères on trouve

Théorème XII: *Pour qu'un produit de sphères*

$$\Pi_k = S_{r_1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m} \qquad (r_i \geqq 1)$$

contenant au moins deux facteurs ($m \geqq 2$) soit parallélisable, il faut et il suffit qu'au moins un des facteurs S_{r_i} ait une dimension r_i impaire.

Autrement dit, Π_k est parallélisable si et seulement si sa caractéristique d'Euler est nulle.

Démonstration: Montrons que l'on peut plonger Π_k dans R_{k+1}. En effet, pour $m = 1$ c'est banal; supposons que

$$\Pi_{k'} = S_{r_1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_{m-1}}$$

soit plongée dans $R_{k'+1}$. Par déplacement de l'image $f(\Pi_{k'})$ de $\Pi_{k'}$ dans $R_{k'+1}$ on obtient un plongement tel que pour tout point $u \in \Pi_{k'}$ la $(k'+1)^{\text{ème}}$ composante $f_{k'+1}(u)$ de son image dans $R_{k'+1}$ soit positive; nous avons posé

$$f(u) = \{f_1(u), \ldots, f_{k'}(u), f_{k'+1}(u)\}.$$

En désignant par $\xi = \left(\xi_1, \ldots, \xi_{r_m+1}\right)$ les coordonnées $\left(\text{dans } R_{r_m+1}\right)$ d'un point courant de S_{r_m}, on peut définir le plongement

$$\varphi(\Pi_{k'} \times S_{r_m}) \subset R_{k+1}$$

de $\Pi_k = \Pi_{k'} \times S_{r_m}$ dans R_{k+1} par la formule

$$\varphi(u, \xi) = \left\{f_1(u), \ldots, f_{k'}(u), \xi_1\sqrt{f_{k'+1}(u)}, \ldots, \xi_{r_m+1}\sqrt{f_{k'+1}(u)}\right\}.$$

Il suffit alors (pour démontrer le théorème XII) de vérifier que si l'une des sphères a une dimension impaire, la semi-caractéristique est nulle.

On peut aussi achever la démonstration directement:

L'image $f(\Pi_k)$ borde dans R_{k+1} une région homéomorphe au produit

$$V_{r_1+1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m}.$$

On peut admettre que r_2 est impair en prenant les facteurs dans l'ordre désiré. Le degré de BROUWER de l'application de GAUSS $\Pi_k \to S_k$ (fournie par le plongement dans R_{k+1}) est égal à

$$c = \chi(V_{r_1+1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m}).$$

D'autre part, par suite de

$$\chi(K_1 \times K_2) = \chi(K_1) \cdot \chi(K_2),$$

la caractéristique

$$\chi(V_{r_1+1} \times S_{r_2} \times \cdots \times S_{r_m})$$

est nulle, l'une des sphères (S_{r_2}) ayant une dimension impaire et par suite une caractéristique nulle.

On a donc $c = 0$, et d'après le lemme du début du paragraphe, Π_k est parallélisable.

§ 9. Complément à un théorème de M. Morse

M. MORSE [4] considère sur une variété Σ_n orientable, de classe C^2, une fonction numérique f de classe C^2 dont les points critiques sont non-dégénérés (et par suite isolés); un point critique est dit non-dégénéré si pour la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ exprimant f à l'aide de coordonnées locales, la matrice

$$(\partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_j) \qquad [i, j = 1, 2, \ldots, n]$$

a en ce point critique le rang maximum n. On suppose en outre que les *valeurs* critiques pour deux points critiques distincts sont dictinctes.

L'ensemble des points de Σ_n satisfaisant à $f(x) = a$ est une sous-variété (que M. MORSE désigne par f^a) ayant au plus une singularité lorsque a est valeur critique.

Le théorème (5.1) de [4] donne des renseignements sur les différences $\Delta B_i = p_i(f^{c+\varepsilon}) - p_i(f^{c-\varepsilon})$, c étant une valeur critique, $\varepsilon > 0$ assez petit, le domaine de coefficients étant un corps $\mathbf{K}$ quelconque. Nous n'étudierons que le cas où n est pair pour lequel le résultat de M. MORSE s'exprime par le

Théorème (M. MORSE); *La valeur c étant prise par f en un seul point critique non-dégénéré d'index s, les différences ΔB_i ont* (pour n pair) *les valeurs suivantes:*

— *pour* $s = 0$: $\Delta B_0 = \Delta B_{n+1} = 1$,

— *pour* $s = n$: $\Delta B_{n+1} = \Delta B_0 = -1$,

— *pour* $0 < s < n,\ s \neq n/2$: *on a l'alternative* $\begin{cases} \Delta B_s = \Delta B_{n-s-1} = 1 \\ \text{ou} \\ \Delta B_{s-1} = \Delta B_{n-s} = -1, \end{cases}$

— *pour* $s = n/2$: *on a l'alternative* $\begin{cases} \Delta B_s = \Delta B_{s-1} = 1 \\ \text{ou} \\ \Delta B_{s-1} = \Delta B_s = -1 \\ \text{ou} \\ \Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0; \end{cases}$

Toutes les autres différences ΔB_i sont nulles.

Nous allons voir que la connaissance de l'homologie de Σ_n permet de décider si le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» du théorème de M. Morse peut ou non se présenter.

Soit $Q_n = f_{c-\varepsilon, c+\varepsilon}$ la région de Σ_n ayant pour bord $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ et caractérisée par les inégalités

$$c - \varepsilon \leqq f(x) \leqq c + \varepsilon;$$

le lemme 1 du § 4 appliqué à cette région nous donne

$$\chi(Q_n) = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Delta B_i + \varrho(Q, K) \qquad \text{mod } 2.$$

Pour $s \neq n/2$, on a

$$\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Delta B_i = 1 \qquad \text{mod } 2$$

comme on peut le vérifier en consultant les trois premiers cas du théorème de M. Morse.

Pour $s = n/2$, il vient

$$\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-2)} \Delta B_i = \Delta B_{s-1} = \Delta B_s .$$

La considération du champ de vecteurs tangents à Σ_n donné par le gradient de f fournit aisément

$$\chi(Q_n) = 1 \qquad \text{(au signe près);}$$

il s'ensuit

— pour $s \neq n/2$: $\varrho(Q, K) = 0$ mod 2

— pour $s = n/2$: $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 1 - \varrho(Q, K)$ mod 2.

Lemme: *Dans le théorème de* M. Morse *cité, le cas «$s = n/2$, $\mathrm{A} B_{s-1} = \mathrm{A} B_s = 0$» intervient si et seulement si le rang $\varrho(Q, K)$ de la matrice d'intersection pour $H_{n/2}(Q; K)$ est égal à 1 mod 2. ($Q = f_{c-\varepsilon, c+\varepsilon}$).*

Remarque: On peut d'ailleurs montrer en analysant de plus près l'homologie de Q_n que $0 \leqq \varrho(Q, K) \leqq 1$. Il s'ensuit que $\varrho = 1$ mod 2 et $\varrho = 1$ sont équivalents. Ceci permet d'affirmer que le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» du théorème de M. Morse *intervient si et seulement si il existe un cycle $z_{n/2}$ dans Q_n avec $S(z,z) \neq 0$.* Nous n'utiliserons pas cette remarque.

La discussion des valeurs de ϱ (au § 5) nous fournit en conséquence du lemme ci-dessus:

Le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» est impossible

— si Σ_n (n pair) peut être plongée dans un espace euclidien R_N avec un champ de repères normaux, les coefficients étant dans $\mathbf{Z}_2$,

— si n a la forme $n = 4r + 2$, Σ_{4r+2} étant quelconque, en coefficients rationnels (ou plus généralement dans un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique différente de 2).

Si au contraire, pour une variété orientable fermée Σ_n de dimension n paire, on a $\varrho(\Sigma_n) = 1$ mod 2 (ce qui a lieu p. ex. pour les espaces projectifs complexes $P\,C(2r)$ de dimension topologique $4r$) toute fonction ayant les propriétés citées admet sur Σ_n au moins un point critique d'index $s = n/2$ et pour au moins un tel point, c'est le troisième cas de l'alternative, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$, qui se présente.

Nous allons voir que si le cas «$s = n/2$, $\Delta B_{s-1} = \Delta B_s = 0$» ne se présentait pas, il s'ensuivrait $\chi(\Sigma_n) = 0 \mod 2$. Comme $\varrho(\Sigma_n) = 1 \mod 2$ implique pour une variété fermée $\chi(\Sigma_n) = 1 \mod 2$, l'assertion de l'alinéat précédent sera alors démontrée. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_N$ les valeurs critiques rangées par valeurs croissantes: $c_1 < c_2 < \cdots < c_N$; supposons que pour tout point critique $P(c_i)$, on ait $\varrho(Q^{(i)}, K) = 0 \mod 2$; on aurait

$$\chi(Q^{(i)}) = \chi^*(f^{c_i+\varepsilon}) - \chi^*(f^{c_i-\varepsilon}) \qquad \mod 2$$

pour tout i. Remarquons que $f^{c_{i-1}+\varepsilon}$ et $f^{c_i-\varepsilon}$ sont homéomorphes, donc $\chi^*(f^{c_{i-1}+\varepsilon}) = \chi^*(f^{c_i-\varepsilon})$. Par suite

$$\chi(\Sigma_n) = \sum_{i=1}^{N} \chi(Q^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N} [\chi^*(f^{c_i-\varepsilon}) - \chi^*(f^{c_i-\varepsilon})] \qquad \mod 2,$$

$$= \chi^*(f^{c_N+\varepsilon}) - \chi^*(f^{c_1-\varepsilon}) \qquad \mod 2.$$

Comme $f^{c_1-\varepsilon}$ et $f^{c_N+\varepsilon}$ sont vides, on a

$$\chi(\Sigma_n) = 0 \qquad \mod 2.$$

Ces considérations permettent de répondre à une question qui a été soulevée par R. THOM:

Se peut-il que le produit $S_p \times S_p$ borde une variété W_{2p+1} de telle sorte que ni $S_p \times b$ ni $a \times S_p$ ne bordent dans W_{2p+1} mais seulement une combinaison linéaire

$$\alpha(S_p \times b) + \beta(a \times S_p)$$

avec $\alpha \cdot \beta \neq 0$?

On voit aisément que ceci n'est au plus possible que pour p impair.

Pour $p = 2r - 1$, on construit un tel exemple de la manière suivante:

Soit $PC(2r)$ l'espace projectif complexe de dimension topologique $4r$; soit f une fonction numérique sur $PC(2r)$ satisfaisant aux hypothèses de M. MORSE (les points critiques sont non dégénérés et les valeurs critiques distinctes). D'après la remarque que nous avons faite plus haut, il existe un point critique C de cette fonction dont l'index est $2r$ et pour lequel $\varrho(Q, \mathbf{K}) = 1 \mod 2$ (Q est caractérisée par $c - \varepsilon \leqq f(x) \leqq c + \varepsilon$, en posant $c = f(C)$). L'ensemble caractérisé par $f(x) = c$ est une variété f^c avec une seule singularité en C, qui avec des coordonnées locales convenables peut être représentée dans le voisinage de C par

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2r}^2 - x_{2r+1}^2 - \cdots - x_{4r}^2 = 0.$$

Si l'on retire de f^c les points intérieurs à la boule

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{4r}^2 \leqq 2\alpha$$

on obtient une variété W_{4r-1} dont le bord est représenté par les équations

$$x_1^2 + \cdots + x_{2r}^2 - x_{2r+1}^2 - \cdots - x_{4r}^2 = 0$$
$$x_1^2 + \cdots + x_{2r}^2 + x_{2r+1}^2 + \cdots + x_{4r}^2 = 2\alpha;$$

on a donc

$$\partial W_{4r-1} \approx S_{2r-1} \times S_{2r-1}.$$

Une base d'homologie z', z'' de $H_p(\partial W_{4r-1})$, $p = 2r - 1$, est distinguée:
z' est constitué par l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_{4r})$ satisfaisant à $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2r}^2 = \alpha$, $x_{2r+1} = a_{2r+1}$, $x_{2r+2} = a_{2r+2}$, $\ldots$, $x_{4r} = a_{4r}$; les $a_{2r+1}, \ldots, a_{4r}$ étant des constantes satisfaisant à $a_{2r+1}^2 + \cdots + a_{4r}^2 = \alpha$.
z'' est obtenu en permutant dans la définition de z', x_i avec x_{2r+i} $(i = 1, 2, \ldots, 2r)$.
On vérifie que par suite de $\varrho(Q, \mathbf{K}) = 1 \bmod 2$, aucun des cycles z', z'' ne borde dans W_{4r-1}; par contre

$$\alpha \cdot z' + \beta \cdot z'' \sim 0 \qquad \text{dans } W_{4r-1}$$

pour une certaine combinaison linéaire avec $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ et $\alpha \cdot \beta \neq 0$. La démonstration consiste à reconnaître que si z' ou z'' borde dans W, tout cycle z_{2r} de Q est homologue (dans Q) à un cycle de $\partial Q = f^{c+\varepsilon} - f^{c+\varepsilon}$; comme pour un cycle z dans $f^{c+\varepsilon} - f^{c-\varepsilon}$ la self-intersection $S(z,z)$ dans Q est nulle, il s'ensuit que l'hypothèse z' ou $z'' \sim 0$ dans W implique $\varrho(Q, \mathbf{K}) = 0 \bmod 2$.

Note

Le lemme suivant contribue à élucider la signification de l'hypothèse faite au début du § 5 : X_{n+k} est plongée dans un espace euclidien R_m avec un champ de repères normaux $\mathbf{F}_{m-n-k}$ sur X_{n+k} dans R_m.

Lemme: *Si la variété X_p peut être immergée dans un espace euclidien R_{p+q} avec un champ $\mathbf{F}_q$ de repères normaux, toutes ses classes caractéristiques sont nulles à l'exception de la caractéristique d'*Euler *qui est paire.*

Démonstration: Nous utilisons la définition suivante des classes caractéristiques donnée par L. Pontrjagin [5]:
soit T l'application tangentielle

$$T : X_p \to H(p, q)$$

correspondant à l'immersion de X_p dans un espace euclidien R_{p+q}. Les classes caractéristiques x^r de X_p sont les images par l'homomorphisme dual T^* des classes de cohomologie v^r $(0 < r \leqq p)$ de $H(p, q)$: $x^r = T^* v^r$.

L. Pontrjagin a montré que les classes x^r ne dépendent que de X_p (et pas de l'immersion $X_p \to R_{p+q}$) pour q assez grand.

Supposons maintenant que X_p soit immergée dans R_{p+q} avec un champ $\mathbf{F}_q$ de repères normaux; $\mathbf{F}_q$ induit une application

$$\varphi : X_p \to V_{p+q,q}$$

et $T = \pi \cdot \varphi$, où π désigne la fibration

$$\pi : V_{p+q,q} \to H(p, q)$$

qui applique une suite de q vecteurs de R_{p+q} sur le p-plan qui leur est orthogonal (les orientations étant convenablement choisies).

Pour $0 < r < p$, on a $H^r(V_{p+q,q}) = 0$; pour $v^r \in H^r(H(p, q))$, on a donc

$$x^r = T^* v^r = \varphi^* \pi^* v^r = \varphi^*(0) = 0,$$

car $\pi^* v^r \in H^r(V_{p+q,q})$.

Pour $r = p$, utilisons

$$\varphi(X_p) \sim \overline{\varphi}(X_p) \cdot \varepsilon(S_p) \qquad \text{dans } V_{p+q,q}$$

d'où

$$T(X_p) \sim \overline{\varphi}(X_p) \cdot \tau(S_p) \qquad \text{dans } H(p,q).$$

On a alors pour une classe $v^p \in H^p(H(p,q))$ et son image $x^p = T^* v^p$:

$$x^p(X_p) = (T^* v^p)(X_p) = v^p(T(X_p)) = \overline{\varphi}(X_p) \cdot v^p(\tau(S_p)).$$

Les classes caractéristiques $s^p = \tau^* v^p$ des sphères sont nulles: $s^p(S_p) = v^p(\tau(S_p)) = 0$, à l'exception de la caractéristique d'EULER qui est paire, donc

$$x^p(X_p) = 0, \ \chi(X_p) \text{ est paire.}$$

Publications citées

[1] P. ALEXANDROFF-H. HOPF: Topologie. Springer 1935. — [2] B. ECKMANN: Systeme von Richtungsfeldern auf Sphären und stetige Lösungen linearer Gleichungen. Comm. Math. Helv. **15**, 1—26 (1942). — [3] H. HOPF: Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen. Math. Annalen **95**, 340—367 (1925). — [4] M. MORSE: Homology relations on regular orientable manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 247—258 (1952). — [5] L. PONTRJAGIN: Cycles caractéristiques des variétés différentiables. Math. Sbornik **21**, 233—283 (1947) (russe). — [6] L. PONTRJAGIN: Eine lokale Methode zur Diskussion der Abbildungen der Sphäre S^{n+k} auf die Sphäre S^n. Exposé de P. ALEXANDROFF Rome. 1950 (non publié). — [7] L. PONTRJAGIN: Classification homotopique des applications de la sphère à $(n+2)$ dimensions sur celle à n dimensions. C. r. Acad. Sci. URSS **70** (1950) (russe). — [8] E. SPANIER: Borsuk's cohomotopy groups. Ann. of Math. **50**, 203—245 (1949). — [9] E. STIEFEL: Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv. **8**, 305—353 (1935). — [10] R. THOM: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math. Helv. **28**, 17—86 (1954). — [11] H. WHITNEY: Lectures in Topology. Michigan University Press. 1941. — [12] W. T. WU: Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques. Thèse. Hermann 1952.

(Eingegangen am 8. Juli 1955)