

# L'Enseignement Mathématique

**Hausmann, J. C. / Kervaire, M.**

*SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS*

L'Enseignement Mathématique, Vol.24 (1978)

PDF erstellt am: Nov 26, 2008

## **Nutzungsbedingungen**

Mit dem Zugriff auf den vorliegenden Inhalt gelten die Nutzungsbedingungen als akzeptiert. Die angebotenen Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre, Forschung und für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrücke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und unter deren Einhaltung weitergegeben werden. Die Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern ist nur mit vorheriger schriftlicher Genehmigung des Konsortiums der Schweizer Hochschulbibliotheken möglich. Die Rechte für diese und andere Nutzungsarten der Inhalte liegen beim Herausgeber bzw. beim Verlag.

## **SEALS**

Ein Dienst des *Konsortiums der Schweizer Hochschulbibliotheken*  
c/o ETH-Bibliothek, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz

[retro@seals.ch](mailto:retro@seals.ch)

<http://retro.seals.ch>

# SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS <sup>1</sup>

par J. C. HAUSMANN et M. KERVAIRE

Rappelons la caractérisation algébrique des groupes de nœuds en grandes dimensions. Soient  $\pi$  un groupe et  $d$  un entier supérieur ou égal à 3. D'après [K], il existe un nœud différentiable  $k: S^d \rightarrow S^{d+2}$  avec

$$\pi \cong \pi_1(S^{d+2} - k(S^d))$$

si et seulement si

- (1)  $\pi$  est de présentation finie;
- (2)  $\pi$  est clôture normale d'un de ses éléments;
- (3)  $H_1(\pi) = \mathbf{Z}$  et  $H_2(\pi) = 0$ .

Dans cette note nous étudions les groupes qui possèdent ces propriétés et nous donnons une caractérisation de leur groupe dérivé  $[\pi, \pi]$ .

La principale difficulté est d'élucider la condition de finitude imposée à  $G = [\pi, \pi]$  par l'existence d'une présentation finie de  $\pi$ .

Ce problème est résolu à l'aide de la notion de *présentation dynamique* que nous exposons dans un contexte plus général.

Le problème correspondant pour les groupes d'enlacements reste ouvert.

## § 1. PRÉSENTATIONS DYNAMIQUES

Soient  $H$  un groupe,  $I$  un ensemble d'indices et  $L = L_{I,H}$  le groupe libre sur l'ensemble  $\{x_{i,a}\}$  avec  $i \in I, a \in H$ .

Le groupe  $H$  opère sur  $L$  par translation du deuxième indice des générateurs. On notera cette action  $S: H \rightarrow \text{Aut}(L)$ , i.e.

$$S_a(x_{i,b}) = x_{i,ab},$$

$i \in I, a, b \in H$ .

*Définition.* Soit  $H$  un groupe. Une *présentation  $H$ -dynamique* de  $G$  est une présentation de  $G$  de la forme

$$G = \langle x_{i,a} : R_{j,b} \rangle, i \in I, j \in J, a, b \in H,$$

<sup>1</sup>) Présenté au Colloque de Topologie et d'Algèbre, Zurich, avril 1977.

telle que

$$S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}.$$

On dira que la présentation dynamique est *finie* si les ensembles d'indices  $I$  et  $J$  sont finis.

*Remarque.* Une présentation  $H$ -dynamique d'un groupe  $G$  fournit une action de  $H$  sur  $G$  induite par l'action de  $H$  sur le groupe libre  $L_{I,H}$ .

Supposons maintenant que  $H$  soit de présentation finie. On a alors:

**THÉORÈME 1.** *Soit  $G$  un groupe muni d'une action du groupe  $H$ . Le produit semi-direct  $\pi = G \tilde{\times} H$  est de présentation finie si et seulement si  $G$  possède une présentation  $H$ -dynamique finie qui induit l'action donnée de  $H$  sur  $G$ .*

*Preuve.* Supposons d'abord  $\pi$  de présentation finie. On voit facilement que l'on peut trouver une présentation de  $\pi$  de la forme  $\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n : R_1, \dots, R_r \rangle$  telle que  $x_1, \dots, x_m$  représentent des éléments de  $G$  et  $z_1, \dots, z_n$  des éléments de  $H$ .

Soient  $X$  le groupe libre sur  $x_1, \dots, x_m$  et  $p: X * H \rightarrow \pi$  la projection évidente. Soit  $L$  le groupe libre sur l'ensemble  $\{x_{i,a}\}$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $a \in H$ . On définit un homomorphisme  $\lambda: L \rightarrow X * H$  par  $\lambda(x_{i,a}) = ax_i a^{-1}$ .

Il est clair que  $p\lambda(L) \subset G$ . En fait,  $\lambda$  est un isomorphisme de  $L$  sur  $p^{-1}(G) \subset X * H$ . En effet,  $p^{-1}(G)$  coïncide avec le noyau de la projection  $X * H \rightarrow H$ . Donc tout élément de  $p^{-1}(G)$  s'écrit de façon unique sous la forme

$$w = a_1 A_1 a_2 A_2 \dots a_N A_N (a_1 a_2 \dots a_N)^{-1}$$

avec  $A_1, \dots, A_N \in X - \{e_X\}$ ,  $a_1, \dots, a_N \in H$  et  $a_2, \dots, a_N \neq e_H$ .

On va définir un inverse  $\mu: p^{-1}(G) \rightarrow L$  de  $\lambda$ . Sur  $X$ ,  $\mu$  est donnée par  $\mu(x_i) = x_{i,e}$ , où  $e = e_H$  est l'élément neutre de  $H$ . Pour  $w \in p^{-1}(G)$  quelconque, on écrit  $w$  sous la forme canonique ci-dessus, et on définit

$$\mu(w) = S_{a_1}(\mu A_1) \cdot S_{a_1 a_2}(\mu A_2) \cdot \dots \cdot S_{a_1 \dots a_N}(\mu A_N).$$

Comme  $\lambda(S_a x) = a \lambda(x) a^{-1}$  pour tout  $x \in L$ , on vérifie immédiatement que  $\lambda \mu = 1$ . De même  $\mu \lambda = 1$ .

Il en résulte en particulier que  $p\lambda: L \rightarrow G$  est une surjection et que les opérations de  $H$  sur  $L$  induisent la conjugaison dans  $\pi$ , donc l'action donnée de  $H$  sur  $G$ .

Soient maintenant  $Z$  le groupe libre sur  $z_1, \dots, z_n$  et  $q: X * Z \rightarrow X * H$  la projection naturelle surjective. On a  $q(R_j) \in p^{-1}(G)$  pour  $j = 1, \dots, r$ .

Donc il existe un unique élément  $R_{j,e} = \mu q(R_j) \in L$  tel que  $\lambda(R_{j,e}) = q(R_j)$ . On pose ensuite  $R_{j,b} = S_b(R_{j,e})$ , de sorte que  $S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}$ .

Assertion:  $G$  admet la présentation  $H$ -dynamique

$$G = \langle x_{i,a} : R_{j,b} \rangle, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, r$$

avec projection de présentation  $p\lambda$ .

Il s'agit de démontrer que  $\text{Ker } p\lambda$  est exactement la clôture normale des éléments  $R_{j,b}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $b \in H$ .

D'abord

$$p\lambda(R_{j,b}) = p\lambda S_b R_{j,e} = p(b\lambda(R_{j,e})b^{-1}) = p(bq(R_j)b^{-1}) = 1.$$

Ensuite, si  $w \in \text{Ker } p\lambda$ , il existe un élément  $R \in X * Z$  tel que l'on ait  $\lambda w = qR$ , puisque  $q: X * Z \rightarrow X * H$  est surjective. La relation  $p\lambda w = pqR = 1$  montre que  $R$  représente 1 dans  $\pi$ , donc  $R$  est un produit de conjugués des éléments  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  et de leurs inverses. Donc  $\lambda w = qR$  est un produit de conjugués des  $q(R_j) = \lambda(R_{j,e})$  et de leurs inverses. Pour chaque terme  $U\lambda(R_{j,e}^{\pm 1})U^{-1}$ , on peut écrire  $U = a_0 A_1 a_1 \dots A_N a_N$  avec  $A_i \in X$  et  $a_i \in H$ . En utilisant

$$A(\lambda R)A^{-1} = \lambda(\lambda A \cdot R \cdot (\mu A)^{-1}) \quad \text{pour } A \in X, R \in L,$$

et

$$a(\lambda R)a^{-1} = \lambda(S_a R) \quad \text{pour } a \in H, R \in L,$$

et l'injectivité de  $\lambda$ , on voit que  $w$  est un produit de conjugués des  $R_{j,a}^{\epsilon}$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $a \in H$ ,  $\epsilon = \pm 1$ .

Inversement, si  $G$  possède une présentation  $H$ -dynamique finie, soit  $G = \langle x_{i,a} : R_{j,b} \rangle$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, s$ , qui induit l'action donnée de  $H$  sur  $G$ , et si l'on se donne une présentation finie de  $H$ , soit  $H = \langle z_1, \dots, z_n : R_{s+1}, \dots, R_r \rangle$ , on obtient pour  $\pi = G \tilde{\times} H$  la présentation

$$\pi = \langle x_{i,a}, z_1, \dots, z_n : R_{j,b}, R_{s+1}, \dots, R_r, z_j x_{i,a} z_j^{-1} = x_{i,a_j a} \rangle$$

où  $a_j$  est l'image de  $z_j \in Z$  par la projection de présentation  $Z \rightarrow H$ .

Soit  $\Psi: H \rightarrow Z$  un système de représentants des éléments de  $H$  avec  $\Psi(e) = 1$ . Les relations  $x_{i,a} = \Psi(a) x_{i,e} \Psi(a)^{-1}$  qui résultent des relations ci-dessus permettent de se limiter aux seuls générateurs  $x_1, \dots, x_m$ ,  $z_1, \dots, z_n$  avec  $x_i = x_{i,e}$ .

Soient alors  $R_{j,b}^*$  les relateurs obtenus à partir de  $R_{j,b}$  par substitution de  $\Psi(a) x_i \Psi(a)^{-1}$  pour  $x_{i,a}$ . Les relations  $S_a(R_{j,b}) = R_{j,ab}$  entraînent que  $R_{j,b}^* = z R_{j,e}^* z^{-1} \text{ mod Ker } \{Z \rightarrow H\}$ , où  $z \in Z$  représente  $b \in H$ .

(On notera que les relations  $ux_i u^{-1} = vx_i v^{-1}$ , si  $u$  et  $v \in Z$  représentent le même élément de  $H$ , sont évidemment conséquences de  $R_{s+1}, \dots, R_r$  qui définissent  $H$ .) Il en résulte que  $\pi$  admet la présentation  $\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n : R_1, \dots, R_r \rangle$ , où  $R_i = R_{i,e}^*$  pour  $i = 1, \dots, s$ .

## § 2. GROUPES DE NŒUDS

Il est maintenant facile de caractériser le sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud.

On note  $C$  le groupe cyclique infini de générateur  $z$ .

**THÉORÈME 2.** *Un groupe  $G$  est sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud, i.e. d'un groupe satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) de l'introduction, si et seulement si  $G$  admet une présentation  $C$ -dynamique finie avec automorphisme induit  $\sigma: G \rightarrow G$  tel que*

(I)  $G$  est engendré par les éléments de la forme  $x \cdot \sigma(x^{-1})$ ,  $x \in G$ ;

(II)  $H_2(G)$  est un  $\mathbb{Z}C$ -module parfait, i.e.  $\sigma_* - 1: H_2G \rightarrow H_2G$  est surjective.

*Note.* La condition (II) s'exprime homologiquement par  $H_0(C, H_2G) = 0$ . C'est sous cette forme que nous l'utiliserons.

*Preuve.* Soient  $\pi$  un groupe de nœud et  $z \in \pi$  un élément dont la clôture normale est  $\pi$  tout entier. On a  $\pi = G \tilde{\times} C$ , où  $G = [\pi, \pi]$  et  $C$  est infini cyclique engendré par  $z$ .

Comme  $\pi$  est de présentation finie, il résulte du théorème 1 que  $G$  possède une présentation  $C$ -dynamique finie avec automorphisme  $\sigma: G \rightarrow G$  donné par  $\sigma(x) = zxz^{-1}$ .

On va voir que  $\sigma$  satisfait aux conditions (I) et (II) du théorème 2.

(I) Si  $g \in G$ ,  $g$  est un produit de conjugués de  $z$  et  $z^{-1}$ , i.e.  $g = \prod_i x_i z^{\varepsilon_i} x_i^{-1}$ ,  $x_i \in \pi$ , avec  $\sum_i \varepsilon_i = 0$ . Comme  $x_i z x_i^{-1} = x_i z^a z z^{-a} x_i^{-1}$ , on peut supposer  $x_i \in G$  pour tout  $i$ . Or, avec  $x \in G$ , on a

$$xzx^{-1} = xzx^{-1}z^{-1}z = x \cdot \sigma(x^{-1}) \cdot z.$$

Il en résulte facilement que tout élément de  $G$  s'écrit comme produit d'éléments de la forme  $x \cdot \sigma(x^{-1})$  et de leurs inverses.

(II) La suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'extension  $1 \rightarrow G \rightarrow \pi \rightarrow C \rightarrow 1$ , où  $H_i(C, M) = 0$  pour  $i \geq 2$  et pour tout  $\mathbf{Z} C$ -module  $M$ , fournit la suite exacte

$$0 \rightarrow H_0(C, H_2 G) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow H_1(C, H_1 G) \rightarrow 0,$$

où  $H_2 G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module par l'action de  $C$  sur  $G$  définie plus haut. (Cette action dépend du choix de  $z$  mais on sait que l'action induite sur  $H_*(G)$  ne dépend que de l'extension.)

Comme  $\pi$  est groupe de nœud, on a  $H_2(\pi) = 0$ , et ceci entraîne  $H_0(C, H_2(G)) = 0$ , ce qui équivaut à  $H_2 G$  parfait.

Réciproquement, si  $G$  possède une présentation  $C$ -dynamique finie  $\langle x_{1,a}, \dots, x_{m,a} : R_{1,b}, \dots, R_{n,b} \rangle$  satisfaisant aux conditions (I) et (II) du théorème 2, on obtient comme au § 1 une présentation finie de  $\pi = G \tilde{\times} C$  de la forme

$$\pi = \langle x_1, \dots, x_m, z : R_1, \dots, R_n \rangle,$$

où  $x_1, \dots, x_m$  représentent des éléments de  $G$ ,  $z$  engendre  $C$  et l'automorphisme  $\sigma : G \rightarrow G$  induit par la présentation dynamique est donné par  $\sigma(x) = zxz^{-1}$ .

Comme  $G$  est engendré par les éléments de la forme  $x \cdot \sigma(x^{-1}) = xzx^{-1}z^{-1}$ , il en résulte que  $\pi$  est la clôture normale de  $z$ , et aussi  $G \subset [\pi, \pi]$ .

Comme  $\pi$  s'envoie sur  $C$  avec noyau  $G$ , on a  $G = [\pi, \pi]$  et  $H_1(\pi) = \mathbf{Z}$ . Il reste à vérifier que  $H_2(\pi) = 0$ .

La suite spectrale de l'extension  $1 \rightarrow G \rightarrow \pi \rightarrow C \rightarrow 1$  fournit encore la suite exacte

$$0 \rightarrow H_0(C, H_2 G) \rightarrow H_2(\pi) \rightarrow H_1(C, H_1(G)) \rightarrow 0.$$

Mais  $H_1(C, H_1(G)) = 0$  par un théorème de W. Dwyer [D], et la condition (II):  $H_0(C, H_2(G)) = 0$  entraîne  $H_2(\pi) = 0$ .

Le groupe  $\pi$  satisfait donc aux trois conditions (1), (2), (3) de l'introduction.

*Note.* Le théorème de Dwyer est beaucoup plus général que le cas particulier considéré ci-dessus, et sa démonstration utilise d'ailleurs la démonstration directe de ce cas particulier.

Si  $M$  désigne le  $\mathbf{Z} C$ -module  $H_1(G)$ , la condition (I) sur  $G$  implique que  $M$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module parfait, i.e.  $\sigma - 1 : M \rightarrow M$  est surjective. D'autre part  $M$  est de génération finie sur  $\mathbf{Z} C$  (finitude de la présentation

dynamique), et comme  $\mathbb{Z}C$  est un anneau noethérien, il en résulte que  $\sigma - 1 : M \rightarrow M$  est aussi injective. Or, la résolution  $0 \rightarrow \mathbb{Z}C \xrightarrow{d} \mathbb{Z}C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ , où  $d(1) = z - 1$  montre que  $H_1(C, M) = \text{Ker} \{ \sigma - 1 : M \rightarrow M \} = 0$ .

L'assertion résulte aussi du fait que  $C$  est un groupe à dualité. (Cf. [B.-E.] )

### § 3. EXEMPLES

Quels groupes abéliens peuvent être sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud ?

Dans ce paragraphe on dira qu'un automorphisme  $\sigma : G \rightarrow G$  d'un groupe abélien  $G$  est *admissible* si  $\sigma - 1 : G \rightarrow G$  et  $\sigma - 1 : H_2G \rightarrow H_2G$  sont surjectifs.

Rappelons que  $H_2G$  et la deuxième puissance extérieure  $\Lambda^2G$  sont fonctoriellement isomorphes. En effet, si l'on définit  $H_2G$  par la formule  $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$ , où  $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$  est une présentation de  $G$ , alors  $[F, F] \subset R$  pour  $G$  abélien et donc  $H_2G = [F, F]/[R, F]$ . On définit alors un isomorphisme  $f : \Lambda^2G \rightarrow H_2G$  par la formule  $f(g \wedge g') = [x, x'] \text{ mod } [R, F]$ , où  $x, x' \in F$  représentent  $g, g' \in G$  respectivement.

La condition sur  $H_2G$  est donc équivalente (pour  $G$  abélien) à la surjectivité de  $\Lambda^2\sigma - 1 : \Lambda^2G \rightarrow \Lambda^2G$ .

Considérons d'abord les groupes abéliens de type fini.

*Notations.* Si  $G$  est abélien de type fini, on notera  $T$  son sous-groupe de torsion et  $F = G/T$ . On a  $T = \bigoplus_p T_p$ ,  $p$  premier, où  $T_p$  est un  $p$ -groupe, et on notera

$$r_G = \text{rang de } F,$$

$$r_G(p^n) = \text{nombre de facteurs isomorphes à } \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \text{ dans } T_p.$$

**THÉORÈME 3.** *Un groupe abélien de type fini  $G$  se présente comme sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud si et seulement si*

- (1)  $r_G \neq 1, 2$ ,
- (2)  $r_G(2^n) \neq 1, 2$  pour tout  $n$ , et
- (3)  $r_G(3^n)$  n'est égal à 1 que pour une valeur de  $n$  au plus.

*Exemples.*  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  ne sont pas des sous-groupes dérivés d'un groupe de nœud. Par contre J. Levine démontre que ces groupes

apparaissent comme  $G/[G, G]$  avec  $G =$  groupe dérivé d'un groupe de nœud. (Voir [L], et aussi [L2] pour d'autres résultats reliés au théorème 3.)

Il s'agit de démontrer qu'un groupe abélien de type fini possède un automorphisme admissible si et seulement si il satisfait aux 3 conditions du théorème.

On peut construire des automorphismes admissibles comme suit. Soient  $f = t^m - a_m t^{m-1} - \dots - a_2 t - a_1$  un polynôme à coefficients entiers et  $\sigma_f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{Z}^m$  donné par

$$\begin{aligned}\sigma_f e_i &= e_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1, \\ \sigma_f e_m &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_m e_m,\end{aligned}$$

où  $e_1, \dots, e_m$  est la base canonique de  $\mathbf{Z}^m$ .

$f$  est le polynôme caractéristique de  $\sigma_f$  qui est donc un automorphisme si et seulement si  $f(0) = a_1 = \pm 1$ .

Dans ce cas, soit  $M_f$  le  $\mathbf{Z} C$ -module  $\mathbf{Z}^m$  muni de l'action de  $C$  définie par l'automorphisme  $\sigma_f$ . On a  $M_f = \mathbf{Z} C / (f(z))$ .

Il est clair que  $\sigma_f - 1$  est surjective (donc un automorphisme) si et seulement si  $f(1) = \pm 1$ .

On notera  $f^*$  le polynôme (unitaire) *réciroque* de  $f$ , i.e.

$$f^*(t) = f(0) t^{\deg f} f(t^{-1}).$$

LEMME 3.1. Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes comme ci-dessus; i.e.  $f, g \in \mathbf{Z}[t]$ , et  $f(0), g(0), f(1), g(1) = \pm 1$ . Supposons qu'il existe des polynômes  $U, V \in \mathbf{Z}[t]$  tels que  $Uf^* + Vg = 1$ .

Alors,  $M_f \otimes M_g$  muni de l'automorphisme  $\sigma_f \otimes \sigma_g$  est parfait.

En particulier, si  $f = g$  on conclut que  $\Lambda^2 M_f$ , quotient du  $\mathbf{Z} C$ -module parfait  $M_f \otimes M_f$ , est lui-même parfait.

*Preuve du lemme.* Le polynôme caractéristique de  $\sigma_f \otimes \sigma_g$  est  $F = \prod_{i,j} (t - \alpha_i \beta_j)$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  resp.  $\beta_1, \dots, \beta_n$  sont les racines de  $f$ , resp.  $g$ . Il s'agit de démontrer que  $F(1) = \pm 1$ . Soit  $K$  le corps des racines de  $f, g$ . Les éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  sont des unités de l'anneau  $A$  des entiers de  $K$ . Il suffit de démontrer que  $F(1)$  est également une unité, i.e.  $F(1) \notin P$  pour tout idéal premier de  $A$ .

Or,  $\prod_{i,j} (1 - \alpha_i \beta_j) = \pm \prod_{i,j} (\alpha_i^{-1} - \beta_j)$ . Les éléments  $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1} \in A$  sont les racines de  $f^*$  dans  $K$ . Dire que  $\prod_{i,j} (\alpha_i^{-1} - \beta_j)$  appartient à  $P$  c'est dire que  $f^*$  et  $g$  ont une racine commune dans le corps résiduel  $A/P$ , extension de  $\mathbf{F}_p$ , où  $\mathbf{Z}_p = P \cap \mathbf{Z}$ . Ceci contredit l'équation  $Uf^* + Vg = 1$  lue mod  $p$ .



Cet argument montre que si l'on a seulement  $Uf^* + Vg = c \neq 0$ , alors  $(M_f/p^m M_f) \otimes (M_g/p^n M_g)$  est parfait pourvu que  $p$  ne divise pas  $c$ .

On considère les 3 polynômes

$$f = t^3 - t + 1$$

$$g = t^4 - 2t^2 + t + 1$$

$$h = t^5 - t^2 + 1$$

et les modules correspondants  $M_f, M_g, M_h$  de dimensions 3, 4, 5 respectivement. Ces modules sont parfaits. On les notera  $M_3, M_4, M_5$ . De plus,  $f, g, h$  satisfont à l'hypothèse du lemme. D'abord tout  $f_k = t^{2k+1} - t^k + 1$  satisfait à l'identité

$$(1 + t + \dots + t^k) \cdot f_k^* - (t + t^2 + \dots + t^k) \cdot f_k = 1,$$

or  $f = f_1, h = f_2$ . On vérifie ensuite l'identité

$$(2 - 2t - t^2 + t^3) \cdot g^* - (1 - 3t + t^3) \cdot g = 1$$

et celles-ci:

$$(2 - t^2) \cdot f^* + (-1 + t) \cdot g = 1,$$

$$(-1 + 3t - t^2 + t^3 - 2t^4) \cdot f^* + (2 - 3t + 2t^2) \cdot h = 1,$$

$$(t - 2t^2 - t^3 - 2t^4) \cdot g^* + (1 - t + 3t^2 + 2t^3) \cdot h = 1$$

qui montrent que tous les produits tensoriels  $M_i \otimes M_j, i, j = 3, 4, 5$  et les puissances extérieures  $\Lambda^2 M_i, i = 3, 4, 5$  sont des  $\mathbb{Z} C$ -modules parfaits.

Nous avons encore besoin du module  $M_2 = \mathbb{Z} e_1 + \mathbb{Z} e_2$  muni de l'automorphisme  $\sigma_\phi$  défini par  $\sigma_\phi e_1 = e_2, \sigma_\phi e_2 = e_1 - e_2$  de polynôme caractéristique  $\phi = t^2 + t - 1 \in \mathbb{Z}[t]$ .

Le module  $M_2$  est parfait et on a  $\Lambda^2 M_2 = \mathbb{Z}$  avec l'automorphisme  $\Lambda^2 \sigma_\phi = -1$ . Donc,  $\sigma_\phi$  est admissible pour  $M_2/3^n M_2$  pour tout entier positif  $n$ .

Soit alors  $G = F \oplus T$  un groupe abélien satisfaisant aux hypothèses du théorème 3. L'entier  $r_G = \text{rang } F$ , s'il est non-nul, est  $\geq 3$  et peut donc s'écrire sous la forme  $r_G = 3m_3 + 4m_4 + 5m_5$  avec  $m_3, m_4, m_5 \geq 0$ . On munit  $F$  de la structure de  $\mathbb{Z} C$ -module définie par  $m_3 M_3 + m_4 M_4 + m_5 M_5$ . De même pour  $T_2 = \bigoplus_n r_G(2^n) \cdot (\mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z})$ , on a pour tout  $n$ ,  $r_G(2^n) = 0$  ou  $\geq 3$ . On peut donc choisir une décomposition  $r_G(2^n) = 3a + 4b + 5c$  avec  $a, b, c$  entiers  $\geq 0$ . On imprime sur  $r_G(2^n) \cdot (\mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z})$  la structure de  $\mathbb{Z} C$ -module définie par  $a(M_3/2^n M_3) + b(M_4/2^n M_4) + c(M_5/2^n M_5)$ .

Pour  $T_3$  on procède de même avec les facteurs  $r_G(3^n) \cdot (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$  lorsque  $r_G(3^n) \geq 3$ . Si  $r_G(3^n) = 2$ , on prend  $M_2/3^n M_2$ . Enfin, si  $r_G(3^n) = 1$ , ce qui ne peut arriver que pour une seule valeur de  $n$  au plus, on définit  $\sigma: \mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z}$  par  $\sigma(x) = -x$ .

Finalement, pour  $T_p$ ,  $p \geq 5$ , on utilise le lemme suivant.

LEMME 3.2. *Pour tout nombre premier  $p \geq 5$ , il existe un entier  $a_p \not\equiv 0, 1, -1 \pmod{p}$  tel que  $f(a_p) \not\equiv 0, g(a_p) \not\equiv 0$ , et  $h(a_p) \not\equiv 0 \pmod{p}$ .*

On définit  $\sigma_p: T_p \rightarrow T_p$  par  $\sigma_p(x) = a_p^{-1} \cdot x \pmod{p^e}$ , où  $p^e$  est l'exposant de  $T_p$ . On voit que  $T_p$  et  $\Lambda^2 T_p$  sont parfaits.

*Preuve du lemme.* Le polynôme  $f \cdot g \cdot h$  de degré 12 a au plus 12 racines dans  $\mathbf{F}_p$ . Si  $p \geq 17$ , il existe donc  $a_p \not\equiv 0, 1, -1$  et également diffèrent mod  $p$  des racines éventuelles de  $f \cdot g \cdot h$  dans  $\mathbf{F}_p$ . Pour  $p = 5$ , on prend  $a_5 = 2$ . Pour  $p = 7, 11$  ou  $13$  le nombre  $a_p = 3$  convient.

Il reste à vérifier que l'automorphisme  $\sigma: G \rightarrow G$  somme directe des automorphismes construits ci-dessus, est admissible.

D'abord  $G$  est somme directe de modules parfaits, donc  $G$  est parfait.

$\Lambda^2 G$  est somme directe de  $\mathbf{Z} C$ -modules qui sont tous des quotients de modules de l'un des types suivants, où  $i, j = 3, 4$  ou  $5$ :

- |                                                  |                                                           |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| (i) $M_i \otimes M_j$ ,                          | (v) $(M_2/3^m M_2) \otimes (\mathbf{Z}/3^n \mathbf{Z})$ , |
| (ii) $M_i \otimes (M_2/3^n M_2)$ ,               | (vi) $\Lambda^2 T_p$ pour $p \geq 5$ , et                 |
| (iii) $(M_2/3^m M_2) \otimes (M_2/3^n M_2)$ ,    | (vii) $M_i \otimes T_p$ pour $p \geq 5$ .                 |
| (iv) $M_i \otimes (\mathbf{Z}/3^n \mathbf{Z})$ , |                                                           |

(Le type  $(\mathbf{Z}/3^m \mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/3^n \mathbf{Z})$  n'apparaît pas en vertu de la condition (3) du théorème.)

Dans cette liste, les produits tensoriels  $M_i \otimes M_j$  sont parfaits en vertu du lemme 3.1. Ceux du type (ii) sont parfaits car  $f^*, g^*, h^*$  sont premiers à  $\phi \pmod{3^n}$  comme on le vérifie facilement. Pour ceux du type (iii), on utilise l'identité

$$(1+t)\phi^* + (1-t)\phi = -2 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Pour les types (iv) et (v), on remarque que  $f^*, g^*, h^*$  et  $\phi^*$  prennent en  $-1$  (la valeur propre de  $\sigma$  sur  $\mathbf{Z}/3^n \mathbf{Z}$ ) des valeurs premières à 3.

$\Lambda^2 T_p$  est parfait car  $\Lambda^2 \sigma_p$  est l'homothétie de rapport  $a_p^{-2} \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ . Enfin les modules  $M_i \otimes T_p$  sont parfaits car  $f(a_p), g(a_p)$  et  $h(a_p)$  sont inversibles mod  $p^l$  par le lemme 3.2.

Le module  $\Lambda^2 G$  est donc parfait.

Réciproquement, les conditions du théorème 3 sont nécessaires pour que  $G$  possède un automorphisme admissible.

On observe d'abord que si  $G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module satisfaisant  $H_0(C, H_1 G) = 0$ ,  $H_0(C, H_2 G) = 0$ , il en est de même de tout module quotient. La formule  $H_2 G = R \cap [F, F]/[R, F]$ , où  $1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$  est une présentation de  $G$ , montre immédiatement qu'une surjection  $G \rightarrow G'$  de groupes abéliens induit une surjection  $H_2 G \rightarrow H_2 G'$ . Cela résulte évidemment aussi de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Ensuite, comme on l'a déjà observé, tout module quotient d'un module parfait est parfait.

Si  $G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module parfait et de *type fini*, alors tout sous  $\mathbf{Z} C$ -module  $G_0$  de  $G$  est également parfait. (Regarder la suite croissante de sous-modules  $G_i = \{x \in G \mid (\sigma - 1)^i x \in G_0\}$ .) Il en résulte que si  $G$  est un  $\mathbf{Z} C$ -module de type fini tel que  $H_0(C, H_1 G) = 0$  et  $H_0(C, H_2 G) = 0$  et si  $G_0 \subset G$  est un sous  $\mathbf{Z} C$ -module de  $G$  et un  $\mathbf{Z}$ -facteur direct, alors  $H_0(C, H_1 G_0) = 0$  et  $H_0(C, H_2 G_0) = 0$ . Il suffit de remarquer que  $H_2 G_0$  est sous  $\mathbf{Z} C$ -module de  $H_2 G$  qui est de type fini.

Soit maintenant  $G$  un groupe abélien de type fini muni d'une structure de  $\mathbf{Z} C$ -module telle que  $G$  et  $H_2 G$  soient parfaits.

Comme le sous-groupe de  $\mathbf{Z}$ -torsion  $T \subset G$  est un sous  $\mathbf{Z} C$ -module,  $F = G/T$  possède un automorphisme admissible. On a donc  $\text{rang } F \neq 1, 2$ . (Car  $H_2(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ .) C'est la condition (1) du théorème 3.

Pour obtenir les conditions (2) et (3), on observe d'abord que  $H_0(C, T_p) = 0$  et  $H_0(C, H_2 T_p) = 0$  pour tout  $p$ . De même, avec  $V = T_p/pT_p$ , on a en vertu des remarques précédentes  $H_0(C, V) = 0$  et  $H_0(C, H_2 V) = 0$ .

D'autre part l'action de  $C$  sur  $V$  se factorise par l'action d'un groupe cyclique fini  $C_m$  d'ordre  $m$ . Soit  $m = q \cdot s$  avec  $q = p^f$  et  $s$  premier à  $p$ . L'action d'un  $p$ -groupe sur  $V$  étant unipotente,  $V$  ne peut être un  $\mathbf{Z} C_m$ -module parfait que si  $s > 1$  et  $H_0(C_s, V) = 0$ , où  $C_s$  est le sous-groupe d'ordre  $s$  de  $C_m$ . Comme  $s$  est premier à  $p$ ,  $V$  est un  $\mathbf{F}_p C_s$ -module semi-simple. Une famille de sous-modules de  $V$  est fournie par les images dans  $V$  des noyaux  $\text{Ker } \{p^n: T_p \rightarrow T_p\}$ . Soient  $V_0 = 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$  ces images. On notera que  $\dim V_n/V_{n-1} = r_G(p^n)$ . Comme  $V$  est  $\mathbf{F}_p C_s$ -module semi-simple, il en résulte que  $V$  est somme directe de sous  $\mathbf{F}_p C_s$ -modules  $U_n \cong V_n/V_{n-1}$  avec  $\dim U_n = r_G(p^n)$ . On a donc  $H_0(C_s, U_n) = 0$  et  $H_0(C_s, H_2 U_n) = 0$  pour tout  $n$ .

Pour  $p = 2$  cela fournit immédiatement la condition (2).

Pour  $p = 3$ , on observe que si  $\dim U_m = \dim U_n = 1$  pour  $m \neq n$ , le générateur  $\tau = \sigma^q$  de  $C_s$  opère nécessairement par  $\tau(x) = -x$ , et le

produit tensoriel  $U_m \otimes U_n$  est sous-module trivial de  $H_2 V$  ce qui contredit la condition  $H_0(C_s, H_2 V) = 0$ .

Dans le cas où  $G$  n'est pas de type fini nous sommes loin de pouvoir faire une analyse complète et nous nous bornons à quelques remarques.

D'après un théorème de D. W. Sumners (Théorème 2.1 de [S]), tout  $\mathbf{Z} C$ -module parfait de génération finie  $G$  possède un sous-module  $G_0$  d'indice fini de la forme

$$G_0 \cong \mathbf{Z} C / (f_1) + \dots + \mathbf{Z} C / (f_r).$$

Comme  $G_0$  est évidemment parfait, on doit avoir  $f_i(1) = \pm 1$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  et  $G_0$  est sans  $\mathbf{Z}$ -torsion.

Le  $\mathbf{Z} C$ -module  $G_0$  est lui-même sous-groupe dérivé de groupe de nœud.

En effet, si  $H_2 G$  est un module parfait, il en est de même de  $H_2 (G/T)$ , car le sous-module de  $\mathbf{Z}$ -torsion  $T$  d'un  $\mathbf{Z} C$ -module parfait de type fini est fini et donc  $\mathbf{Z}$ -facteur direct. L'inclusion  $G_0 \rightarrow G/T$  induit une injection  $H_2 G_0 \rightarrow H_2 (G/T)$ . Donc  $H_2 G_0$  est parfait.

Enfin, il est facile de vérifier que si  $G$  admet une présentation  $H$ -dynamique finie est si  $G_0$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G$  invariant par l'action de  $H$ , alors  $G_0$  admet aussi une présentation  $H$ -dynamique finie. (On se ramène au cas classique en considérant  $G_0 \tilde{\times} H \rightarrow G \tilde{\times} H$ .)

PROPOSITION. *Le  $\mathbf{Z} C$ -module*

$$G_0 \cong \mathbf{Z} C / (f_1) + \dots + \mathbf{Z} C / (f_r)$$

*admet (comme groupe abélien) une présentation  $C$ -dynamique finie induisant l'action donnée de  $C$  sur  $G_0$  si et seulement si le produit  $f_1 \dots f_r$  a son terme dominant ou son terme constant égal à  $\pm 1$ .*

(Les éléments  $f_i \in \mathbf{Z} C$  sont supposés écrits comme polynômes de terme constant non-nul.)

*Exemple.* Si  $f_1 = z^2 + az + b$  et  $f_2 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ , le groupe  $G_0 = \mathbf{Z} C / (f_1) + \mathbf{Z} C / (f_2)$  avec l'action naturelle de  $C$  admet la présentation  $C$ -dynamique suivante:

Générateurs:

$$x_m, y_m \quad m \in \mathbf{Z},$$

représentant  $z^m$  dans le premier et deuxième facteur respectivement.

Relateurs:

$$\begin{aligned} & x_{m+2} x_{m+1}^a x_m^b, \quad y_{m+3} y_{m+2}^\alpha y_{m+1}^\beta y_m^\gamma \\ & [x_m, x_{m+1}], [y_m, y_{m+1}], [y_m, y_{m+2}] \\ & [x_{m+1}, y_m], [x_m, y_m], [x_m, y_{m+1}], [x_m, y_{m+2}] \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de traiter le cas général. La nécessité de la condition résulte du théorème C de [B.-S.].

Compte-tenu de la classification des groupes abéliens de rang 1, ceci donne:

Le seul groupe abélien de rang 1, sans  $\mathbf{Z}$ -torsion, qui se présente comme groupe dérivé d'un groupe de nœud est le groupe  $\mathbf{Z} [\frac{1}{2}]$ . L'automorphisme est alors nécessairement la multiplication par 2 (ou son inverse).

En rangs  $n \geq 2$ , on peut classer les modules  $G_0 = \mathbf{Z}C/(f)$  admissibles, où  $f = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  pour les petites valeurs de  $n$ .

La condition que  $G_0$  soit parfait donne

$$(1) \quad 1 + \sum_{i=1}^n a_i = \varepsilon. \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Pour le groupe  $H_0(C, H_2 G_0)$  on trouve la matrice de présentation (à  $n-1$  lignes et  $n-1$  colonnes):

$$X_f = \begin{bmatrix} a_n & & & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \\ \dots & & \ddots & \\ & & & a_n \\ a_2 & \dots & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-3} & \dots & & & 1 \\ \dots & & & & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

obtenue en substituant  $z = 1$  dans une matrice de présentation de  $\Lambda^2 G_0$  sur les  $\mathbf{Z}C$ -générateurs  $1 \wedge z, \dots, 1 \wedge z^{n-1}$ .

La condition  $H_0(C, H_2 G_0) = 0$  donne

$$(2) \quad \det X_f = \delta. \quad (\delta = \pm 1.)$$

Pour  $n = 2$ , on a  $X_f = (a_2 - 1)$ . On obtient le système

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 &= \varepsilon, \\ a_2 - 1 &= \delta. \end{aligned}$$

Seules solutions:  $a_1 = -4, -2$  et  $a_2 = 2$  qui donnent deux modules tous deux isomorphes à  $\mathbf{Z} [\frac{1}{2}] \oplus \mathbf{Z} [\frac{1}{2}]$  comme groupes abéliens.

Pour  $n = 3$ ,

$$X_f = \begin{bmatrix} a_3 - a_1 & -1 \\ a_2 - 1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que les seuls polynômes  $f = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$  tels que

$$1 + a_1 + a_2 + a_3 = \varepsilon,$$

$$\det X_f = \delta,$$

sont ceux de la liste suivante:

$$z^3 - 2z^2 + (1 + \varepsilon)z + c(z-1)^2 \quad \text{pour tout } c \in \mathbf{Z},$$

$$z^3 + \varepsilon z - 1 + cz(z-1) \quad \text{pour tout } c \in \mathbf{Z}.$$

$$z^3 - z + 1$$

$$z^3 - 6z^2 + 8z - 2$$

$$z^3 - 6z^2 + 9z - 3$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 2$$

$$z^3 - 2z^2 - z + 1$$

$$z^3 - 4z^2 + 5z - 3.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [B.-E.] BIERI, R. and B. ECKMANN. Groups with homological duality generalizing Poincaré duality. *Inventiones Math.* 20 (1973), pp. 103-124.
- [B.-S.] BIERI, R. and R. STREBEL. Almost finitely presented soluble groups. (*To appear in Comm. Math. Helv.*)
- [D] DWYER, W. Vanishing homology over nilpotent groups. *Proc. A.M.S.* 49 (1975), pp. 8-12.
- [K] KERVAIRE, M. Les nœuds de dimensions supérieures. *Bull. Soc. Math. France* 93 (1965), pp. 225-271.
- [L] LEVINE, J. Knot modules I. *Trans. AMS* 229 (1977), pp. 1-50.
- [L2] ——— Some result in higher dimensional knot groups. *Knots, Les-Plans-sur-Bex 1977, à paraître en Springer Lecture Notes.*
- [S] SUMNERS, D. W. Polynomial invariants and the integral homology of coverings of knots and links. *Inventiones Math.* 15 (1972), pp. 78-90.

(Reçu le 5 septembre 1977)

J. C. Hausmann

M. Kervaire

Section de Mathématiques

Case postale 124

CH-1211 Genève 24

## Monographies de l'Enseignement Mathématique

---

2. H. HADWIGER et H. DEBRUNNER, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*; 20 Fr. suisses.
3. J.-E. HOFMANN, *Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-Mathematik*; 16 Fr. suisses.
4. H. LEBESGUE, *Notices d'histoire des mathématiques*; 16 Fr. suisses.
5. J. BRACONNIER, *L'analyse harmonique dans les groupes abéliens*; 7 Fr. suisses.
15. K. KURATOWSKI, *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*; 45 Fr. suisses, relié. (La vente de ce volume en France, Suisse, Canada, Belgique, Espagne et Amérique du Sud est assurée, en exclusivité, par les éditions Dunod.)
16. LEVY, MANDELBROJT, MALGRANGE, MALLIAVIN, *La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard*; 12 Fr. suisses.
17. DOUADY, GRAUERT, MALGRANGE, NARASIMHAN, STEIN, *Topics in several complex variables*; 15 Fr. suisses.
- \* 18. L. HÖRMANDER, *On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations*; 69 pages, 10 Fr. suisses.
- \* 19. W. M. SCHMIDT, *Approximation to algebraic numbers*; 70 pages, 12 Fr. suisses.
- \* 20. J. L. LIONS, *Sur le contrôle optimal de systèmes distribués*; 45 pages, 12 Fr. suisses.
- \* 21. F. HIRZEBRUCH, *Hilbert modular surfaces*; 103 pages, 22 Fr. suisses.
22. A. WEIL, *Essais historiques sur la théorie des nombres*; 56 pages, 16 Fr. suisses.
23. J. GUENOT et R. NARASIMHAN, *Introduction à la théorie des surfaces de Riemann*; 214 pages, 35 Fr. suisses.
- \* 24. DAVID MUMFORD, *Stability of projective varieties*; 76 pages, 21 Fr. suisses.
- \* 25. A. G. VITUSHKIN, *On representation of functions by means of superpositions and related topics*; 68 pages, 18 Fr. suisses.
- \* Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale.

Les monographies 1 et 6 à 14 sont épuisées

En vente au Secrétariat de l'Enseignement Mathématique

Case postale 124

1211 GENÈVE 24 (Suisse)

CCP 12-12042