Sur le fibré normal à une sphère immergée dans
un espace euclidien.

Kervaire, Michel A.

in: Commentarii mathematici Helvetici | Commentarii Mathematici Helvetici |
Article

121 - 131

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library
For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek
Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen
Germany
Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:
Niedersaechisische Staats- und Universitaetsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum
37070 Goettingen, Germany, Email: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien

Par MICHEL A. KERVAIRE, Genève

Soit $f: S_d \to E_{d+n}$ une *immersion régulière* de la sphère de dimension d dans l'espace euclidien à $d+n$ dimensions. Par définition, la matrice fonctionnelle des coordonnées de $f(x)$ relativement à des coordonnées locales sur S_d est de rang maximum d en tout point $x \in S_d$. Si l'on associe à tout $x \in S_d$ le n-plan normal à $f(S_d)$ en $f(x)$, on obtient une application continue τ (pourvu que f soit différentiable de classe C^1 au moins, ce que nous supposerons) de S_d dans la GRASSMANNienne $G_{d+n,n}$ des n-plans orientés dans E_{d+n}. L'application $\tau: S_d \to G_{d+n,n}$ induit un fibré sur S_d de groupe structural $SO(n)$, usuellement appelé *fibré normal* induit par l'immersion f. Nous le dénoterons par $\mathfrak{N}_f$.

Notre but est de caractériser parmi tous les fibrés en sphères sur S_d de groupe structural $SO(n)$, ceux qui sont fibrés normaux induits par une immersion $f: S_d \to E_{d+n}$. La solution de ce problème, abordé en [3], dépend essentiellement de résultats récents de S. SMALE [8] et [9]. Cf. également R. THOM [11].

1. Enoncé du résultat

Considérons la fibration $SO(d+n)/SO(n) = V_{d+n,d}$ où $V_{d+n,d}$ désigne la variété de STIEFEL des suites de d vecteurs orthonormés dans E_{d+n}. Soit ∂ l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie de cette fibration:

$$\cdots \to \pi_d(SO(d+n)) \xrightarrow{\psi_*} \pi_d(V_{d+n,d}) \xrightarrow{\partial} \pi_{d-1}(SO(n)) \to \pi_{d-1}(SO(d+n)) \to \cdots \tag{1.1}$$

D'autre part, nous avons la fibration $V_{d+n,n}/SO(n) = G_{d+n,n}$ où la projection $p: V_{d+n,n} \to G_{d+n,n}$ associe à tout système de n vecteurs orthonormés de E_{d+n} leur enveloppe linéaire orientée. Nous désignerons par α_f l'image de la classe d'homotopie de τ par l'opérateur bord ∂' de la suite exacte d'homotopie de cette fibration:

$$\cdots \to \pi_d(V_{d+n,n}) \xrightarrow{p_*} \pi_d(G_{d+n,n}) \xrightarrow{\partial'} \pi_{d-1}(SO(n)) \to \pi_{d-1}(V_{d+n,n}) \to \cdots$$

$$\alpha_f = \partial' \tau \, . \tag{1.2}$$

On sait (cf. [10], 18.5 et 18.6) que α_f (appelé *application caractéristique* de $\mathfrak{N}_f$) caractérise univoquement la classe d'équivalence du fibré $\mathfrak{N}_f$. On a le

Théorème (1.3). *L'ensemble des* $\alpha \in \pi_{d-1}(SO(n))$ *qui correspondent aux fibrés sur* S_d *de groupe structural* $SO(n)$ *induits par une immersion* f: $S_d \to E_{d+n}$ *est le sous-groupe de* $\pi_{d-1}(SO(n))$ *image de* $\pi_d(V_{d+n,d})$ *par l'opérateur* ∂ *de la suite exacte* (1.1).

Dans la mesure où l'on connaît (cf. [7]) les groupes $\pi_d(V_{d+n,d})$ ainsi que l'homomorphisme $\partial : \pi_d(V_{d+n,d}) \to \pi_{d-1}(SO(n))$, on peut expliciter le sous-groupe {Image ∂} que nous désignerons par $J_{d,n}$. Pour les petites valeurs de d, on obtient le tableau ci-dessous où Z_q désigne le groupe cyclique d'ordre q, Z le groupe cyclique infini et $+$ la somme directe.

	$n = 3$	4	5	6	7	8	9
$d = 3$	0	0	0	0	0	0	0
4	0	Z	0	0	0	0	0
5	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2	0	0	0	0
6	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2	Z	0	0	0
7	Z_{12}	$Z_{12} + Z_{12}$	0	0	0	0	0
8	Z_2	$Z_2 + Z_2$	0	0	0	Z	0
9	Z_2	$Z_2 + Z_2$	0	Z_{12}	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2

Dans la diagonale, $d = n$ (cf. [3]), les groupes $J_{d,d}$ sont donnés par $J_{d,d} = Z$ pour d pair, $J_{d,d} = Z_2$ pour d impair et S_d non parallélisable (c'est-à dire $d \neq 1, 3, 7$ d'après [4]) et $J_{d,d} = 0$ pour S_d parallélisable, c'est-à-dire $d = 1, 3, 7$. Pour $d < n$, $J_{d,n} = 0$.

2. Addition des immersions

Soient α et β les applications caractéristiques des fibrés normaux $\mathfrak{N}_f$ et $\mathfrak{N}_g$ sur S_d induits par des immersions f et g de S_d dans E_{d+n}. Le théorème (1.3) affirme tout d'abord que la classe $\alpha + \beta$ est également caractéristique d'un fibré normal sur S_d induit par une immersion h: $S_d \to E_{d+n}$.

Une telle immersion h peut être obtenue comme suit:

Soit $S_d \subset E_{d+1}$ avec les coordonnées $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ caractérisée par $\Sigma_i (x_i)^2 = 1$ et soient a, a' les points $(1, 0, \ldots, 0)$ et $(-1, 0, \ldots, 0)$ respectivement. En $f(a)$ et $g(a')$ choisissons des $(d+n)$-repères $u_1, \ldots, u_{d+n}$ et $v_1, \ldots, v_{d+n}$ induisant l'orientation positive de E_{d+n} et tels que $u_1, \ldots, u_d$ (respectivement $v_1, \ldots, v_d$) soient tangents à $f(S_d)$ (respectivement $g(S_d)$) en $f(a)$ (respectivement $g(a')$) et fournissent l'orientation positive de $f(S_d)$ (respectivement l'orientation *négative* de $g(S_d)$). On peut supposer, après déplacement éventuel de l'image $g(S_d)$ dans E_{d+n}, que $u_1 = v_1, \ldots,$ $u_d = v_d$ (en tant que vecteurs libres de E_{d+n}), et que $g(a') = f(a) + u_{d+n}$. Cf. la construction décrite dans [6], § II. Il est commode de déformer, si nécessaire, les applications f et g dans des voisinages

$$U = \{1 - \varepsilon \leqq x_0 \leqq 1\} \quad \text{et} \quad U' = \{-1 \leqq x_0 \leqq -1 + \varepsilon\}$$

de a et a' respectivement pour leur donner la forme

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \ldots, x_d) &= f(a) + \Sigma_i x_i u_i \quad \text{pour} \quad 1 - \varepsilon \leqq x_0 \leqq 1\,, \\ g(x_0, x_1, \ldots, x_d) &= g(a') + \Sigma_i x_i v_i \quad \text{pour} \quad -1 \leqq x_0 \leqq -1 + \varepsilon\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

où la somme sur i s'étend de 1 à d. (C'est ce que S. SMALE appelle la «normalisation» de l'application f dans le voisinage de $f(a)$). Ces expressions sont en accord avec les orientations des systèmes $u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d$ pourvu que l'on oriente S_d comme bord de la boule $\Sigma_i (x_i)^2 \leqq 1$, celle-ci ayant l'orientation induite par E_{d+1}.

L'immersion h est obtenue en «joignant $f(S_d)$ et $g(S_d)$ par un tube de $f(a)$ à $g(a')$ d'axe $f(a) + t u_{d+n}$».

En formules:

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_d) = f(3x_0 + 2, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_d) \quad \text{pour} \quad -1 \leqq x_0 \leqq -(1+\varepsilon)/3$$

avec $\lambda^2(x_0 - 1) = 3(3x_0 + 1)$. De façon analogue,

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_d) = g(3x_0 - 2, \lambda' x_1, \ldots, \lambda' x_d) \quad \text{pour} \quad (1 + \varepsilon)/3 \leqq x_0 \leqq 1\,,$$

avec $\lambda'^2(x_0 + 1) = 3(3x_0 - 1)$. Dans la région intermédiaire, on pose

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_d) = f(a) + t u_{d+n} + r(t) \Sigma_{i=1}^d x_i u_i\,,$$

pour $-(1 + \varepsilon)/3 \leqq x_0 \leqq (1 + \varepsilon)/3$

avec $t = \sin^2 \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{3}{1+\varepsilon} x_0 + 1\right)$, $r(t) = c(1 - t(1 - t))$ et $c = 3\sqrt{\varepsilon/(4 + \varepsilon)}$.

L'application h est une immersion régulière. ($0 < \varepsilon < 1/9$.)

Lemme 2.2. *On a* $\tau_h = \tau_f + \tau_g - \tau_s$, où $s : S_d \to E_{d+n}$ *désigne le plongement standard et* $\tau_s : S_d \to G_{d+n,n}$ *l'application induite*[1]).

---

[1]) On comparera ce lemme avec le lemme (2), § II de [6] dont il est la généralisation. Par *plongement standard* $S_d \to E_{d+n}$ nous entendons le plongement donné par

$$(x_1, \ldots x_d) \to (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0),$$

ou tout autre plongement qui dérive de celui-là par déformation régulière.

Comme $\partial' \tau_s = 0$, on obtient le

Corollaire 2.3. $\alpha_h = \alpha_f + \alpha_g$.

Pour démontrer le lemme 2.2, considérons le plongement $s : S_d \to E_{d+n}$ donné par $s(x_0, x_1, \ldots, x_d) = f(a) + \frac{1}{2}(x_0 + 1) u_{d+n} + \frac{c}{2} \Sigma_i x_i u_i$. On remarquera que les restrictions à l'équateur $\{x_0 = 0\}$ des applications h et s d'une part, τ_h et τ_s d'autre part coïncident. Les applications $\tau_h + \tau_s$ et $\tau_f + \tau_g$ peuvent se factoriser par $\beta : X \to G_{d+n,n}$ où $X \subset E_{d+2}$ est la réunion de

$$S_d = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_{d+1}) \in E_{d+2} \mid x_{d+1} = 0, x^2 = 1\}$$

et $S'_d = \{x \in E_{d+2} \mid x_0 = 0, x^2 = 1\}$, l'application β étant définie par

$$\beta \mid S_d = \tau_h \text{ et } \beta(0, x_1, \ldots, x_{d+1}) = \tau_s(x_1, \ldots, x_{d+1}).$$

Pour $x = (0, x_1, \ldots, x_d, 0) \in S_d \cap S'_d$, on a $\tau_h(x) = \tau_s(x)$.

Les applications $\sigma_1, \sigma_2 : S_d \to X$, telles que $\tau_h + \tau_s = \beta \circ \sigma_1$ et $\tau_f + \tau_g = \beta \circ \sigma_2$ peuvent être décrites comme suit: σ_1, σ_2 sont injectives sur $\{x_0 \neq 0\}$ et envoient $\{x_0 = 0\}$ sur un point P de $S_d \cap S'_d$; σ_1 envoie $\{x_0 > 0\}$ sur $S_d - P$ et $\{x_0 < 0\}$ sur $S'_d - P$; pour définir σ_2 désignons par H_+, H_- les hémisphères $\{x_0 \geqq 0\}$ et $\{x_0 \leqq 0\}$ de S_d et H'_+, H'_- les hémisphères $\{x_{d+1} \geqq 0\}$ et $\{x_{d+1} \leqq 0\}$ de S'_d. σ_2 envoie $\{x_0 > 0\}$ sur $(H_+ \cup H'_-) - P$ et $\{x_0 < 0\}$ sur $(H_- \cup H'_+) - P$.

Comme X est connexe, simplement connexe et acyclique en dimensions $< d$, on a $\pi_d(X) \cong H_d(X)$. Les cycles $\sigma_1(S_d)$, $\sigma_2(S_d)$ étant homologues, les applications σ_1, σ_2 sont homotopes. Par suite, $\tau_h + \tau_s \simeq \tau_f + \tau_g$.

3. L'invariant de Smale

Soit f: $S_d \to E_{d+n}$ une immersion régulière. S. SMALE [8, 9] associe à la classe d'homotopie régulière de f un élément c_f de $\pi_d(V_{d+n,d})$ de la manière suivante: Soit F_d un champ de d-repères tangents sur S_d défini (continu) à l'extérieur du voisinage U' de a'. Déformons, si nécessaire, l'immersion f pour qu'elle coïncide sur U' avec l'immersion standard s. Soit r: $H_+ \to S_d - U'$ un difféomorphisme de degré $+1$ de l'hémisphère $\{x_0 \geqq 0\}$ de S_d sur $S_d - U'$ (par exemple $r(x_0, x_1, \ldots, x_d) = ((2 - \varepsilon) x_0 - 1 + \varepsilon, \mu x_1, \ldots, \mu x_d)$, μ étant choisi pour que $[(2 - \varepsilon) x_0 - 1 + \varepsilon]^2 + \mu^2 \Sigma (x_i)^2 = 1$). On définira d'abord l'application c_f: $S_d \to V_{d+n,d}$ par les formules

$$c_f(x) = \begin{cases} df(F_d(rx)) & \text{pour } x \in H_+ \\ ds(F_d(rx^*)) & \text{pour } x \in H_- \end{cases} \qquad (3.1)$$

où H_- est l'hémisphère $\{x_0 \leqq 0\}$ de S_d et $x \to x^*$ est l'application $(x_0, x_1, \ldots, x_d) \to (-x_0, x_1, \ldots, x_d)$. Soit alors également c_f la classe d'homotopie de l'application continue c_f ainsi définie. S. SMALE démontre que cette classe ne dépend pas des divers choix faits dans la définition et reste invariante par une déformation régulière de l'immersion f.

On a en outre le

Théorème (3.2). (S. SMALE): *L'invariant c_f fournit une correspondance biunivoque entre les classes d'homotopie régulière d'immersions de S_d dans E_{d+n} et les éléments du groupe $\pi_d(V_{d+n,d})$.*

Nous allons voir que si l'on introduit une structure de groupe dans l'ensemble des classes d'immersions en utilisant l'addition du § 2, la correspondance $f \to c_f$ de S. SMALE induit un isomorphisme de ce groupe sur le groupe $\pi_d(V_{d+n,d})$. Soient f et g deux immersions que nous supposons satisfaire (2.1) et soit $s'\colon S_d \to E_{d+n}$ une immersion standard satisfaisant

$$s' \mid U' = g \mid U' \text{ où } U' = \{-1 \leqq x_0 \leqq -1 + \varepsilon\}.$$

Pour démontrer $c_h = c_f + c_g$ introduisons l'espace Y formé de la réunion de la sphère $S_d \subset E_{d+1}$ et de la boule B_d donnée dans E_{d+1} par $x_0 = 2/3$, $\Sigma_i(x_i)^2 \leqq 5/9\ (1 \leqq i \leqq d)$. On peut factoriser les applications c_h, c_f, c_g à une homotopie près par $\gamma\colon Y \to V_{d+n,d}$ où γ est définie comme suit:

$$\begin{aligned} &\gamma \mid S_d = c_h \,. \\ &\gamma \mid B_d \text{ est donnée par } \gamma(x_1, \ldots, x_d) = ds'(F_d(\varrho x)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\varrho\colon B_d \to S_d - U'$ est un difféomorphisme de degré $+1$.
Pour $x \in B_d \cap S_d$ i. e. $x_0 = 2/3$,

$$\begin{aligned} c_h(x) = dh(F_d(rx)) &= dh\left(F_d\left(\frac{1+\varepsilon}{3}, \mu x_1, \ldots, \mu x_d\right)\right) \\ &= dg(F_d(-1+\varepsilon, \mu' x_1, \ldots, \mu' x_d)) = ds'(F_d(\varrho x)) \,. \end{aligned}$$

Désignons par $i\colon S_d \to Y$ l'inclusion de S_d dans Y, par $i_1\colon S_d \to Y$ l'injection qui envoie $\{x_0 > 0\}$ de S_d sur $\{x_0 > 2/3\}$ de Y et $\{x_0 \leqq 0\}$ de S_d sur B_d et par $i_2\colon S_d \to Y$ l'injection qui envoie $\{x_0 \geqq 0\}$ de S_d sur B_d et $\{x_0 < 0\}$ de S_d sur $\{x_0 < 2/3\}$ de Y. On a $\gamma \circ i = c_h$, $\gamma \circ i_1 \simeq c_g$ et $\gamma \circ i_2 \simeq c_f$. Comme $\pi_d(Y) \cong H_d(Y)$ et que $i(S_d)$ est homologue à $i_1(S_d) + i_2(S_d)$ on conclut que i est homotope à la somme $i_1 + i_2$. Par suite,

$$c_h = \gamma \circ i \simeq \gamma \circ (i_1 + i_2) \simeq \gamma \circ i_1 + \gamma \circ i_2 \simeq c_g + c_f \,.$$

En outre, il est immédiat que $p_* c_f = \tau_f - \tau_s$, où p_* est comme dans (1.2). Il résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_d(V_{d+n,d}) & \xrightarrow{p*} & \pi_d(G_{d+n,d}) \\ & \searrow \partial \quad \swarrow \partial' & \\ & \pi_{d-1}(SO(n)) & \end{array}$$

que l'on a[2]) le

Lemme (3.4). $\partial c_f = \alpha_f$, *où ∂ est l'opérateur bord de la suite* (1.1).

Ceci fournit le théorème (1.3) comme conséquence immédiate du théorème de SMALE.

4. Le cas des groupes $J_{d,d}$.

Lemme (4.1). (Cf. [3]): *Le groupe $J_{d,d}$ est infini cyclique pour d pair, cyclique d'ordre* 2 *pour d impair quand S_d n'est pas parallelisable et* 0 *pour S_d parallelisable.*

Il suffit d'observer que l'inclusion $S_n \to V_{d+n,d}$ (donnant un générateur de $\pi_n(V_{d+n,d})$) induit un épimorphisme $\pi_d(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_d(V_{d+n,d})$ dans le cas où $d = n$ (en effet, i_* est plongé dans la suite exacte

$$\cdots \to \pi_d(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_d(V_{d+n,d}) \to \pi_d(V_{d+n,d-1}) \to \cdots$$

de la fibration $V_{d+n,d}/S_n = V_{d+n,d-1}$). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_d(V_{d+n,d}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{d-1}(SO(n)) \\ i_* \uparrow & \nearrow \Delta & \\ \pi_d(S_n) & & \end{array}$$

montre alors que, pour $d = n$, l'image par ∂ de $\pi_d(V_{2d,d})$, i. e. $J_{d,d}$, coïncide avec l'image par Δ de $\pi_d(S_d)$, d'où le lemme (4.1).

Cependant, on peut démontrer le lemme (4.1) sans faire appel au résultats de S. SMALE, comme suit: Soit f: $S_d \to E_{2d}$ une immersion complètement régulière et I_f son coefficient de self-intersection (H. WHITNEY, [12]). I_f est un entier pour d pair et un reste modulo 2 pour d impair. Si l'on regarde E_{2d} comme sous-espace de E_{2d+1}, on peut munir $f(S_d)$ d'un champ F_{d+1} de $(d+1)$-repères normaux dans E_{2d+1}. Par une déformation régulière de f on obtient un *plongement* régulier f' de S_d dans E_{2d+1} muni d'un champ F'_{d+1} de $(d+1)$-repères normaux. Par un procédé classique [5] dû à L. PONTRYAGIN,

[2]) On retrouve également $\tau_h = \tau_f + \tau_g - \tau_s$ par $\tau_h - \tau_s = p_* c_h = p_* c_f + p_* c_g = \tau_f - \tau_s + \tau_g - \tau_s$.

B. Eckmann et R. Thom, on associe à f' et F'_{d+1} une classe d'homotopie $\alpha(f', F')$ dans $\pi_{2d+1}(S_{d+1})$. Soit alors $h(f', F')$ l'invariant de Hopf de cet élément.

Désignons en outre, comme dans [5], par ν le degré de l'application N: $S_d \to S_d$ définie par $N(x) = (n \cdot u_1(x), \ldots, n \cdot u_{d+1}(x))$, où n est la normale à E_{2d} dans E_{2d+1} et $u_1(x), \ldots, u_{d+1}(x)$ sont les vecteurs du champ F_{d+1} au point $f(x)$.

Lemme (4.2). $I_f \pm \nu = \pm h(f', F')$ (modulo 2 *pour d impair*).

Cette formule généralise le lemme (6.1) de [5], où seul le cas d'un plongement $(I_f = 0)$ était considéré.

Démonstration: Soit $\Sigma'_d = f'(S_d)$ et $\Sigma''_d = f''(S_d)$, où $f''(x) = f'(x) + \varepsilon u'_1(x)$, ε étant le rayon d'un voisinage tubulaire de $f'(S_d)$ dans E_{2d+1}. On a

$$h(f', F') = L(\Sigma', \Sigma'')$$

par définition (L désignant le coefficient d'enlacement dans E_{2d+1}). Posons encore $\Sigma_d = g(S_d)$, avec $g(x) = f'(x) + \varepsilon \Sigma_{i=1}^{d+1} (n \cdot u_i(x)) u'_i(x)$. Le lemme (4.2) découle de la formule auxiliaire

$$I_f = L(\Sigma_d, \Sigma'_d) , \tag{4.3}$$

au signe près pour d pair, modulo 2 pour d impair.

En effet, soit Ψ: $S_d \times S_d \to E_{2d+1}$ le plongement donné par

$$\Psi(x, y) = f'(x) + \varepsilon \Sigma_{i=1}^{d+1} y_i u'_i(x) .$$

Les images $\Psi(S_d \times b)$ et $\Psi(a \times S_d)$ engendrent l'homologie de $\Psi(S_d \times S_d)$ en dimension d. On a $\Psi | S_d \times b = f''$ (pourvu que l'on prenne $b = (1, 0, \ldots, 0)$). Posons $Z_d = \Psi(a \times S_d)$. On a $L(Z_d, \Sigma'_d) = 1$ (au signe près).

Comme $g(S_d) \subset \Psi(S_d \times S_d)$, on a $\Sigma_d \sim p\Sigma''_d + qZ_d$ sur $\Psi(S_d \times S_d)$, avec des entiers p, q. La définition de g fournit $p = 1$, $q = \nu$. Donc

$$\Sigma_d \sim \Sigma''_d + \nu Z_d \text{ sur } \Psi(S_d \times S_d) ,$$

donc a fortiori dans $E_{2d+1} - \Sigma'_d$. En particulier,

$$I_f = L(\Sigma, \Sigma') = L(\Sigma'', \Sigma') + \nu L(Z, \Sigma') = h(f', F') + \nu .$$

Il reste donc à démontrer (4.3). Pour cela on considère tout d'abord une déformée f' de f particulière: Soient $a_1, b_1, \ldots, a_q, b_q$ les paires de points sur S_d telles que $f(a_i) = f(b_i)$ (f est supposée complètement régulière, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$ entraine $x = y$ ou $\{x, y\} = \{a_i, b_i\}$ pour un certain i, de plus les a_i, b_i sont tous distincts). Soient U_i, $i = 1, \ldots, q$ des voisinages sphériques de rayon ϱ des a_i, chacun des U_i ne contenant qu'un seul des points de l'ensemble $a_1, b_1, \ldots, a_q, b_q$. Posons $\alpha_i(x) = \alpha \cdot \cos^2(\frac{1}{2}\pi\varrho^{-1}r_i(x))$ pour $x \in U_i$ où $r_i(x)$ est la distance sphérique de x à a_i et $\alpha_i(x) = 0$ pour $x \in S_d - U_i$. Le plongement $f' : S_d \to E_{2d+1}$ est alors défini par $f'(x) = f(x) + \Sigma_1^q \alpha_i(x) n$. Si l'on prend le rapport α/ϱ assez petit, on peut pour le calcul de $L(\Sigma, \Sigma')$ remplacer g par $g^* : S_d \to E_{2d+1}$ définie par $g^*(x) = f'(x) + \varepsilon n$, où ε satisfaisant $0 < \varepsilon < \alpha$ est le rayon d'un voisinage tubulaire de $f'(S_d)$ dans E_{2d+1}. Posons $\Sigma^* = g^*(S_d)$. On a $L(\Sigma, \Sigma') = L(\Sigma^*, \Sigma')$. Pour calculer $L(\Sigma^*, \Sigma')$ on considère un plongement F' du cône sur S_d dans E_{2d+1} tel que

$$F'(x, t) = f'(x) - t \cdot n$$

pour les petites valeurs de t le cône étant paramétrisé par (x, t) avec $x \in S_d$, $0 \leqq t \leqq 1$ avec $(x, 1) = (x', 1)$ pour tout couple x, $x' \in S_d$. Calculons le coefficient d'intersection $S(\Sigma^*, F'CS_d)$. Si $y \in \Sigma^* \cap F'CS_d$, on a

$$y = g^*(x) = f'(x) + \varepsilon n \quad \text{et} \quad y = f'(x') - t \cdot n .$$

Donc $f(x) + (\Sigma_1^q \alpha_i(x) + \varepsilon) n = f(x') + (\Sigma_1^q \alpha_i(x') - t) \cdot n$. Ceci implique $x = a_i$, $x' = b_i$ ou $x = b_i$, $x' = a_i$ pour un certain $i \in [1, q]$. On ne peut avoir $x = a_i$, $x' = b_i$ car alors $\Sigma_q \alpha_i(x') = 0$ et on aurait $-t = \Sigma_1^q \alpha_i(x) + \varepsilon > 0$.
Les seuls points d'intersection sont donc de la forme

$$g^*(b_i) = F'(a_i, t_i) .$$

Les points $g^*(b_1), \ldots, g^*(b_q)$ sont effectivement points d'intersection de Σ^* avec $F'CS_d$.

En effet

$$\begin{aligned} g^*(b_i) &= f'(b_i) + \varepsilon n = f(b_i) + \varepsilon n \\ &= f(a_i) + \varepsilon n \\ &= f'(a_i) - (\alpha - \varepsilon) n = F'(a_i, \alpha - \varepsilon) , \end{aligned}$$

où $\alpha - \varepsilon > 0$.

On vérifie que si le point $f(a_i) = f(b_i)$ est point de self-intersection de $f(S_d)$ avec le coefficient c_i ($c_i = \pm 1$), le coefficient d'intersection de $g^*(Ub_i)$ avec $F'CS_d$ est $(-1)^d c_i$.

On a donc

$$I_f = \Sigma_i c_i = L(\Sigma_d^*, \Sigma_d') = L(\Sigma_d, \Sigma_d') .$$

On vérifie aisément que pour deux choix f_0', f_1' de plongements qui sont équivalents au sens des immersions (pour lesquels il existe une famille d'immersions $f'(t)$ dépendant différentiablement de t avec $f'(0) = f_0'$. $f'(1) = f_1'$) les coefficients d'enlacement $L(g_0(S_d), f_0'(S_d))$ et $L(g_1(S_d), f_1'(S_d))$ sont égaux pour d pair et congruent modulo 2 pour d impair. La formule

$I_f = L(\Sigma_d, \Sigma'_d)$ est donc valable quel que soit le choix du plongement f' régulièrement homotope à f. Le lemme (4.2) est ainsi démontré.

Pour obtenir (4.1), il suffit maintenant de remarquer que l'on peut réaliser toutes les valeurs de I_f par des immersions (H. WITHNEY [12]). De plus $\Delta\nu = \alpha_f$. Comme les éléments $\alpha(f', F') \in \pi_{2d+1}(S_{d+1})$ sont dans l'image de $J : \pi_d(SO(d+1)) \to \pi_{2d+1}(S_{d+1})$ (voir lemme 8.1 de [5]), il s'ensuit $\Delta h(f', F')\iota_d = 0$. On a donc $\alpha_f = I_f \Delta \iota_d$. D'où $J_{d,d} = \Delta\pi_d(S_d)$. Q.E.D.

5. Les plongements

Comme le remarque S. SMALE ([8], § 1), il serait intéressant de savoir quels éléments de $\pi_d(V_{d+n,d})$ sont invariants de SMALE de classes d'équivalence représentables par un plongement (sans self-intersection) $S_d \to E_{d+n}$.

On peut obtenir quelques renseignements à ce sujet en combinant un théorème de [5] (Théorème 8.2) et la connaissance des groupes d'homotopie stables $\pi_d(SO(N))$ fournie par [2]. D'après [5], si $f : S_d \to E_{d+n}$ est un *plongement* et si $d < 2n - 1$, le fibré normal induit est trivial, i. e. $\alpha_f = 0$. On voit d'autre part immédiatement (en utilisant la construction du § 2) que les éléments de $\pi_d(V_{d+n,d})$ qui peuvent être représentés par un plongement forment un sous-groupe $\pi'_d(V_{d+n,d})$. Par suite, on a le

Théorème 5.1. *Pour* $d < 2n - 1$ *l'ensemble* $\pi'_d(V_{d+n,d})$ *des classes de* $\pi_d(V_{d+n,d})$ *représentables par un plongement est un sous-groupe du noyau de* $\partial : \pi_d(V_{d+n,d}) \to \pi_{d-1}(SO(n))$ (∂ comme dans (1.1)).

Comme $Ker\,\partial = Im\,\Psi_*$, où $\Psi_* : \pi_d(SO(d+n)) \to \pi_d(V_{d+n,d})$ et que $\pi_d(SO(d+n))$ (qui est stable pour $n \geqq 2$) est nul pour d congruent 2, 4, 5, 6 modulo 8 (d'après [2]), on obtient le

Corollaire 5.2. *Si d est congruent* 2, 4, 5, 6, modulo 8, *il n'existe pas d'immersion non-triviale de S_d dans E_{d+n} avec $d < 2n - 1$ qui soit équivalente à un plongement.*

Note: J'ignore s'il existe dans ce cas des plongements qui ne sont pas «équivalents» *au sens des plongements* au plongement standard.

En général,
$Im\,\Psi_* \cong \pi_d(SO(d+n))/i_*\pi_d(SO(n))$, où $i_* : \pi_d(SO(n)) \to \pi_d(SO(d+n))$ est induit par l'inclusion $i : SO(n) \to SO(d+n)$, et $\pi'_d(V_{d+n,d})$ est isomorphe à un sous-groupe de $Im\,\Psi_*$.

Pour $d = 4s - 1$, $d < 2n - 1$, $\pi_d(SO(n))$ contient une composante libre et $Im\,\Psi^*$ est de la forme Z/mZ. On ne sait rien sur l'entier m sauf que c'est une puissance de 2 (cf. A. BOREL et F. HIRZEBRUCH [1] § 26.2).

Pour d congruent à 0 ou 1 modulo 8, $\pi_d(SO(d+n)) = Z_2$. Il existe donc au plus une classe d'immersions non-triviale représentable par un plongement.

On voit aisément que $i_* : \pi_{8s+1}(SO(8s-4)) \to \pi_{8s+1}(SO)$ est surjectif (car $\cdots \to \pi_{8s+1}(SO(8s-4)) \to \pi_{8s+1}(SO(8s+4)) \to \pi_{8s+1}(V_{8s+4,8}) = 0$, d'après [7]). Donc,

Corollaire 5.3. *Toute immersion $f : S_{8s+1} \to E_{n+8s+1}$ où $n \geqq 8s-4$ équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

De manière analogue, $i_* : \pi_{8s}(SO(8s-5)) \to \pi_{8s}(SO)$ est surjectif[3]) pour $s \geqq 2$. On obtient,

Corollaire 5.4. *Toute immersion $f : S_{8s} \to E_{n+7s}$ où $n \geqq 8s-5$, $s \geqq 2$, équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

6. Compression d'une immersion

Nous étudions la question de savoir sous quelles conditions une immersion $f : S_d \to E_{d+n}$ est équivalente à une immersion f' satisfaisant à $f'(S_d) \subset E_{d+m} (m \leqq n)$. Si une telle immersion f' existe, on dira que f peut être compressée dans E_{d+m}.

Théorème 6.1.[4]) *L'immersion $f : S_d \to E_{d+n}$ peut être compressée dans $E_{d+m} (m \geqq 1)$ si et seulement si il existe un champ de $(n-m)$-repères normaux à $f(S_d)$ dans E_{d+n}.*

Démonstration: Soit $j_* : \pi_d(V_{d+m,d}) \to \pi_d(V_{d+n,d})$ l'injection naturelle $(m \leqq n)$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_d(SO(d+m)) & \to & \pi_d(SO(d+n)) \\
\downarrow \Psi m & & \downarrow \Psi n \\
\pi_d(V_{d+m,d}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_d(V_{d+n,d}) \\
\downarrow \partial_m & & \downarrow \partial_n \\
\pi_{d-1}(SO(m)) & \xrightarrow{i_{n-m}} & \pi_{d-1}(SO(n)) \\
\downarrow i_m & & \downarrow i_n \\
\pi_{d-1}(SO(d+m)) & \overset{\approx}{\to} & \pi_{d-1}(SO(d+n)) .
\end{array}$$

Soit $c_f \in \pi_d(V_{d+n,d})$ l'invariant de SMALE de l'immersion $f : S_d \to E_{d+n}$ donnée. L'existence d'un champ de $(n-m)$-repères normaux est équivalente au fait que $\partial_n c_f$ est dans l'image de i_{n-m}. Si f peut être compressée dans

[3]) Cf. *Some non-stable homotopy groups of* LIE *groups*, à paraître.

[4]) M. HIRSCH a également obtenu des théorèmes dans cette direction.

E_{d+m}, c_f est dans l'image de j_* et par suite $\partial_n c_f$ est dans l'image de i_{n-m}. Inversement, supposons qu'il existe un $\alpha \in \pi_{d-1}(SO(m))$ tel que $i_{n-m}\alpha = \partial_n c_f$. On aura $i_m \alpha = 0$ (car $i_n \partial_n c_f = 0$ et $\pi_{d-1}(SO(d+m)) \to \pi_{d-1}(SO(d+n))$ est un isomorphisme pour $m \geqq 1$). Par suite, il existe un $c \in \pi_d(V_{d+m,d})$ tel que $\partial_m c = \alpha$. On a donc $\partial_n(j_* c - c_f) = 0$. Il s'ensuit $j_* c = c_f + \Psi_n \mu'$. Comme $\pi_d(SO(d+m)) \to \pi_d(SO(d+n))$ est surjectif pour $m \geqq 1$, il existe un $\mu \in \pi_d(SO(d+m))$ tel que $c_f = j_*(c - \Psi_m \mu)$. Soit alors $f'' : S_d \to E_{d+m}$ une immersion fournie par le théorème de SMALE, telle que $c_{f''} = c - \Psi_m \mu$. Si l'on compose f'' avec l'injection $E_{d+m} \to E_{d+n}$, on obtient une immersion $f' : S_d \to E_{d+n}$ telle que $f'(S_d) \subset E_{d+m}$ et dont l'invariant de SMALE est $j_* c_{f''} = c_f$. Les immersions f et f' sont donc équivalentes. Q.E.D.

Corollaire 6.2. *Pour que l'immersion $f : S_d \to E_{d+n}$ puisse être compressée dans E_{d+1}, il faut et il suffit que le fibré normal induit par f soit trivial.*

Corollaire 6.3. *Tout plongement $f : S_d \to E_{d+n}$ avec $d < 2n - 1$ peut être compressé en une immersion dans E_{d+1}.*

Battelle Memorial Institute.

BIBILIOGRAPHIE

[1] A. BOREL et F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. of Math., to appear.

[2] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 43 (1957), 933–935.

[3] M. KERVAIRE, *Normal bundle to a sphere in euclidean space*, Bull. Amer. Math. Soc., 63 (1957), 147.

[4] M. KERVAIRE, *Non parallelizability of the n-sphere for* $n > 7$, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 44 (1958), 280–283.

[5] M. KERVAIRE, *An Interpretation of* G. WHITEHEAD*'s generalization of* HOPF*'s invariant*, Ann. of Math., to appear.

[6] J. MILNOR, *On the immersion of n-manifolds in* $(n + 1)$*-space*, Comment. Math. Helvetici, 30 (1956), 275–284.

[7] G. F. PAECHTER, *The groups* $\pi_r(V_{n,m})$, The Quarterly J. Math. 7 (1956), 249–268.

[8] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in* EUCLID*ean spaces*, Ann. of Math., to appear.

[9] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in* EUCLID*ean spaces*, Notices Amer. Math. Soc., 5, number 1, issue No. 29 (1958), 66.

[10] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton Press, 1950.

[11] R. THOM, *La classification des immersions (d'après* S. SMALE*)*, Séminaire Bourbaki, Décembre 1957.

[12] H. WHITNEY, *The self-intersection of a smooth n-manifold in 2n-space*, Ann. of Math. 45 (1944), 220–246.

(Reçu le 7 août 1958)