CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

MICHEL KERVAIRE

LA METHODE DE PONTRYAGIN POUR LA CLASSIFICATION DES APPLICATIONS SUR UNE SPHERE

ROMA - Istituto Matematico dell'Università

LA METHODE DE PONTRYAGIN POUR LA CLASSIFICATION DES APPLICATIONS SUR UNE SPHERE.

Par Michel Kervaire (New York).

Soit $f : X \longrightarrow S^n$ une application d'une espace X sur la sphère de dimension n. La classe d'homotopie de f est complètement caractérisée par la donnée de f sur l'image inverse $f^{-1}(V)$ d'une voisinage arbitrairement petit $V \subset S^n$. Plus précisément, si f, g sont deux applications $f, g : X \longrightarrow S^n$ et si $f|_U = g|_U$ avec $U = f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$, alors f et g sont homotopes.

<u>Démonstration</u>. (Cf. Alexandroff-Hopf, Topologie)

On peut supposer que V est un disque (ouvert) plongé dans S^n. Soit alors $r : S^n \longrightarrow S^n$ une application de degré 1 qui est homéomorphe sur V et envoie le complémentaire de V sur un point $a^* \in S^n$. Comme r est homotope à l'identité, on a $r \circ f \simeq f$ et $r \circ g \simeq g$. Les hypothèses impliquent $r \circ f = r \circ g$. Q.E.D.

La méthode de Pontryagin (Cf. <u>Smooth manifolds and their applications in homotopy theory,</u> Trudy Mat. Inst. im. Steklov <u>45</u>, 1955) du titre est basée sur la version 'infinitesimale' de la remarque ci-dessus.

Dans la suite X sera une variété différentiable (c. à. d. C^{∞}) compacte (avec ou sans bord). Il est commode de supposer que X est munie d'une métrique Riemannienne. Toute classe d'homotopie d'applications $X \longrightarrow S^n$ contient des applications différentiables. On peut donc se limiter à considérer ces dernières. Dans le cas où $\dim X < n$, il n'y a qu'une seule calsse d'homotopie. Dans toute la suite on supposera que $\dim X = n + k \geqslant n$.

Soit $f : X^{n+k} \longrightarrow S^n$ une application différentiable. L'idée de

Pontryagin est de caractériser la classe d'homotopie de f par l'image inverse $f^{-1}(a)$ d'un point $a \in S^n$ et la dérivée df de f le long de $f^{-1}(a)$. C'est effectivement possible pourvu que df soit "non dégénérée" sur $f^{-1}(a)$.

Définition. On appelle point régulier $x \in X$ de l'application différentiable $f : X \longrightarrow S^n$ un point où la derivée df de f envoie le plan tangent à X en x sur le plan tangent à S^n en $f(x)$.

Définition. On appelle valeur régulière de $f : X \longrightarrow S^n$ un point $a \in S^n$ tel que $f^{-1}(a)$ soit vide ou ne contienne que des points réguliers.

La classe d'homotopie d'une application différentiable $f : X^{n+k} \longrightarrow S^n$ est caractérisée par la donnée de l'image inverse $f^{-1}(a)$ d'une valeur régulière $a \in S^n$ de f et de la dérivée de f le long de $f^{-1}(a)$.

On remarque tout d'abord que si $a \in S^n$ est valeur régulière de $f : X^{n+k} \longrightarrow S^n$, alors $f^{-1}(a) = M^k$ est une sous-variété de X^{n+k}. Si X^{n+k} a un bord, M^k est (en général) une variété à bord, dont le bord est alors contenu dans le bord de X.

Si de plus, on suppose que $f|bX$ (restriction de f au bord de X) admet également a comme valeur régulière, M^k rencontre le bord de X transversalement, i. e. le fibré normal à bM dans bX est la restriction à bM du fibré normal de M dans X. On remarque également que la donnée de la dérivée de f sur M^k, équivaut à la donnée d'une trivialisation φ^n du fibré normal de M dans X. (En particulier l'image inverse d'une valeur régulière d'une application a toujours un fibré normal trivial.)

Pour obtenir φ^n on prend un n-repère fixe du plan tangent $E = S^n$ en a. On observe que M_x, le plan tangent à M en $x \in M$, est exactement le noyau de $df : T_x \longrightarrow E$ (T_x = plan tangent à X en x). Il s'ensuit que df se restreint à un isomorphisme de N_x (le complément orthogonal de M_x dans T_x) sur E. L'image inverse par df dans N_x du repère fixe choisi dans E fournit un champ de n-repères normaux à M dans X.

Pour voir que M et $df | M$ caracterise la classe d'homotopie de f, on reconstruit une application $f : X \longrightarrow S^n$ à partir de la donnée de $M \subset X$ et φ^n_*.

<u>La construction de Pontryagin-Thom.</u>

Soit M^k une sous-variété de X^{n+k} avec champ de n-repères normaux φ^n.

Le champ φ^n fournit un difféomorphisme

$$h : U \longrightarrow M \times D^n$$

d'un voisinage tubulaire (fermé) U de M sur $M \times D^n$. Soit $r : D^n \longrightarrow S^n$ une application telle que $r | \operatorname{int} D^n$ soit un homéomorphisme sur $S^n - a^*$ et $r(S^{n-1}) = a^*$, et soit $\pi : M \times D^n \longrightarrow D^n$ la projection sur le deuxième facteur.

On définira

$$f : X \longrightarrow S^n$$

par le formules

$$f | U = r \pi h$$
$$f(X - U) = a^*.$$

Comme $f(bU) = a^*$, l'application f est continue. (On peut la rendre différentiable par un choix convenable de $r : D^n \longrightarrow S^n$.)

L'ambiguité dans la définition de f n'affecte pas sa classe d'homotopie. On notera $p(M, \varphi)$ toute application $X \longrightarrow S^n$ obtenue par le procédé ci-dessus, à partir de $M \subset X$ avec champ φ.

<u>Définition</u>. Deux sous-varietés fermées (M, φ_o) et (M_1, φ_1) avec champ de n-repères normaux dans X seront dites <u>φ-cobordantes</u> si, plongées respectivement dans $X \times o$ et $X \times 1$, elles cobordent dans $X \times I$ une varieté V^{k+1} qui rencontre $X \times bI$ orthogonalement et qui est munie d'un champ φ^n de n-repères normaux dont la restriction à M_i est φ_i $(i = 0, 1)$.

La variété X étant donnée, le φ-cobordisme dans X est une relation d'équivalence entre les (M^k, φ^n).

<u>Theorème</u>. <u>La construction de Pontryagin-Thom fournit une correspondance biunivoque entre les classes de φ-cobordisme de k-variétés dans la variété fermée X^{n+k} et les classes d'homotopie d'applications</u> $X^{n+k} \longrightarrow S^n$.

1) Si (M_o, φ_o) et (M_1, φ_1) sont φ-cobordantes, la construction de Pontryagin-Thom appliquée à (V^{k+1}, φ^n) fournit une application $X \times I \longrightarrow S^n$. C'est l'homotopie cherchée entre $p(M_o, \varphi_o)$ et $p(M_1, \varphi_1)$.

2) Si $f : X \times I \longrightarrow S^n$ est une homotopie entre $f_o = p(M_o, \varphi_o)$ et $f_1 = p(M_1, \varphi_1)$, on peut rendre cette homotopie différentiable (sans changer f_o, f_1). D'après le théorème de Sard (Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), 883-890), l'ensemble des valeurs régulières de f est partout dense dans S^n (X est supposée compacte). Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que $a = f_o(M_o) = f_1(M_1) \in S^n$ est valeur régulière de f_o. La variété $f^{-1}(a) = V^{k+1} \subset X \times I$ munie du champ

de n-repères normaux évident, fournit le φ-cobordisme entre (M_0, φ_0) et (M_1, φ_1).

3) Si $a \in S^n$ est valeur régulière de $f : X \longrightarrow S^n$ et si $f^{-1}(a) = M^k$ avec le champ φ^n obtenu plus haut, on a $f \simeq p(M, \varphi)$.

L'étude des classes d'homotopie d'applications $X \longrightarrow S^n$, où X est variété différentiable de dimension $n+k$ se ramène donc à l'étude du φ-cobordisme de k-sous-variétés de X muni de champs de n-repères normaux. Dans la suite $X = S^{n+k}$, et $k = 1$ et 2.

Le cas $k = 1$ et $n \geq 3$.
======================

Dans le cas d'une application $f : S^{n+1} \longrightarrow S^n$, l'image inverse d'une valeur régulière est une variété fermée M^1, de dimension 1, donc une réunion dsjointe de cercles plongés dans S^{n+1}.

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, M^1 est munie d'un champ φ^n de n-repères normaux.

On peut regarder M^1 comme plongée dans R^{n+1}, et φ^n définit une application

$$\omega : M^1 \longrightarrow V_{n+1,n} = SO_{n+1} .$$

On désignera également par $\omega \in Z_2$ le reste mod 2 qui correspond à la classe d'homotopie de l'application $\omega : M^1 \longrightarrow SO_{n+1}$.

Soit ν le nombre de composantes connexes de M^1. On pose $h(f) = \omega + \nu \in Z_2$.

<u>Lemme.</u> <u>Le nombre</u> $h(f)$ <u>ne dépènd que de la classe d'homotopie de</u> f.

En effect si (M_0^1, φ_0) et (M_1^1, φ_1) sont φ-cobordantes il existe une surface V^2 à bord, plongée dans $R^{n+1} \times I$ avec champ

φ^n de n-repères normaux, et qui rencontre $R^{n+1} \times (i)$ orthogonalement en M_i $(i = 0, 1)$. De plus $\varphi^n \mid M_i = \varphi^n_i$.

Si l'on adjoint à φ_i la normale à M_i dans V (intérieure pour $i = 0$, extérieure pour $i = 1$) on obtient des champs φ'_i qui fournissent des applications

$$\omega'_i : M_i \longrightarrow V_{n+2, n+i} = SO_{n+2} .$$

Les restes modulo 2 représentant ω'_i sont ω_0 et ω_1. D'autre part, comme φ^n_i est étendu sur V par hypothèse, on a

$$\omega_0 + \omega_1 = E(V)$$

où $E(V)$ est la caractéristique d'Euler de V. Comme V est une surface orientable avec $\nu_0 + \nu_1$ trous, on a

$$E(V) = \nu_0 + \nu_1 \mod 2.$$

Donc

$$\omega_0 + \nu_0 = \omega_1 + \nu_1 \mod 2.$$

c. q. f. d.

On voit facilment que l'application

$$h : \pi_{n+1}(S^n) \longrightarrow Z_2$$

que l'on vient de définir est un homomorphisme.

<u>h est surjectif.</u>

Soit $S^1 \subset R^2 \subset R^{n+1}$ le plongement standard du cercle, muni de son champ φ^n_0 de n-repères normaux (φ^n_0 est formé de la normale à S^1 dans R^2 suivie d'une base du complémentaire orthogonal de R^2

dans R^{n+1}). En tordant φ_0^n par une application $\alpha : S^1 \longrightarrow SO_n$ qui représente le générateur de $\pi_1(SO_n)$, on obtient un nouveau champ φ^n :

$$\varphi^n(z) = \alpha^*(z) \; \varphi_0^n(z) .$$

Comme l'application $S^1 \longrightarrow SO_{n+1}$ donnée par φ_0^n est l'élément non-nul de $\pi_1(SO_{n+1}) = Z_2$, on a

$$h(S^1, \varphi^n) = \omega + \nu = 0 + 1 = 1 .$$

<u>h est injectif.</u>

Soit $M^1 \subset R^{n+1}$ une réunion disjointe de cercles plongé avec champ φ^n de n-repères normaux, et supposons que $h(M^1, \varphi^n) = 0$. Soient $M_1, \ldots, M_\nu$ les composantes de M^1. On peut plonger une sphère à ν trous V^2 dans R^{n+2} dont le bord sera $M^1 \subset R^{n+1}$, qui rencontre R^{n+1} orthogonalement, et située d'un seul côté, de R^{n+1} dans R^{n+2}.

Démontrer que (M^1, φ^n) fournit une application homotope à une application constante par la construction de Pontryagin-Thom c'est démontrer que φ^n peut-être étendu sur V^2 (comme champ de n-repères normaux). On complète V^2 en une sphère S^2 plongée dans R^{n+2} en collant les 2-disques plongés D_i dont le bord est M_i, situés de l'autre côté de R^{n+1} que V et encontrant R^{n+1} orthogonalement. S^2 a dans R^{n+2} un fibré normal trivial. Donc la seule obstruction (en dimension 2) pour étendre φ^n sur V^2 est égale à la somme (sur i) des obstructions γ_i pour étendre $\varphi_i = \varphi | M_i$ comme champ de n-repères normaux sur D_i.

Un calcul immediat montre que $\gamma_i = \omega_i + 1$ où ω_i représente $\omega | M_i$. L'hypothèse $h(M, \varphi) = 0$ entraîne $\sum \gamma_i = 0$, d'où la conclusion.

Le cas $k = 2$.
===============

Soit M^2 une surface fermée orientable (non nécessairement connexe), plongée dans R^{n+2} avec un champ φ^n de repères normaux.

On va associer à (M^2, φ^n) une forme quadratique

$$Q : H_1 (M^2; Z_2) \longrightarrow Z_2 .$$

Soit $X \in H_1 (M^2; Z_2)$ et C une courbe (pas nécessairement connexe) représentant x.

C est une immersion régulière de ν cercles disjoints $S_1, \dots, S_\nu$ dans M^2. Si, pour tout $x \in S_i$, $i = 1, \dots, \nu$, on adjoint à $\varphi^n(Cx)$ la normale à CS_i en x, on obtient une application

$$\omega : S_1 + \dots + S_\nu \longrightarrow V_{n+2, n+1} = SO_{n+2}$$

qui détermine un élément de $H_1 (SO_{n+2}) \simeq Z_2$.

On notera également ω le reste mod 2 représentant cet élément.

On definit

$$Q (C) = \omega + \sigma + \nu ,$$

où σ est le nombre de points de self-intersection de C.

Si C_1 et C_2 sont deux courbes sur M^2, on a immédiatement

$$(*) \qquad Q (C_1 + C_2) = Q (C_1) + Q (C_2) + C_1 \cdot C_2 ,$$

où $C_1 + C_2$ a l'interpretation évidente, et $C_1 \cdot C_2$ est l'intersection des classes d'homotopie mod 2 representées par C_1 et C_2.

Lemme : Si $C_1 \sim C_2$ mod 2, alors

$$Q(C_1) = Q(C_2) .$$

Autrement dit, Q est bien une fonction sur $H_1(M^2; Z_2)$, à valeurs dans Z_2, satisfaisant

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + x.y ,$$

où $x.y$ est l'intersection des classes x et y.

Démonstration : On remarque tout d'abord qu'il est suffisant de démontrer le lemme sous l'hypothèse $C_1 \sim C_2$ (en tant que cycles à coefficients entiers).

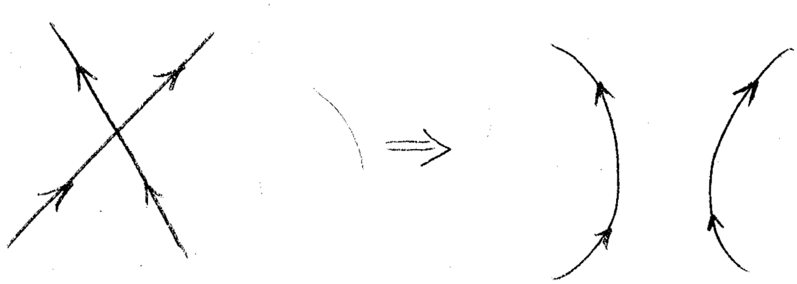
En effet, si $C_1 \sim C_2$ mod 2, il existe une courbe C telle que $C_2 \sim C_1 + 2C$. L'équation $(*)$ ci-dessus implique

$$Q(C_1 + 2C) = Q(C_1) \qquad \text{mod } 2 ,$$

et par suite, $Q(C_2) = Q(C_1 + 2C)$ entraînera la conclusion.

Si $C_1 \sim C_2$, on a $C_1 \cdot C_2 = 0$. En vertu de la formule $(*)$, il est donc suffisant de demontrer que $C \sim 0$ implique $Q(C) = 0$.

Si $C \sim 0$, on peut, par un nombre fini d'opérations de la forme



remplacer C par $C' \sim C$ telle que C' n'a plus de point double. On remarque que le passage de C à C' ne change pas ω et change σ et ν d'une unité. L'expression $\omega + \sigma + \nu$ reste donc inchangée. Finalement, il suffit de démontrer que si C est un système de courbes simples sur la surface M^2, et si $C \sim 0$, alors $Q(C) = \omega + \nu = 0$. Or, dans ce cas, C borde une surface à bord V^2 (région de M^2) et V^2 est munie d'un champ de repères normaux φ^n dans R^{n+1}. D'autre part $Q(C)$ est précisèment la valeur de $h(C, \varphi^{n+1})$ du cas $k = 1$. En vertu des résultats pour $k = 1$ on a $Q(C) = 0$.

L'invariant d'Arf d'une forme quadratique.

Soit H un espace vectoriel sur Z_2 et $Q : H \longrightarrow Z_2$ une forme quadratique (relative a une forme alternée bilinéaire non-dégénérée $H \otimes H \longrightarrow Z_2$ notée $x.y$). L'application Q satisfait donc à

$$Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + x.y$$

On sait que l'éxistence de la forme alternée bilinéaire non-dégénérée implique la parité de $\dim H$.

Définition. On appelle base symplectique de H une base vectorielle $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ telle que $u_i \cdot u_j = v_i \cdot v_j = 0$ et $u_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, m$.

On convient que la base vide est symplectique.

Lemme. H admet toujours une base symplectique.

(La démonstration est élémentaire).

Définition. Soit $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ une base symplectique. L'expression

$$C(Q) = \sum_{i=1}^{m} Q(u_i)\, Q(v_i)$$

est appelée <u>invariant d'Arf</u> de Q.

<u>Lemme.</u> C(Q) <u>ne dépend que de</u> Q (et en particulier ne dépend pas de la base symplectique choisie pour le calculer).

(La démonstration est dans Bourbaki).

<u>Définition.</u> Soit (M^2, φ^n) dans R^{n+2} et $Q : H_1(M^2; Z_2) \longrightarrow Z_2$ la forme quadratique associée. La <u>signature</u> de (M^2, φ^n) est par définition l'invariant de Q .

<u>Lemme. La signature de</u> (M^2, φ^n) <u>est un invariant de la classe de</u> φ - <u>cobordisme</u>.

Il est suffisant de démontrer que si (M^2, φ_o^n) est le bord de $V^3 \subset R^{n+3}$ avec champ φ_3^n, alors la signature de (M^2, φ_o^n) est nulle. ($M^2 \subset R^{n+2}$, la variété V^3 située d'une coté de R^{n+2} dans R^{n+3} et rencontrant R^{n+1} orthogonalement suivant M^2).

On prend sur V^3 une fonction α dont M^2 est surface de niveau, et dont les points critiques sont non-dégénérés. Si $a \in R$ est valeur régulière de α , l'image inverse $\alpha^{-1}(a)$ est une surface M_a plongeé dans V^3. On adjoint à $\varphi^n | M_a$ la normale à M_a dans V^3 (correspondant par exemple à la direction positive sur R). Pour chaque variété M_a, la signature est définie. Il est évident que M_a et M_b ont même signature si l'intervalle (a, b) ne contient que des valeurs régulières de la fonction α . Pour démontrer que (M^2, φ^n) a une signature nulle, il suffit de voir que la signature de M_a ne change pas quand on traverse une valeur critique (non régulière) de α . On peut supposer qu'il n'y a qu'un point critique de α pour chaque valeur critique.

<u>Cas. 1</u>. Si c est valeur critique correspondant à un point critique d'index 0 ou 3, $M_{c-\varepsilon}$ et $M_{c+\varepsilon}$ diffèrent par une sphere disjoin-

te. Leurs signatures sont donc égales.

Cas 2. Si c est valeur critique pour un point critique d'index 1 on 2, l'une des variétés $M_{c-\varepsilon}$ on $M_{c+\varepsilon}$ est obtenue à partir de l'autre en collant un tube. Si le tube est collé à deux composantes distinctes, les signatures des deux variétés sont encore trivialement égales.

Si le tube est collé à une seule composantes, il faut ajouter deux éléments u, v à la base symplectique. u est représenté par un parallèle du tube qui se ferme en une courbe sur la variété. v est représenté par un méridien du tube. On ignore $Q(u)$, mais $Q(v)$ est nécessairement nul car le représentant de v est isotope à une courbe homologue à zero de la variété originale.

Dans tous les cas la signature de la variété reste inchangée à la traversée d'une valeur critique.

On obtient donc une application

$$\pi_{n+2}(S^n) \longrightarrow Z_2$$

qui est évidemment un homomorphisme.

Surjectivité. On construit une surface $M^2 \subset R^{n+2}$ avec champ φ^n de repères normaux dont la signature est $1 \in Z_2$ de la façon suivante: On prend $M^2 = S^1 \times S^1 \subset R^3 \subset R^{n+2}$ et l'on munit M^2 du n-champ normal canonique φ_0^n ($\varphi_0{}^n$ consiste en la normale à $S^1 \times S^1$ dans R^3 suivi d'une base de R^{n+2}/R^3). Soit $\alpha : S^1 \longrightarrow SO_n$ un représentant du générateur de $\pi_1(SO_n)$. On definit $\beta : S^1 \times S^1 \longrightarrow SO_n$ par $\beta(x, y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ où le point désigne la multiplication dans SO_n. Le champ φ^n est obtenu à partir de φ_0^n en 'tordant' par l'application β :

$$\varphi^{n}(Z) = \beta(Z) \,.\, \varphi_0^{\,n}(Z).$$

Les cycles $\xi = S^1 \times (*)$ et $\eta = (*) \times S^1$ forment une base symplectique de $H_1(M^2; Z_2)$ et $Q(\xi) = Q(\eta) = 1$. Donc

$$C(M^2, \varphi^n) = 1.$$

Pour l'injectivité, Pontryagin fait appel à un argument simple de théorie de l'homotopie d'après lequel $\pi_{n+2}(S^n)$ ne peut avoir plus de 2 éléments:

Comme la suspension $\pi_4(S^2) \longrightarrow \pi_{n+2}(S^n)$ est surjective, $\pi_{n+2}(S^n)$ n'a pas plus d'élément que $\pi_4(S^2)$. D'autre part $\pi_4(S^2) \simeq \pi_4(S^3) \simeq Z_2$.