Sur l'invariant de Smale d'un plongement

par Michel A. Kervaire[1]), New York (USA)

A toute immersion $f: S^p \to R^{p+q}$ d'une sphère dans l'espace euclidien S. Smale [16] associe un élément c_f du groupe d'homotopie $\pi_p(V_{p+q,p})$, où $V_{p+q,p}$ est la variété de Stiefel des p-repères dans R^{p+q}. La définition de c_f est rappelée au § 3. S. Smale démontre que deux immersions $f, g: S^p \to R^{p+q}$ sont régulièrement homotopes, i. e. qu'il existe une famille d'immersions $f_t: S^p \to R^{p+q}$ avec $f_0 = f$, $f_1 = g$, telle que l'application tangentielle induite dépende continuement de t, si et seulement si $c_f = c_g$.

On va étudier le problème de caractériser les éléments de $\pi_p(V_{p+q,p})$ associés aux *plongements* (sans self-intersection) de S^p dans R^{p+q}.

D'après [11], l'invariant de Smale d'un plongement $f: S^p \to R^{p+q}$ avec $p \leqq 2q-2$ est nul pour p congruent à 2, 4, 5 ou 6 modulo 8. On avait également quelques résultats pour $p = 8s$ et $p = 8s+1$. (Cf. [11], Corollaires 5.2, 5.3 et 5.4[2]).) On va voir que la nullité de c_f (pour $p \leqq 2q-2$) ne dépend pas de la classe de reste modulo 8 de p et peut être démontrée indépendemment de la connaissance des groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal.

Theorème. *Pour tout plongement $f: S^p \to R^{p+q}$, avec $p \leqq 2q-2$, l'invariant de Smale c_f de f est nul.*

Autrement dit, compte tenu du théorème de S. Smale [16], Theorem A, pour tout plongement $f: S^p \to R^{p+q}$ avec $p \leqq 2q-2$, il existe une famille d'*immersions* $f_t: S^p \to R^{p+q}$, induisant une homotopie (continue) de l'application tangentielle, telle que

(a) $f_0 = f$,

(b) $f_1(x_0, x_1, \ldots x_p) = (x_0, x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$.

§ 1. Un lemme préliminaire

Soit M une variété différentiable fermée, presque parallèlisable, de dimension $p+1$. Le fibré des vecteurs tangents à M, restreint à $M - x_0$ (x_0, un point de M), est trivial par hypothèse[3]). Soit T_{p+1} un champ de $(p+1)$-repères

---

[1]) Pendant la préparation du présent article, l'auteur a été titulaire d'une bourse de la National Science Foundation, numéro N.S.F. – G 5863.

[2]) Dans le Corollaire 5.4 de [11], il y a une faute d'impression. On doit lire: *Toute immersion $f: S^{8s} \to R^{n+8s}$, où $n \geqq 8s-5$, $s \geqq 2$, équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

[3]) Toutes les variétés considérées sont connexes.

sur $M - x_0$, et $\mathfrak{o}(\tau, T) \in \pi_p(SO(p+1))$ l'obstruction pour étendre T_{p+1} sur M. (τ est le fibré principal associé au fibré des vecteurs tangents à M.)

Dans toute la suite, $\iota^q{}_* : \pi_p(SO(p+1)) \to \pi_p(SO(p+q+1))$ désignera l'homomorphisme induit par l'injection $SO(p+1) \to SO(p+q+1)$ donnée par

$$\iota^q(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix} ,$$

$A \in SO(p+1)$, $E_q =$ matrice unité à q lignes et q colonnes.

$\psi_* : \pi_p(SO(p+q+1)) \to \pi_p(V_{p+q+1,\,p+1})$ est induit par ψ qui associe à une matrice de $SO(p+q+1)$ ses $(p+1)$ premiers vecteurs colonnes.

On pose $j_* = \psi_* \circ \iota^q{}_* : \pi_p(SO(p+1)) \to \pi_p(V_{p+q+1,\,p+1})$.

Lemme 1.1. *Si* $p \leqq 2q - 2$, *alors* $j_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$.

Démonstration. On va voir tout d'abord que $\iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T)$ est dans le noyau de l'homomorphisme de HOPF-WHITEHEAD $J : \pi_p(SO(r)) \to \pi_{p+r}(S^r)$. Soit K une triangulation de M, telle que x_0 soit intérieur à un $(p+1)$-simplexe de K. On plonge M^{p+1} dans un espace euclidien R^{p+N+1} de grande dimension. ($N \geqq p + 2$.) La section T de $\tau \mid M - x_0$ induit alors une application $T^0 : K^p \to V_{p+N+1,\,p+1}$ qui est homotope à l'application constante. (K^p désigne le p-squelette de K.) Soit T^0_t une telle homotopie. On désigne par $\pi : V_{p+N+1,\,p+1} \to G_{p+N+1,\,p+1}$ et $\pi' : V_{p+N+1,N} \to G_{p+N+1,N} = G_{p+N+1,\,p+1}$ les projections canoniques sur les variétés de GRASSMANN. En utilisant un relèvement suivant π' de l'homotopie $\pi \circ T^0_t$, on obtient une section F du fibré principal ν de groupe $SO(N)$ associé au fibré normal induit par le plongement $M^{p+1} \subset R^{p+N+1}$ restreint au p-squelette K^p. Les sections T et F fournissent une section $T \times F$ de $\tau \oplus \nu$ restreint à K^p, telle que la valeur du cocycle obstruction $\mathfrak{c}(\tau \oplus \nu, T \times F)$ sur chaque $(p+1)$-simplexe de K soit nulle. Or,

$$\mathfrak{o}(\tau \oplus \nu, T \times F) = \iota^N{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) + \iota^{p+1}{}_* \mathfrak{o}(\nu, F) .$$

D'après [15], Lemma 1, $J \mathfrak{o}(\nu, F) = 0$. Comme $J \circ i_* = \pm E \circ J$, on a $J \iota^N{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = \pm E^{N-1} J \iota_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$. E^{N-1} est un isomorphisme dans les dimensions considérées, donc $J \iota_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$, d'où la conclusion: $J \iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$ pour $q \geqq 1$.

Pour en déduire le lemme 1.1, on remarque que d'après I. JAMES [7], Theorem (4.2), (a), pour $p \leqq 2q - 2$, l'homomorphisme $\psi_* : \pi_p(SO(p+q+1)) \to \pi_p(V_{p+q+1,\,p+1})$ se factorise en $\psi_* = H_{p+1} \circ J$, où

$$H_{p+1} : \pi_{2p+q+1}(S^{p+q+1}) \to \pi_p(V_{p+q+1,\,p+1})$$

est un invariant de HOPF généralisé. Il résulte donc de $J \iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$ que

$j_* \mathfrak{o}(\tau, T) = \psi_* \iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = H_{p+1} J \iota^q{}_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$. Le lemme 1.1 est démontré.

§ 2. La condition (*C*)

Soit $f: S^p \to R^{p+q}$ une immersion. On va décrire une condition pour f, dont on verra au § 3 qu'elle entraine pour $p \leqq 2q - 2$ la nullité de l'invariant de SMALE c_f.

(C) Il existe une variété à bord V^{p+1} différentiable, orientable, de bord S^p et une immersion $f': V^{p+1} \to R^{p+q+1}$ telles que:

(C_1) La restriction de f' au bord de V^{p+1} est égale à l'immersion donnée f. (On identifie R^{p+q} au sous-espace $x^{p+q+1} = 0$ de R^{p+q+1}.)

(C_2) $f'(V)$ rencontre R^{p+q} orthogonalement, i. e. la restriction à S^p du fibré normal de f' coincide avec le fibré normal de f.

(C_3) Le fibré normal de f' est trivial.

Remarque. La condition (C) entraine que le fibré normal ν_f de l'immersion donnée f est trivial. Il doit en être ainsi puisque ν_f trivial est une condition nécessaire pour $c_f = 0$. (Cf. par exemple [11], Lemme (3.4).)

Remarquons encore que si f est le plongement standard $S^p \subset R^{p+1} \subset R^{p+q}$, la condition (C) est réalisée avec pour V^{p+1} une hémisphère.

On forme la variété différentiable fermée M^{p+1}, réunion de V^{p+1} et du disque D^{p+1} avec identification des bords (par l'application identité $S^p \to S^p$). Comme V est une π-variété avec frontière non-vide, elle est parallèlisable. (Cf. [14], Lemma 1.3.) Donc M^{p+1} est presque parallèlisable.

La restriction à $S^p = V \cap D$ du fibré tangent à M est trivialle. (Suspension du fibré tangent à S^p.) Soit A_{p+1} un champ de $(p + 1)$-repères tangents à M^{p+1}, défini sur S^p. On peut étendre f', comme immersion, à un voisinage W de S^p dans M^{p+1}, et $df' \mid S^p$ appliquée aux repères A_{p+1} fournit une application $\varphi: S^p \to V_{p+q+1, p+1}$.

Lemme 2.1. *Il existe un élément* $\varphi_0 \in \pi_p(SO(p + 1))$, *tel que* $j_* \varphi_0 = \varphi$, *et satisfaisant*

$$\varphi_0 + \mathfrak{o}(D) = \mathfrak{o}(M),$$

où $\mathfrak{o}(M)$ *est une obstruction pour paralléliser* M, *et* $\mathfrak{o}(D)$ *est l'obstruction pour étendre* A_{p+1} *à l'intérieur de* D^{p+1}.

Démonstration. L'application tangentielle $V \to G_{p+q+1, p+1}$ de V dans la GRASSMANNienne des $(p + 1)$-plans orientés de R^{p+q+1} est homotope à zéro. (En effet, cette application est couverte par une application $V \to V_{p+q+1, q}$ donnée par une section du fibré normal de f', et $H^{p+1}(V) = 0$.) En utilisant le lemme de relèvement des homotopies, on peut construire sur V^{p+1} un champ

T_{p+1} de $(p+1)$-repères tangents, tel que l'application $V \to V_{p+q+1,p+1}$ donnée par $x \to df'(T_{p+1}(x))$ soit homotope à zéro. Il s'ensuit que la matrice des produits scalaires des vecteurs de A_{p+1} et de T_{p+1} restreint à S^p fournit une application $S^p \to SO(p+1)$ dont la classe d'homotopie $\varphi_0 \in \pi_p(SO(p+1))$ a pour image φ par l'homomorphisme j_*. On désignera par $\mathfrak{o}(M)$ l'obstruction $\mathfrak{o}(\tau, T)$ pour étendre T_{p+1} comme champ de $(p+1)$-repères tangents sur M^{p+1}. $[\mathfrak{o}(M) \in \pi_p(SO(p+1)).]$ On a $\varphi_0 + \mathfrak{o}(D) = \mathfrak{o}(M)$.

§ 3. L'invariant de SMALE

L'invariant de SMALE c_f d'une immersion $f: S^p \to R^{p+q}$ est défini comme suit (cf. [16]): Soit $s: S^p \to R^{p+q}$ une immersion de S^p dans R^{p+q} régulièrement homotope au plongement standard, et telle que pour un voisinage U_0 de $a^* = (-1, 0, \ldots, 0) \in S^p$ on ait $s \mid U_0 = f \mid U_0$. Soit U un voisinage sphérique de a^* tel que $U \subset \overline{U} \subset U_0$, et soit A_p un champ de repères tangent à S^p défini et continu sur $X = S^p - U$. On introduit un difféomorphisme $r: E^p_+ \to X$ préservant l'orientation, et $z \to z^*$ la reflexion par rapport au plan de l'équateur $E^p_+ \cap E^p_-$. On pose

$$c_f(z) = \begin{cases} (df)(A_d(rz)) \; , & \text{pour} \quad z \in E^p_+ \; , \\ (ds)(A_d(rz^*)) \; , & \text{pour} \quad z \in E^p_- \; . \end{cases}$$

$(df \mid X \cap \overline{U} = ds \mid X \cap \overline{U}.)$

c_f est une application continue de S^p dans $V_{p+q,p}$. Sa classe d'homotopie, également notée c_f est par définition l'invariant de SMALE de f.

Soit f' l'immersion de $W = S^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ dans R^{p+q+1} donnée par $f'(x, t) = f(x) + tn$, où $n = (0, \ldots, 0, 1) \in R^{p+q+1}$ (ou toute autre immersion $f': W \to R^{p+q+1}$, telle que $f' \mid S^p \times \{0\} = f$ et $(df'/dt)_{t=0} = n$).

La restriction à $S^p \times \{0\}$ du fibré tangent à W est trivialle. Soit A_{p+1} un champ de $(p+1)$-repères tangents à W, défini sur $S^p \times \{0\}$. L'application prolongée df induit une application $\varphi: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$.

Le même procédé appliqué au plongement standard fournit une application $\sigma: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$.

Désignons par $k: V_{p+q,p} \to V_{p+q+1,p+1}$ l'application qui adjoint le vecteur n à tout p-repère de R^{p+q}. On a le

Lemme 3.1. $k_*(c_f) = \varphi - \sigma$.

Démonstration. $\varphi - \sigma$ est indépendant du choix de A_{p+1}. On prendra $A_{p+1} = \{A_p, t\}$ sur $X = S^p - U$.

Soit Y l'espace obtenu à partir de la réunion disjointe de deux copies S et S' de S^p par identification $x \equiv x'$ pour $x \in U$. On a des inclusions naturelles $i: S^p \to Y$, et $i': S^p \to Y$ par composition avec le passage au quotient des identités $S^p \to S$, $S^p \to S'$ respectivement.

$k \circ c_f$ se factorise par $\gamma \circ h$, où $h: S^p \to Y$, $\gamma: Y \to V_{p+q+1,p+1}$, avec

$$h(z) = \begin{cases} i \circ r(z) & \text{pour} \quad z \in E_+^p \,, \\ i' \circ r(z^*) & \text{pour} \quad z \in E_-^p \,. \end{cases}$$

Il est évident que $h(S^p)$ est homologue à $i(S^p) - i'(S^p)$, et comme Y est $(p-1)$-connexe, h est homotope à $i - i'$. On a donc

$$k \circ c_f = \gamma \circ h \simeq \gamma \circ (i - i') \simeq \gamma \circ i - \gamma \circ i' = \varphi - \sigma \,.$$

Ceci démontre le Lemme 3.1.

On remarquera que pour $q \geqq 2$, $k_*: \pi_p(V_{p+q,p}) \to \pi_p(V_{p+q+1,p+1})$ est un isomorphisme. (Suite exacte d'homotopie de la fibration $V_{p+q+1,p+1} / V_{p+q,p} = S^{p+q}$.)

Lemme 3.2. *Soit* $f: S^p \to R^{p+q}$ *une immersion satisfaisant à la condition* (C) *du* § 2. *Si* $p \leqq 2q - 2$, *alors* $c_f = 0$.

Démonstration. On applique le Lemme 2.1 à l'immersion f et au plongement standard s. Il existe des éléments $\varphi_0, \sigma_0 \in \pi_p(SO(p+1))$ tels que $j_*\varphi_0 = \varphi$, $j_*\sigma_0 = \sigma$, et satisfaisant

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \mathfrak{o}(D) &= \mathfrak{o}(M) \\ \sigma_0 + \mathfrak{o}(D) &= \mathfrak{o}(S^{p+1}) \,, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{o}(S^{p+1})$ est l'obstruction pour parallèliser S^{p+1}. Il s'ensuit

$$\varphi_0 - \sigma_0 = \mathfrak{o}(M) - \mathfrak{o}(S^{p+1}) \,,$$

et comme $\iota_* \mathfrak{o}(S^{p+1}) = 0$, en appliquant j_*:

$$\varphi - \sigma = j_* \mathfrak{o}(M) \,.$$

On obtient donc, sans restriction de dimensions, sous l'hypothèse (C):

$$k_*(c_f) = j_* \mathfrak{o}(M^{p+1}) \,.$$

Si $p \leqq 2q - 2$, on peut appliquer le Lemme 1.1, et on conclut $c_f = 0$.

Pour obtenir le théorème de l'introduction, il reste à démontrer que si $f: S^p \to R^{p+q}$ est un plongement, et si $p \leqq 2q - 2$, alors la condition (C) est satisfaite.

§ 4. Fin de la démonstration

$f: S^p \to R^{p+q}$ étant un plongement, il suit de $p \leqq 2q - 2$ que le fibré normal de f est trivial. (Cf. [9], Theorem 8.2.) Soit F_q une section arbitraire du fibré principal associé. (F_q est un champ de q-repères orthogonal à $f(S^p)$.)

Par un procédé connu (cf. [9]), on peut associer à f et F_q une classe $\alpha(f, F_q) \in \pi_{p+q}(S^q)$.

Lemme 4.1. *Le plongement* $f: S^p \to R^{p+q}$ *étant donné,* $p \leqq 2q-2$, *on peut choisir* F_q *pour que* $\alpha(f, F_q) = 0$[4]).

De là résulte immédiatement (cf. [15], démonstration du Lemma 1) qu'il existe une variété à bord V^{p+1} de bord S^p, et un plongement $f': V^{p+1} \to R^{p+q+1}$ satisfaisant aux conditions (C_1), (C_2), (C_3) du § 2.

Démonstration du lemme 4.1. La classe $\alpha(f, F_q)$ admet un représentant $\varphi: S^{p+q} \to S^p$ univoquement déterminé après choix d'un voisinage tubulaire de $f(S^p)$ dans R^{p+q} et d'un difféomorphisme relatif $r: (D^q, S^{q-1}) \to (S^q, a^*)$ de degré 1. Le point $a \in S^q$, antipode de a^*, est valeur régulière de φ, et $\varphi^{-1}(a) = f(S^p)$. (On identifie R^{p+q} avec son image dans S^{p+q} par projection stéréographique.)

D'après [9], Lemma 8.1, la restriction $p \leqq 2q-2$ implique alors que $\alpha(f, F_q)$ est contenu dans l'image de l'homomorphisme $J: \pi_p(SO(q)) \to \pi_{p+q}(S^q)$ de HOPF-WHITEHEAD[5]). Il existe donc une classe $\mu \in \pi_p(SO(q))$ telle que $J\mu = \alpha(f, F_q)$.

D'autre part, à toute application $\xi: S^p \to SO(q)$, on peut associer un nouveau champ $\xi \cdot F_q$ de q-repères, orthogonal à $f(S^p)$. Il suffit, pour tout $x \in S^p$ de faire agir la matrice $\xi(x)$ sur les vecteurs de F_q en $f(x)$. Je dis que

$$\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) + \sigma(J\xi) , \qquad (*)$$

où ξ désigne également la classe d'homotopie de l'application $\xi: S^p \to SO(q)$, et σ est l'automorphisme involutif de $\pi_{p+q}(S^q)$ donné par $\sigma(\alpha) = (-1)^p(\varepsilon \circ \alpha)$, avec $\varepsilon = (-1)^{q-1} i_q$.

La formule (*) ci-dessus implique le lemme 4.1.

Remarquons tout d'abord que σ induit un automorphisme de l'image de J. Il suffit de vérifier que $\sigma\big(J\pi_p(SO(q))\big) \subset J\pi_p(SO(q))$. Or, on sait que

$$(a i_q) \circ \alpha = a\alpha + \frac{a(a-1)}{2} [i_q, i_q] \circ H_0 \alpha .$$

(Cf. [4], formule 6.8.) On applique cette formule avec $\alpha = J\xi$, et on utilise

$$H_0 J\xi = E^q \Phi_* \xi, \qquad \text{au signe près,}$$

(Cf. [3], Lemma 4. $\Phi_*: \pi_p(SO(q)) \to \pi_p(S^{q-1})$ est induite par la projection de $X \in SO(q)$ sur son premier vecteur colonne.)

---

[4]) On comparera ce lemme avec Lemma 6.5 et 6.6 de J. MILNOR [14].

[5]) Dans [9], Lemma 8.1, le lemme reste valable si l'on remplace la stricte inégalité $d < 2n$ portant sur les dimensions par $d \leqq 2n$, la démonstration restant inchangée. La validité pour $d \leqq 2n$ du diagramme utilisé est fournie par le théorème (77) de I. JAMES, *On the suspension sequence*. Ann. of Math. vol. 65 (1957), 74–107. C'est sous cette nouvelle forme que le lemme est appliqué ici.

$$[i_q, i_q] = J\,\partial i_q\,,$$

$\partial : \pi_q(S^q) \to \pi_{q-1}(SO(q))$ étant l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie de la fibration $SO(q+1)/SO(q)$. Enfin, $J\beta \circ E^q\gamma = J(\beta \circ \gamma)$, au signe près, $\beta \in \pi_{q-1}(SO(q))$, $\gamma \in \pi_q(S^{q-1})$. On en conclut

$$\sigma(J\,\xi) = J(\pm\,\xi + c\cdot\partial i_q \circ \Phi_*\,\xi)\,,$$

c pouvant être 0, -1 ou $+1$ suivant les valeurs de p et q.

Il existe donc une classe $\lambda \in \pi_p(SO(q))$, telle que $\alpha(f, F_q) = J\mu = \sigma(J\lambda)$. On prendra $\xi = -\lambda$. D'après (*), on a $\alpha(f, \xi\cdot F_q) = \alpha(f, F_q) - \sigma(J\lambda) = 0$.

Le champ $\xi\cdot F_q$ répond aux exigences du lemme 4.1. Reste à démontrer la formule (*).

Soit s: $S^p \to R^{p+q}$ le plongement standard $(s(S^p) \subset R^{p+1})$, et A_q le champ $(x, t_{p+2}, \ldots, t_{p+q})$, où $t_r = (\delta_{r,1}, \ldots, \delta_{r,p+q})$. Considérons $\alpha(s, \xi\cdot A_q)$, où $\xi : S^p \to SO(q)$ est l'application de la formule (*). On a vu dans [9], 1.8, page 349, que $\alpha(s, \xi\cdot A_q) = \sigma(J\,\xi)$. Il faut donc démontrer

$$\alpha(f, \xi\cdot F_q) = \alpha(f, F_q) + \alpha(s, \xi\cdot A_q)\,. \qquad (**)$$

Des voisinages tubulaires de $f(S^p)$ et $s(S^p)$ étant choisis, ainsi qu'un difféomorphisme relatif $r : (D^q, S^{q-1}) \to (S^q, a^*)$, on considère les représentants canoniques φ_ξ, φ de $\alpha(f, \xi F_q)$, $\alpha(f, F_q)$, et ψ_ξ de $\alpha(s, \xi\cdot A_q)$.

Pour construire une homotopie entre φ_ξ et $\varphi + \psi_\xi$, on part de l'homotopie triviale $h : S^{p+q} \times I \to S^q$ donnée par $h(z, t) = \varphi(z)$. Le point $a \in S^q$ (antipode de a^*) est valeur régulière pour h, et $h^{-1}(a) = Q$ est difféomorphe à $S^p \times I$ par le plongement $f'(x, t) = (f(x), t)$ dans $R^{p+q} \times I$. Soit y un point intérieur de Q et $c : I \to R^{p+q} \times I$ un chemin différentiable, de point final y, dont le point initial se trouve dans $R^{p+q} = R^{p+q} \times \{0\}$, tel que $c(I) \cap Q = \{y\}$. On peut encore supposer que pour s voisin de 0, on a $c(s) = (c(0), s)$, et qu'en son point final, c rencontre Q orthogonalement. On se sert alors de c et d'un champ de repères normaux à $c(I)$ pour définir un plongement $s' : D^{p+1} \times I \to R^{p+q} \times I$, tel que $s' \mid \{0\} \times I = c$, et l'image de $D^{p+1} \times I$ ne rencontre pas Q excepté en un voisinage sphérique U de y sur lequel $D^{p+1} \times \{1\}$ est appliqué par le difféomorphisme $s' \mid D^{p+1} \times \{1\}$. Soit N la variété obtenue par réunion de $Q - U$ et $s'(S^p \times I)$ après avoir arrondi les angles le long de la frontière de U. (Cf. [14], Appendix.) Le champ de q-repères normaux sur $Q - U$ s'étend sans difficulté sur N. On peut même supposer que la restriction de ce champ à $s'(S^p \times \{0\}) = s(S^p)$ est le champ banal formé de la normale à $s(S^p)$ dans R^{p+1} et des $(q-1)$-vecteurs $t_{p+2}, \ldots, t_{p+q}$.

Comme N est connexe, il existe sur N un chemin différentiable joignant un point de $s(S^p)$ à un point de $f(S^p) \times \{1\} \subset Q$ qui rencontre le bord de N orthogonalement en ses extrémités et n'a pas d'autre point commun avec ce bord. Soit T un voisinage tubulaire de ce chemin dans N, et $H : D^p \times I \to T$ un difféomorphisme. L'application $\xi : (S^p, a^*) \to (SO(q), E)$ détermine une application $\xi \circ r = \xi' : (D^p, S^{p-1}) \to (SO(q), E)$, où E est la matrice unité. On remplace alors le champ F_q de q-repères sur N par F'_q, égal à F_q sur $N - T$ et égal à $\xi'(H^{-1}z) \cdot F_q(z)$ pour $z \in T$. La variété N munie du champ F'_q fournit une homotopie entre φ_ξ et $\varphi + \psi_\xi$. D'où la formule (**).

§ 5. Remarques

Soit $f : S^p \to R^{p+q}$ un plongement. Pour que c_f soit nul, il est nécessaire que le fibré normal de f soit trivial.

Or, outre le cas $p \leqq 2q - 2$ que l'on vient d'étudier, on sait que le fibré normal de f est trivial pour $q \leqq 3$. (Bien connu pour $q \leqq 2$. Résultat récent de W. S. MASSEY [13] pour $q = 3$.) Il est donc naturel de se demander si l'invariant de SMALE d'un plongement $f : S^p \to R^{p+q}$ avec $q \leqq 3$ est toujours nul.

J'ignore totalement quelle est la situation pour $q = 2$ ou 3. On trouvera ci-dessous quelques résultats, obtenus en collaboration avec J. MILNOR, concernant le cas $q = 1$.

On commence par un problème de groupes d'homotopie:

Problème 1. *On sait* [2] *que* $\pi_{8s}(SO(N))$ *et* $\pi_{8s+1}(SO(N))$ *sont cycliques d'ordre* 2. ($N \geqq 8s + 3$.) *Soient* ε_{8s} *et* ε_{8s+1} *les générateurs de ces groupes. Les éléments* $\alpha_{8s} = J\varepsilon_{8s}$ *et* $\alpha_{8s+1} = J\varepsilon_{8s+1}$ *sont-ils nuls?* ($J : \pi_r(SO(N)) \to \pi_{r+N}(S^N)$ *est l'homomorphisme de* HOPF-WHITEHEAD.)

On sait que $J\varepsilon_8 \neq 0$ et $J\varepsilon_9 \neq 0$. En outre, $\varepsilon_{8s+1} = \varepsilon_{8s} \circ \eta_{8s}$ pour tout $s \geqq 1$, où η_{8s} est le générateur de $\pi_{8s+1}(S^{8s}) \cong Z_2$. Donc si $J\varepsilon_{8s}$ est nul, alors $J\varepsilon_{8s+1}$ l'est aussi. (Cf. [12], Lemma 1.2.)

On va voir que ce problème est en relation avec les problèmes suivants:

Problème 2. *Soit* $f : S^p \to R^{p+1}$ *un plongement. L'invariant de* SMALE c_f *de* f *est-il nul?*

Considérons la région bornée V^{p+1} de R^{p+1} dont le bord est $f(S^p)$. Soit Σ^{p+1} la variété différentiable obtenue à partir de la réunion disjointe $V^{p+1} \cup D^{p+1}$ par identification de $x \in S^p$ avec $f(x) \in V^{p+1}$, pour tout $x \in S^p$. La variété Σ^{p+1} est une sphère d'homotopie [6]), et un raisonnement

[6]) Dans ce qui suit, «sphère d'homotopie» signifie: Variété différentiable ayant le type d'homotopie d'une sphère. Ces variétés ont été étudiées par J. MILNOR [14].

analogue à celui de la démonstration du Lemme 3.1 montre que

$$c_f = \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) - \mathfrak{o}(S^{p+1}) , \tag{5.1}$$

où $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1})$, $\mathfrak{o}(S^{p+1}) \in \pi_p(SO(p+1))$ sont les obstructions pour parallèliser Σ^{p+1} et S^{p+1} respectivement.

Soient $\tau(\Sigma^{p+1})$, $\tau(S^{p+1}) \in \pi_{p+1}(B_{SO(p+1)})$ les classes d'homotopie des applications tangentielles de Σ^{p+1} et S^{p+1}. On a

$$\partial\tau(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) , \quad \partial\tau(S^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1}) , \tag{5.2}$$

où $\partial : \pi_{p+1}(B_{SO(p+1)}) \to \pi_p(SO(p+1))$ est l'*iso*morphisme bord de la suite exacte d'homotopie du fibré classifiant pour $SO(p+1)$.

Problème 3. *A-t-on* $\tau(\Sigma^{p+1}) = \tau(S^{p+1})$, *quelle que soit la sphère d'homotopie* Σ^{p+1}*?*

Les formules (5.1) et (5.2) montrent qu'une réponse affirmative au Problème 3 entraîne une réponse affirmative au Problème 2.

On va voir que le Problème 3 est équivalent au

Problème 4. *Toute sphère d'homotopie* Σ^{p+1} *est-elle une* π*-variété?* (C'est-à-dire: Toute sphère d'homotopie plongée dans un espace euclidien d'assez grande dimension admet-elle un fibré normal trivial?)

Remarque: D'après les résultats de M. HIRSCH [5], Σ^{p+1} est une π-variété si et seulement si l'on peut immerger Σ^{p+1} dans R^{p+2}.

(3) → (4). Si $\tau(\Sigma) = \tau(S)$, alors aussi $\mathfrak{o}(\Sigma) = \mathfrak{o}(S)$. Donc $\iota_* \mathfrak{o}(\Sigma) = 0$, i. e. Σ est une π-variété.

(4) → (3). Si la sphère d'homotopie Σ^{p+1} est une π-variété, tout plongement $f : \Sigma^{p+1} \to R^{p+N+1}$ avec $N \geqq p+2$ induit un fibré normal trivial. Il s'ensuit que la suspension du fibré tangent (sa classe de S-équivalence) est trivialle. Donc $\iota^* \mathfrak{o}(\Sigma) = 0$. Par suite (exacte): $\mathfrak{o}(\Sigma) \in \operatorname{Im} \Delta$, où

$$\Delta : \pi_{p+1}(S^{p+1}) \to \pi_p(SO(p+1)) .$$

Pour *p impair*, $\Phi_* \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \chi(\Sigma^{p+1}) = \chi(S^{p+1}) = \Phi_* \mathfrak{o}(S^{p+1})$, et $\operatorname{Ker} \Phi_* \cap \operatorname{Im} \Delta = 0$. Donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1})$.

Pour *p pair*, S^{p+1} *parallèlisable*, $\mathfrak{o}(S^{p+1}) = 0$, et $\operatorname{Im} \Delta = 0$. Donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = 0 = \mathfrak{o}(S^{p+1})$.

Pour *p pair*, S^{p+1} *non parallèlisable*, $\operatorname{Im} \Delta$ est isomorphe à Z_2, engendré par $\Delta i_{p+1} = \mathfrak{o}(S^{p+1})$. Si $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1})$ était différent de $\mathfrak{o}(S^{p+1})$, on aurait $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = 0$, donc Σ^{p+1} parallèlisable. Or, la semi-caractéristique $\chi^*(\Sigma^{p+1})$ de Σ^{p+1} vaut 1. D'après [8], Theorem 9.3, une variété de dimension $p+1$ dont la semi-caractéristique vaut 1 ne peut être parallèlisable que s'il existe dans $\pi_{2p+3}(S^{p+2})$ un élément d'invariant de HOPF 1. D'après J. F. ADAMS [1], ceci implique S^{p+1} parallèlisable. On a donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1})$ dans ce cas également.

Comme $\partial : \pi_{p+1}(B_{SO(p+1)}) \to \pi_p(SO(p+1))$ est un isomorphisme, on a aussi $\tau(\Sigma^{p+1}) = \tau(S^{p+1})$.

Résultats connus (pour autant que je sache):

Théorème 5.1. *Pour* $p \neq 8s$, $8s+1$, *toute sphère d'homotopie de dimension* $p+1$ *est une* π*-variété.*

Théorème 5.2. *Toute sphère d'homotopie de dimension* 9 *ou* 10 *est une* π*-variété. Pour* $p = 8s$ *avec* $s \geqq 1$, *les deux propositions suivantes sont équivalentes. Pour* $p = 8s+1$, *la proposition* (b) *entraîne* (a).

(a) *Toute sphère d'homotopie* Σ^{p+1} *est une* π*-variété*

(b) $J\varepsilon_p \neq 0$.

On se trouve ramené au Problème 1.

A l'exception des cas $p = 8s$ *ou* $p = 8s+1$ *avec un* $s \geqq 2$, on a donc, en vertu des remarques qui précèdent:

Corollaire 5.1. *Avec la restriction ci-dessus pour* p, *tout plongement* f: $S^p \to R^{p+1}$ *est régulièrement homotope au plongement standard.*

Corollaire 5.2. *Avec la même restriction pour* p, *le fibré tangent à toute sphère d'homotopie* Σ^{p+1} *est donné par le même élément de* $\pi_{p+1}(B_{SO(p+1)})$ *que le fibré tangent de la sphère ordinaire.*

Ce corollaire s'applique en particulier aux sphères de MILNOR dont les dimensions sont favorables.

Démonstration du théorème 5.1.

$f : \Sigma^{p+1} \to R^{p+N+1}$ étant un plongement dans un espace euclidien de grande dimension ($N \geqq p+2$), et ν le fibré principal normal de groupe $SO(N)$, soit F_N une section de ν restreint à $\Sigma - x^0$. L'obstruction $\mathfrak{o}(\nu, F_N)$ pour étendre F_N (comme section de ν) sur Σ^{p+1} est un élément de $H^{p+1}(\Sigma^{p+1}; \pi_p(SO(N))) = \pi_p(SO(N))$.

On connaît $\pi_p(SO(N))$ pour $N \geqq p+2$. (Cf. [2].) Les valeurs sont

	Z_2	Z_2	0	Z	0	0	0	Z
pour $p \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7 modulo 8

respectivement. ($p \geqq 1$.)

Le théorème 5.1 (qui revient à affirmer que $\mathfrak{o}(\nu, F_N) = 0$) est donc banal pour $p \equiv 2, 4, 5, 6$ modulo 8.

On a exclu $p \equiv 0, 1$ modulo 8. Il reste donc à examiner le cas où $p = 4k - 1$. Pour ces valeurs de p, $\mathfrak{o}(\nu, F_N)$ est un entier au signe près. On sait que

$$p_k[\Sigma^{4k}] = a_k \cdot (2k-1)!\,\mathfrak{o}(\nu, F_N) ,$$

où $p_k \in H^{4k}(\Sigma^{4k}; Z)$ est la classe de Pontrjagin de Σ^{4k} en dimension $4k$, et $a_k = 1 + \sin^2(k\pi/2)$. (Cf. [10], Lemma (1.1).)

Comme l'index de Σ^{4k} est lié à p_k par

$$I(\Sigma^{4k}) = s_k p_k + P(p_1, \ldots, p_{k-1}) ,$$

(formule de l'index, F. HIRZEBRUCH [6], Hauptsatz 8.2.2.), et que $H^i(\Sigma^{4k}) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq 4k-1$ entraine $I(\Sigma^{4k}) = 0$, $P(p_1, \ldots, p_{k-1}) = 0$, il s'ensuit $p_k = 0$. ($s_k \neq 0$.) Donc aussi $\mathfrak{o}(\nu, F_N) = 0$. Le théorème 5.1 est démontré.

Démonstration du théorème 5.2. La première assertion découle des suivantes et de $J\varepsilon_8 \neq 0$, $J\varepsilon_9 \neq 0$.

(b) $\to$ (a): Soit Σ^{p+1} une sphère d'homotopie et $f\colon \Sigma^{p+1} \to R^{p+N+1}$ un plongement. ($N \geqq p+2$.) Soit F_N une section du fibré principal normal ν_f restreint à $\Sigma - x_0$. Considérons l'obstruction $\mathfrak{o}(\nu, F_N) \in \pi_p(SO(N)) \cong Z_2$ pour $p = 8s$ ou $8s+1$. On sait que $J\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = 0$. (Cf. [15], Lemma 1.) Donc si $J\varepsilon_p \neq 0$, il s'ensuit $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) \neq \varepsilon_p$. Donc $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = 0$. Autrement dit, Σ^{p+1} est une π-variété.

(a) $\to$ (b): On démontre la contraposition. Supposons $J\varepsilon_p = 0$. D'après [15], Lemma 1, il existe une variété presque parallèlisable M^{p+1} et un plongement $f\colon M^{p+1} \to R^{p+N+1}$ avec une section F_N du fibré principal normal ν_f restreint à $M - x_0$, tels que $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = \varepsilon_p$. On simplifie M^{p+1} par chirurgie. (Cf. J. MILNOR [14], § 5.) Le résultat est une sphère d'homotopie Σ_0^{p+1} plongée dans R^{p+N+1}, et l'application caractéristique du fibré normal est ε_p. Cette sphère d'homotopie Σ_0^{p+1} n'est donc pas une π-variété. D'où le théorème 5.2.

En relation avec le Problème 2 (invariant de SMALE d'un plongement $f\colon S^p \to R^{p+1}$), on a le

Problème 5. *Soit* $f\colon S^p \to R^{p+q}$ *une immersion et* $h\colon S^p \to S^p$ *un difféomorphisme de degré* 1. *A-t-on* $c_{f\circ h} = c_f$?

On va voir que la réponse est affirmative si $p \leqq 2q-2$ en vertu du théorème des §§ 1–4, et également si p est une dimension pour laquelle le Problème 2 admet une réponse affirmative. (Donc en vertu du Corollaire 5.1, pour $p \neq 8s$, $8s+1$ avec $s \geqq 2$.) Dans ce deuxième cas la réponse au Problème 5 est affirmative sans restriction sur q.

On peut regarder h comme un plongement $h\colon S^p \to R^{p+1}$. L'inclusion u:

$R^{p+1} \to R^{p+q}$ induit une application $v: V_{p+1,p} \to V_{p+q,p}$, et on a $c_{u \circ h} = v_*(c_h)$. On va démontrer que

$$c_{f \circ h} = c_f + c_{u \circ h} \,. \tag{5.3}$$

Il s'ensuit que $c_{f \circ h} = c_f$ si

1.) $p \leqq 2q - 2$, car alors $c_{u \circ h} = 0$ en vertu du théorème de l'introduction;

2.) $p \neq 8s$ et $p \neq 8s + 1$ avec $s \geqq 2$, car alors en vertu du Corollaire 5.1, on a $c_h = 0$, donc aussi $c_{u \circ h} = v_*(c_h) = 0$.

Reste à démontrer la formule (5.3). Soit $W = S^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, et f': $W^{p+1} \to R^{p+q+1}$ l'immersion donnée par $f'(x, t) = (f(x), t)$. Soit A_{p+1} la restriction à $S^p \times \{0\}$ d'un champ de $(p+1)$-repères tangents à W (qui est parallèlisable). df' induit une application $\varphi: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$. Le même argument appliqué au plongement standard fournit $\sigma: S^p \to V_{p+q+1,p+1}$. On a vu (Lemme 3.1) que $k_* c_f = \varphi - \sigma$.

Soit $h': W \to W$ le difféomorphisme donné par $h'(x, t) = (h(x), t)$, et soit $A'_{p+1} = dh'(A_{p+1})$.

En utilisant ci-dessus A'_{p+1} au lieu de A_{p+1}, on obtient φ' et σ': $S^p \to V_{p+q+1,p+1}$. Il existe une application $\delta: S^p \to SO(p+1)$, donnée par la matrice des produits scalaires des vecteurs de A_{p+1} et A'_{p+1}, telle que

$$j_* \delta = \varphi' - \varphi = \sigma' - \sigma \,.$$

On en conclut:

$$\begin{aligned} k_* c_{f \circ h} &= \varphi' - \sigma = \varphi' - \sigma' + \sigma' - \sigma \,, \\ &= \varphi - \sigma + \sigma' - \sigma \,, \\ &= k_* c_f + k_* c_{u \circ h} = k_*(c_f + c_{u \circ h}) \,. \end{aligned}$$

Pour $q \geqq 2$, k_* est un isomorphisme et (5.3) s'ensuit. Pour $q = 1$, le même principe de démonstration s'applique, en faisant appel à un champ de normales à $f(S^p)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS, *On the nonexistence of elements of* HOPF *invariant one.* Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 279–282.

[2] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups.* Ann. of Math., 70 (1959), 313–337.

[3] P. J. HILTON, *A note on the P-homomorphism in homotopy groups of spheres.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 51 (1955), 230–233.

[4] P. J. HILTON, *On the homotopy groups of the union of spheres.* Journal of the London Math. Soc., 30 (1955), 154–172.

[5] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242–276.

[6] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Springer (1956).

[7] I. JAMES, *On the iterated suspension.* Quart. Journal of Math., 5 (1954), 1–10.

[8] M. Kervaire, *Relative characteristic classes.* Amer. Journal of Math., vol. LXXIX (1957), 517–558.
[9] M. Kervaire, *An interpretation of* G. Whitehead*'s generalization of the* Hopf *invariant.* Ann. of Math., 69 (1959), 345–365.
[10] M. Kervaire, *On the* Pontryagin *classes of certain* $SO(n)$*-bundles over manifolds.* Amer. Journal of Math., vol. LXXX (1958), 632–638.
[11] M. Kervaire, *Sur le fibré à une sphère immergée dans l'espace euclidien.* Comment. Math. Helv., 33 (1959), 121–131.
[12] M. Kervaire, *Some non-stable homotopy groups of* Lie *groups.* Illinois J. of Math., à paraître.
[13] W. S. Massey, *On the normal bundle of a sphere imbedded in euclidean space.* Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
[14] J. Milnor, *Differentiable manifolds which are homotopy spheres* (à paraître).
[15] J. Milnor and M. Kervaire, Bernoulli *numbers, homotopy groups and a theorem of* Rohlin. Proc. Int. Math. Congress. Edinburgh (1958). A paraître.
[16] S. Smale, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces.* Ann. of Math., 69 (1959), 327–344.

(Reçu le 28 septembre 1959)