Math. Ann. 223, 119—138 (1976)

Das Bild des Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi_*^S(B\mathbb{Z}_p) \to K_1(B\mathbb{Z}_p)$

Karlheinz Knapp*
Mathematisches Institut der Universität, Wegelerstr. 10,
D-5300 Bonn, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Zu einer multiplikativen Homologietheorie E mit Einselement läßt sich analog zum Fall der gewöhnlichen Homologietheorie ein stabiler Hurewicz-Homomorphismus $h_E: \pi_n^S(X) \to E_n(X)$ zwischen stabiler Homotopietheorie und E-Homologie erklären. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Problem der Berechnung von h_K für den klassifizierenden Raum BG einer endlichen zyklischen Gruppe G und die K-Theorie. Die Wahl der K-Theorie als Homologietheorie E hat mehrere Gründe. Einmal ist für eine Homologietheorie E, für die komplexe Vektorbündel orientierbar sind, der Homomorphismus h_E durch h_K bestimmt. Hat G ungerade Ordnung, so läßt sich auch bei vielen anderen Orientierbarkeitsvoraussetzungen h_E durch h_K berechnen. Insbesondere trifft dies auf die Vergißfunktoren $\pi_*^S(BG) \to \Omega_*^U(BG)$ und $\pi_*^S(BG) \to \Omega_*^{SO}(BG)$ zu. Ein anderer Grund für die Wahl der K-Theorie, ist darin zu sehen, daß h_K über einen Isomorphismus $\psi: K_1(BG) \cong S^{-1}R(G)/R(G)$ zwischen der K-Homologie von BG und einem Quotienten des lokalisierten Darstellungsrings von G mit der α-Invarianten (s. [5, 9]) in Beziehung gesetzt werden kann.

Durch die Berechnung von h_K erhält man einen vollständigen Überblick über die Werte, die die Restklasse der α-Invarianten in $S^{-1}R(G)/R(G)$ auf stabil-parallelisierten G-Mannigfaltigkeiten annehmen kann.

Da die Zerlegung einer zyklischen Gruppe in ihre Prim-Anteile eine Zerlegung von h_K in Prim-Komponenten nach sich zieht, betrachten wir h_K nur für zyklische Gruppen von Primpotenz-Ordnung.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt:

Wir beginnen mit der Herleitung der Beziehung zwischen der α-Invarianten und dem Hurewicz-Homomorphismus; sie wird später zur Berechnung von h_K herangezogen.

Auf der stabilen Homotopiegruppe $\pi_{2n-1}^S(BG)$ ist der funktionale Cherncharakter CH ($=e$-Invariante) definiert. Mit Hilfe der Künneth-Formel der

---

* Der Autor wurde vom Sonderforschungsbereich 40 „Theoretische Mathematik" an der Universität Bonn unterstützt

K-Theorie wird in § 2 CH mit h_K identifiziert. Dies gilt allgemein für Räume, deren reduzierte ganzzahlige Homologie aus Torsion besteht. Der sich für Räume mit freier ganzzahliger Homologie ergebende Zusammenhang zwischen CH und h_K ermöglicht die Interpretation der klassischen e-Invariante als Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi_*^S(S^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \tilde{K}_*(S^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

In § 3 werden die Beziehungen zwischen CH, h_K und den Adamsoperationen verwendet, um $h_K: \pi_*^S(B\mathbb{Z}_p) \to K_1(B\mathbb{Z}_p)$ für eine Gruppe von Primzahlordnung vollständig zu bestimmen. Während für $\mathbb{Z}_p$, p prim, das Bild von h_K eine endliche zyklische Gruppe ist, besteht für eine Gruppe $G = \mathbb{Z}_{p^r}$ von Primpotenzordnung das Bild von h_K aus einem zyklischen, von r abhängenden Teil und einem für genügend großes r von r unabhängigen Teil.

Es wird in § 4 gezeigt, wie dieser für $r > 1$ auftauchende Summand mit der e-Invarianten für $\pi_*^S(P_\infty \mathbb{C})$ zusammenhängt. Für einen von p abhängenden Dimensionsbereich berechnen wir diese e-Invariante und damit h_K auf $\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^r})$ für alle r und $n \leqq (p^2 - p - 1)$.

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine erweiterte Fassung eines Teils der Dissertation des Verfassers (Bonn 1975).

§ 1. α-Invariante und Hurewicz-Homomorphismus

Eine äquivariante stabile Parallelisierung einer G-Mannigfaltigkeit M ist ein G-Vektorbündelisomorphismus $TM \oplus \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^{n+m}$, wobei G auf dem Tangentialbündel über die Ableitungen und auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n+m}$ trivial operiert. Faßt man solche äquivariant-stabil-parallelisierte Mannigfaltigkeiten mit freier G-Aktion, d. h. kein Element von G außer der Identität hat einen Fixpunkt, unter der Bordismusrelation zusammen, erhält man die äquivarianten Bordismusgruppen $\Omega_n^{fr}(G)$. Ist G eine endliche Gruppe oder kompakte abelsche Liegruppe, so induziert eine äquivariante stabile Parallelisierung eine gewöhnliche stabile Parallelisierung auf dem Orbitraum und man kann $\Omega_*^{fr}(G)$ auf ganz analoge Weise, wie das für den orientierten Bordismus in [7] ausgeführt wird, mit der Bordismusgruppe stabil parallelisierter singulärer Mannigfaltigkeiten des klassifizierenden Raumes von G $\Omega_*^{fr}(BG)$ identifizieren. Einer freien G-Mannigfaltigkeit M mit äquivarianter stabiler Parallelisierung Φ wird dabei der Orbitraum M/G mit induzierter Parallelisierung und die klassifizierende Abbildung des Faserbündels $M \to M/G$ zugeordnet.

Von der G-Signatur gerade-dimensionaler G-Mannigfaltigkeiten – für die Definition siehe [5] – läßt sich eine Invariante für ungerade-dimensionale orientierte freie G-Mannigfaltigkeiten ableiten.

Es sei M eine orientierte geschlossene freie G-Mannigfaltigkeit ungerader Dimension und G eine endliche Gruppe. Da die betreffende äquivariante Bordismusgruppe endlich ist, wird ein geeignetes Vielfaches $n \cdot M$ von einer freien G-Mannigfaltigkeit Y berandet.

Man setzt

$$\alpha(g, M) = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{sign}(g, Y) \quad \text{für} \quad g \neq 1 .$$

Die Unabhängigkeit von der Auswahl der berandenden Mannigfaltigkeit Y folgt aus dem Verschwinden von $\operatorname{sign}(g, Y)$ für $g \neq 1$ auf geschlossenen freien G-Mannigfaltigkeiten und der Novikov-Additivität der G-Signatur.

Auf einer geschlossenen G-Mannigfaltigkeit Z läßt sich die G-Signatur $\operatorname{sign}(g, Z)$ durch eine charakteristische Zahl $L(g, Z)$ berechnen. Das ist die Aussage des G-Signatursatzes [5]. Hat die G-Mannigfaltigkeit Z jedoch einen nicht leeren Rand auf dem G frei operiert, so ist $L(g, Z)$ für $g \neq 1$ noch definiert und die Differenz $\operatorname{sign}(g, Z) - L(g, Z)$, die die Abweichung von der Gültigkeit des Signatursatzes beschreibt, ist gerade durch die α-Invariante des Randes gegeben. Für endliche abelsche Gruppen wird nach [19] jede ungerade-dimensionale freie G-Mannigfaltigkeit von einer natürlich nicht notwendigerweise freien G-Mannigfaltigkeit berandet, so daß für diese Gruppen der Defekt im Signatursatz ebensogut als Definition der α-Invarianten dienen kann.

Die charakteristische Zahl $L(g, Z)$ kann wie folgt erhalten werden: Die Symbolklasse des Signaturoperators ([5]) definiert ein Element U in der äquivarianten K-Gruppe $K_G^0(B(TZ), S(TZ))$ des Thomraumes des Tangentialbündels von Z. Da Z eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, ist der G-Index nicht auf $K_G^0(B(TZ), S(TZ))$, sondern auf $K_G^0(B(TZ), \partial B(TZ))$ definiert. Nach Lokalisation mit einer geeigneten multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge S des Darstellungsrings $R(G)$ von G wird der von der Inklusion $j:(B(TZ), S(TZ)) \to (B(TZ), \partial B(TZ))$ induzierte Homomorphismus bijektiv und die Komposition

$$\nu: K_G^0(B(TZ), S(TZ)) \to S^{-1}K_G(B(TZ), S(TZ)) \xleftarrow[\cong]{j^*} S^{-1}K_G(B(TZ), \partial B(TZ)) \xrightarrow{\text{Index}} S^{-1}R(G)$$

ist wohldefiniert. Für unsere Zwecke genügt es, für S die folgende Menge $S = \{(\operatorname{reg} - |G|)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ zu wählen.

Hierbei ist reg die reguläre Darstellung von G. Mit diesem S verschwindet für freie G-Räume X die Gruppe $S^{-1}K_G(X)$, siehe [26], die Bijektivität von j^* folgt aus der langen exakten Sequenz des Tripels $(B(TZ), \partial B(TZ), S(TZ))$. Elemente in $S^{-1}R(G)$ lassen sich durch $\frac{a}{b}(g) := \frac{a(g)}{b(g)}$ auf allen vom Einselement verschiedenen Gruppenelementen auswerten. $\nu(U)(g)$ ist die komplexe Zahl $L(g, Z)$ und man kann daher die α-Invariante als Element in $S^{-1}R(G)$ auffassen. Für $\operatorname{sign}(-, Z) - \nu(U)$ schreiben wir einfach $\alpha(-, \partial Z)$.

Die α-Invariante selbst ist keine Bordismusinvariante. Bildet man jedoch die Restklasse von α in $S^{-1}R(G)/R(G)$, so erhält man eine wohldefinierte Funktion $\alpha_{\mathbb{Z}}: \tilde{\Omega}_{2n-1}^{SO}(BG) \to S^{-1}R(G)/R(G)$. Ist nämlich M nullbordant, so gibt es eine freie G-Mannigfaltigkeit X mit $\partial X = M$ und $\alpha(-, M)$ ist durch $\operatorname{sign}(-, X)$, also ein Element in $R(G)$, gegeben.

Wählt man anstelle von U andere Symbolklassen, so erhält man die Atiyah-Singer-ν-Invarianten [5]. Diese Bordismusinvarianten lassen sich durch K-Theorie-charakteristische Zahlen aus $K_1(BG)$ – der K-Theorie-Homologiegruppe von BG – berechnen.

Für stabil fastkomplexe Mannigfaltigkeiten wird dies – für leicht modifizierte ν-Invarianten – in [26] durchgeführt. Beschränkt man sich auf eine zyklische

Gruppe G – wir werden das im folgenden, ohne das immer explizit zu erwähnen, tun – so ist die Beschreibung von $\alpha_{\mathbb{Z}}$ durch eine charakteristische Zahl relativ einfach durchführbar:

Satz 1.1. *Es gibt einen Thomhomomorphismus $\mu_s: \Omega_*^{SO}(BG) \to K_*(BG)$ und einen Monomorphismus $\psi: K_1(BG) \to S^{-1}R(G)/R(G)$, so daß $\psi \cdot \mu_s = -\alpha_{\mathbb{Z}}$ gilt.*

Wir definieren zunächst ψ $(G = \mathbb{Z}_n)$.

Das $(2m-1)$-Skelett von BG ist der Linsenraum $L^m = S^{2m-1}/G$. Das Scheibenbündel $B(TL^m)$ ist eine stabil-fastkomplexe Mannigfaltigkeit mit Rand und besitzt, da stabil-fastkomplexe Mannigfaltigkeiten für die K-Theorie orientierbar sind, eine Fundamentalklasse $[B, S]_T \in K_0(B(TL^m), S(TL^m))$, die einen Poincaré-Isomorphismus

$$P: K^0(B(TL^m \oplus \mathbb{R}), S(TL^m \oplus \mathbb{R})) \cong K^1(BTL^m, STL^m) \xrightarrow[\cong]{\cap [B,S]_T} K_1(BTL^m) \cong K_1(L^m)$$

definiert.

Zur Definition von $[X]_T$: Man bettet X^n in S^{n+r} mit stabil-komplexen Normalenbündel ν ein und erhält dadurch die Thom-Pontrjagin-Abbildung $j: S^{n+r} \to M(\nu)$ auf den Thomraum von ν. Aus dem kanonischen Erzeugenden von $\tilde{K}_*(S^{n+r})$ und der Thomklasse $U_T(\nu)$ – wir verwenden diejenige Thomklasse, die in [5] zur Definition des topologischen Index herangezogen wird – erhält man durch $j_*[S^{n+r}] \cap U_T(\nu) = [X]_T$ die Fundamentalklasse.

Jede Homologieklasse $x \in K_1(BG)$ liegt für genügend großes m im Bild von $i_*: K_1(L^m) \to K_1(BG)$. Durch die Abbildungsreihe

$$K_1(BG) \xleftarrow{i_*} K_1(L^m) \xrightarrow[\cong]{P} K^0(TL^m \oplus \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{\varrho} K_G^0(TS^{2m-1} \oplus \mathbb{R}) \xleftarrow{j^*} K_G(TD^{2m}) \to$$
$$\xrightarrow{\nu} S^{-1}R(G) \xrightarrow{r} S^{-1}R(G)/R(G)$$

wird $\psi(x) \in S^{-1}R(G)/R(G)$ definiert. Hierbei ist j die Inklusion von $TS^{2m-1} \oplus \mathbb{R}$ in das Tangentialbündel der Scheibe D^{2m} und ϱ der kanonische Isomorphismus $K_G^0(X) \cong K^0(X/G)$ für einen freien G-Raum X. Die K^0-Gruppe des Thomraumes eines Bündels E wurde der üblichen Konvention folgend mit $K^0(E)$ bezeichnet. Die Elemente im Kern von i_* und j^* werden von $r \circ \nu$ annuliert, so daß $\psi(x)$ wohldefiniert ist.

Die Definition von ψ für beliebige endliche Gruppen ist komplizierter und wird in [26] ausgeführt. ψ ist immer injektiv – das folgt z. B. aus der universellen Koeffizientenformel für die K-Theorie – und setzt die K-Homologiegruppen von BG in eine Beziehung zum Darstellungsring, die der bekannten Beziehung $\widehat{R(G)} \cong K^0(BG)$ analog ist. Das wird durch die Natürlichkeitseigenschaften von ψ, die in [13] untersucht werden, begründet. Für zyklische Gruppen gibt es eine Wahl von S, mit der ψ bijektiv wird ([26]).

Wir konstruieren als nächstes den Thom-Homomorphismus

$$\mu_s: \Omega_*^{SO}(X) \to K_*(X).$$

Da eine SO-orientierte Mannigfaltigkeit nicht notwendig für die K-Theorie orientierbar ist, ist der übliche Weg nicht ohne Modifikationen gangbar. Es sei M eine $2n-1$ dimensionale $SO(2n-1)$-orientierte Mannigfaltigkeit. Die Symbolklasse des Signaturoperators $U \in K^0(TM \oplus \mathbb{R})$ wird erhalten, indem man mittels des *-Operators in der bekannten Weise $(TM \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ in Eigenräume aufspaltet und damit einen Bündel-Komplex über $B(TM \oplus \mathbb{R})$ definiert, der über dem Sphärenbündel $S(TM \oplus \mathbb{R})$ exakt ist (Differenzkonstruktion, [3]). Durch das cap-Produkt von U mit der Fundamentalklasse $[B(TM), S(TM)]_T$ der stabil-fastkomplexen Mannigfaltigkeit $B(TM)$ erhält man eine Klasse $\pi_*(U \cap [BTM, STM])$ in $K_1(M)$, die wir mit $[M]_S$ bezeichnen wollen. Führt man nämlich einen Koeffizientenbereich R ein, in dem 2 invertierbar ist, so ist dies tatsächlich eine echte Fundamentalklasse. $[M]_S$ ist dann im wesentlichen die Komplexifizierung der Orientierungsklasse von Sullivan aus [23]. Einer singulären Mannigfaltigkeit $(M, f) \in \Omega_{2n-1}^{SO}(X)$ wird durch μ_s das Element $f_*([M]_S) \in K_1(X)$ zugeordnet. Der Nachweis, daß $f_*([M]_S)$ nur von der Bordismusklasse abhängig ist, ist der übliche. μ_s ist auf den Koeffizienten Ω_*^{SO} gerade die Signatur. Die Klasse U ist multiplikativ (U ist eine $K^*(-, R)$-Thomklasse) und man findet, wenn man das Spaltungsprinzip ausnutzt, daß für ein komplexes Bündel E für $U(E)$ und die Standard-Thomklasse $U_T(E)$ die Gleichung $U(E) = \Lambda^*(\bar{E}) \cdot U_T(E)$ gilt. Dabei ist $\Lambda^*(\bar{E})$ die äußere Algebra des zu E konjugierten Bündels. Ist M stabil-fastkomplex, so folgt daraus für die Beziehung der üblichen Fundamentalklasse $[M]_T$ zu $[M]_S$

$$[M^{2n-1}]_S = (-1)^n \cdot \Lambda^*(TM \oplus \mathbb{R}) \cap [M]_T. \tag{1.2}$$

Der Nachweis von $\psi \circ \mu_s = -\alpha_{\mathbb{Z}}$ ist für zyklische Gruppen jetzt sehr einfach:

Ist X^{2n} eine gerade dimensionale Mannigfaltigkeit und $(M/G, f) \in \Omega_{2n+1}^{SO}(BG)$, so folgt aus der bekannten Gleichung $\alpha(-, M \times X) = \alpha(-, M) \cdot \operatorname{sign}(X)$, daß $\alpha_{\mathbb{Z}}$ ein Ω_*-Modulhomomorphismus ist, wenn man nur auf $S^{-1}R(G)/R(G)$ die Ω_*-Modulstruktur durch den Signatur-Homomorphismus definiert.

Aus der Multiplikativität der Fundamentalklasse und der Symbolklasse U folgt die gleiche Eigenschaft für den Homomorphismus $\psi \circ \mu_s$. Die Gleichung $\psi \circ \mu_s = -\alpha_{\mathbb{Z}}$ braucht also nur für Ω_*-Modulerzeugende von $\tilde{\Omega}_*^{SO}(BG)$ nachgewiesen zu werden. Ist $|G|$ ungerade, so bilden die Linsenräume ein solches System und $\psi \circ \mu_s = -\alpha_{\mathbb{Z}}$ folgt sofort aus der Definition von ψ. Ist $|G|$ gerade, so gibt es außer dem von den Linsenräumen erzeugten Untermodul noch einen direkten Summanden von Elementen der Ordnung 2, die von $\Omega_*^{SO}(B\mathbb{Z}_2)$ herkommen [12]. Da es sich im wesentlichen um Involutionen handelt, ist die α-Invariante auf diesen Elementen ganzzahlig und damit $\alpha_{\mathbb{Z}} = 0$. Die Existenz einer Symbolklasse w mit $2 \cdot w = U$ für ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeiten impliziert, daß $\psi \circ \mu_s$ ebenfalls verschwindet.

Über die Thom-Pontrjagin-Konstruktion läßt sich $\tilde{\Omega}_*^{fr}(X)$ mit der stabilen Homotopiegruppe $\pi_*^S(X)$ identifizieren. Die Vergißfunktoren $F_{SO}: \Omega_*^{fr}(X) \to \Omega_*^{SO}(X)$ und $F_U: \Omega_*^{fr}(X) \to \Omega_*^U(X)$ gehen bei dieser Identifikation in die betreffenden stabilen Hurewicz-Homomorphismen über. Komponiert man F_U mit dem Conner-Floyd-Thom-Homomorphismus $\mu_{\mathbb{C}}: \Omega_*^U(X) \to K_*(X)$ erhält man den stabilen Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi_*^S(X) \to K_*(X)$ der K-Theorie. Aus der Gleichung (1.2) folgt dann $\mu_S \cdot F_{SO} = (-2)^n \cdot h$ und damit:

Satz 1.3. *Der Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi_{2n-1}^S(BG) \to K_1(BG)$ wird bis auf einen Faktor durch $\alpha_{\mathbb{Z}}$ beschrieben, d. h.*

$$-(-2)^n \psi \cdot h((M/G, f)) = \alpha_{\mathbb{Z}}(M).$$

Bemerkung. Der Faktor $-(-2)^n$ läßt sich vermeiden, wenn man stattt $\alpha_{\mathbb{Z}}$ die zum Todd-Geschlecht gehörende ν-Invariante verwendet.

Zum Schluß dieses Paragraphen berechnen wir $\alpha_{\mathbb{Z}}$ für eine Folge von Elementen in $\Omega_*^{fr}(B\mathbb{Z}_{p^r})$. Zunächst jedoch einige Vorbemerkungen: Im folgenden sei p eine ungerade Primzahl und $G=\mathbb{Z}_{p^r}$. In $R(G)$ hat man als Basis die Potenzen einer primitiven irreduziblen Darstellung ξ. Die α-Invariante einer freien G-Mannigfaltigkeit läßt sich daher in $S^{-1}R(G)$ als Linearkombination der ξ^i schreiben: $\alpha(-,M)=\sum_{i=1}^{p^r-1}\gamma^i\cdot\xi^i$. Die dabei auftretenden Koeffizienten $\gamma^i\in\mathbb{Z}[1/p]$ werden in [17] als getwistete Signaturdefekte gedeutet. Den Signaturdefekt einer freien G-Aktion auf M erhält man durch die Abweichung der Signatur von der Multiplikativität auf der Überlagerung, die von der freien G-Mannigfaltigkeit X, die das n-fache von M berandet, durch die Orbitabbildung definiert wird: $\gamma(M)=(1/n)(\operatorname{sign}(X)-|G|\cdot\operatorname{sign}(X/G))$. Verwendet man zur Definition der Signatur Kohomologie mit lokalen Koeffizienten, erhält man die getwisteten Signaturdefekte γ^i. Für γ gilt $\gamma=\sum\gamma^i$. Die modulo $\mathbb{Z}$ reduzierten Signaturdefekte $\gamma^i_{\mathbb{Z}}$ bestimmen dann $\alpha_{\mathbb{Z}}$.

Die Aktion von G auf M sei die Einschränkung einer freien S^1-Aktion. Die Orbitabbildung dieser S^1-Aktion $M\to M/S^1=Y$ definiert ein S^1-Prinzipalbündel η und das assozierte Scheibenbündel $D(\eta)$ läßt sich als berandende S^1-Mannigfaltigkeit verwenden. Die Fixpunktmenge besteht aus dem Nullschnitt Y. Nach [10] oder [5] gilt dann mit $x=c_1(\eta)$ für die α-Invariante dieser S^1-Aktion

$$\alpha(t,M)=-\left\langle\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1}\cup L(Y),[Y]\right\rangle+\operatorname{sign}(Y;x).$$

Dabei ist $\operatorname{sign}(Y;x)$ die Signatur der quadratischen Form $(a,b)\mapsto\langle a\cup b\cup x,[Y]\rangle$ für $a,b\in H^{k-1}(Y^{2k})$ und L das Hirzebruchsche L-Polynom des Tangentialbündels von Y. Schränkt man die S^1-Aktion auf die Untergruppe $G=\{\xi^i|i=1,\dots,p^r;\xi^{p^r}=1\}$ von S^1 ein, so gilt

$$\alpha(\xi,M)=-\left\langle\frac{\xi e^{2x}+1}{\xi e^{2x}-1}\cup L(Y),[Y]\right\rangle+\operatorname{sign}(Y;x).$$

Für die Defekte γ^i erhält man $(q:=p^r)$:

$$\gamma^i=\left\langle\left(1-2\cdot\frac{e^{2ix}-1}{e^{2qx}-1}\right)\cup L(Y),[Y]\right\rangle-\operatorname{sign}(Y;x),$$

was man unmittelbar durch Einsetzen verifiziert oder wie in [10] an anderen Beispielen vorgeführt, über den Residuensatz herleiten kann.

Der Einschränkung der Gruppenaktion entspricht der Transfer-Homomorphismus ([7]) $t:\Omega_{2n}^{fr}(BS^1)\to\Omega_{2n+1}^{fr}(BG)$. Einem S^1-Bündel η mit Totalraum $S(\eta)$ über der stabil-parallelisierten Mannigfaltigkeit Y wird dabei die $|G|$-fache Überlagerung $S(\eta)\to S(\eta)/G$ zugeordnet.

In $\Omega_2^{fr}(BS^1)$ definiert das Hopfbündel $\sigma:S^3\to S^2$ ein kanonisches Element, das zusammen mit seinen Potenzen bezüglich des Pontrjaginproduktes den freien Teil von $\tilde{\Omega}_*^{fr}(BS^1)$ erzeugt [16]. Über $M_n=S^2\times S^2\times\ldots\times S^2$ (n Faktoren, mit

Produkt-Parallelisierung) hat man das äußere Tensorprodukt des kanonischen komplexen Linienbündels $\gamma\hat{\otimes}\gamma\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}\gamma$ mit klassifizierender Abbildung f_n. Die singuläre Mannigfaltigkeit (M_n, f_n) repräsentiert $\sigma^n \in \Omega_{2n}^{fr}(BS^1)$. Aus der bekannten Formel $[P_n\mathbb{C}]\cdot[P_m\mathbb{C}] = \binom{n+m}{n}\cdot[P_{n+m}\mathbb{C}]$ im Pontrjaginring $H_*(P_\infty\mathbb{C})$ folgt sofort, daß der Abbildungsgrad von f_n $n!$ ist. Damit können wir $\gamma_{\mathbb{Z}}^i$ für das Element $t(\sigma^{n-1}) \in \Omega_{2n-1}^{fr}(BG)$ berechnen $(x = c_1(\gamma\hat{\otimes}\gamma\hat{\otimes}\ldots\gamma),\ q = p^r)$:

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbb{Z}}^i(t(\sigma^{n-1})) &= -2\cdot\left\langle \frac{e^{2ix}-1}{e^{2qx}-1}, [M_{n-1}]\right\rangle \bmod \mathbb{Z}\\ &= -\frac{2i}{q}\cdot\left\langle \frac{e^{2ix}-1}{2ix}\cdot\frac{2qx}{e^{2qx}-1}, [M_{n-1}]\right\rangle.\end{aligned}$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{(k+1)!}$$

$$\frac{2qx}{e^{2qx}-1} = 1 - 2qx + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1}\frac{B_j}{(2j)!}\cdot(2qx)^{2j}$$

und $\langle x^{n-1}, [M_{n-1}]\rangle = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$ folgt, daß zum Wert des Kroneckerproduktes $\bmod \mathbb{Z}$ nur der Summand $\dfrac{(2ix)^{n-1}}{n!}$ einen Beitrag leistet. Daher

$$\gamma_{\mathbb{Z}}^i(t(\sigma^{n-1})) = \frac{(-2i)^n}{q\cdot n} \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathbb{Z}}(t\sigma^{n-1}) = \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(-2i)^n}{q\cdot n}\cdot\xi^i.$$

Als Folgerung erhalten wir $(p \neq 2)$:

Lemma 1.4. *Die Ordnung von $h(t(\sigma^{n-1}))$ in $K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ ist $p^{r+\nu_p(n)}$.*

Bemerkung. Für $p=2$ ergeben sich analoge Formeln, wenn man statt $\alpha_{\mathbb{Z}}$ die zum Todd-Geschlecht gehörende ν-Invariante verwendet.

§ 2. Funktionaler Cherncharakter und Hurewicz-Homomorphismus

Obere Schranken für das Bild von $\pi_*^S(BG)$ in $K_1(BG)$ liefern Kohomologieoperationen in $K_*(BG)$. Für eine Primzahl p lassen sich die Adamsoperationen ψ^k mit $k \not\equiv 0(p)$ zu stabilen Operationen auf $K^*(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ erweitern ($\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}$ lokalisiert bei p). Diese stabilen Operationen operieren dann auch auf den Homologiegruppen $K_*(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ und man kann durch Berechnung der Wirkung dieser Operationen auf sphärischen Klassen in $K_1(BG, \mathbb{Z}_{(p)})$ direkt eine obere Schranke für die Ordnung dieser Elemente herleiten. Die Einführung dieser Operationen vermeiden wir durch Verwendung des funktionalen Cherncharakters. Für die beiden Extremfälle $H_*(X, \mathbb{Z})$ torsionsfrei und $\tilde{H}_*(X, \mathbb{Q}) = 0$ leiten wir als nächstes den Zusammenhang zwischen Hurewicz-Homomorphismus und funktionalem Cherncharakter her.

Der n-te Term des Cherncharakters ch^n ist eine Kohomologieoperation von $K^0(X)$ nach $H^{2n}(X, \mathbb{Q})$ und definiert deshalb auf Klassen in $K^0(X)$, die sowohl im Kern von ch^n als auch im Kern des von einer stetigen Abbildung $f: Y \to X$ induzierten Homomorphismus liegen, eine funktionale Kohomologieoperation, den funktionalen Cherncharakter zu f [24].

Da wir vor allem an Abbildungen, die Elemente aus einer stabilen Homotopiegruppe von X repräsentieren, interessiert sind, können wir uns auf den Fall $Y = S^{2n-1}$ und f ein Element von endlicher Ordnung in $\pi_{2n-1}(X)$ einschränken. Dann ist die Bedingung $f^*(x) = 0$ für alle $x \in \tilde{K}^0(X)$ automatisch erfüllt.

Die Kofasersequenz von $f: S^{2n-1} \to X$ und die Transformation ch^n liefern das kommutative Diagramm (C_f = Kofaser von f)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^{2n}) & \longrightarrow & \tilde{K}^0(C_f) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{K}^0(X) & \xrightarrow{f^*} 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle ch^n} & & \downarrow{\scriptstyle ch^n} & & \downarrow{\scriptstyle ch^n} & \\ 0 \longrightarrow & H^{2n}(S^{2n}, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H^{2n}(C_f, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^{2n}(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

$ch^n_f(x)$ wird für $x \in \mathrm{Kern}(ch^n)$ durch die Restklasse von $\delta^{-1} \circ ch^n \circ j^{*-1}(x)$ in $H^{2n}(S^{2n}, \mathbb{Q})/ch^n(K^0(S^{2n})) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definiert. ch^n_f hängt nur von der Homotopieklasse von f ab und die Zuordnung $f \mapsto ch^n_f$ definiert eine Abbildung

$$\overline{CH}^n : \mathrm{Tor}(\pi_{2n-1}(X)) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Hängt man f zweimal ein, dann ist auf $\Sigma^2(f)$ ch^{n+1} definiert und aus den bekannten Eigenschaften des Cherncharakters und der Puppesequenz folgt $ch^{n+1}_{\Sigma^2 f}(\Sigma^2 x) = ch^n_f(x)$, so daß man eine Abbildung

$$CH^n : \mathrm{Tor}(\pi^S_{2n-1}(X)) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

erhält. Wie in [1] zeigt man: CH ist ein Homomorphismus.

Ein bekanntes Beispiel liefern die Sphären: Der Homomorphismus CH^n: $\pi^S_{2n-1}(S^0) \to \mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(S^0), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ stimmt mit der Adams-Invarianten $e_{\mathbb{C}}$: $\pi^S_{2n-1}(S^0) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ überein.

Wählt man für X den klassifizierenden Raum einer endlichen Gruppe G, erhält man, da $\pi^S_{2n-1}(BG)$ endlich ist und $\tilde{H}^*(BG, \mathbb{Q})$ verschwindet, einen funktionalen Cherncharakter

$$CH^n : \pi^S_{2n-1}(BG) \to \mathrm{Hom}(K^0(BG), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Für einen endlichen CW-Komplex X ohne reduzierte rationale Kohomologie verschwindet in der universellen Koeffizientensequenz der K-Theorie

$$0 \to \mathrm{Ext}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Z}) \to K_1(X) \to \mathrm{Hom}(K^1(X), \mathbb{Z}) \to 0$$

der Term $\mathrm{Hom}(K^1(X), \mathbb{Z})$ und da $\tilde{K}^0(X)$ endlich ist, hat man eine Isomorphie $\mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Z}) \cong K_1(X)$. Der funktionale Cherncharakter hat unter der Voraussetzung $\tilde{H}^*(X, \mathbb{Q}) = 0$ ganz $\pi^S_{2n-1}(X)$ als Definitionsbereich und $\mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ als Bildbereich; deshalb liegt die Aussage des folgenden Satzes nahe:

Satz 2.1. *Ist X ein endlicher CW-Komplex mit $\tilde{H}^*(X, \mathbb{Q}) = 0$, dann stimmt über die Identifikation* $\mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong K_1(X)$ *der funktionale Cherncharakter CH^n mit dem Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi^S_{2n-1}(X) \to K_1(X)$ überein.*

Beweis. Mit β werde der Bockstein-Homomorphismus $\beta: K^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \tilde{K}^0(X)$ und mit $\langle\,,\rangle_K$ das Modul-Kroneckerprodukt $\langle\,,\rangle_K: K^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K_1(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bezeichnet. Einem Element $x \in K_1(X)$ wird bei der Identifikation $K_1(X) \cong \operatorname{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ der Homomorphismus $\xi \mapsto \langle \beta^{-1}(\xi), x\rangle_K$ zugeordnet. Ist $f: S^{2n-1+2i} \to S^{2i} \wedge X$ ein Repräsentant für $\tau \in \pi^S_{2n-1}(X)$, Σ^{2i} der Suspensions-Isomorphismus und $\Theta \in \tilde{K}^0(X)$, so haben wir zu zeigen:

$$ch_f^{n+i}(\Sigma^{2i}(\Theta)) = \langle \beta^{-1}(\Sigma^{2i}\Theta), h(\tau)\rangle_K .$$

Aus Bockstein- und Kofasersequenzen erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten (C_f = Kofaser von f, $\bar{\Theta} = \Sigma^{2i}\Theta$, $m = 2n + 2i$):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & K^1(C_f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & K^1(S^{2i}X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\beta \cong"] & K^1(S^{m-1}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \tilde{K}^0(S^m) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{K}^0(C_f) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{K}^0(S^{2i}X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{K}^0(S^m, \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{K}^0(C_f, \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
K^1(S^{2i}X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "(Sf)^*"] & \tilde{K}^0(S^m, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{K}^0(C_f, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Der Weg (1) läßt sich sofort mit $\bar{\Theta} \mapsto ch_f^{n+i}(\bar{\Theta})$ identifizieren; dabei haben wir die kanonischen Identifikationen zwischen $\tilde{K}^0(S^m)$ und $H^m(S^m)$ zu machen. Der Weg (2) beschreibt nichts anderes als $\bar{\Theta} \mapsto \langle \beta^{-1}(\bar{\Theta}), f_*[S^{m-1}]_T\rangle_K$. Wegen $\Sigma^{2i} f_*[S^{m-1}]_T = h(\tau)$ ist dieser Homomorphismus das Bild von $h(\tau)$ unter der Isomorphie $K_1(X) \cong \operatorname{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Aus den Exaktheitseigenschaften des Diagramms folgt schon, daß der Homomorphismus, den man durch das Rückwärtsgehen auf (2) über den Weg (1) von Bild f^* in Bild $(Sf)^*$ erhält, bijektiv ist. Wir zeigen jetzt, daß $\bar{\Theta}$ unter den Wegen (1) und (2) auf das gleiche Element in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abgebildet wird.

Aus der Koeffizientensequenz $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{r} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ erhält man Abbildungen $BU \xrightarrow{i} BU\mathbb{Q} \longrightarrow BU(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (0-te Terme der zugehörigen Spektren) und zusammen mit f und der Klasse $\bar{\Theta}$ eine Sequenz

$$S^{2n+2i-1} \xrightarrow{f} S^{2i}X \xrightarrow{\bar{\Theta}} BU \xrightarrow{i} BU\mathbb{Q} \xrightarrow{r} BU(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

in der die Komposition zweier aufeinander folgender Abbildungen nullhomotop ist.

Damit sind die Toda-Klammern $\langle r, i, \bar{\Theta}\rangle$ und $\langle i, \bar{\Theta}, f\rangle$ definiert. Zwischen diesen besteht die Beziehung (s. [24])

$$-r \circ \langle i, \bar{\Theta}, f\rangle = \langle r, i, \bar{\Theta}\rangle \circ Sf .$$

Die Zuordnung $\bar{\Phi} \mapsto \langle i, \bar{\Phi}, f\rangle$ gefolgt von der Reduktion $r: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ beschreibt gerade den Weg (1), also den funktionalen Cherncharakter (Definition der Toda-Klammer nach Art einer funktionalen Kohomologieoperation).

Daß $\bar{\Theta} \mapsto \langle r, i, \bar{\Theta} \rangle \circ Sf$ den Weg (2) beschreibt, kann man wie folgt einsehen: Die Definition der Toda-Klammer nach Art einer funktionalen Kohomologieoperation unterscheidet sich von der Definition als sekundäre Komposition durch ein Vorzeichen. Es genügt daher zu zeigen, daß die durch r, i und $\bar{\Theta}$ definierte sekundäre Komposition gerade $\beta^{-1}\bar{\Theta}$ ist. Das folgt aber sofort aus der Definition:

$$\begin{tikzcd} BU\mathbb{Q} \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "r"'] & & S^{2i+1} \wedge X \arrow[dl, "\beta^{-1}\bar{\Theta}"'] \arrow[dd, "S\bar{\Theta}"] \\ & C_i \arrow[dl, "id"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ C_i & & SBU \end{tikzcd} \qquad (C_i = BU(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

Um diesen Satz auf den unendlichen CW-Komplex BG anwenden zu können, approximiert man BG durch endliche Skelette BG^m und bildet den direkten Limes. Über die Isomorphie $\varinjlim \operatorname{Hom}(\tilde{K}^0(BG^m), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong K_1(BG)$ erhält man dann die Übereinstimmung von CH und Hurewicz-Homomorphismus. Es folgt insbesondere, daß die Zahlen $ch^n_\tau(z) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $z \in \tilde{K}^0(BG)$ das Element $h(\tau) \in K_1(BG)$ festlegen.

Bemerkungen. 1. Durch Satz (2.1) hat man eine Verbindung zwischen dem funktionalen Cherncharakter auf BG und der äquivarianten Signatur. Dies verallgemeinert die bekannte Beziehung zwischen der e-Invarianten und der Signatur, siehe [6, 14].

2. Entwickelt man die $\alpha_{\mathbb{Z}}$-Invariante eines Elements $\tau \in \tilde{\Omega}^{fr}_*(B\mathbb{Z}_{p^r})$ wie in § 1 nach Potenzen einer irreduziblen Darstellung ξ, so werden die dabei auftretenden Koeffizienten $\gamma^i_{\mathbb{Z}}$ durch $ch^n_\tau(\psi^{-i}(x))$ gegeben (x wie im Beweis von Lemma (3.1)). Für einen Beweis siehe [13]. Damit läßt sich dann CH über die α-Invariante mittels Methoden der äquivarianten Topologie berechnen.

3. Für CH gibt es wie für die klassische e-Invariante eine Beschreibung durch Adamsoperationen, die wir nur am Beispiel $B\mathbb{Z}_p$ andeuten: Das Element $\tau \in \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_p)$, das durch $f: S^{2n-1+2s} \to S^{2s}B\mathbb{Z}_p$ repräsentiert werde, liefert durch die Kofasersequenz von f die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(S^{2n+2s}) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}^0(C_f) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}^0(S^{2s} \wedge B\mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0.$$

Wählt man für $\beta \in \tilde{K}^0(S^{2i} \wedge B\mathbb{Z}_p)$ ein Urbild β_1 unter j^*, dann ist $\psi^p(\beta_1)$ ein Vielfaches von $i^*[S^{2n+2s}]_T$

$$\psi^p(\beta_1) = a(\beta_1) \cdot i^*[S^{2n+2s}],$$

denn $j^*\psi^p(\beta_1) = \psi^p\beta = 0$. Wählt man ein anderes Urbild β_2 von β, dann gilt $\beta_1 - \beta_2 = a \cdot i^*[S^{2n+2s}]$ und daher

$$\psi^p(\beta_1 - \beta_2) = a \cdot i^*\psi^p[S^{2n+2i}] = a \cdot p^{n+s}[S^{2n+2s}] = (a(\beta_1) - a(\beta_2))i^*[S^{2n+2s}].$$

Damit ist $a(\beta_1)/p^{n+s} - a(\beta_2)/p^{n+s}$ ganzzahlig und die Restklasse $a(\beta_1)/p^{n+s}$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht mehr von der Urbildauswahl abhängig. Man zeigt leicht $ch^{n+s}_f(\beta) = a(\beta_1)/p^{n+s}$.

4. Der Transfer $t: \tilde{\Omega}^{fr}_{2n-1}(BG) \to \Omega^{fr}_{2n-1}(*)$ ist auf endlichen Skeletten von BG bis auf Suspensionen durch eine stetige Abbildung repräsentierbar ([11]). Aus der Natürlichkeit des Cherncharakters folgt daher eine Formel für $e(t(\tau))$:

$$e(t(\tau)) = ch^n_{t(\tau)}(1) = ch^n_\tau(t'(1)) = ch^n_\tau(reg_G).$$

Dabei ist $t': K^0(*) \to K^0(BG)$ der Transfer der K-Theorie und $t'(1) = reg_G$ das durch die reguläre Darstellung von G gegebene Element in $\tilde{K}^0(BG)$.

Hat der Raum X torsionsfreie ganzzahlige Homologie, so läßt sich der funktionale Cherncharakter ebenfalls leicht durch den Hurewicz-Homomorphismus beschreiben. Wir betrachten die zur Koeffizientensequenz $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gehörende Bocksteinsequenzen:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "h_{\mathbb{Q}}"] & \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}"] & \pi^S_{2n-1}(X) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "h_{\mathbb{Z}}"] & \pi^S_{2n-1}(X, \mathbb{Q}) \\
\tilde{K}_0(X, \mathbb{Z}) \arrow[r, "i"] & \tilde{K}_0(X, \mathbb{Q}) \arrow[r, "r"] & \tilde{K}_0(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & K_1(X). &
\end{tikzcd}$$

Für ein Torsionselement $x \in \pi^S_{2n-1}(X)$ folgt $h_{\mathbb{Z}}(x) = 0$, da $K_1(X)$ torsionsfrei ist. Die Restklasse von $r^{-1} \circ h_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \circ \beta^{-1}(x)$ in $\tilde{K}_0(X, \mathbb{Q})/(h_{\mathbb{Q}}(\pi^S_{2n}(X, \mathbb{Q})) + i(\tilde{K}_0(X)))$ ist der Wert des funktionalen Hurewicz-Homomorphismus h_r auf x.

Wegen der Voraussetzungen an X gilt $\tilde{K}_0(X) = \mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Z})$ und man kann im Bildbereich von h_r zu $\mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q})/(\mathrm{Hom}(h_{\mathbb{Q}}(\pi^{2n}_S(X), \mathbb{Q}) + \mathrm{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Z}))$ und mittels der Einschränkung zu $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q})/\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ übergehen. Den so erhaltenen Homomorphismus von $\tilde{K}_0(X, \mathbb{Q})/(h_{\mathbb{Q}} \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Q}) + i\tilde{K}^0(X))$ nach $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ bezeichnen wir mit ϕ. $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist der Bildbereich des funktionalen Cherncharakters auf $\mathrm{Tor}(\pi^S_{2n-1}(X))$.

Satz 2.2. *Für einen endlichen CW-Komplex X mit torsionsfreier ganzzahliger Homologie stimmen CH und $\phi \circ h_r$ überein.*

Beweis. Die stabile Homotopiegruppe von X mit Koeffizienten in G wird durch $\pi^S_n(X, G) = \pi^S_{n+1}(X \wedge M(G, 1))$ definiert. Dabei ist $M(G, 1)$ ein Moore-Raum für G, d. h. $\tilde{H}_i(M(G, 1), Z) = G$ für $i = 1$ und 0 sonst. Die Kofasersequenz $X \wedge S^1 \to X \wedge M(\mathbb{Q}, 1) \to X \wedge M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1) \xrightarrow{\tilde{\beta}} X \wedge S^2$ induziert die Bocksteinsequenz zur Koeffizientensequenz $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\tilde{f}: S^{2n+2i} \to S^{2i-1} \wedge X \wedge M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)$ repräsentiere ein Urbild von $f: S^{2n+2i} \to S^{2i+1} \wedge X$ unter dem Bockstein-Homomorphismus β, der von $\tilde{\beta}$ induziert wird. Auf der Untergruppe $\mathrm{Ker}\, ch^{n+i}$ folgt mit den Natürlichkeitseigenschaften von ch die Gleichung

$$ch_f(x) = ch_{\tilde{f}}(\tilde{\beta}^* x).$$

Nach Satz (2.1) folgt:

$$ch_{\tilde{f}}(\tilde{\beta}^* x) = \langle \beta^{-1} \circ \tilde{\beta}^*(x), h(\tilde{f}) \rangle_K = \langle \tilde{\beta}^*(x), \beta^{-1} h(\tilde{f}) \rangle_K = \langle x, \tilde{\beta}_* \circ \beta^{-1} \circ h(\tilde{f}) \rangle_K.$$

Wie man sofort durch Einsetzen der Definition sieht, ist $\tilde{\beta}_* \circ \beta^{-1}$ der Suspensionsisomorphismus und daher folgt

$$ch_f(x) = \langle \Sigma(x), h(\tilde{f}) \rangle_K.$$

Bei dieser Rechnung sind wir, ohne das in den Bezeichnungen besonders anzudeuten, von dem Kroneckerprodukt

$$K^*(X \wedge M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K_*(X \wedge M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

zum Produkt $K^*(X) \times K_*(X \wedge M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ übergegangen.

Da $K_*(X)$ torsionsfrei ist, liegt $h(\tilde{f})$ im Bild von r und es folgt, wenn man mit red die Quotientenabbildung $\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bezeichnet:

$$ch_f(x) = \mathrm{red}\langle x, r^{-1}\circ h(f)\rangle_K .$$

Der Homomorphismus $x \mapsto \mathrm{red}\langle x, r^{-1}\circ h(f)\rangle_K$ ist aber genau das Bild von $h_r(f)$ unter ϕ in $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\, ch^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Bemerkungen. Die e-Invariante $e_{\mathbb{C}}: \pi^S_{2n-1}(S^0)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ läßt sich mit Satz (2.2) als Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi^S_{2n+1}(M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1)) \to K_1(M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1))$ bzw. $h: \pi^S_{2n}(S^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to\tilde{K}_0(S^0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ interpretieren. Dies hat zur Folge, daß für eine multiplikative Homologietheorie E, für die komplexe Vektorbündel orientierbar sind, der Hurewicz-Homomorphismus $\pi^S_{2n}(S^0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to E_{2n}(S^0,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ durch die e-Invariante berechenbar ist. Zunächst ist der Vergißhomomorphismus $F_U: \pi^S_*(M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1))\to\Omega^U_*(M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1))$ durch $e_{\mathbb{C}}$ bestimmt, denn auf Bild (F_U) ist $\mu: \Omega^U_*(M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1))\to K_*(M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1))$ injektiv [s. Lemma (3.4)]. Aus den Orientierungsvoraussetzungen folgt, daß für E ein Thom-Homomorphismus $\Omega^U_*(X)\to E_*(X)$ existiert, über den der Hurewicz-Homomorphismus faktorisiert. Weitere Anwendungen von Satz (2.2) finden sich in § 4.

§ 3. Berechnung von h: $\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_p)\longrightarrow K_1(B\mathbb{Z}_p)$

Wir bestimmen zunächst eine obere Schranke für sphärische Klassen in $K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$.

Lemma 3.1. *Für den funktionalen Cherncharakter auf* $B\mathbb{Z}_{p^r}$ *gilt* $ch^n_\tau(\psi^k(x)) = k^n\cdot ch^n_\tau(x)$ *für* $k\not\equiv 0 \bmod p$.

Beweis. $\tau\in\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})$ werde durch $f: S^{2s+2n-1}\to S^{2s}\wedge B\mathbb{Z}_{p^r}$ repräsentiert. Für die Vertauschbarkeit der Adams-Operationen ψ^k mit dem $2s$-fachen Suspensionsisomorphismus Σ^{2s} gilt $\psi^k(\Sigma^{2s}(x)) = k^s\cdot\Sigma^{2s}(\psi^k(x))$ und daher

$$\begin{aligned} k^s\cdot ch^n_\tau(\psi^k(x)) &= ch^{n+s}_f(k^s\cdot\Sigma^{2s}(\psi^k(x))) = ch^{n+s}_f\circ\psi^k(\Sigma^{2s}(x)) \\ &= k^{n+s}\cdot ch^{n+s}_f\circ\Sigma^{2s}(x) = k^{n+s}\cdot ch^n_\tau(x) . \end{aligned}$$

Für $k\not\equiv 0 \bmod p$ folgt daraus $k^n\cdot ch^n_\tau(x) = ch^n_\tau\circ\psi^k(x)$.

Die Struktur von $\tilde{K}^0(B\mathbb{Z}_{p^r})$ ist bekannt. $\pi: L^n(p^r)\to P_n\mathbb{C}$ ist ein S^1-Bündel und H bezeichne das mittels π zurückgeholte universelle Linienbündel. $x := H-1$ definiert ein Element in $\tilde{K}^0(B\mathbb{Z}_{p^r})$ und die Potenzreihen in x erzeugen $K^0(B\mathbb{Z}_{p^r})$. Es gilt die Relation $\psi^{p^r}(x)=0$. Da ψ^k auf Linienbündeln wie die k-te Tensorpotenz wirkt, folgt insbesondere $\psi^k(z) = \psi^l(z)$ für $k\equiv l \bmod p^r$ und $z\in K^0(B\mathbb{Z}_{p^r})$. Es sei v die Ordnung der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{p^r})^*$ und $k\in(\mathbb{Z}_{p^r})^*$. Dann gilt $k^v\equiv 1 \bmod p^r$ und daher $\psi^{k^v}(z) = z$ auf $K^0(B\mathbb{Z}_{p^r})$. Für alle $x\in K^0(B\mathbb{Z}_{p^r})$ und alle $\tau\in\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})$ folgt $(k^{n\cdot v}-1)\cdot ch^n_\tau(x) = 0$. Da die Zahlen $ch^n_\tau(x) = \langle\beta^{-1}(x), h(\tau)\rangle_K$ das Element $h(\tau)\in K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ festlegen, haben wir bewiesen:

Satz 3.2. *Es sei p eine ungerade Primzahl. Liegt x im Bild von* $h: \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})\to K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$, *dann folgt* $p^{\nu_p(n)+r}\cdot x = 0$.

Beweis. Zum Beweis ist nur noch nachzutragen, daß für ungerades p $v = (p-1)\cdot p^{r-1}$ gilt und der p-Anteil von $(k^{n\cdot(p-1)\cdot p^{r-1}}-1)$ für $k\not\equiv 0 \bmod p$ nach unten begrenzt ist durch $p^{\nu_p(n)+r}$; siehe [1]. Für $p=2$ erhält man eine ähnliche obere Schranke.

Ist $p \neq 2$ und $r=1$, so reicht dies aus, um das Bild von h vollständig zu bestimmen:

Satz 3.3. *Das Bild des Hurewicz-Homomorphismus*

$$h: \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_p) \to K_1(B\mathbb{Z}_p)$$

ist eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^{\nu_p(n)+1}$ und wird von dem Element $h \circ t(\sigma^{n-1})$ erzeugt.

Beweis. Der Homomorphismus $\gamma^1_{\mathbb{Z}}: K_1(B\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\gamma^1_{\mathbb{Z}}(z) = \langle \beta^{-1}(x), z \rangle_K$ $(x=H-1$ wie oben, $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z})$ bildet $h(\tau)$ auf $ch^n_\tau(x)$ ab. Diese Abbildung ist auf dem Bild von h injektiv: Wegen $ch^n_\tau \circ \psi^k(x) = k^n \cdot ch^n_\tau(x)$ für $k \not\equiv 0 \bmod p$ ist durch $ch^n_\tau(x)$ auch $ch^n_\tau(x^i)$ festgelegt, denn x^i läßt sich als Linearkombination der $\psi^k(x)$ mit $k \not\equiv 0 \bmod p$ darstellen. Da aber ein Element $z \in K_1(B\mathbb{Z}_p)$ durch seine Kroneckerprodukte $\langle \beta^{-1}(w), z \rangle_K$, $w \in \tilde{K}^0(B\mathbb{Z}_p)$ eindeutig bestimmt ist, ist $\gamma^1_{\mathbb{Z}}$ auf Bild h injektiv. (Für die $\alpha_{\mathbb{Z}}$-Invariante heißt dies, daß man nur eine Komponente kennen muß, um ganz $\alpha_{\mathbb{Z}}$ zu kennen.) Da Bild h eine endliche Gruppe ist und alle endlichen Untergruppen von $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ zyklisch sind, ist Bild h zyklisch. Aus (1.4) und (3.2) folgt dann die Behauptung.

Bemerkungen. 1. In $K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ mit $r>1$ ist ein sphärisches Element nicht mehr durch $\gamma^1_{\mathbb{Z}}$ festgelegt, denn z. B. $\langle \beta^{-1}(x^p), z \rangle_K$ läßt sich nicht mehr durch die Produkte $\langle \beta^{-1}\psi^k(x), z \rangle_K$ $k \not\equiv 0 \bmod p$ berechnen. In §4 werden wir sehen, daß für $r>1$ Bild h i. A. nicht mehr zyklisch ist.

2. Für sphärische Klassen in $K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$, die nicht in der von $h \circ t(\sigma^{n-1})$ erzeugten Untergruppe liegen, kann man die oben angegebene obere Schranke noch etwas verbessern: $h(\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r}))$ muß nämlich in einer Untergruppe $U \subset K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ liegen, die isomorph zu $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{p^{\nu_p(n)+i}}$ ist. Der Summand $\mathbb{Z}_{p^{\nu_p(n)+r}}$ wird von $h \circ t(\sigma^{n-1})$ erzeugt. Da Bild h i. A. eine echte Untergruppe von U ist, verzichten wir auf einen Beweis.

Lemma 3.4. *Ist X ein endlicher CW-Komplex, für den die Bordismus-Spektralsequenz trivial ist, dann ist $\mu: \Omega^U_*(X) \to K_*(X)$ auf dem Bild des Vergißfunktors $F_U: \Omega^{fr}_*(X) \to \Omega^U_*(X)$ injektiv.*

Die Aussage dieses Lemmas ist eine wohlbekannte Konsequenz des Satzes von Hattori-Stong. Unter der Voraussetzung des Lemmas folgt nämlich, daß der Hurewicz-Homomorphismus $\bar{\mu}: \Omega^U_*(X) \to \tilde{K}_*(X^+ \wedge MU)$ injektiv ist. Auf Bild F_U reduziert sich $\bar{\mu}$ zu μ, denn alle K-Theorie charakteristische Zahlen $c_\omega(x)$ für $x \in$ Bild F_U und $\omega \neq \emptyset$ verschwinden. Damit folgt aus Satz (3.3):

Korollar 3.4. *Das Bild von $F_U: \Omega^{fr}_{2n-1}(B\mathbb{Z}_p) \to \Omega^U_{2n-1}(B\mathbb{Z}_p)$ ist für $p \neq 2$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^{\nu_p(n)+1}$, die von $F_U(t(\sigma^{n-1}))$ erzeugt wird.*

Bemerkung. Daß Bild F_U eine zyklische Gruppe ist, wurde von Smith in [21] bewiesen. Dort findet man auch eine Berechnung des Bildes von F_U für den Dimensionsbereich $n \equiv 0 \bmod (p-1)$.

Das Bild von $F_U: \Omega^{fr}_*(B\mathbb{Z}_2) \to \Omega^U_*(B\mathbb{Z}_2)$ wurde von Roush [18] bestimmt. Unter Ausnutzung der Beweisidee von Roush – nämlich die Verwendung der Beziehung zwischen e-Invarianten und Transfer – soll hier als Anwendung von (2.2) ein modifizierter und kurzer Beweis gegeben werden (der sich in [18] eingeschlichene Ablesefehler ist korrigiert).

Satz (Roush). *Das Bild von $h:\pi_n^S(B\mathbb{Z}_2)\to K_1(B\mathbb{Z}_2)$ ist eine endliche zyklische Gruppe, die isomorph zur 2-Komponenten von Bild $e_{\mathbb{C}}\subset\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist, d. h.*

$$h(\pi_m^S(B\mathbb{Z}_2))\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2 & m=8n+1\\ \mathbb{Z}_4 & m=8n+3\\ 0 & m=8n+5 \text{ und } m \text{ gerade}\\ \mathbb{Z}_{2^{4+\nu_2(n+1)}} & m=8n+7\,.\end{cases}$$

Beweis. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\tilde\Omega_{2n-1}^{fr}(B\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{h} & K_1(B\,\mathbb{Z}_2)\\ \wr\Big\downarrow\beta & & \wr\Big\downarrow\beta\\ \tilde\Omega_{2n}^{fr}(B\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_{2^\infty}) & \xrightarrow{h} & \tilde K_0(B\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_{2^\infty})\\ \Big\downarrow t_\Omega & & \Big\downarrow t_K\\ \Omega_{2n}^{fr}(*,\mathbb{Z}_{2^\infty}) & \xrightarrow{e_{\mathbb{C}}} & K_0(*,Z_{2^\infty})\end{array}$$

bezeichnet t_K bzw. t_Ω den Transfer der Überlagerung $S^\infty\to B\mathbb{Z}_2$. Da der Transfer mit stabilen Transformationen zwischen Homologietheorien vertauschbar ist ([11, 18]) und h auf $\Omega_{2n}^{fr}(*,\mathbb{Z}_{2^\infty})\to K_0(*,Z_{2^\infty})$ nach § 2 die 2-Komponente von $e_{\mathbb{C}}$ ist, kommutiert das Diagramm. t_K läßt sich über das Kroneckerprodukt mit $t^*:K^0(S^n)\to K^0(P_n\mathbb{R})$ in Beziehung setzen und berechnen. $\tilde K^0(P_n\mathbb{R})$ wird von einem Linienbündel ξ erzeugt und es gilt $t^*(1)=1+\xi$. Es folgt, daß t_K ein Isomorphismus ist. Daher ist Bild h durch Bild $e_{\mathbb{C}}$ nach oben begrenzt. Andererseits ist t_Ω surjektiv [11], so daß Bild $h\cong$ Bild $e_{\mathbb{C}}$. Die explizite Beschreibung von Bild $e_{\mathbb{C}}$ findet man in [2].

Bemerkungen. Die Verwendung des Satzes von Kahn und Priddy läßt sich vermeiden, indem man $e_{\mathbb{C}}\circ t$ auf bestimmten Elementen aus $\tilde\Omega_*^{fr}(B\mathbb{Z}_2)$ berechnet und damit zeigt, daß die obere Schranke tatsächlich erreicht wird. Ein analoger Beweis für ungerade Primzahlen führt nur für den Dimensionsbereich $2n(p-1)-1$ zum Ziel, siehe [21].

Wegen der unterschiedlichen Struktur der Einheitengruppen $(\mathbb{Z}_{p^r})^*$ für $p=2$ und $p\neq 2$ liefern die Adams-Operationen für $B\mathbb{Z}_2$ und $B\mathbb{Z}_4$ zu große obere Schranken.

§ 4. Der Hurewicz-Homomorphismus h: $\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_p r)\longrightarrow K_1(B\mathbb{Z}_p r)$

Im Gegensatz zum Fall $r=1$ ist das Bild von $h:\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^r})\to K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ für $r>1$ i. A. nicht mehr zyklisch. Zu der von $h\circ t(\sigma^{n-1})$ erzeugten zyklischen Untergruppe treten noch weitere Elemente hinzu. Diese „Störung" wird von der e-Invarianten auf $\pi_{2n-1}^S(P_\infty\mathbb{C})$ verursacht. Die Anzahl der zum bekannten Teil von Bild h hinzukommenden Elemente nimmt für eine feste Dimension nicht unbeschränkt zu, sondern wird ab einem genügend großem r konstant. Wir berechnen in diesem

Paragraphen die p-Komponente der e-Invarianten auf $\pi_{2n-1}^S(P_\infty\mathbb{C})$ für $n \leqq (p^2-p-1)$ und bestimmen damit $h(\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^r}))$ in diesem Dimensionsbereich für alle r. Den Fall $p=2$ schließen wir wegen der notwendigen Modifikationen aus.

Der Transfer $t: K_0(P_\infty\mathbb{C}) \to K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ und der Homomorphismus $\pi_*: K_*(B\mathbb{Z}_{p^r}) \to K_*(P_\infty\mathbb{C})$ sind Teile der K-Theorie Gysinsequenz des Bündels $L^{p^r} \to P_\infty\mathbb{C}$, so daß die Sequenz $K_0(P_\infty\mathbb{C}) \xrightarrow{t} K_1(B\mathbb{Z}_{p^r}) \xrightarrow{\pi_*} K_1(P_\infty\mathbb{C})$ $(*)$ exakt ist. Für die stabile Homotopietheorie ist $L^{p^r} \to P_\infty\mathbb{C}$ nicht orientierbar, die $(*)$ entsprechende Sequenz braucht also nicht mehr exakt zu sein. Es gibt jedoch ein „stabiles" Äquivalent zu $(*)$: In [15] wird bewiesen, daß die Faserung von Eilenberg-Mac-Lane-Räumen

$$K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, n) \xrightarrow{\beta} K(\mathbb{Z}, n+1) \xrightarrow{i} K(\mathbb{Q}, n+1)$$

gleichzeitig auch eine Kofaserung ist. Verwendet man $\mathbb{Z}_{(p)}$-Koeffizienten, kann man in der zu dieser Kofasersequenz gehörenden langen exakten Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \pi_{2n}^S(K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Z}_{(p)}) &\longrightarrow \pi_{2n}^S(K(\mathbb{Z}, 2), \mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{i_*} \pi_{2n}^S(K(\mathbb{Q}, 2), \mathbb{Z}_{(p)}) \\ \xrightarrow{\partial} \pi_{2n-1}^S(K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Z}_{(p)}) &\xrightarrow{\pi_*} \pi_{2n-1}^S(K(\mathbb{Z}, 2), \mathbb{Z}_{(p)}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)$ durch $B\mathbb{Z}_{p^\infty} = K(\mathbb{Z}_{p^\infty}, 1)$ ersetzen, und man hat π_* in eine exakte Sequenz eingebettet. Wir betrachten deshalb zunächst den Hurewicz-Homomorphismus h_∞ auf $\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^\infty})$. Wegen $\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \pi_{2n-1}^S(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}$ ist dieser in zwei Komponenten zerlegt.

Da das Kroneckerprodukt zwischen $K^0(P_\infty\mathbb{C})$ und $K_0(P_\infty\mathbb{C})$ nicht entartet ist, gibt es eine zu $(L-1)^i \in \tilde{K}^0(P_\infty\mathbb{C})$ ($i \geqq 1$, $L=$ universelles Linienbündel) duale Basis $(\beta_i)_{i \geqq 1}$ von $\tilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C})$. Bezeichnet man die Elemente $i_*(\beta_i)$ in $\tilde{K}_0(K(\mathbb{Q}, 2))$ einfach wieder mit β_i und mit β_i^n die n-te Potenz von β_i im Pontrjaginprodukt, so folgt aus $h(\sigma) = -\beta_1$ und der Natürlichkeit von h bezüglich des Pontrjaginproduktes die Formel $h_\infty \circ \partial(\sigma^n/p^s) = (-1)^n \cdot \partial(\beta_1^n/p^s)$. Dies bestimmt h_∞ auf dem Summanden $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ von $\pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^\infty})$.

Um h_∞ auf dem anderen Summanden zu studieren, führt man zweckmäßigerweise den folgenden funktionalen Hurewicz-Homomorphismus

$$h_i : \pi_{2n-1}^S(P_\infty\mathbb{C})_{(p)} \to \tilde{K}_0(K(\mathbb{Q}, 2))/(h(\pi_{2n}^S(K(\mathbb{Q}, 2))) + \tilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}, \mathbb{Z}_{(p)}))$$

ein. h_i wird durch das folgende Diagramm definiert:

$$\begin{tikzcd} & \arrow[r] & \pi_{2n}^S(K(\mathbb{Q}, 2)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_\mathbb{Q}"] & \pi_{2n-1}^S(B\mathbb{Z}_{p^\infty}) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "h_\infty"] & \pi_{2n-1}^S(P_\infty\mathbb{C}, \mathbb{Z}_{(p)}) \arrow[r] & 0 \\ & \tilde{K}_0(P_\infty\mathbb{C}, \mathbb{Z}_{(p)}) \arrow[r] & \tilde{K}_0(K(\mathbb{Q}, 2)) \arrow[r, "\partial"] & K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Modulo der Gruppe $h_\infty(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ wird h_∞ auf dem zweiten Summanden gerade durch h_i beschrieben.

Auf $\pi_{2n-1}^S(P_\infty\mathbb{C})$ ist außer h_i der gewöhnliche funktionale Hurewicz-Homomorphismus h_r, der der e-Invarianten ($=$funktionaler Cherncharakter) entspricht, definiert.

Lemma 4.1. *Bis auf eine kanonische Identifikation gleicht h_i dem funktionalen Hurewicz-Homomorphismus h_r.*

Beweis. Die Kofasersequenzen $SK(\mathbb{Z},2)\to SK(\mathbb{Q},2)\to S^2K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1)$ und $P_\infty\mathbb{C}\wedge M(\mathbb{Z},1)\to P_\infty\mathbb{C}\wedge M(\mathbb{Q},1)\to P_\infty\mathbb{C}\wedge M(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1)$ sind äquivalent. Das resultierende kommutative Diagramm impliziert direkt die Behauptung. Man hat nur $\tilde{K}_0(K(\mathbb{Q},2))$ mit $\tilde{K}_0(K(\mathbb{Z},2),\mathbb{Q})$ zu identifizieren.

Die Zerlegung von h_∞ in zwei Komponenten wenden wir jetzt auf $B\mathbb{Z}_{p^r}$ an, um zu zeigen, daß die nicht in der Untergruppe $h\circ t(\pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C}))$ liegenden sphärischen Elemente über π_* von $\pi^S_{2n+1}(P_\infty\mathbb{C})$ herkommen und durch die e-Invariante auf $\pi^S_{2n+1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}$ beschrieben werden.

Satz 4.2. *Es gilt*

$$h(\pi^S_{2n+1}(B\mathbb{Z}_{p^r}))/h\circ t(\pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C}))\cong \mathrm{Bild}\,(h_r|_{\pi_*(\pi^S_{2n+1}(B\mathbb{Z}_{p^r}))})$$

und für genügend großes r

$$h(\pi^S_{2n+1}(B\mathbb{Z}_{p^r}))/h\circ t(\pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C}))\cong \mathrm{Bild}\, h_r\,.$$

Beweis. Da der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $i_*:K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})\to K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty})$ injektiv ist, liegen alle Elemente im Kern von $i_*:\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})\to \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^\infty})$ auch im Kern des Hurewicz-Homomorphismus und man kann ohne Informationsverlust h über $B\mathbb{Z}_{p^\infty}$ faktorisieren. Weiterhin bildet $h\circ t$ alle Torsionselemente aus $\pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C})$ auf Null ab, denn $h\circ t:\pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C})\to K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ faktorisiert über $K_0(P_\infty\mathbb{C})$, und die von $h\circ t(\sigma^n)$ erzeugte Untergruppe ist $h\circ t(\pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C}))$. Das folgende Lemma, dessen Beweis weiter unten nachgetragen wird, zeigt den Zusammenhang zwischen $h\circ t(\pi^S_{2n-2}(P_\infty\mathbb{C}))$ und $h_\infty\partial(\pi^S_{2n}(K(\mathbb{Q},2)))$.

Lemma 4.3. *Die vom Transfer $t:\pi^S_{2n-2}(P_\infty\mathbb{C})\to\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})$ definierte Untergruppe von $h(\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r}))$ wird durch $i_*:K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})\to K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty})$ in $h_\infty\circ\partial(\pi^S_{2n}(K(\mathbb{Q},2)))\subset K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty})$ abgebildet und es gilt die Gleichung*

$$i_*\circ h\circ t(\sigma^{n-1})=h_\infty\circ\partial(\sigma^n/p^r\cdot n)\,.$$

Damit induziert i_* einen Homomorphismus

$$\bar{i}:h(\pi^S_*(B\mathbb{Z}_{p^r}))/h\circ t(\pi^S_*(P_\infty\mathbb{C}))\to h_\infty(\pi^S_*(B\mathbb{Z}_{p^\infty}))/h_\infty\circ\partial(\pi^S_*(K(\mathbb{Q},2)))\,.$$

Nach Lemma (4.3) ist $\bar{i}$ injektiv und die Kommutativität des folgenden Diagramms impliziert $\mathrm{Bild}\,\bar{i}\cong\mathrm{Bild}(h_i\circ\pi_*)$ und damit die erste Behauptung.

$$\begin{tikzcd}
\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r}) \arrow[rr] \arrow[dr, "i_*"] \arrow[dd, "\pi_*"'] & & K_1(B\mathbb{Z}_{p^r}) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})/h\circ t(\pi^S_{2n-2}(P_\infty\mathbb{C})) \arrow[d, "\bar{i}"] \\
& \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^\infty}) \arrow[r, "h_\infty"] \arrow[dl, "\pi_*"] & K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty}) \arrow[r] & K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty})/h_\infty\circ\partial(\pi^S_{2n}(K(\mathbb{Q},2))) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)} \arrow[rrr, "h_i"] & & & \dfrac{\tilde{K}_0(K(\mathbb{Q},2))}{\tilde{K}_0(K(\mathbb{Z},2),\mathbb{Z}_{(p)})+h(\pi^S_{2n}(K(\mathbb{Q},2)))}
\end{tikzcd}$$

Da $K(\mathbb{Z}_{p^\infty},1)$ der direkte Limes der $K(\mathbb{Z}_{p^a},1)$ ist, ist für genügend großes r der Homomorphismus $\pi_*:\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})\to\pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}$ surjektiv.

Beweis von Lemma (4.3). $B\mathbb{Z}_{p^r}$ ist das Sphärenbündel der p^r-ten Tensorpotenz des universellen Linienbündels L über $P_\infty\mathbb{C}$. Aus der Gysinsequenz dieses Bündels, dem Thomisomorphismus ϕ für L^{p^r} und der exakten Sequenz des Paares $(B(L^{p^r}), S(L^{p^r}))$ erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde K_0(P_\infty\mathbb{C}) & \xrightarrow{\cap e(L^{p^r})} & K_0(P_\infty\mathbb{C}) & \xrightarrow{t} & K_1(B\mathbb{Z}_{p^r}) \\
\| & & \updownarrow{\scriptstyle\phi} & & \| \\
\tilde K_0(P_\infty\mathbb{C}) & \xrightarrow{j_*} & K_0(B(L^{p^r}), S(L^{p^r})) & \xrightarrow{\partial} & K_1(B\mathbb{Z}_{p^r}) \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle\bar r_*} & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\
\tilde K_0(P_\infty\mathbb{C}) & \xrightarrow{r_*} & \tilde K_0(K(\mathbb{Q},2)) & \xrightarrow{\partial} & K_1(B\mathbb{Z}_{p^\infty})
\end{array}$$

($\bar r$ ist die von i und $\mathrm{id}_{P_\infty\mathbb{C}}$ induzierte Abbildung). Es genügt zu zeigen $h(\sigma^n)/p^r\cdot n - \bar r_*\phi^{-1}\circ h(\sigma^{n-1})\in \operatorname{Kern}\partial$. Wie oben sei β_i die zu $(L-1)^i$ duale Basis von $\tilde K_0(K(\mathbb{Q},2))$. Mit Hilfe des Cherncharakters berechnet man $h(\sigma^n)$ als Linearkombination dieser Basis. Man erhält $h(\sigma^n)=\sum_{k=1}^{n} b_k\cdot\beta_k$ mit $b_k=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+k+n}\cdot j^n\cdot\binom{k}{j}$. Setzt man $\bar r_*\circ\phi\circ h(\sigma^{n-1})=\sum_{i=1} a_i\beta_i$, so folgt die Behauptung aus $a_i\equiv b_i/p^r\cdot n \mod \mathbb{Z}$.

Nach Konstruktion ist $h(\sigma^{n-1})$ das Bild der K-Theorie Fundamentalklasse von $M_{n-1}=S^2\times S^2\times\ldots\times S^2$ unter der klassifizierenden Abbildung f des äußeren Tensorproduktes $L\hat\otimes L\hat\otimes\ldots\hat\otimes L$ in $K_0(P_\infty\mathbb{C})$. Für das K-Theorie-Kroneckerprodukt $a_i=\langle (L-1)^i, \bar r_*\circ\phi\circ h(\sigma^{n-1})\rangle_K$ erhält man nach Übergang zu M_{n-1} und Anwendung der Riemann-Roch-Formel nach einer einfachen Rechnung das gewöhnliche Kroneckerprodukt

$$a_i=\left\langle \frac{(e^z-1)^i}{(1-e^{p^r\cdot z})}, [M_{n-1}]\right\rangle=(n-1)!\cdot\left\langle\frac{(e^x-1)^i}{(1-e^{p^r\cdot x})}, [P_{n-1}\mathbb{C}]\right\rangle$$

$(z=f^*(x),\ x=c_1(L))$.
Wie in § 1 folgt nach Einsetzen der Reihenentwicklungen die Behauptung.

Bemerkung. Die Gleichung $i_*\circ h\circ t(\sigma^{n-1})=h_\infty\circ\partial(\sigma^n/p^r\cdot n)$ erlaubt ebenfalls die Bestimmung der Ordnung von $h\circ t\circ(\sigma^{n-1})$ $(p\neq 2)$.

Um Elemente in $\pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}$ zu finden, verwenden wir die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz für π^S_* mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Satz 4.4. *Für* $t\leqq p^2-p-1$ *ist* $\pi^S_{2t-1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}\cong\mathbb{Z}_p$ *wenn* $t=r_1\cdot p+r_2\cdot(p-1)$, $r_1\geqq 1$, $r_2\geqq 1$ *und* 0 *sonst.*

Beweis. Die p-Komponente von $\pi^S_n(S^0)$ wird für $0<n<2(p^2-p-1)$ durch das Bild des J-Homomorphismus gegeben. In diesem Bereich gilt $\pi^S_i(S^0)_{(p)}\cong\mathbb{Z}_p$ für $i=2t(p-1)-1$ und 0 sonst ([25, 2]). Aus Dimensionsgründen verschwinden für $P_\infty\mathbb{C}$ die Differentiale d^{2r+1}. Alle in $E^r_{*,s}$ ankommenden Differentiale sind für $s<2(p^2-p-1)$ entweder 0 oder kommen von $E^r_{*,0}$, denn wenn $s=2t(p-1)-1$ und $s-r+1\neq 0$ gilt, ist $E^r_{*,s-r+1}=0$. Für $k<2(p^2-p-t(p-1))$ verschwinden alle von $E^r_{k,2t(p-1)-1}$ ausgehenden Differentiale aus dem gleichen Grund. Daher ist im Bereich $s+t<2(p^2-p)-1$ $E^\infty_{s,t}$ der Quotient von $E^2_{s,t}$ nach $d^r(E^r_{*,0})$. Es folgt

$|\pi_n^S(P_\infty\mathbb{C}^+)_{(p)}| = \left|\sum_{s+t=n} E^2_{s,t}\right| \Big/ \left|\sum_r d^r(E^r_{n+1,0})\right|$. Der Eckenhomomorphismus der Spektralsequenz ist der Hurewicz-Homomorphismus $h_{2n}: \pi^S_{2n}(P_\infty\mathbb{C}, \mathbb{Z}_{(p)}) \to H_{2n}(P_\infty\mathbb{C}, \mathbb{Z}_{(p)})$ und da dieser bekannt ist (s. [16]), kennt man die permanenten Zyklen in $E^2_{2n,0}$ und damit $\left|\sum_r d^r(E^r_{2n,0})\right|$. Es gilt $|\mathrm{Kokern}\, h_{2n}| = \left|\sum_r d^r(E^r_{2n,0})\right|$ und da $h_{2n}\sigma^n$ auf $n!\cdot[P_n\mathbb{C}]$ abbildet, folgt $v_p\left(\left|\sum_r d^r(E^r_{2n,0})\right|\right) = v_p(n!)$. Für $v_p\left(\left|\sum_{s+t=2n-1} E^2_{s,t}\right|\right)$ erhält man den Wert $[\frac{n}{p-1}]$ ($[x]$ = größte ganze Zahl $\leqq x$). Ist $\alpha_p(n)$ die Summe der Koeffizienten in der p-adischen Entwicklung von n, dann gilt für $v_p(n!)$ die Formel $v_p(n!) = (n-\alpha_p(n))/(p-1)$. Die Differenz $[\frac{n}{p-1}] - v_p(n!)$ hat für $n \leqq p^2-p-1$ den Wert 1, wenn n von der Gestalt $n = r_1\cdot p + r_2\cdot(p-1)$ mit $r_1 + r_2 \leqq (p-1)$, $r_2 \geqq 1$ ist, und 0 sonst.

Da die p-Komponente von $\pi^S_n(S^0)$ für $n < 2(p^2-p-1)$ durch das Bild des J-Homomorphismus gegeben wird, ist die e-Invariante in diesem Bereich injektiv. Der folgende Satz überträgt dies auf Räume wie $P_\infty\mathbb{C}$ und $B\mathbb{Z}_{p^r}$.

Satz 4.5. *Der funktionale Cherncharakter ist für $n \leqq p^2-p-1$ auf der p-Komponenten von $\pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C})$ und $\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})$ injektiv.*

Beweis. Wir betrachten den Hurewicz-Homomorphismus $h: \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \to \tilde{K}_0(X, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ und die zugehörigen Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenzen $E^*_{*,*}(\pi^S)$ und $E^*_{*,*}(K)$. Der von h auf den E^2-Termen induzierte Homomorphismus $h^2: \tilde{H}_k(X, \pi^S_q(S^0, \mathbb{Z}_{p^\infty})) \to \tilde{H}_k(X, \tilde{K}_q(S^0, \mathbb{Z}_{p^\infty}))$ ist nach § 2 der von der e-Invarianten induzierte Koeffizientenhomomorphismus. Die zu $\pi^S_{2n}(X, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ beitragenden $E^2_{k,q}$-Terme haben für $q \leqq 2(p^2-p-1)$ wegen des Verschwindens von $\pi^S_{2i-1}(S^0, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ nur gerade Indizes. Wir setzen jetzt voraus, daß $h^2: H_{2k}(X, \pi^S_{2q}(S^0, \mathbb{Z}_{p^\infty})) \longrightarrow H_{2k}(X, \tilde{K}_0(S^0, \mathbb{Z}_{p^\infty}))$ injektiv ist und die Spektralsequenz für $K_*(X, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ zusammenbricht. Das ist offensichtlich für $X = P_\infty\mathbb{C}$ und $X = B\mathbb{Z}_{p^r}$ erfüllt. Ist $h^r_{p,q}$ injektiv, so folgt aus dem Zusammenbrechen der Spektralsequenz $E^*_{*,*}(K)$ und der Vertauschbarkeit von h^r mit den Differentialen, daß die in $E^r_{p,q}$ ankommenden Differentiale verschwinden müssen. Solange alle in $E^r_{p,q}$ ankommenden Differentiale verschwinden, ist $E^{r+1}_{q,p}$ ein Untermodul von $E^r_{p,q}$ und die von h^r induzierte Abbildung $h^{r+1}_{p,q}$ ist wieder injektiv. Daher ist $h: E^\infty_{2q,2s}(\pi^S) \to E^\infty_{2q,2s}(K)$ injektiv und aus dem 5-er Lemma folgt die Injektivität von $h: \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \to \tilde{K}_0(X, Z_{p^\infty})$. Besteht $\tilde{H}_*(X, \mathbb{Z})$ nur aus Torsion, dann ist der Bockstein-Homomorphismus $\beta: \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \to \pi^S_{2n-1}(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ ein Isomorphismus ($n \geqq 1$) und aus der Injektivität von $h: \pi^S_{2n}(X, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \to \tilde{K}_0(X, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ folgt die von $h: \pi^S_{2n-1}(X, \mathbb{Z}_{(p)}) \to K_1(X, \mathbb{Z}_{(p)})$.

Ist $H_*(X, \mathbb{Z})$ torsionsfrei und $\pi^S_{2n-1}(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ endlich, so folgt die Behauptung direkt aus dem h_r definierenden Diagramm.

Mit den Sätzen (4.5) und (4.4) ist für $n \leqq (p^2-p-1)$ $h: \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r}) \to K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ bestimmt. Es bleibt zu bemerken, daß die Gruppenerweiterung zwischen $t(\pi^S_{2n-2}(P_\infty\mathbb{C}))$ und $\pi_*(\pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C}))$ in $\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})$ trivial ist. Das folgt aus der Tatsache, daß diese Erweiterung unter $h: \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r}) \to K_1(B\mathbb{Z}_{p^r})$ injektiv in eine direkte Summe abgebildet wird (s. § 3, Bemerkung 2).

Durch Betrachtung des von der Inklusion $i: B\mathbb{Z}_p \to B\mathbb{Z}_{p^2}$ induzierten Homomorphismus zwischen den Spektralsequenzen für $\pi^S_*(B\mathbb{Z}_p)$ und $\pi^S_*(B\mathbb{Z}_{p^2})$ sieht man leicht, daß im Dimensionsbereich $n \leqq p^2-p-1$ schon $\pi_*: \pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^2}) \to \pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}$ surjektiv ist. Damit ist für $n \leqq p^2-p-1$ auch $\pi^S_{2n-1}(B\mathbb{Z}_{p^r})$ berechnet.

Bemerkungen. Mit den in [20, 8] entwickelten Methoden lassen sich aus den schon gefundenen Elementen in $\pi^S_{2n-1}(P_\infty\mathbb{C})_{(p)}$ ganze Serien von Elementen mit nicht trivialem Bild unter h_r konstruieren. Unter Verwendung etwa von Proposition (1.3) aus [20] konstruiert man zunächst aus den Elementen $\gamma_t \in \pi^S_{2(tp+p-1)-1}(B\mathbb{Z}_{p^2})$ $(t=1, \ldots, p-2)$ mit $\pi_*(\gamma_t) \neq 0$ in $\pi^S_*(P_\infty\mathbb{C})$ Reihen $\gamma^m_t \in \pi^S_{2(tp+m(p-1))-1}(B\mathbb{Z}_{p^2})$ mit $h(\gamma^m_t) \neq 0$ in $K_1(B\mathbb{Z}_{p^2})/h \circ t(\pi^S_*(P_\infty\mathbb{C}))$. Es folgt dann $h_r(\pi_*(\gamma^m_t)) \neq 0$.

Beispiele $(p=3)$. Die erste 3-Torsion in $\pi^S_*(P_\infty\mathbb{C})$ tritt in der Dimension 9 auf. Mit einer geeigneten stabilen Parallelisierung versehen repräsentiert die freie S^1-Mannigfaltigkeit $Sp(2) \to S(2)/S^1$ dieses Element der Ordnung 3. Die S^1-Aktion auf der Liegruppe $Sp(2)$ wird durch Einschränkung der Aktion eines maximalen Torus gewonnen. In $\pi^S_9(B\mathbb{Z}_9)$ gibt es daher ein Element z mit $h(z) \neq 0$ in $K_1(B\,\mathbb{Z}_9)/h \circ t(\pi^S_8(P_\infty\mathbb{C}))$. Eine geeignete z repräsentierende freie $\mathbb{Z}_9$-Mannfgfaltigkeit hat dann als $\alpha_{\mathbb{Z}}$-Invariante $\alpha_{\mathbb{Z}}(z) = (\xi^3 + 2\xi^6)/3$ (Notation wie in § 1).

Aus der Spektralsequenz läßt sich ablesen, daß $\pi^S_{10}(B\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$ und der Transfer $t: \pi^S_9(P_\infty\mathbb{C})_{(3)} \to \pi^S_{10}(B\mathbb{Z}_3)$ bijektiv ist. Da nach [11] $t: \pi^S_{10}(B\mathbb{Z}_3) \to \pi^S_{10}(S^0)_{(3)}$ surjektiv ist, folgt aus diesem Argument, daß $Sp(2)$ mit geeigneter stabiler Parallelisierung die 3-Komponente von $\pi^S_{10}(S^0)$ erzeugt. In [22] wird bewiesen, daß $Sp(2)$ mit der durch Linkstranslation definierten Parallelisierung das Element β_1 der Ordnung 3 in $\pi^S_{10}(S^0)$ ist (Notation wie in [25]). Die äquivariant-stabil-parallelisierte S^1-Mannigfaltigkeit G_2 (erste Ausnahme Liegruppe) definiert ein Element der Ordnung 9 in $\pi^S_{13}(P_\infty\mathbb{C})_{(3)} \cong \mathbb{Z}_9$. Das erste Element im Kern von h_r auf der 3-Komponenten tritt in der Dimension 19 auf.

Literatur

1. Adams, J. F.: On the groups $J(X)$-II. Topology **3**, 137—171 (1965)
2. Adams, J. F.: On the groups $J(X)$-IV. Topology **5**, 21—71 (1966)
3. Atiyah, M. F.: K-Theory. Benjamin 1967
4. Atiyah, M. F., Singer, I. M.: The index of elliptic operators I. Ann. of Math. **87**, 484—530 (1968)
5. Atiyah, M. F., Singer, I. M.: The index of elliptic operators III. Ann. of Math. **87**, 546—604 (1968)
6. Atiyah, M. F., Smith, L.: Compact Lie groups and the stable homotopy of spheres. Topology **13**, 153—142 (1974)
7. Conner, P. E., Floyd, E. E.: Differentiable periodic maps. Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York: Springer 1964
8. Conner, P. E., Smith, L.: On the complex bordism of finite complexes. Inst. Haut. Etud. sci. Publ. math. **37**, 117—221 (1969)
9. Hirzbruch, F.: Free involutions on manifolds and some elementary number theory. In Institutio Nazionale di Alta Matematica Symposia Mathe. **5**, 411—419 (1970)
10. Hirzebruch, F., Zagier, D.: The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory. Math. Lecture Series 3. Boston: Publish or perish 1974
11. Kahn, D. S., Priddy, S. B.: Applications of the transfer to stable homotopy theory. Bull. Amer. Soc. **78**, 981—987 (1972)
12. Katsube, Y.: Principal oriented bordism algebra $\Omega(\mathbb{Z}_{2^k})$. Hiroshima Math. J. **4**, 265—277 (1974)
13. Knapp, K. H.: Signaturdefekte modulo Z für freie G-Aktionen. Dissertation Bonn 1975
14. Kreck, M.: Eine Invariante für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten. Dissertation Bonn 1972
15. Milgram, R. J.: Surgery with coefficients. Ann. of Math. **99**, 194—248 (1974)
16. Moser, R. E.: Some stable homotopy of complex projectiv space. Topology **7**, 179—193 (1968)
17. Neumann, W. D.: Signature related invariants of manifolds. (in Vorbereitung)
18. Roush, F. W.: Transfer in generalized cohomology theories. Dissertation Princeton 1971
19. Rowlett, R. J.: Bounding a free action of an abelian group. Duke Math. J. **41**, 381—385 (1974)
20. Smith, L.: On realizing complex bordism modules. Amer. J. Math. **92**, 793—856 (1970)

21. Smith, L.: On Im $\{\Omega_*^{fr}(B\mathbb{Z}_p) \to \Omega_*^U(B\mathbb{Z}_p)\}$. J. appl. algebra **6**, 223—234 (1975)
22. Smith, L.: Framings of sphere bundles over spheres, the plumbing pairing and the framed bordism classes of two simple Lie groups. Topology **13**, 401—415 (1974)
23. Sullivan, D.: Geometric topology. Part I, M.I.T. (1970) (mimeographed Notes)
24. Toda, H.: A survey of homotopy theory. Advances in Math. **10**, 417—455 (1973)
25. Toda, H.: p-Primary components of homotopy groups III. Memoirs of the College of Sci., Uni. of Kyoto Ser. A **31**, 191—210 (1958)
26. Wilson, G.: K-theory invariants for unitary G-bordism. Quart. J. Math. Oxford **24**, 499—526 (1973)

Angenommen am 15. Januar 1976