

Signaturdefekte modulo Z für freie G -Aktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Hohen Mathem.-Naturw.Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu

Bonn

vorgelegt von

Karlheinz Knapp

Bonn 1975

Inhalt

Einleitung

§ 0	Vorbemerkungen und Definitionen	1
§ 1	Die v -Invarianten von Atiyah-Singer	8
§ 2	K-Theorie-charakteristische Zahlen für freie G -Mannigfaltigkeiten	18
§ 3	Beziehungen zwischen charakteristischen Zahlen und v -Invarianten	31
§ 4	Der Hurewicz-Homomorphismus für MSO	39
§ 5	Die Isomorphie $K_1(BG) \cong S_a^{-1}R(G)/R(G)$	46
§ 6	K-Theorie mit Koeffizienten	52
§ 7	Die Verschlingungsform auf $K(BG)$	57
§ 8	Der Signaturdefekt mod $\mathbb{Z}$ als charakteristische Zahl	65
§ 9	$\alpha_{\mathbb{Z}}$ und $\gamma_{\mathbb{Z}}$ auf stabil parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten	74
§ 10	Die e -Invariante auf $\Omega^{\text{fr}}(BG)$	82

Bezeichnungen

Tabelle der γ^i und $\gamma_{\mathbb{Z}}^i$	88
--	----

Literaturverzeichnis	90
----------------------	----

Einleitung

Die Bordismusgruppe $\Omega_{2n-1}^{SO}(G)$ freier, ungerade-dimensionaler, orientierter G -Mannigfaltigkeiten ist für eine endliche Gruppe G eine Torsionsgruppe. Daher wird ein geeignetes Vielfaches einer freien G -Mannigfaltigkeit M^{2n-1} von einer G -Mannigfaltigkeit X^{2n} äquivariant berandet. Der Rand von X^{2n} verursacht Korrekturterme in Formeln, die Invarianten wie Signatur und G -Signatur auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten durch charakteristische Zahlen beschreiben. Über diese Korrekturterme induzieren Signatur und G -Signatur Invarianten auf ungerade-dimensionalen G -Mannigfaltigkeiten.

Gilt etwa $r \cdot M^{2n-1} = \partial X^{2n}$, so verschwindet im G -Signatursatz für die freie G -Mannigfaltigkeit X^{2n} für $g \neq 1$ der durch die charakteristischen Zahlen gebildete Term und als Korrekturterm bleibt $\text{sign}(g, X)$. Wegen besonderer Eigenschaften der G -Signatur $\text{sign}(g, X)$ ist die komplexe Zahl $\frac{1}{r} \cdot \text{sign}(g, X)$ für $g \neq 1$ nur noch vom Rand $r \cdot M$ abhängig; durch diese Zahl ist die α -Invariante der G -Aktion auf M definiert.

Auf Überlagerungen berandeter Mannigfaltigkeiten ist die Signatur nicht notwendig multiplikativ. Wird $r \cdot M^{2n-1}$ wieder von X^{2n} berandet, dann ist die Abweichung der Signatur von der Multiplikativität auf der Überlagerung $X \rightarrow X/G$ eine Invariante des Randes und definiert den Signaturdefekt

$$\gamma(M \rightarrow M/G) := \frac{1}{r} (\text{sign}(X) - |G| \cdot \text{sign}(X/G))$$

Der G -Aktion lassen sich lokale Koeffizientensysteme zuordnen, mit deren Hilfe man "getwistete" Signaturdefekte γ^i definiert. α -Invarianten und getwistete Signaturdefekte bestimmen sich wechselseitig.

Für eine nullbordante freie G -Mannigfaltigkeit sind die γ^i ganzzahlig und die α -Invarianten sind eine ganzzahlige Linearkombination von $|G|$ -ten Einheitswurzeln ξ^i . Daher definieren die Restklassen der Signaturdefekte modulo $\mathbb{Z}$ und der α -Invarianten modulo $\mathbb{Z}(\xi)$ Funktionen $\gamma_{\mathbb{Z}}^i$ und $\alpha_{\mathbb{Z}}$ auf der Bordismusgruppe $\Omega_{2n-1}(G)$.

α -Invariante und Signaturdefekte lassen sich im allgemeinen nur sehr schwer berechnen. Es ist daher eine naheliegende Frage, ob es andere Verfahren gibt, mit denen

man diese Invarianten - zumindest teilweise - berechnen kann, ohne gezwungen zu sein, eine berandende G -Mannigfaltigkeit zu suchen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, dieses Problem für die Restklassen der Invarianten mod. Z zu behandeln.

Wir werden uns meist auf die Operation einer zyklischen Gruppe ungerader Ordnung beschränken, obwohl eine Verallgemeinerung auf endliche abelsche Gruppen oder - mit einigen Modifikationen - auf kompakte, topologisch zyklische Gruppen wie S^1 möglich ist.

In § 0 werden die Definitionen und die verschiedenen Beziehungen der Invarianten untereinander zusammengestellt. Außerdem findet sich dort eine elementare Behandlung des Problems, inwieweit man mit den mod- p -charakteristischen Zahlen aus [C-F 1] die Signaturdefekte γ_Z^i für eine freie Z_p -Aktion bestimmen kann. Die Sonderrolle der Primzahl 2 beim orientierten Bordismus überträgt sich auf den äquivarianten Bordismus. Während für Involutionen die α -Invariante und die Signaturdefekte ganzzahlig sind, wachsen bei Aktionen zyklischer Gruppen ungerader Ordnung die Nenner von γ^i und γ dimensionsabhängig. γ_Z^i läßt sich daher nur in einem gewissen Dimensionsbereich als mod- p -charakteristische Zahl erhalten.

Der G -Signatursatz ermöglicht es, für eine geschlossene G -Mannigfaltigkeit die äquivariante Signatur durch eine charakteristische Zahl $L(g, Y)$ zu berechnen. Hat die G -Mannigfaltigkeit Y einen Rand M , auf dem G frei operiert, dann ist die Zahl $L(g, Y)$ für $g \neq 1$ noch sinnvoll definiert und die Abweichung von der Gültigkeit des Signatursatzes, nämlich die Differenz $\text{sign}(g, Y) - L(g, Y)$, wird durch die α -Invariante von M beschrieben. Für α_Z folgt dann die Kongruenz

$$\alpha_Z(g, M) = -L(g, Y) \text{ mod } Z(\xi)$$

Diese Beziehung erlaubt es, weitere Invarianten vom Typ $\alpha_Z(g, M)$ einzuführen: Durch Wahl anderer charakteristischer Zahlen anstelle von $L(g, Y)$ werden die Atiyah-Singer- v -Invarianten definiert.

Eine Definition dieser Zahlen, die in [A-S 4] nur kurz angedeutet ist, und ein Abstecken ihres Definitionsbereiches findet sich in § 1. Der bequemerem Darstellung halber fassen wir den Wertebereich der v -Invarianten etwas anders. Statt $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Z}(\xi)$ läßt sich der Quotient einer Lokalisation des Darstellungsrings von G $S^{-1}R(G)/R(G)$ verwenden.

Die Zahl $L(g, Y)$ wird aus der zum Signaturoperator gehörenden Symbolklasse abgeleitet. Symbolklassen bestimmter elliptischer Differentialoperatoren weisen Natürlichkeitseigenschaften auf, die eine enge Beziehung zu charakteristischen Klassen nahelegen. Mittels universeller Symbolklassen werden in § 2 verallgemeinerte K -Theorie-charakteristische Zahlen aus $K_1(BG)$ für orientierte freie G -Mannigfaltigkeit definiert und diskutiert. Dabei wird eine grundlegende Rolle der Signatur-Symbolklasse deutlich. Nach Einführung eines geeigneten Koeffizientenbereiches R läßt sich aus ihr eine $K(-; R)$ -Fundamentalklasse $[-]_S$ für orientierte Mannigfaltigkeiten konstruieren, die über das Kroneckerprodukt der K -Theorie die einfache Signaturformel $\langle 1, [X]_S \rangle_K = \text{sign } X$ liefert.

§ 3 stellt die Verbindung zwischen den charakteristischen Zahlen und den v -Invarianten her. Dazu wird ein Isomorphismus zwischen den Wertebereichen der charakteristischen Zahlen und der v -Invarianten $\psi: K_1(BG) \longrightarrow S^{-1}R(G)/R(G)$ konstruiert, unter dem die zu einer Symbolklasse gehörende charakteristische Zahl auf die entsprechende v -Invariante abgebildet wird. Den mit Hilfe der Fundamentalklasse $[-]_S$ definierten Thomhomomorphismus $\mu: \Omega_*^{SO}(BG) \longrightarrow K_*(BG)$ kann man mittels ψ durch die α_Z -Invariante beschreiben. Die Übereinstimmung von charakteristischen Zahlen und Invarianten vom Typ der Atiyah-Singer- v -Invarianten ist in bestimmten Fällen bekannt. Für stabil fast-komplexe G -Mannigfaltigkeiten findet man einen Beweis in [W] .

In § 4 wird mit den Methoden aus [Ha] der Satz von Hattori-Stong auf $\Omega_*^{SO} \otimes_{\mathbb{Z}} [1/2]$ übertragen und damit gezeigt, daß die in § 2 definierten charakteristischen Zahlen

und damit die v-Invarianten die Bordismusklassen in $\tilde{\Omega}_*(BG)$ für zyklische Gruppen ungerader Ordnung bestimmen.

§ 5 beschäftigt sich mit den Natürlichkeitseigenschaften von

$\psi: K_1(BG) \longrightarrow S^{-1}R(G)/R(G)$. Die Abbildung ψ erlaubt nicht nur eine Berechnung von $K_1(BG)$, sondern auch eine einfache Beschreibung der von Gruppensomomorphismen $\phi: G \longrightarrow H$ induzierten Homomorphismen $(B\phi)_*: K_1(BG) \longrightarrow K_1(BH)$. Die durch ψ hergestellte Beziehung zwischen der K-Homologie von BG und dem Darstellungsring von G wird dabei weiter vertieft.

Um den Fluß der Darstellung nicht unnötig zu stören, sind einige später benötigte Sätze für die K-Theorie mit Koeffizienten in einem Paragraphen (§6) zusammengefaßt.

§ 7 enthält eine Berechnung des Kroneckerproduktes $\langle, \rangle : K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K_1(BG) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ das durch die Verschlingungsformen auf den Linsenräumen induziert wird. Es gelingt mittels der Ergebnisse aus § 5, diese Verschlingungsform im Rahmen der Darstellungstheorie vollständig zu beschreiben. Die übliche Methode, K-Theorie Kroneckerprodukte mittels Riemann-Roch-Formeln in gewöhnliche Kroneckerprodukte umzurechnen, ist hier nicht anwendbar.

Als Folgerung erhalten wir in § 8 eine Darstellung der Signaturdefekte γ_Z^1 und γ_Z durch K-Theorie-charakteristische Zahlen aus $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Damit sind γ^1 und $\gamma \bmod. \mathbb{Z}$ durch Invarianten beschrieben, mit denen man das Aufsuchen einer berandenden G-Mannigfaltigkeit vermeiden kann. Daß diese charakteristische Zahlen - die K-Theorie Analoga zu den mod-p-charakteristischen Zahlen aus [C-F 1] - die Bordismusklassen bestimmen, wird gleichfalls aus der Kenntnis der Verschlingungsform auf BG hergeleitet. Eine sich anschließende Abschätzung der Ordnung von γ_Z erlaubt einen Rückschluß auf die Nenner der von D. Zagier in [Z] untersuchten höherdimensionalen Dedekindsummen.

In den beiden letzten Paragraphen betrachten wir statt orientierter, stabil-parallelisierte G -Mannigfaltigkeiten. Die Invarianten $\alpha_Z, \gamma_Z^i, \gamma_Z$ werden auf stabil-parallelisierten freien Z_p -Mannigfaltigkeiten vollständig berechnet. Kongruenzen zwischen den γ_Z^i erlauben eine Bestimmung des Bildes der stabilen Homotopiegruppen $\pi_*^S(BZ_p)$ in $K_1(BZ_p)$ unter dem Hurewicz-Homomorphismus und damit eine Berechnung der Vergißhomomorphismen $\Omega_*^{fr}(BZ_p) \longrightarrow \Omega_*^{SO}(BZ_p)$ und $\Omega_*^{fr}(BZ_p) \longrightarrow \Omega_*^U(BZ_p)$; der letztere wurde von L. Smith [Sm] mit völlig anderen Methoden zum Teil berechnet.

Die von M. Kreck in [K] gefundenen Beziehungen zwischen der zur Signatur gehörenden δ -Invariante und der e -Invariante von Adams werden auf stabil-parallelisierte, freie Z_p -Mannigfaltigkeiten erweitert. An die Stelle der Signatur tritt die äquivariante Signatur. Dies führt zu einer Berechnung der e -Invarianten auf $\pi_*^S(BZ_p)$.

Am Ende der Arbeit sind in Form einer Tabelle die Werte der Invarianten γ^i und γ auf einigen Linsenräumen zusammengestellt.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. F. Hirzebruch für seine Unterstützung danken. Herrn Prof. E. Ossa, der mich auf den Problemkreis aufmerksam machte, und Herrn Dr. W. Neumann danke ich für zahlreiche nützliche Diskussionen und Ratschläge. Dem Sonderforschungsbereich 40 "Theoretische Mathematik" bin ich für die finanzielle Unterstützung während des Fertigstellens der Arbeit Dank schuldig.

§ 0 Vorbereitungen und Definitionen

Es sei G eine endliche Gruppe. Für eine $(2n-1)$ -dimensionale geschlossene orientierte C^∞ -Mannigfaltigkeit M , auf der G differenzierbar, frei und orientierungserhaltend operiert, definiert man die α -Invariante wie folgt:

Es gibt immer eine ganze Zahl r , so daß $r \cdot M$ frei und äquivalent von einer G -Mannigfaltigkeit X^{2n} berandet wird. Für X^{2n} ist die äquivalente Signatur $\text{sign}(g, X)$, $g \in G$, erklärt.

Man setzt für $g \neq 1$

$$\alpha(g, M) := \frac{1}{r} \text{sign}(g, X) \quad (0.1)$$

(siehe [A-S 4], dort mit anderem Vorzeichen)

Wegen der Novikovadditivität der äquivalenten Signatur und des Verschwindens von $\text{sign}(g, Y)$ für $g \neq 1$ auf einer geschlossenen, freien G -Mannigfaltigkeit Y hängt $\alpha(g, M)$ nur von dem Paar $(M; G)$ ab.

In enger Verbindung mit der α -Invarianten steht der Signaturdefekt einer Überlagerung:

Die Orbitabbildung $M \rightarrow M/G$ ist eine $|G|$ -fache Überlagerung, deren r -faches von der Überlagerung $X \rightarrow X/G$ berandet wird. Da X und X/G Mannigfaltigkeiten mit Rand sind, ist die Signatur auf der Überlagerung $X \rightarrow X/G$ nicht mehr notwendig multiplikativ, d.h. die Differenz $\text{sign}(X) - |G| \cdot \text{sign}(X/G)$ braucht nicht zu verschwinden. Wie für α folgt aus der Novikovadditivität der Signatur, daß

$$\gamma(M \rightarrow M/G) := \frac{1}{r} (\text{sign}(X) - |G| \cdot \text{sign}(X/G)) \quad (0.2)$$

eine Invariante des Paares (M, G) ist.

Aus der bekannten Tatsache, daß die rationale Kohomologie eines Quotienten X/G der unter G invarianten Teil der Kohomologie von X ist, folgt für die Signatur von X/G (siehe [H-Z] § 4) die Gleichung

$$\text{sign}(X/G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \text{sign}(g, X) \quad (0.3)$$

und daher für den Signaturdefekt wegen $\text{sign}(1, X) - |G| \cdot \text{sign}(X/G) = - \sum_{g \neq 1} \text{sign}(g, X)$ die Beziehung

$$\gamma(M \longrightarrow M/G) = - \sum_{g \neq 1} \alpha(g, M) \quad (0.4)$$

Daß man umgekehrt die α -Invariante durch Signaturdefekte beschreiben kann, wurde von Neumann [N] gefunden, und soll im folgenden kurz dargestellt werden.

Für die Beweise und Verallgemeinerungen sei auf [N] verwiesen.

Einfachheitshalber beschränken wir uns hier auf zyklische Gruppen; g_0 sei ein fest gewähltes Erzeugende von G ; M und X wie oben.

Die Überlagerung $X \longrightarrow X/G =: \bar{X}$ definiert einen Homomorphismus

$\alpha: \pi_1(\bar{X}) \longrightarrow G$ (man nimmt aus der exakten Homotopiesequenz der Faserung $G \longrightarrow X \longrightarrow \bar{X}$ den Randoperator $\pi_1(X, *) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(G; g_0)$ und identifiziert $\pi_0(G; g_0)$ mittels g_0 mit G).

Verknüpft mit einer unitären Darstellung $\tau: G \longrightarrow U(\mathbb{C}^{\mathbb{I}})$ ($\mathbb{I}$ = Dimension der Darstellung) erhält man einen Homomorphismus $\tau\alpha: \pi_1(\bar{X}) \longrightarrow U(\mathbb{C}^{\mathbb{I}})$, der ein lokales Koeffizientensystem $\Gamma(\tau\alpha)$ auf $\bar{X}$ definiert. Auf dem lokalen Koeffizientensystem ist durch die übliche hermitesche Form β des $\mathbb{C}^{\mathbb{I}}$ eine kanonische Paarung definiert, so daß man eine $(-1)^n$ -hermitesche-Form

$$H^*(\bar{X}; \partial\bar{X}; \Gamma(\tau\alpha)) \otimes H^*(\bar{X}, \partial\bar{X}; \Gamma(\tau\alpha)) \xrightarrow{\cup} H^*(\bar{X}, \partial\bar{X}; \mathbb{C})$$

und damit eine Signatur $\text{sign}(\bar{X}, \Gamma(\alpha \cdot \tau))$ definieren kann. (Für n ungerade multipliziert man die Form mit $(-i)$ und nimmt deren Signatur).

Eine ausführliche Diskussion solcher Invarianten findet man in [M] und [L].

Die Differenz zwischen "getwisteter" und ungetwisteter Signatur definiert wieder einen Signaturdefekt:

$$\gamma^{\tau}(M \longrightarrow M/G) = \frac{1}{\tau} \cdot (\text{sign}(\bar{X}; \Gamma(\tau \cdot \alpha)) - \mathbb{I} \cdot \text{sign}(\bar{X})) \quad (0.5)$$

der wiederum nur von (M, G) und τ abhängt.

Nimmt man als τ die reguläre Darstellung $r: G \longrightarrow U(\mathbb{C}^{|G|})$, dann hat man wegen $H^*(\bar{X}; \Gamma(r \cdot \alpha)) \cong H^*(X, \mathbb{C})$ die Beziehung $\gamma^r(M \longrightarrow M/G) = \gamma(M \longrightarrow M/G)$.

Die reguläre Darstellung r zerfällt in die Summe der irreduziblen Darstellungen τ_i von G und das zieht ein Zerfallen von $\gamma^r(M \longrightarrow M/G)$ in eine Summe $\sum \gamma^{\tau_i}(M \longrightarrow M/G)$ nach sich.

Auf $H^*(\bar{X}; \Gamma(r \cdot \alpha)) \cong H^*(X, \mathbb{C})$ hat man eine G -Operation und daher eine kanonische Zerlegung von $H^*(\bar{X}; \Gamma(r \cdot \alpha))$ in Summanden, die jeweils Vielfache einer der irreduziblen Darstellungen τ_i sind. Das hat eine Zerlegung der äquivarianten Signatur von $H^*(\bar{X}; \Gamma(r \cdot \alpha))$ zur Folge. Damit ist der Weg zu dem folgenden Satz skizziert.

Satz (Neumann [N]) Ist $\tau_i: G \longrightarrow U(1) \quad i = 1, \dots, |G|-1$ eine Liste der irreduziblen Darstellungen von G und $\chi^i(g)$ der Wert des Charakters von τ_i auf g , dann gilt

$$\alpha(g, M) = \sum_{i=1}^{|G|-1} \chi^i(g) \cdot \gamma^{\tau_i}(M \rightarrow M/G) \quad (0.6)$$

$$\gamma^{\tau_i}(M \rightarrow M/G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \neq 1} \alpha(g, M) (\chi^i(g^{-1}) - 1) \quad (0.7)$$

$$\gamma^r(M \rightarrow M/G) = \gamma(M \rightarrow M/G) = - \sum_{g \neq 1} \alpha(g, M) = \sum \gamma^{\tau_i}(M \rightarrow M/G) \quad (0.8)$$

Für eine zyklische Gruppe G der Ordnung q liegt die komplexe Zahl $\alpha(g_0, M)$ in dem durch Adjunktion einer primitiven q -ten Einheitswurzel ξ definierten Unterkörper $\mathbb{Q}(\xi) \subset \mathbb{C}$. Mit (0.6) hat man eine Darstellung von $\alpha(g_0, M)$ als Linearkombination der Potenzen der Einheitswurzel ξ gefunden, die es erlaubt, die vorkommenden Koeffizienten als "getwistete Signaturdefekte" zu deuten.

Konventionen:

Zum Erzeugenden $g_0 \in G$ wählen wir eine primitive irreduzible Darstellung ρ von G so, daß $\chi^\rho(g_0) = \xi = e^{\frac{2\pi i}{q}}$ gilt. Als τ_i nehmen wir die i -te Tensorpotenz von ρ und verabreden

$$\gamma^i(M \rightarrow M/G) := \gamma^{\tau_i}(M \rightarrow M/G)$$

Dann gilt gerade $\alpha(g_0, M) = \sum_{i=1}^{q-1} \gamma^i(M \rightarrow M/G) \cdot \xi^i$

Bemerkung:

Ist $2n-1$ die Dimension von M , dann hat man nach Definition der äquivarianten Signatur die Fälle

$$n \text{ gerade} \quad \gamma^i = \gamma^{p-i} \quad (0.9)$$

$$n \text{ ungerade} \quad \gamma^i = -\gamma^{p-i} \quad (0.10)$$

zu unterscheiden.

Zwischen G -Mannigfaltigkeiten läßt sich auf die bekannte Art und Weise ein "äquivariante" Bordismusrelation erklären. Insbesondere sind die Bordismusgruppen freier orientierter G -Mannigfaltigkeiten $\Omega^{SO}(G)$ (G operiere orientierungserhaltend) erklärt, (siehe [C-F 1]) und eine naheliegende Frage ist es, wie sich die Invarianten α, γ, γ^i unter dieser Bordismusrelation verhalten. Ist M^{2n-1} in $\Omega^{SO}(G)$ nullbordant, d.h. wird M von X frei und äquivariant berandet, dann gilt $\alpha(g, M) = \text{sign}(g, M)$ und da $g \mapsto \text{sign}(g, M)$ ein Charakter ist, ist $\alpha(g, M)$ eine algebraische Zahl, d.h. $\alpha(g, M) \in Z(\xi) \subset \mathbb{Q}(\xi)$. Ebenso folgt, γ und γ^i sind ganzzahlig. Daher definieren die Restklassen dieser Invarianten in $\mathbb{Q}(\xi)/Z(\xi)$ bzw. $\mathbb{Q}/Z$ Bordismusinvarianten:

$$\begin{aligned} \alpha_Z(g, -) : \Omega_{2n-1}^{SO}(G) &\longrightarrow \frac{\mathbb{Q}(\xi)}{Z(\xi)} \\ \gamma_Z^i : \Omega_{2n-1}^{SO}(G) &\longrightarrow \mathbb{Q}/Z \\ \gamma_Z : \Omega_{2n-1}^{SO}(G) &\longrightarrow \mathbb{Q}/Z \end{aligned}$$

Eine wichtige Eigenschaft der äquivarianten Signatur auf geschlossenen G -Mannigfaltigkeiten ist durch den Atiyah-Singer-Indexsatz gegeben: Der äquivariante Signatursatz besagt, daß man $\text{sign}(g, X)$ durch eine durch die Fixpunktmenge der Operation von g auf X bestimmte Zahl $L(g, X)$ berechnen kann. Ist Y^{2n} eine nicht notwendig freie G -Mannigfaltigkeit, die M als Rand hat, dann ist die Differenz $\text{sign}(g, Y) - L(g, Y)$ wieder unabhängig von der Auswahl von Y und es gilt (siehe [A-§4])

$$\alpha(g, M) = \text{sign}(g, Y) - L(g, Y) \quad (0.11)$$

Damit läßt sich in bestimmten Fällen $\alpha(g, M)$ berechnen: Faßt man die Sphären S^{2n-1} als Einheitssphären des $\mathbb{C}^n$ auf, und ist ξ wie oben die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{q}}$, dann hat man durch $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1 \cdot \xi^{q_1}, \dots, z_n \cdot \xi^{q_n})$ eine Operation der zyklischen Gruppe $G = \{ \xi^i \mid i = 1, \dots, q \}$ definiert, die als Orbitraum gerade den Linsenraum $L(q; q_1, \dots, q_n)$ hat. Diese Operation läßt sich mit einem Fixpunkt auf die Scheibe D^{2n} fortsetzen und wegen $\text{sign}(g, D^{2n}) = 0$ erhält man (siehe [H-3]) :

$$\alpha(\xi, S^{2n-1}) = -L(\xi, D^{2n}) = - \prod_{i=1}^n \frac{\xi^{q_i} + 1}{\xi^{q_i} - 1} \quad (0.12)$$

Ist $f : M/G \rightarrow BG$ die klassifizierende Abbildung des G -Prinzipalbündels $M \rightarrow M/G$, dann läßt sich bekanntlich die G -Bordismusgruppe $\Omega_n^{SO}(G)$ über die Zuordnung $(G, M) \mapsto (M/G, f)$ mit $\Omega_n^{SO}(BG)$ identifizieren.

Für Elemente in $\Omega_n^{SO}(BG)$ sind charakteristische Zahlen definiert und der Rest dieses Paragraphen ist einer elementaren Lösung der Frage gewidmet, inwieweit diese charakteristischen Zahlen die Invarianten γ_Z^i und damit α_Z und γ_Z beschreiben. Einfachheitshalber setzen wir voraus, daß $|G| = p$ eine ungerade Primzahl ist.

Zunächst die Definition der charakteristischen Zahlen aus [C-F 1] : Wir benutzen die Identifikation von BZ_p mit dem unendlich dimensional Linsenraum als dem Spärenbündel $S(\gamma^p) \xrightarrow{\pi} BS^1$ der p -ten Tensorpotenz des kanonischen Linienbündels über BS^1 und erhalten durch $\pi^*(\gamma^*)$ ein kanonisches Bündel H über BZ_p mit erster Chernklasse $x \in H^2(BZ_p; \mathbb{Z}_p)$. In $H^1(BZ_p; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ wählen wir als Erzeugendes y das Urbild von x unter dem Bocksteinhomomorphismus. Der Kohomologiering von BZ_p läßt sich dann als Tensorprodukt einer äußeren Algebra und einer Polynomialgebra $H^*(BZ_p; \mathbb{Z}_p) = \Lambda(y) \otimes P(x)$ beschreiben.

Dem Element $(M, f) \in \Omega_{2n-1}^{SO}(BZ_p)$ werden durch die Kroneckerprodukte $\langle f^*(x^i \cup y) \cup p_\omega(TM), [M] \rangle \in \mathbb{Z}_p$ ($p_\omega(TM)$ = Pontrjaginklasse zur Partition ω) mod- p -charakteristische Zahlen zugeordnet. Für $2n-1 < 2p-1$ ist nach [C-F1] jedes Element $(M, f) \in \tilde{\Omega}_{2n-1}^{SO}(BZ_p)$ durch seine mod- p -charakteristischen Zahlen festgelegt.

Für eine gerade dimensionale Mannigfaltigkeit X folgt aus den Eigenschaften der G -Signatur (siehe [H-Z])

$$\alpha(g, M \times X) = \alpha(g, M) \cdot \text{sign}(X) \quad (0.14)$$

und damit $\gamma^i(M \times X \rightarrow (M \times X)/G) = \text{sign}(X) \cdot \gamma^i(M \rightarrow M/G)$. $\gamma_Z^i : \tilde{\Omega}_{2n-1}(\mathbb{B}Z_p) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist somit ein $\Omega_{\times}$ -Modulhomomorphismus wenn man die $\Omega_{\times}$ -Modulstruktur auf $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ durch die Signatur definiert. Daher genügt es γ_Z^i auf den $\Omega_{\times}$ -Modulerzeugenden zu bestimmen. Als $\Omega_{\times}$ -Modulerzeugende kann man die oben definierten G -Aktionen auf den Sphären (etwa mit Drehzahlen $q_i = 1$) wählen. Alle Elemente aus $\tilde{\Omega}_{2n-1}(\mathbb{B}Z_p)$ haben für $2n-1 < 2p-1$ die Ordnung p , so daß man γ_Z^i als Funktion nach Z_p ansehen kann.

Wir müssen den Koeffizienten $\gamma_Z^i(S^{2n-1} \rightarrow L(p; q_1, \dots, q_n))$ in $-\prod_{i=1}^n \frac{\xi^{q_i+1}}{\xi^{q_i-1}}$ als charakteristische Zahl in Z_p berechnen. Dabei hilft die in [H-Z] und in [Z] an vielen analogen Problemen erfolgreich vorgeführte Methode, den Residuensatz einzusetzen, weiter. Mit "Fourierzerlegung" erhält man für γ^s

$$\gamma^s(S^{2n-1} \rightarrow L^n(p; q_1, \dots, q_n)) = -\frac{1}{p} \cdot \sum_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq 1}}^n \prod_{i=1}^n \frac{\xi^{q_i+1}}{\xi^{q_i-1}} \cdot (\xi^{-s}-1) \quad (0.15)$$

Man setzt $f(z)dz := -\frac{z^{b-1}}{z} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{z^{q_i+1}}{z^{q_i-1}} \cdot \frac{dz}{z^{p-1}}$ mit $b := \prod_{i=1}^n q_i \cdot a$, so

daß $b \equiv -s \pmod{p}$ (o.B.d.A. seien die q_i paarweise relativ prim). Diese Differentialform hat Pole bei ∞ , 0 , 1 und ξ mit $\xi^p = 1$ (wegen des Faktors z^{b-1} sind die Stellen z mit $z^{q_i} = 1$ keine Pole). Die Pole an den Stellen $\xi^p = 1$, $\xi \neq 1$ sind einfach und die Residuen summieren sich gerade zu γ^s auf. Die Pole bei 0 und ∞ haben ganzzahlige Residuen.

Es bleibt der Pol bei 1 : Mit der Substitution $z = e^{2t}$ und $g := \prod_{i=1}^n q_i$ folgt

$$\begin{aligned} -\text{res}_1 f(z)dz &= \text{res}_0 \left\{ \frac{e^{2bt}-1}{e^{2t}} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{e^{2tq_i+1}}{e^{2tq_i-1}} \cdot \frac{de^{2t}}{e^{2tp-1}} \right\} \\ &= \text{res}_0 \left\{ \frac{2}{g} \cdot \frac{e^{2tb}-1}{e^{2tp-1}} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{q_i t}{\tanh(q_i t)} \cdot \frac{dt}{t^n} \right\} \end{aligned}$$

= Koeffizient von t^{n-1} in der Taylorentwicklung von $\left\{ \frac{2}{g} \cdot \frac{e^{2tb}-1}{e^{2tp}-1} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{q_i t}{\tanh(q_i t)} \right\}$.

Durch einsetzen der Reihenentwicklungen von $(e^{2bt}-1)/t$ und $(2pt)/(e^{2pt}-1)$ und mit $\prod_{i=1}^n \frac{q_i t}{\tanh(q_i t)} =: \sum_{m=0}^{\infty} \ell_m(q_1, \dots, q_n) t^{2m}$ erhält man

$$- \operatorname{res}_1 f(z) dz = \frac{1}{p \cdot g} \cdot \sum_{\substack{k, r, m \geq 0 \\ k+2m+r=n-1}} \frac{(2b)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{B_r \cdot (2p)^r}{r!} \cdot \ell_m(q_1, \dots, q_n)$$

(B_r = r-te Bernoullizahl)

Wegen $n < p$ kommt im Nenner der Zahl $\ell_m(q_1, \dots, q_n)$ kein Faktor p vor, und die Reduktion mod p liefert

$$(-p \cdot \operatorname{res}_1 f(z) dz) = \sum_{k+2m=n-1} \frac{1}{g} \cdot \frac{(-2s)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \ell_m(q_1, \dots, q_n) \mod p$$

Aus der Definition der Polynome $\ell_m(q_1, \dots, q_n)$ durch die charakteristische Potenzreihe $(q_i t)/(\tanh(q_i t))$ folgt (siehe [H-1]), daß $\ell_m(q_1, \dots, q_n)$ gerade das m-te Hirzebruchsche L-Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen in den $q_1^2, \dots, q_n^2$ ist. Beachtet man, daß die totale Pontrjaginklasse von $L^n(p; q_1, \dots, q_n)$ durch $\prod_{i=1}^n (1+q_i^2 \cdot x^2)$ gegeben wird und die klassifizierende Abbildung $f: L^n(p; q_1, \dots, q_n) \longrightarrow BZ_p$ den Abbildungsgrad $1/g \mod p$ hat, dann läßt sich die obige Summe durch das mod-p-Kroneckerprodukt ($d := \left[\frac{n-1}{2} \right]$)

$$< \sum_{m=0}^d \frac{(-2s \cdot f^* x)^{n-1-2m} \cup (-2s \cdot f^* y)}{(n-2m)!} \cup L_m(TL^n(p; q_1, \dots, q_n)) , [L^n(p; q_1, \dots, q_n)] >_H \quad (0.16)$$

beschreiben. Nach dem Residuensatz folgt $\sum_{\xi \neq 1} \operatorname{res}_{\xi} = -\{\operatorname{res}_0 + \operatorname{res}_{\infty} + \operatorname{res}_1\}$ und damit ist das Kroneckerprodukt (0.16) gerade $p \cdot \gamma^S \mod p$. Damit ist gezeigt:

Satz 0.17 Es sei p eine ungerade Primzahl, $n < p$ und $(M, f) \in \tilde{\Omega}_{2n-1}^{S^1}(BZ_p)$. Dann gilt

$$\gamma_Z^{-S}(M, f) = < \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{(2s \cdot f^* x)^{n-1-2m} \cup (2s \cdot f^* y)}{(n-2m)!} \cup L_m(TM) , [M] >_{H(\mathbb{Z}_p)}$$

Bemerkung:

Für $n \geq p$ gibt es eine analoge Formel für $p^{a+1} \cdot \gamma^{-S}(x) \mod p$, wo a durch $a \cdot (2p-2) < 2n-1 < (a+1) \cdot (2p-2)$ bestimmt ist und $L_m(TM)/(n-2m)!$ durch die Kohomologieklasse $p^a L_m(TM)/(n-2m)!$, die keinen Faktor p im Nenner hat, zu ersetzen ist.

§ 1 Atiyah-Singer-v-Invarianten

Für das Studium kohomologischer Invarianten von G -Mannigfaltigkeiten ist der Lokalisierungssatz von Segal nicht nur einer der grundlegendsten sondern auch der anwendungsreichsten Sätze. Der Lokalisierungssatz erlaubt es, Invarianten, die durch eine äquivariante Kohomologietheorie definiert sind, über eine gewöhnliche - d.h. nicht äquivariante Kohomologie zu berechnen. Die in (0.11) benutzte Darstellung der α -Invariante wird ebenfalls erst durch den Lokalisierungssatz ermöglicht. Da von der Methode des Lokalisierens in dieser Arbeit recht ausführlich Gebrauch gemacht werden wird, soll zunächst etwas näher darauf eingegangen werden. Diese Diskussion führt unmittelbar zu der Definition der Atiyah-Singer-v-Invarianten, zu denen auch die $\alpha_{\mathbb{Z}}$ -Invariante zu rechnen ist.

In der Terminologie werden wir uns weitgehend an [A-S 2,3,4] halten.

Wir können uns im folgenden auf eine zyklische Gruppe G mit Erzeugenden g beschränken; indem man alle Überlegungen zunächst auf die von einem Element erzeugte Untergruppe anwendet (siehe [A-S 2]), wird der allgemeine Fall hierauf über die Natürlichkeit der Indexfunktion zurückgeführt.

Die Konjugiertenklasse des Erzeugenden g definiert das Primideal γ aller Charaktere, die auf g verschwinden. Lokalisiert man den Darstellungsring $R(G)$ nach diesem Ideal γ , so heißt das, die Elemente der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S_g = R(G) - \gamma$ als Nenner einzuführen. Da für jeden G -Raum X $K_G(X)$ ein $R(G)$ -Modul ist, ist dessen Lokalisierung $S_g^{-1}K_G(X)$ definiert (in [A-S 2] $S_g^{-1}K_G(X) = K_G(X)_{\gamma}$). Daß die Inklusion der Fixpunktmenge $i : X^g \longrightarrow X$ in den lokalisierten K_G -Gruppen einen Isomorphismus $S^{-1}(i^*) : S_g^{-1}K_G(X) \longrightarrow S_g^{-1}K_G(X^g)$ induziert, ist die Aussage des Lokalisierungssatzes.

Insbesondere gilt $S_g^{-1}K_G(X) = 0$ für einen Raum X , auf dem g fixpunktfrei operiert, so daß man sich den Lokalisierungsprozeß als eine Konzentration auf die Fixpunktmenge vorstellen kann.

Ist X eine geschlossene G -Mannigfaltigkeit, dann ist die Eulerklasse $\lambda_{-1}(N^g)$ des Normalenbündels N^g von TX^g in TX in $S_g^{-1}K_G(X^g)$ invertierbar und da die Hintereinanderausführung von Inklusions- und Umkehrhomomorphismus $i^* i^!$ die Multiplikation mit $\lambda_{-1}(N^g)$ ist, ist $S^{-1}(i^*)/\lambda_{-1}(N^g)$ die zu $S^{-1}(i^!)$ inverse Abbildung. Der G -Index ist natürlich bzgl. Umkehrhomomorphismen von Inklusionen, so daß man nach lokalisieren den G -Index eines Elementes $U \in K_G(TX)$ über die Fixpunktmenge berechnen kann:

$$\begin{array}{ccc}
 S_g^{-1}K_G(TX^g) & \xrightarrow{i^!} & S_g^{-1}K_G(TX) \\
 \text{Ind}_G^{X^g} \searrow & \text{---} i^*/\lambda_{-1}(N^g) \text{---} & \searrow \text{Ind}_G^X \\
 & S_g^{-1}R(G) &
 \end{array} \quad (1.1)$$

Da die Elemente von S_g auf g nicht verschwinden, kann man alle Elemente aus $S_g^{-1}R(G)$ auf g auswerten; man setzt $(X/S)(g) := X(g)/S(g) \in \mathbb{C}$

$$\text{Insgesamt: } \text{Ind}_G^X(U)(g) = \text{Ind}_G^{X^g}(i^* U / \lambda_{-1}(N^g))(g) \quad (1.2)$$

Die $S_g^{-1}R(G)$ -Modulstruktur auf $S_g^{-1}K_G(TX^g)$ ist besonders übersichtlich:

Da G auf TX^g trivial operiert, ist $S_g^{-1}K_G(TX^g)$ isomorph zu $K(TX^g) \otimes S_g^{-1}R(G)$,

und man hat das Problem $\text{Ind}_G^X(U)(g)$ zu berechnen auf das Ausrechnen eines

"gewöhnlichen" Index und das Auswerten eines Charakters auf g zurückgeführt.

Der G -Signatursatz liefert ein Element U in $K_G(TX)$ mit $\text{Ind}_G^X(U)(g) = \text{sign}(g, X)$

und die durch die rechte Seite von (1.2) gegebene Funktion von g ist gerade

$$g \longmapsto L(g, X) .$$

Anders bei einer G -Mannigfaltigkeit Y mit Rand X :

Der Index ist dann nicht auf $K_G(TY) = K_G(B(TY), S(TY))$ sondern auf

$K_G(B(TY), B(TY)|_{\partial Y} \cup S(TY))$ definiert. Das wird klar, wenn man sich die Index-

funktion als das Auswerten eines Elementes auf dem K_G -Fundamentalzyklus der Mannigfaltigkeit vorstellt, der bei der berandeten Mannigfaltigkeit $B(TY)$ natürlich in $K_G(B(TY), \partial B(TY)) = K_G(B(TY), B(TY)|_{\partial Y} \cup S(TY))$ liegt.

Operiert g auf $X = \partial Y$ frei, so ist Y^g geschlossen und

$\text{Ind}_g: K_G(TY^g) \longrightarrow R(G)$ wohldefiniert. Für $U \in K_G(TY)$ kann man dann den folgenden Abbildungsweg gehen:

$$\psi_g: K_G(TY) \xrightarrow{p} S_g^{-1} K_G(TY) \xleftarrow{i!} S_g^{-1} K_G(TY^g) \xrightarrow{\text{Ind}} S_g^{-1} R(G) \quad (1.3)$$

Da es hier keine Indexfunktion von $K_G(TY)$ nach $R(G)$ gibt, die in $S_g^{-1} R(G)$ das Gleiche wie ψ_g liefert, gilt jetzt kein Ganzzahligkeitssatz für das Ergebnis, d.h. $\psi_g(U)$ braucht nicht unter den durch $R(G)$ in $S_g^{-1} R(G)$ definierten "ganzzahligen" Elementen zu sein, Gerade die Abweichung von der Ganzzahligkeit, d.h. die Restklasse von $\psi_g(U)$ in $S_g^{-1} R(G)/R(G)$ liefert interessante Invarianten des Randes X .

Damit diese Restklassen nur vom Rand abhängen, muß man natürlich voraussetzen, daß die Klasse U für alle Mannigfaltigkeiten, die X als Rand haben, zur Verfügung steht. Solche Elemente sind z.B. die in [A-S4] Symbolklassen genannten, zu einer bestimmten Struktur assoziierten Elemente aus $K_G(TY)$.

Zunächst zu Symbolklassen, die zu einer $SO(2n)$, d.h. Riemannschen Struktur assoziiert sind.

Eine $SO(2n)$ -Struktur auf der orientierten G -Mannigfaltigkeit Y^{2n} ist die Angabe eines zu TY assoziierten $SO(2n)$ -Prinzipalbündels P mit verträglicher G -Operation, d.h. $P \times_{SO(2n)} \mathbb{R}^{2n}$ ist G -äquivariant orientierungserhaltend isomorph zu TY . Zu $\mathbb{R}^{2n}$ mit der Standard $SO(2n)$ -Aktion ist die äquivariante K -Gruppe $K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ definiert. Ist v aus $K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ - v heißt dann universelle Symbolklasse - so erhält man über

$$\begin{array}{ccc} K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{p^*} & K_{G \times SO(2n)}(P \times \mathbb{R}^{2n}) \\ \downarrow a_Y & & \downarrow \eta \\ K_G(TY) & = & K_G(P \times_{SO(2n)} \mathbb{R}^{2n}) \end{array} \quad (1.4)$$

Symbolklassen $a_Y(v)$ in $K_G(TY)$. Die Bezeichnung dieser Klassen rührt daher, daß Symbole elliptischer Differentialoperatoren zu diesen Elementen gehören. Zur $U(n)$ -Struktur gehörende Symbolklassen werden durch

$$K_{U(n)}(\mathbb{C}^n) \cong K_{U(n)}(*) = R(U(n)) \text{ definiert.}$$

Die Atiyah-Singer-v-Invariante zur universellen Symbolklasse v wird nach [A-S4] folgendermaßen definiert:

Zu $h \in G$ betrachtet man die von h erzeugte Untergruppe H mit Inklusion $\phi: H \longrightarrow G$. Unter der Abbildungsfolge

$$K_G(TY) \xrightarrow{\phi^*} K_H(TY) \xrightarrow{p} S_h^{-1} K_H(TY) \xrightarrow{\cong} S_h^{-1} K_H(TY^n) \xrightarrow{\text{Ind}} S_h^{-1} R(H) \xrightarrow{\alpha \mapsto \chi(\alpha)} \mathbb{C} \quad (1.5)$$

erhält man aus $a_Y(v)$ eine komplexe Zahl $v(h, Y)$ und insgesamt eine Funktion $v(-, Y): G/\{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Ist Y' eine andere orientierte G -Mannigfaltigkeit mit Rand X , so ist $Z = Y \cup_X (-Y')$ eine geschlossene G -Mannigfaltigkeit mit Fixpunktmenge $Z^G = Y^G + (-Y')^G$. Es folgt $v(g, Z) = v(g, Y) - v(g, Y')$ und wegen der Geschlossenheit von Z ist $v(g, Z)$ der Wert eines Charakters. Die Restklasse von $v(-, Y)$ modulo den Werten von Charakteren ist damit nur vom Rand X abhängig. Sie wird mit $v(-, X)$ bezeichnet und heißt v -Invariante zur Symbolklasse v .

Unmittelbar klar ist, daß $v(-, X)$ eine Invariante der freien G -Bordismuskategorie von X ist.

Bemerkung:

Die universelle Symbolklasse 1 des Signaturoperators liefert die Funktion $g \longmapsto L(g, Y)$. In diesem Fall läßt sich das Bilden der Restklasse vermeiden und die Abhängigkeit der Zahl $L(g, Y)$ von der Mannigfaltigkeit Y dadurch beseitigen, daß man von $L(g, Y)$ die äquivariante Signatur abzieht. Wegen der Novikov-Additivität von $\text{sign}(g, Y)$, ist $\text{sign}(g, Y) - L(g, Y)$ nur von X abhängig und wie man leicht nachrechnet gleich $\alpha(g, X)$ Modulo den Werten von Charakteren wird α - da $\text{sign}(-, Y)$ ein Charakter ist - zu $(-1) \cdot L(-, X)$.

Wir können also festhalten, daß die zum Symbol des Signaturoperators gehörende v -Invariante bis auf das Vorzeichen gerade α_Z ist.

Für $h \in G - \{1\}$ liegt $v(h, Y)$ in der von h abhängenden Gruppe $S_h^{-1}R(H)$. Durch Wahl einer kleineren von h unabhängigen Nennermenge S , läßt sich ein Element $v(G; Y) \in S^{-1}R(G)$ definieren, das bei Einschränkung auf $S_h^{-1}R(H)$ $v(h, Y)$ liefert und damit die Elemente $v(h, Y)$ sinnvoll zusammenfaßt. Dabei muß man allerdings verzichten, den Index von $a_Y(v)$ über die Fixpunktmenge zu berechnen.

Die Methode, für ein Problem eine passende Menge von Nennern zu wählen, wurde in Arbeiten von tom Dieck und Segal (siehe [tD2] und [P]) eingeführt und in [W] ausführlich dargestellt. Wie man S geeignet wählt, beschreibt der folgende Satz, den wir aus [W] zitieren:

Es sei F eine Familie von Untergruppen von G , die abgeschlossen gegenüber Konjugation und Bildung von Untergruppen ist.

Ein G -Raum heißt F -frei, wenn alle Standgruppen der G -Aktion in F liegen.

Satz 1.6 ([W]) Ist $\bar{F} := \bigcup_{H \in F} H \subset G$, dann gilt $S^{-1}K_G(P) = 0$ für alle F -freien G -Räume P genau dann, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist. Für jedes $g \in \bar{F}$ gibt es einen Charakter $\bar{S} \in S$ mit $\bar{S}(g) = 0$

Ist $F = \{1\}$, dann erhält man freie G -Mannigfaltigkeiten, und eine im gewissen Sinne minimale Nennermenge - zumindest für endliche Gruppen - ist die folgende Menge S_G , die in [P] eingeführt wurde:

$$S_G := \{ (\text{reg} - |G|)^k \mid k \in \mathbb{N} \}$$

Hierbei ist reg die reguläre Darstellung von G . Die Elemente von S_G verschwinden auf dem Einselement von G , sodaß nach dem obigen Satz $S_G^{-1}K_G(X) = 0$ für alle freien G -Räume folgt.

Das Lokalisieren mit S_G bedeutet also nicht eine Einschränkung auf die Fixpunktmenge eines Elementes, sondern auf den ganzen nichtfreien Teil von X .

Aus der Definition von S_g folgt $S_g \subset S_G$ für $g \neq 1$. Ist $\phi: H \rightarrow G$ die

Inklusion einer Untergruppe und G zyklisch, dann gilt $\phi^* S_G = S_H$ und man erhält einen Homomorphismus $\phi^*: S_G^{-1} K_G(X) \rightarrow S_H^{-1} K_H(X)$.

Das führt zu der schon angedeuteten modifizierten Definition der v -Invarianten.

Es sei $u = \alpha_Y(v)$ die zu v gehörende Symbolklasse.

In der langen exakten Sequenz des Tripels $(B, \partial B, S) = (B(TY), B(TY) |_{\partial Y} \cup S(TY), S(TY))$

kommt ein freier G -Raum vor und daher induziert $j: (B, S) \rightarrow (B, \partial B)$ nach

Lokalisieren mit S_G einen Isomorphismus. Auf $K_G(B, \partial B)$ ist der G -Index erklärt

und man definiert durch

$$K_G(TY) \xrightarrow{p} S_G^{-1} K_G(TY) \xleftarrow{j^*} S_G^{-1} K_G(B(TY), B(TY) |_{\partial Y} \cup S(TY)) \xrightarrow{\text{Index}} S_G^{-1} R(G) \quad (1.8)$$

einen Homomorphismus $\bar{\psi}_Y: K_G(TY) \rightarrow S_G^{-1} R(G)$.

Die Gleichung $\bar{\psi}_Y(U)(h) = v(h, Y)$ folgt sofort aus dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & & K_H(TY) & \longrightarrow & S_H^{-1} K_H(TY) & \xleftarrow{i^*} & S_H^{-1} K_H(TY^G) & \longrightarrow & S_H^{-1} R(H) & & (1.9) \\ & \nearrow \phi^* & & & \downarrow & \nearrow j^* & \downarrow \text{III} & & \downarrow \text{IV} & & \\ K_G(TY) & & & & S_H^{-1} K_H(TY) & & S_H^{-1} K_H(B, \partial B) & & S_H^{-1} R(H) & \longrightarrow & C \\ & \searrow & & & \uparrow \phi^* & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & K_G(TY) & \longrightarrow & S_G^{-1} K_G(TY) & \xleftarrow{\cong} & S_G^{-1} K_G(B, \partial B) & \longrightarrow & S_G^{-1} R(G) & & \end{array}$$

Die Restklasse von $\bar{\psi}_Y(U)$ in $S_G^{-1} R(G)/R(G)$ ist wieder unabhängig von der Auswahl von Y und ergibt nach Auswerten auf $h \in G$ die oben definierte Funktion $h \mapsto v(h, X)$. Damit können wir die v -Invarianten als Elemente von $S_G^{-1} R(G)/R(G)$ auffassen.

Bemerkungen:

- 1) Die α -Invariante einer freien G -Mannigfaltigkeit M läßt sich ganz analog als Element von $S_G^{-1} R(G)$ interpretieren.
- 2) Durch Anwenden des oben formulierten Prinzips, eine geeignete Menge von $R(G)$ als Nenner einzuführen, erhält man auch für F -freie - etwa fixpunkt-freie - G -Mannigfaltigkeiten Bordismusinvarianten vom Typ der v -Invarianten.

3) Das Vorhergehende läßt sich auch auf S^1 -Aktionen anwenden:

Man hat nur eine passende multiplikativ abgeschlossene Menge $S \subset R(S^1)$ zu wählen.

Ist V^n ein komplexer G -Modul, dann definiert man die Eulerklasse von V durch

$\lambda_{-1}(V) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i(V)$ und setzt (allgemein für eine kompakte zyklische Gruppe, siehe [tD3]) :

$$S_c := \{ \lambda_{-1}(V)^k \mid k \in \mathbb{N}, V \text{ Darstellung von } G \text{ ohne triviale Summanden} \} \quad (1.10)$$

Da $S_c^{-1} K_G(-)$ für fixpunktfreie G -Mannigfaltigkeiten verschwindet, hat man v -Invarianten in $S_c^{-1} R(G)/R(G)$. Eine Formel (für $G = S^1$) für die durch $v = 1$ definierte v -Invariante $L(t, M)$ findet sich in [A-S4]. Analog zum Fall einer endlichen Gruppe ist dann die α -Invariante einer fixpunktfreien S^1 -Aktion - die äquivariant berandet - durch (0.11) definiert. Für eine eingehende Diskussion von fixpunktfreien S^1 -Aktionen siehe [0]. Die zur α -Invarianten einer fixpunktfreien S^1 -Aktion gehörende v -Invariante in $S_c^{-1} R(G)/R(G)$ werde ebenfalls mit α_Z bezeichnen. Sie unterscheidet sich von α i.a. um eine ganzzahlige Konstante.

4) S_c ist nur für zyklische Gruppen sinnvoll, denn für nicht zyklisches G ist bekannt, daß $S_c^{-1} K_G(X)$ für alle G -Räume X verschwindet. Ist G zyklisch, aber nicht unbedingt endlich, so läßt sich S_c noch etwas verkleinern; man erhält Invarianten für freie G -Mannigfaltigkeiten:

$$S_a := \{ \lambda_{-1}(V)^k \mid k \in \mathbb{N}, G \text{ operiert frei auf der Einheitssphäre } S(V) \text{ des komplexen } G \text{ Moduls } V \} \quad (1.11)$$

Den Orbitraum einer solchen freien Aktion auf der Einheitssphäre $S(V)$ nennt man - für endliches G - einen Linsenraum $L(V)$.

Auf die Beziehungen zwischen den verschiedenen Lokalisierungen soll später eingegangen werden.

Für eine endliche abelsche Gruppe G lassen sich $S_G^{-1} R(G)$ und $S_G^{-1} R(G)/R(G)$ recht einfach überblicken. Ist reg wieder die reguläre Darstellung, so bezeichnen

wir $R(G)/(\text{reg})$ mit $\overline{R(G)}$

Lemma 1.12 $S_G^{-1}R(G) \cong \overline{R(G)} \otimes_Z Z[1/|G|]$

Beweis: Der Kern der kanonischen Abbildung $\rho: R(G) \rightarrow S_G^{-1}R(G)$ besteht aus den Vielfachen der regulären Darstellung, so daß man einen Monomorphismus $\bar{\rho}: \overline{R(G)} \rightarrow S_G^{-1}R(G)$ erhält. Da $(\text{reg}-|G|)$ unter ρ auf $-|G|$ abgebildet wird, ist $|G|$ in $S_G^{-1}R(G)$ invertierbar und $\bar{\rho}$ läßt sich kanonisch zu einem Homomorphismus $\bar{\rho}: \overline{R(G)} \otimes Z[1/|G|] \rightarrow S_G^{-1}R(G)$ erweitern. $Z[1/|G|]$ bezeichnet die Lokalisierung von Z bei den Primzahlen, die $|G|$ nicht teilen. Aus der universellen Eigenschaft der Lokalisation folgt, daß die kanonische Abbildung $R(G) \rightarrow \overline{R(G)} \otimes Z[1/|G|]$ über $S_G^{-1}R(G)$ faktorisiert und ein Inverses zu $\bar{\rho}$ liefert.

Als unmittelbare Folgerung erhält man

$$S_G^{-1}R(G)/R(G) \cong \frac{\overline{R(G)} \otimes Z[1/|G|]}{\overline{R(G)}} \cong \overline{R(G)} \otimes \frac{Z[1/|G|]}{Z} \quad (1.13)$$

Die irreduziblen Darstellungen $S_1, \dots, S_{|G|-1}$ bilden eine Basis des freien Z -Moduls $\overline{R(G)}$, so daß man den Elementen in $S_G^{-1}R(G)$ und $S_G^{-1}R(G)/R(G)$ auf sinnvolle Weise ihre Koeffizienten vor S_j zuordnen kann. Für die Invarianten α und α_Z wurden diese Koeffizienten in § 0 als getwistete Signaturdefekte interpretiert. In Analogie dazu nennen wir bei anderen v -Invarianten diese Koeffizienten in $\mathbb{Q}/Z$ v -Defekte γ_v^i . Für den "ungetwisteten" Defekt γ_v , der der Summe der γ_v^i entspricht, läßt sich die Definition, die in [A-S 5] für den Signaturdefekt mod Z durch Integrale in den Pontrjaginformen gegeben wurde, direkt übertragen.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem Definitionsbereich der v -Invarianten.

Für Paare F, F' von Familien von Untergruppen von G wird in [C-F2] eine Bordismusgruppe $\mathcal{O}_n(G; F, F')$ von (F, F') freien G -Mannigfaltigkeit definiert.

Auf den hier vorliegenden Fall spezialisiert erhält man die Gruppe $\mathcal{O}_n(G)$ aller geschlossenen orientierten G -Mannigfaltigkeiten (ohne Einschränkung an die Standgruppen der G -Aktion), die Gruppe $\mathcal{O}_n(G;F,\{1\})$ der orientierten G -Mannigfaltigkeit mit Rand, wo G frei auf dem Rand operiert (F = Familie aller Untergruppen von G) und die Gruppe $\mathcal{O}_n(G;\{1\}) = \Omega_n(G) \cong \Omega_n(BG)$ der freien G -Mannigfaltigkeiten. Dazu gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\rightarrow \mathcal{O}_n(G;\{1\}) \xrightarrow{j_*} \mathcal{O}_n(G) \xrightarrow{i_*} \mathcal{O}_n(G;F,\{1\}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{O}_{n-1}(G;\{1\}) \rightarrow \quad (1.14)$$

wobei i_* und j_* die Vergeiß-Abbildungen sind und ∂ durch Einschränken auf den Rand gegeben ist.

In [R] wird Kern und Bild des Homomorphismus j_* für endliche abelsche Gruppen berechnet:

Allgemein gilt, daß j_* auf der reduzierten Bordismusgruppe $\tilde{\Omega}(BG)$ verschwindet. Hat G ungerade Ordnung, so ist j_* auf den Koeffizienten Ω_* injektiv, so daß der Definitionsbereich der v -Invarianten genau aus $\tilde{\Omega}(BG)$ besteht. Hat G gerade Ordnung, so liegt im Kern von j_* auch die 2-Torsion von Ω_* . Wir werden später sehen, daß auf diesen Elementen die α -Invariante - so fern definiert - ganzzahlig ist und $\alpha_{\mathbb{Z}}$ damit verschwindet.

Ist G eine endliche zyklische Gruppe, so lassen sich diese Aussagen auch leicht direkt, etwa mit Methoden aus [C-F1] und der Gysinsequenz des Bündels $H^n \rightarrow B\mathbb{Z}_n \rightarrow BS^1$ für Ω_* beweisen.

Im zyklischen Fall besteht G aus Primkomponenten $\mathbb{Z}_p^i$ und da $\tilde{\Omega}(BG)$ in

$\bigoplus_{p \mid |G|} \tilde{\Omega}(B\mathbb{Z}_p^i)$ zerfällt (es sei $BG = \prod_p B\mathbb{Z}_p^i$; aus der Bordismusspektralsequenz folgt, daß $\tilde{\Omega}(B\mathbb{Z}_p^i \wedge B\mathbb{Z}_q^j) = 0$ für $(p,q) = 1$, da schon der E_2 -Term verschwindet; mit der langen exakten Sequenz zu $B\mathbb{Z}_p^i \vee B\mathbb{Z}_q^j \rightarrow B\mathbb{Z}_p^i \times \mathbb{Z}_q^j \rightarrow B\mathbb{Z}_p^i \wedge B\mathbb{Z}_q^j$ und Induktion folgt dann diese Behauptung), hat man einen vollständigen Überblick über $\tilde{\Omega}(BG)$:

Für p ungerade wird $\tilde{\Omega}_*(B\mathbb{Z}_p^i)$ als Ω_* -Modul durch die in § 0 definierten $\mathbb{Z}_p^i$ -Operationen auf den Sphären S^{2n-1} erzeugt. $\tilde{\Omega}_{2n}(B\mathbb{Z}_p^i)$ verschwindet [C-F1].

$\Omega_*(BZ_2)$ wurde von Burdick [B], und $\Omega_*(BZ_{2^k})$ von Katsube [Kat] untersucht.

Da $H_*(BZ_{2^k})$ keine ungerade Torsion hat, folgt aus Satz 15.2 in [C-F,1] sofort $\Omega_r(BZ_{2^k}) \cong \sum_{p+q=r} H_p(BZ_{2^k}, \Omega_q)$, so daß ein Element in $\tilde{\Omega}_*(BZ_{2^k})$ höchstens die Ordnung 2^k haben kann - im Gegensatz zu $\tilde{\Omega}_*(BG)$ mit $|G|$ ungerade, wo die Ordnung mit wachsender Dimension zunimmt. Ebensovienig verschwindet $\tilde{\Omega}_{2n}(BZ_{2^k})$; außer dem von den freien Z_{2^k} -Aktionen auf den Sphären erzeugten Ω_* -Untermodule enthält $\tilde{\Omega}_{2n-1}^{(BZ_{2^k})}$ noch einen Untermodul H_K von Elementen der Ordnung 2. Die Elemente aus H_K liegen alle im Bild der Inklusion $\tilde{\Omega}_{2n-1}(BZ_2) \rightarrow \tilde{\Omega}_{2n-1}(BZ_{2^k})$.

Bemerkungen :

- 1) Für freie G-Operationen auf stabil-fastkomplexen Mannigfaltigkeiten hat man ganz analoge Aussagen - nur fällt hier die Sonderrolle der Gruppen gerader Ordnung völlig weg.
- 2) Eine freie S^1 -Mannigfaltigkeit M berandet natürlich immer; das zur S^1 -Prinzipalfaserung $M \rightarrow M/S^1$ assoziierte Scheibenbündel liefert eine berandende S^1 -Mannigfaltigkeit.
Für fixpunktfreie S^1 -Aktionen siehe [O].

Wir fassen zusammen:

Die v-Invarianten definieren einen Homomorphismus

$$\beta_1: \tilde{\Omega}_{2n-1}(BG) \otimes K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow S_G^{-1}R(G)/R(G) \quad (1.15)$$

Für eine zyklische Gruppe ungerader Ordnung spaltet die lange exakte Sequenz (1.14) auf. Man erhält zu $v \in K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ ein Diagramm, dessen Kommutativität sofort aus den Definitionen folgt, und das die v-Invarianten zu anderen, ebenfalls durch den Index definierten G-Bordismusinvarianten in Beziehung setzt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_{2n}(\ast) & \rightarrow & \mathcal{O}_{2n}(G) & \rightarrow & \mathcal{O}_{2n}(G; F; \{1\}) & \rightarrow & \tilde{\Omega}_{2n-1}(G) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow Z & & \downarrow Y & & \downarrow X & & \downarrow M & & \\ & & \downarrow \text{Ind}_G^Z(a_2(v)) & & \downarrow \text{Ind}_G^Y(a_1(v)) & & \downarrow v(-, X) & & \downarrow v(-, M) & & \\ 0 & \rightarrow & Z & \rightarrow & R(G) & \rightarrow & S_G^{-1}R(G) & \rightarrow & S_G^{-1}R(G)/R(G) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (1.16)$$

§ 2 K-Theorie charakteristische Zahlen für freie G-Mannigfaltigkeiten

Für orientierte G-Mannigfaltigkeiten definieren wir mittels universeller Symbolklassen verallgemeinerte charakteristische Zahlen.

Die bekannte Definition, mit der man einer Mannigfaltigkeit charakteristische Zahlen zuordnet, läßt sich leicht auf singuläre Mannigfaltigkeiten (M, f) in einem topologischen Raum X erweitern:

Ist c eine charakteristische Klasse von M und $[M]$ ein Fundamentalzyklus von M , dann ist die Homologieklassse $f_*(c \cap [M])$ von X nur von der Bordismusklassse der singulären Mannigfaltigkeit (M, f) abhängig und geht für $X = *$ in eine gewöhnliche charakteristische Zahl über.

In § 0 wurde deutlich, daß charakteristische Zahlen, die mit der Homologietheorie $H(-; R)$ gebildet werden, nicht ausreichen, um die Elemente von $\tilde{\Omega}_*(BG)$ in allen Dimensionen zu beschreiben. Für den komplexen Bordismus ist bekannt, daß K-Theorie charakteristische Zahlen die Elemente aus $\Omega_*^U(BG)$ bestimmen, solange die Gruppe G periodische Kohomologie hat.

Wir greifen deshalb auch auf K-Theorie charakteristische Zahlen zurück. Die Homologietheorie zur komplexen K-Theorie K_* wird mittels des Spektrums $\{Z \times BU, U\}$ definiert; eine ausführliche Definition findet man in [Ha]. Orientierbarkeit für die K-Theorie ist äquivalent mit dem Verschwinden der dritten Stiefel-Whitneyklasse, so daß eine SO-orientierte Mannigfaltigkeit M i.A. nicht für die K-Theorie orientierbar ist. Die obige Definition ist also nicht direkt anwendbar.

Das Ballbündel $B(TM)$ des Tangentialbündels einer Mannigfaltigkeit M hat eine kanonische fast-komplexe Struktur und ist daher K-orientierbar.

Man wählt eine Einbettung von M^n in $\mathbb{R}^{n+m}$, $m \geq n$ und erhält eine Einbettung des Tangentialbündels $TM \rightarrow T\mathbb{R}^{n+m}$ mit Normalenbündel TN . TN ist isomorph zur gelifteten Whitneysumme $\pi^*(N \oplus N)$ des Normalenbündels von M in $\mathbb{R}^{n+m}$

mit sich selbst. Wie in [A-S4] wird verabredet, daß der zweite Summand dem Tangentialbündel entlang der Fasern von N entsprechen soll. Damit ist die Identifikation $TN \cong \pi^*(N \otimes N) = \pi^*N \oplus i \cdot \pi^*N \cong \pi^*(N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ eindeutig festgelegt. Die K-Theorie Thomklasse eines komplexen Vektorbündels E - wie sie etwa in [A1] definiert ist - soll im folgenden mit $U_T(E)$ oder einfach U_T bezeichnet werden. Will man die für die singuläre Kohomologietheorie bekannten Beziehungen zwischen Umkehrhomomorphismus, Thomisomorphismus und Fundamentalklassen erhalten, so wird man im Falle einer allgemeinen Kohomologietheorie zur folgenden Fundamentalklassendefinition geführt:

Zu einer Einbettung $M^n \xrightarrow{i} S^{n+m}$ mit Normalenbündel N - orientierbar für die Theorie - hat man eine kanonische Abbildung $j: S^{n+m} \rightarrow B(N)/S(N)$ und mit dem Thomisomorphismus des Bündels N das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{n+m}(S^{n+m}) & \xrightarrow{j_*} & K_{n+m}(B(N), S(N)) \\ & \searrow i_* & \downarrow \cap U_T(N) \\ & & K_n(M) \end{array} \quad (2.1)$$

Als Fundamentalklasse der Sphäre wählt man das Element $[S^{n+m}]_T$ das unter dem Suspensionsisomorphismus auf $1 \in \tilde{K}_0(S^0)$ abgebildet wird (Suspensionsisomorphismus passend zur Thomklasse!)

Definition (2.2): $[M]_T := j_* [S^{n+m}]_T \cap U_T(N)$

Diese Fundamentalklasse hat die von ihr erwarteten Eigenschaften, sie liefert insbesondere ein Poincaréisomorphismus $\cap [M]_T: K^*(M) \rightarrow K_*(M)$.

Die Übertragung auf Mannigfaltigkeiten mit Rand liegt auf der Hand. Beim relativen Poincaréisomorphismus

$$K^*(TM) = K^*(B(TM), S(TM)) \xrightarrow{[B, S] \cap} K_*(B(TM)) \xrightarrow{\text{pr}_*} K_*(M) \quad (2.3)$$

werden wir oft in der Notation den Homomorphismus pr_* unterdrücken.

Aus der Definition des topologischen Index in [A-S3] folgt sofort, daß

für $U \in K^0(TM)$ der Homomorphismus $U \mapsto \text{Ind}_M(U)$ durch $U \mapsto \pi_*(U \cap [BTM, STM]_T)$ gegeben wird. π ist hier die Projektion $M \rightarrow *$; deshalb kann man nach Definition

des Kroneckerproduktes den Index von U auch durch $\langle U, [BTM, STM]_T \rangle_K$ beschreiben.

Anstelle von charakteristischen Klassen, die sich wegen des Fehlens eines Thomisomorphismus des Bündels TM i.A. nicht von $K^*(M)$ nach $K^*(TM)$ anheben lassen, benutzen wir Symbolklassen.

Da unter den Symbolklassen auch eine Eulerklasse vorkommt, sind nicht alle Symbolklassen "stabil". Stabile Klassen erhält man, wenn man sich für gerades n auf universelle Symbolklassen beschränkt, die im Bild der Einschränkung $K_{SO(n+2)}^{(R^{n+2})} \rightarrow K_{SO(n)}^{(R^n \oplus R^2)} \cong K_{SO(n)}^{(R^n)}$ liegen, und für ungerades n auf Klassen in $K^0(TM \oplus R) = K^1(TM)$, die durch Elemente aus $K_{SO(n+1)}^{(R^{n+1})}$ definiert sind.

Lemma 2.4 Die mit den oben ausgewählten Symbolklassen gebildeten K-Homologieklassen

$$f_*(a_M(v) \wedge [TM]) \in K_0(X) \quad (n \equiv 0(2))$$

$$f(a_M(v) \wedge [TM \oplus R]) \in K_1(X) \quad (n \equiv 1(2))$$

sind Bordimusinvarianten der singulären Mannigfaltigkeit (M,f) aus $\Omega_n(X)$.

Beweis: Es sei $(M,f) \in \Omega_{2n-1}(X)$ nullbordant mit Nullbordismus (W,F)

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & K^0(B,S) \times K_0(B,\partial B) & \xrightarrow{\cap} & K_0(B,\bar{B}) \xrightarrow{\text{pr}_*} K_0(W,\partial W) \\ & \nearrow & \downarrow i^* & \downarrow \partial & \downarrow \partial \\ K_{SO(2n)}^{(R^{2n})} & & K_1(\partial B, S) & \nearrow \cap & K_1(\bar{B}, \bar{S}) \\ & \searrow & \uparrow j_* & \uparrow \cap & \downarrow \partial \\ & & K^0(\bar{B}, \bar{S}) \times K_1(\bar{B}, \bar{S}) & \xrightarrow{\cap} & K_1(\bar{B}) \xrightarrow{\text{pr}_*} K_1(\partial W) \end{array}$$

mit den Abkürzungen $B := B(TW)$, $S := S(TW)$, $\bar{B} := B(TW)|_{\partial W} = B(TM \oplus R)$, $\bar{B} \cup S = \partial B$

$S := S(TW)|_{\partial W}$ folgt, daß $\text{pr}_*(a_W(v) \wedge [BTW, \partial BTW])$ unter dem Randoperator ∂ auf $\text{pr}_*(a_M(v) \wedge [B(TM \oplus R), S(TM \oplus R)]) \in K_1(\partial W)$ abgebildet wird. Ist i die

Inklusion des Randes, dann ist wegen $F \circ i = f$ und $i_* \partial = 0$

$f_*(a_M(v) \cap [B(TM \oplus R), S(TM \oplus R)])$ die Nullklasse. Der Beweis für gerades n verläuft ähnlich.

Damit haben wir einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \beta_2 : \tilde{\Omega}_{2n-1}(BG) \otimes K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) &\longrightarrow K_1(BG) \\ (M, f) \otimes v &\longmapsto f_*(a_M(v) \cap [TM \oplus R]_T) \end{aligned} \quad (2.5)$$

definiert.

Bei der jetzt folgenden Berechnung von $K_{SO(n)}(\mathbb{R}^n)$ wird die fundamentale Rolle der Symbolklasse 1 deutlich werden. Zu $K_{SO(2n)}^*(\mathbb{R}^{2n}) = K_{SO(2n)}^*(D^{2n}, S^{2n-1})$ gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\longrightarrow K_{SO(2n)}^0(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow K_{SO(2n)}^0(D^{2n}) \longrightarrow K_{SO(2n)}^0(S^{2n-1}) \longrightarrow \quad (2.6)$$

Es gilt natürlich $K_{SO(2n)}^0(D^{2n}) = R(SO(2n))$.

Die $SO(2n)$ -Operation auf S^{2n-1} ist mit der Identifizierung

$SO(2n)/SO(2n-1) \longrightarrow S^{2n-1}$ verträglich und da man allgemein für eine Untergruppe $H \subset G$ $K_G(G/H)$ mit $R(H)$ identifizieren kann, folgt

$K_{SO(2n)}^*(S^{2n-1}) = R(SO(2n-1))$. Daher ist $K_{SO(2n)}^1(S^{2n-1}) = 0$ und (2.6)

wird zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{j^*} RSO(2n) \xrightarrow{i} RSO(2n-1) \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

Die Isomorphie $K_G(G/H) \cong K_H(*)$ wird durch Einschränken eines G -Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi} G/H$ auf das H -Vektorbündel $\pi^{-1}(H/H) \longrightarrow H/H$ definiert.

Es ist dann unmittelbar klar, daß der Homomorphismus i in (2.7) durch die

Inklusion $SO(2n-1) \subset SO(2n)$ induziert wird. Die Bestimmung des Kernes von i ist jetzt mehr oder weniger elementare Darstellungstheorie und findet sich sogar in der Literatur (siehe [c])

Die äußeren Potenzen der Standarddarstellung ρ_n von $SO(n)$ auf $\mathbb{R}^n$ definieren nach Tensorieren mit $\mathbb{C}$ Elemente $\lambda_1 \dots \lambda_n$ in $RSO(n)$. Für $i < n/2$ ist

$\lambda_i \cong \lambda_{n-i}$ und für gerades n spaltet $\lambda_{\frac{n}{2}}$ auf in zwei Darstellungen $\lambda_{\frac{n}{2}}^+, \lambda_{\frac{n}{2}}^-$. Dann gilt ([Ad1]):

$RSO(2n+1) = \mathbb{Z}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ und $RSO(2n)$ ist ein freier $RSO(2n+1)$ -Modul, der von 1 und λ_n^+ erzeugt wird.

Das Element $\mu := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda_i + (-1)^n \lambda_n^+ \in RSO(2n)$, das in [A-H2] zum Studium von Einbettungsfragen herangezogen wurde, läßt sich - wie man leicht sieht - zusammen mit 1 ebenfalls als Basis des $RSO(2n+1)$ -Moduls $RSO(2n)$ verwenden. Der Vorteil von μ besteht darin, im Kern von i zu liegen, so daß man zur Beschreibung von Kern i nur noch den Kern von i auf $RSO(2n+1)$ kennen muß. Ein anderes Element in Kern i ist die Eulerklasse $e = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \lambda_i$. Für die Beziehungen zwischen e, μ und der Symbolklasse l_n gilt:

Lemma (2.8)

$$2\mu = e + l_n$$

Beweis: Zuerst sei an die Definition von l_n erinnert:

Über das kanonische innere Produkt und die Orientierung von $\mathbb{R}^{2n}$ definiert man den $*$ Operator $*$: $\Lambda^k(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \Lambda^{2n-k}(\mathbb{R}^{2n})$. Nach Tensorieren mit $\mathbb{C}$ spaltet $\Lambda^*(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C}$ in die ± 1 Eigenräume $\Lambda_+(\mathbb{R}^{2n}), \Lambda_-(\mathbb{R}^{2n})$ des Operators $i^{k(k-1)+n} *$ und zwar $SO(2n)$ -äquivariant auf: $\Lambda^*(\mathbb{R}^{2n}) \otimes \mathbb{C} = \Lambda_+(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \Lambda_-(\mathbb{R}^{2n})$. Die $\Lambda_{\pm}(\mathbb{R}^{2n})$ sind komplexe $SO(2n)$ -Moduln. Ist $\pi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow *$ die Projektion, dann hat man über D^{2n} die Vektorbündelsequenz

$$\pi^*(\Lambda_+(\mathbb{R}^{2n})) \xrightarrow{\alpha} \pi^*(\Lambda_-(\mathbb{R}^{2n}))$$

mit $\alpha(v, w) = v \wedge w - v \vee w$, wo $\wedge$ das äußere und $\vee$ das adjungierte innere Produkt ist.

Die Sequenz ist über der Sphäre $S^{2n-1}_{\mathbb{C}} \subset D^{2n}$ exakt und definiert durch die Differenzkonstruktion des Element $l_n \in K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$.

Aus den Eigenschaften der Differenzkonstruktion folgt dann, daß l_n unter $j^*: K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow RSO(2n)$ auf $\Lambda_+(\mathbb{R}^{2n}) - \Lambda_-(\mathbb{R}^{2n})$ abgebildet wird. Wir müssen dieses Element mit der Differenz $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$, die man durch Aufspalten von $\lambda_n(\mathbb{R}^{2n})$ erhält, vergleichen. Dazu faßt man $RSO(2n)$ als Unterring

von $R(T^n) = \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ (T^n = standard-maximaler Torus in $SO(2n)$)

auf. Wie in [Pa] gezeigt wird, ist die Klasse 1 multiplikativ, d.h.

$1_n \hat{\otimes} 1_m = 1_{n+m}$ ($\hat{\otimes}$ = äußeres Tensorprodukt). Es genügt daher 1_1 zu kennen.

Nach [A-S4] gilt $\Lambda_+(R^2) = 1 + x_1^{-1}$ und $\Lambda_-(R^2) = 1 + x_1$, so daß das

Bild von 1_1 in $RSO(2) = R(T^1)$ gerade $x_1^{-1} - x_1$ ist. Aus der Multiplikativität folgt, daß 1_n auf $\prod_{i=1}^n (x_i^{-1} - x_i)$ abgebildet wird. In [Ad1] werden

λ_n^+ und λ_n^- so normiert, daß $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ als Bild des Produkts $\prod_{i=1}^n (x_i - x_i^{-1})$ hat. Somit $\Lambda_+(R^{2n}) - \Lambda_-(R^{2n}) = (-1)^n (\lambda_n^+ - \lambda_n^-)$.

Wegen der Isomorphie $\lambda_i \cong \lambda_{2n-i}$ und $\lambda_n^+ + \lambda_n^- = \lambda_n$ gilt

$$2\mu = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \lambda_i - (-1)^n \lambda_n + 2 \cdot (-1)^n \lambda_n^+ = e + (-1)^n (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) = e + 1_n$$

Mit der Multiplikativität der Klasse e folgt, daß e in $R(T^n)$ das Bild

$\prod_{i=1}^n (1 - x_i^{-1})(1 - x_i) = \prod_{i=1}^n (2 - (x_i + x_i^{-1}))$ hat. Diese Darstellungen von e und 1_n

in $R(T^n)$ zeigen sofort, daß sie - und damit auch μ - im Kern von i liegen.

Bemerkung:

Die Symbolklasse $a_M(e)$ hat auf einer gerade dimensional geschlossenen Mannigfaltigkeit M als Index gerade die Eulerzahl von M ($a_M(e)$ ist das Symbol des Differentialoperators d auf dem de-Rahm-Komplex, siehe [Pa]). Die Beziehung $2\mu = e + 1_n$ kann daher als eine Ursache für die bekannte und leicht direkt nachzuweisende Kongruenz zwischen Eulerzahl und Signatur $e(M) \equiv \text{sign}(M) \pmod{2}$ angesehen werden.

Um den Kern von i auf $RSO(2n+1)$ zu berechnen, führen wir einen Basiswechsel durch. Es seien $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die elementarsymmetrischen Funktionen in n Variablen.

Setzt man $\tilde{p}k_i := \sigma_i(x_1 + x_1^{-1} - 2, \dots, x_n + x_n^{-1} - 2)$ in $R(T^n)$, dann liegen die

$\tilde{p}k_i$ schon in $RSO(2n+1) \subset R(T^n)$ und mit einem einfachen Basiswechselargument

(siehe [Hu], Cap 13, 5.4) folgt $RSO(2n+1) = \mathbb{Z}[\tilde{p}k_1, \dots, \tilde{p}k_n]$. Bei Ein-

schränkung auf $RSO(2n-1)$ geht natürlich $\tilde{p}k_i$ auf $\tilde{p}k_i$ und $\tilde{p}k_n$ auf 0.

Da e als Bild in $R(T^n)$ gerade $\prod (2 - (x_i + x_i^{-1}))$ hat, folgt $e = (-1)^n \tilde{p}k_n$ und der

Kern von i auf $RSO(2n+1)$ wird von e erzeugt.

Zusammengefaßt:

$$K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) \cong RSO(2n+1) \cdot e + RSO(2n+1) \mu_n \subset RSO(2n) \quad (2.9)$$

$K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1})$ ist leichter zu bestimmen:

Wie oben erhält man aus der langen exakten Sequenz des Paares (D^{2n-1}, S^{2n-2}) die exakte Folge:

$$0 \rightarrow RSO(2n-1) \rightarrow RSO(2n-2) \rightarrow K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1}) \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

und damit

$$K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1}) \cong RSO(2n-1) \mu_{n-1} \subset RSO(2n-2) \quad (2.11)$$

Bemerkung:

Für fast-komplexe universelle Symbolklassen gilt wegen der Existenz des Thomisomorphismus $K_{U(n)}(\mathbb{C}^n) \cong R(U(n))$.

Eulerklassen verschwinden auf ungeradedimensionalen Mannigfaltigkeiten, deshalb erwartet man, daß dies auch für e gilt.

Lemma 2.12 $a_M(e) = 0$ in $K^0(TM^{2n-1} \oplus \mathbb{R})$

Beweis: Zunächst ist es klar, daß a_M sich über $K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1})$ faktorisieren läßt:

$$\begin{array}{ccc} K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\quad} & K(TM \oplus \mathbb{R}) \\ \downarrow i^* & \searrow & \uparrow \cong \\ & K_{SO(2n-1)}(\mathbb{R}^{2n-1} \oplus \mathbb{R}) & \\ \uparrow \cong & \swarrow & \downarrow \\ K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1}) & \xrightarrow{\quad} & K^1(TM) \end{array}$$

Es genügt $i^*(e) = 0$ nachzuweisen.

Die Konjugation mit einem Element A_n der Determinante -1 aus $O(2n)$ definiert einen Automorphismus θ_n von $SO(2n)$. Man kann A_n so wählen, daß man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} SO(2n) & \xrightarrow{\theta_n} & SO(2n) \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ SO(2n-2) & \xrightarrow{\theta_{n-1}} & SO(2n-2) \end{array}$$

erhält.

(Etwa $A_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $A_n(e_1) = -e_1$, $A_n(e_i) = e_i$ $i > 1$)

Faßt man $RSO(2n)$ als Unterring von $R(T^n) = \mathbb{Z}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$ auf, so folgt sofort, daß θ_n durch Vertauschen von x_1 und x_1^{-1} auf $RSO(2n)$ operiert (siehe [Ad1]).

Daher ist e (und ganz $RSO(2n \pm 1)$) invariant unter θ_n^* während μ_{n-1} unter θ_{n-1}^* auf $-\mu_{n-1}$ abgebildet wird. Aus (2.11) folgt, daß in $K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1})$ kein von 0 verschiedenes Element unter θ_n fest bleibt. Das Bild von e

unter dem mit θ_n vertauschbaren Homomorphismus

$i: K_{SO(2n)}^1(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow K_{SO(2n-1)}^1(\mathbb{R}^{2n-1})$ ist daher das Nullelement.

Als Hauptergebnis können wir festhalten, daß nur universelle Symbolklassen aus $K_{SO(2n)}^1(\mathbb{R}^{2n})$ der Form $\tilde{p} \cdot \mu_n$, wo $\tilde{p}$ ein Polynom in den Elementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, auf ungerade dimensionalen Mannigfaltigkeiten überhaupt von 0 verschiedene charakteristische Zahlen liefern können.

Hat G ungerade Ordnung, können wir μ_n durch 1_n ersetzen, denn $2\mu_n \equiv 1_n \pmod{e}$

Ist P das zu $TM \oplus \mathbb{R}$ assoziierte $SO(2n)$ -Prinzipalbündel, dann definiert man zu einer Darstellung $\phi \in RSO(2n)$ $\phi(TM) \in K^0(M)$ durch $P \times_{SO(2n)} \phi$

$\phi \mapsto \phi(TM)$ definiert gerade den bekannten, zu jedem $SO(2n)$ -Prinzipal-

bündel definierten kanonischen Homomorphismus von λ -Ring $RSO(2n) \rightarrow K^0(M)$.

Kennt man die Symbolklasse $a_M(\mu_n)$ oder $a_M(1_n)$ in $K^1(TM)$, dann erhält man alle anderen auf eine einfache Weise:

Lemma 2.12

$$a_M(\tilde{p} \cdot \mu_n) = \tilde{p}(TM) \cdot a_M(\mu_n)$$

Beweis: Ein Beweis folgt sofort aus der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc} K_{SO(2n)}^1(\mathbb{R}^{2n}) \otimes K_{SO(2n)}^1(*) & \xrightarrow{\quad \cup \quad} & K_{SO(2n)}^1(\mathbb{R}^{2n}) \\ \downarrow \text{pr}^* & & \downarrow \text{pr}^* & & \downarrow \text{pr}^* \\ K_{SO(2n)}^1(P \times \mathbb{R}^{2n}) \otimes K_{SO(2n)}^1(P) & \xrightarrow{\quad \cup \quad} & K_{SO(2n)}^1(P \times \mathbb{R}^{2n}) \\ \uparrow \mathbb{R} & & \uparrow \mathbb{R} & & \uparrow \mathbb{R} \\ K(P \times_{SO(2n)} \mathbb{R}^{2n}) \otimes K(P/SO(2n)) & \xrightarrow{\quad \cup \quad} & K(P \times_{SO(2n)} \mathbb{R}^{2n}) \end{array}$$

Da die Isomorphie $K_{SO(2n)}(X) \cong K(X/SO(2n))$ von der Projektion

$q: X \longrightarrow X/SO(2n)$ induziert wird, ist diese mit Tensorprodukten verträglich.

Die Symbolklasse $a_M(l_n)$ hat gegenüber der Klasse $a_M(\mu)$ einen gewissen Vorzug: Sie ist multiplikativ.

$a_M(l_n)$ läßt sich - ebenso wie das für l_n schon ausgeführt wurde - durch Aufspalten von $\Lambda^*(TM \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ (bzw. $\Lambda^*(TM)$ für $\dim M \equiv 0(2)$) mittels Differenzkonstruktion definieren. Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften der Klasse $U_L(TM) = a_M(l_n)$ zusammen:

Satz 2.14 1) Für orientierte Vektorbündel E und F gilt

$$U_L(E) \cdot U_L(F) = U_L(E \oplus F)$$

2) Ist E ein komplexes Vektorbündel und U_T die übliche Thomklasse, dann gilt

$$U_L(E) = \Lambda^*(\bar{E}) \otimes U_T(E)$$

3) Schränkt man $U_L(E^{2n})$ auf die Faser ein, so erhält man das 2^n -fache des kanonischen Erzeugenden.

Beweis: 1) ergibt sich aus der erwähnten Multiplikativität von l_n .

2) braucht man nur für Linienbündel nachzuweisen, da sowohl $U_L(E)$ als auch $\Lambda^*(\bar{E})$ und $U_T(E)$ multiplikativ sind. $j: BSO(2) \longrightarrow MU(1) = MSO(2)$ ist jedoch eine Homotopieäquivalenz und es genügt die Eulerklassen zu vergleichen:

Aus $j^*U_L(\xi) = \bar{\xi} - \xi$ und $j^*U_T(\xi) = 1 - \xi$ folgt dann die Behauptung

$$\bar{\xi} - \xi = (1 + \bar{\xi})(1 - \xi).$$

3) ist eine unmittelbare Folge von 2).

Führt man Koeffizienten ein, in denen 2 invertierbar ist, dann wird U_L zu einer Thomklasse.

Wir werden als Koeffizienten fast nur $R := \mathbb{Z}[1/2]$ benutzen. $K^*(-; R)$ und $K_*(-; R)$ lassen sich für endliche CW-Komplexe einfach durch Tensorieren definieren: $K(X; R) := K(X) \otimes R$. Für unendliche CW-Komplexe muß man für

$K^*(-;R)$ ein Spektrum $BUZ[1/2]$ konstruieren: Auf dem H-Raum $Z \times BU$ ist durch Addition der Identität zu sich selbst eine "Multiplikation mit 2"

$f: Z \times BU \rightarrow Z \times BU$ definiert. Mit der Abbildungsfolge

$$Z \times BU \xrightarrow{f} Z \times BU \xrightarrow{f} Z \times BU \xrightarrow{f} \dots$$

konstruiert man als iterierten Abbildungszylinder $BUZ[1/2]$. Auf endlichen CW-Komplexen erhält man dann $K^*(X;R) = K^*(X) \otimes R$. Wegen der Verträglichkeit einer Homologietheorie mit $\varinjlim$ gilt $K_*(X;R) = K_*(X) \otimes R$ auch für unendliche CW-Komplexe.

Für die Theorie $K(-;Z[1/2])$ sind wegen der Existenz der Thomklasse U_L alle $SO(n)$ -Vektorbündel orientierbar. Für $KO(-;Z[1/2])$ wurde dies von Sullivan [S] (mit einer anderen Thomklasse) bewiesen. Man hat jetzt insbesondere einen universellen Thomisomorphismus $\phi_L: K^*(BSO(n);R) \rightarrow \tilde{K}^*(MSO(n);R)$ und kann über das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_{SO(2n)}^{(R^{2n})} & \xrightarrow{a_{BSO(2n)}} & \tilde{K}(MSO(2n), R) \\ \uparrow \cdot 1_n & & \uparrow \phi_L \\ RSO(2n) & \longrightarrow & K(BSO(2n), R) \end{array} \quad (2,15)$$

die universellen Symbolklassen direkt als universelle charakteristische Klassen interpretieren. Die Bilder der $\tilde{p}k_i$ in $K(BSO(2n))$ sind die K-Theorie Pontrjagin-klassen pk_i . Unter dem Cherncharakter geht pk_i in eine Kohomologieklass über, die mit der gewöhnlichen Pontrjaginklasse beginnt.

Arbeitet man mit $R = Z[1/2]$ als Koeffizientenbereich, kann man sich den Umweg über das Tangentialbündel ersparen:

Daß die Thomklasse eines orientierten Vektorbündels E mittels des Poicaré-isomorphismus der Mannigfaltigkeit $(B(E), S(E))$ dual zur Fundamentalklasse des Nullschnittes ist, gilt auch in der K-Theorie - solange alle Fundamentalklassen durch "zusammengehörende" Thomklassen definiert werden. Da $[TM]_T$ mit der Thomklasse eines komplexen Bündels gebildet wurde, passen $[TM]_T$ und U_L i.A. nicht zusammen; man erwartet daher eine modifizierte Thomklasse U_S zur Definition derjenigen Fundamentalklasse $[M]_S \in K_*(M;R)$, die das folgende Diagramm kommutativ

macht.

$$\begin{array}{ccc}
 K^*(TM \oplus R; R) & \xrightarrow{\cap [TM \oplus R]_+} & K_*(M; R) \\
 \uparrow \cup U_L & \searrow \cap [M]_S & \\
 K^*(M; R) & &
 \end{array} \quad (2.16)$$

E sei ein orientiertes R -Vektorbündel der Dimension $\underline{E}$. In $K^*(E; R)$ ist $\Lambda^*(E \otimes \mathbb{C} - \underline{E})$ invertierbar und somit ist

$$\tilde{U}_S(E) := \Lambda^*(E \otimes \mathbb{C} - \underline{E})^{-1} \tilde{U}_L(E) \quad \text{wohldefiniert.}$$

$$(\tilde{U}_L(E^{2n}) := 2^{-n} U_L(E))$$

Die Thomklasse $\tilde{U}_S(v)$ des Normalenbündels einer Einbettung von M in $\mathbb{R}^k$ definiert nach (2.2) eine Fundamentalklasse $[\tilde{M}]_S$.

Zunächst fassen wir noch einmal die Beziehungen zwischen den verschiedenen Thom- und Fundamentalklassen zusammen

$$\tilde{U}_L(E^{2n}) = 2^{-n} U_L(E) \quad \tilde{U}_L(E) = \Lambda^*(E \otimes \mathbb{C} - \underline{E}) \tilde{U}_S(E)$$

Ist E^n ein komplexes Bündel und M^{2n-1} eine stabil fastkomplexe Mannigfaltigkeit, dann gilt:

$$\tilde{U}_L(E) = \Lambda^*(\bar{E} - n) U_T(E)$$

$$\tilde{U}_S(E) = \Lambda^*(E - n)^{-1} U_T(E)$$

$$[M^{2n-1}]_S = (-2)^n [\tilde{M}]_S$$

$$[M^{2n-1}]_S = (-1)^n \Lambda^*(TM \oplus R) \cap [M]_T$$

$$[\widetilde{M^{2n-1}}]_S = \Lambda^*(TM \oplus R - n) \cap [M]_T$$

Bemerkung:

Die mit $\sim$ gekennzeichneten Klassen sind mit der gewöhnlichen d.h. durch U_T definierten Suspension in K^* verträglich, während die unreduzierten Thomklassen Multiplikationen mit 2-er Potenzen hervorrufen.

Mit diesen Wahlen gilt: $\tilde{U}_S(TM \oplus R) \cap [\widetilde{TM \oplus R}]_S = [\tilde{M}]_S$.

Auf dem Normalenbündel von TM haben wir, um $[TM \oplus R]_S$ mit $[TM \oplus R]_T$ zu ver-

gleichen, nicht die kanonische Orientierung, sondern die von der komplexen Struktur herrührende Orientierung zu nehmen.

Die obige Gleichung wird zu

$$\overline{U_S(TM \oplus \mathbb{R})} \cap [\widetilde{TM \oplus \mathbb{R}}]_S = [M]_S$$

($\bar{a}$ = konjugierte Klasse zu a), wobei jetzt TN die "komplexe" Orientierung hat.

Einsetzen der Beziehungen $[\widetilde{TM \oplus \mathbb{R}}]_S = \Lambda^*(TN - \dim_{\mathbb{C}} TN)^{-1} [TM \oplus \mathbb{R}]_T$,

$\tilde{U}_S(TM \oplus \mathbb{R}) = (-1)^n \tilde{U}_S(TM \oplus \mathbb{R})$, $\tilde{U}_L(TM \oplus \mathbb{R}) = \Lambda^*(TM \otimes \mathbb{C} - \dim_{\mathbb{R}} TM) \tilde{U}_S(TM \oplus \mathbb{R})$

und $\Lambda^*(TM \otimes \mathbb{C} - \dim TM) = \Lambda^*(TN - \dim TN)^{-1}$ liefert

$$U_L(TM \oplus \mathbb{R}) \cap [TM \oplus \mathbb{R}]_T = (-2)^n [\widetilde{M}]_S = [M]_S$$

und damit die Kommutativität des Diagramms (2.16).

Die Diagramme (2.15) und (2.16) erlauben es nun die zu Beginn dieses Paragraphen mittels Symbolklassen definierten Bordismusinvarianten mit $K^*(; \mathbb{R})$ -Theorie-Pontrjaginzahlen zu identifizieren.

Satz 2.17

$$f_*(a_M(v) \cap [TM \oplus \mathbb{R}]_T) = f_*(pk_{\omega}(TM) \cap [M]_S)$$

Hierbei gilt $v \equiv \tilde{pk}_{\omega} \cdot 1_n \mod e$ in $K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\tilde{pk}_{\omega}$ aus $RSO(2n)$ und pk_{ω} die zu $\tilde{pk}_{\omega}$ gehörende Pontrjaginklasse in $K^0(BSO(2n); \mathbb{R})$.

Für Gruppen ungerader Ordnung bedeutet das Einführen von $\mathbb{Z}[1/2]$ -Koeffizienten keine Einschränkung.

Die zu 1_n gehörende charakteristische Zahl ist das Bild der Fundamentalklasse:

$f_*(a_M(1_n) \cap [TM \oplus \mathbb{R}]_T) = f_*([M]_S)$ und der durch 1_n definierte Homomorphismus

$\beta_2(-, 1_n)$ wird zum Thomhomomorphismus:

$$\mu : \tilde{\Omega}_{2n-1}(BG) \otimes \mathbb{R} \longrightarrow K_1(BG; \mathbb{R}) \quad (2.18)$$

Bemerkung: Für eine geradedimensionale orientierte Mannigfaltigkeit x^{2n}

läßt sich das K-Theorie Kroneckerprodukt $\langle v, [x]_S \rangle = \text{Index}(v \cdot U_L) \in \mathbb{Z}[1/2]$

in ein gewöhnliches Kroneckerprodukt umrechnen. Dabei zeigen sich die engen

Beziehungen der Fundamentalklasse $[x]_S$ zur Signatur:

Mit der Definition von $[\tilde{X}]_S$ gilt (Abbildungen wie in (2.2)):

$$\begin{aligned} \langle x, [\tilde{X}]_S \rangle_K &= \langle \text{pr}^* x \cup \tilde{U}_S(N), j_* [\tilde{S}^k]_S \rangle_K = \langle j^* (\text{pr}^* x \cup \tilde{U}_S(N)), [S^k]_T \rangle_K \\ &= \langle \text{ch}(j^* \text{pr}^*(x) \cup \tilde{U}_S(N)), [S^k]_H \rangle_{H(-; \mathbb{Q})} \end{aligned}$$

$\text{ch } \tilde{U}_S(N) \in H^*(B(N), S(N); \mathbb{Q})$ läßt sich als Bild unter dem Thomisomorphismus schreiben: $\text{ch } \tilde{U}_S(N) = \text{pr}^* y \cup U_H(N)$

$$\begin{aligned} \langle x, [\tilde{X}]_S \rangle_K &= \langle \text{pr}^* \text{ch}(x) \cup \text{pr}^* y \cup U_H, j_* [S^k]_H \rangle_H = \langle \text{ch}(x) \cup y, \text{pr}_* (j_* [S^k] \cap U_H) \rangle \\ &= \langle \text{ch}(x) \cup y, [X]_H \rangle_H \end{aligned}$$

Es bleibt die Klasse $y(N) = y$ zu bestimmen. Mit Natürlichkeit und Spaltungsprinzip führt man dies auf den Fall des universellen Linienbündels γ über $P_\infty \mathbb{C}$ zurück. Wegen $B(\gamma)/S(\gamma) \xrightarrow{j} P_\infty \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{ch } \tilde{U}_S(\gamma) &= j^{*-1} \text{ch } j^* \tilde{U}_S(\gamma) = j^{*-1} \text{ch } \Lambda^*(\gamma - 1)^{-1} j^* U_T(\gamma) = j^{*-1} \text{ch} \left(2 \cdot \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) \\ &= -\frac{2}{x} \cdot \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \cdot U_H(\gamma) \quad (x = c_1(\gamma^*)) \end{aligned}$$

Somit $y(N) = \prod (-(\tanh x_i/2) / (x_i/2))$. $y(-)$ ist eine stabile charakteristische Klasse und es gilt $y(N) = y(TX)^{-1}$. Vergleich mit der zur Reihe $x/\tanh x$ gehörenden L-Klasse zeigt, daß sich die einzelnen homogenen Terme um Vorzeichen und Potenzen von 2 unterscheiden: $(-1)^n y(TX)^{-1}_{4k} = 2^{2k} \cdot L_k(TX) \in H^{4k}(X; \mathbb{Q})$. $\text{ch } x \cup y(TX)^{-1}$ und $(-2)^{-n} \text{ch } \psi^2(x) \cup L(TX)$ haben damit den gleichen $2n$ -ten homogenen Term. Insgesamt

$$\langle x, [X]_S \rangle_{K(-; \mathbb{R})} = \langle \text{ch } \psi^2(x) \cup L(TX), [X] \rangle_{H(-; \mathbb{Q})} \quad (2.17)$$

Als Korollar erhält man $\langle 1, [X]_S \rangle_K = \text{sign } X$

und für eine komplexe Mannigfaltigkeit X^n $(-1)^n \langle \Lambda^*(TX), [X]_T \rangle_K = \text{sign } X$

Das Auswerten eines Vektorbündels L auf der zu $[X]_T$ konjugierten Klasse ergibt immer die Eulerzahl $\chi(X; L) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \dim H^i(X; \Omega(L))$. Damit geht das letzte Kroneckerprodukt in eine alte Formel von Hodge $\chi(X, \Lambda^* TX^*) = \text{sign } X$ über (siehe [H4]).

§ 3 Die Beziehungen zwischen charakteristischen Zahlen und v-Invarianten

Wir konstruieren einen Homomorphismus $\psi : K_1(BG) \rightarrow S_G^{-1}R(G)/R(G)$, über den wir die v-Invarianten mit den charakteristischen Zahlen aus §2 in Beziehung setzen. Es sei G eine endliche zyklische Gruppe, Y eine orientierte G -Mannigfaltigkeit mit freiem Rand ∂Y und $\partial Y/G = M$. Ein Element $v \in K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ definiert die Symbolklassen $a_Y(v) \in K_G^O(TY)$ und $a_M(v) \in K^O(TM \oplus \mathbb{R})$. Nach Konstruktion dieser Elemente ist es klar, daß $a_Y(v)$ unter der Einschränkung und dem Herausdividieren der G -Aktion auf $a_M(v)$ abgebildet wird. Betrachtet man die lange exakte Sequenz des Tripels $(B(TY), \partial B(TY), S(TY))$ und die auf den Gruppen definierten Indexhomomorphismen, erhält man das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \rightarrow K_G^1(TY_{\partial Y}) & \rightarrow & K_G^O(BTY, \partial BTY) & \xrightarrow{j^*} & K_G^O(TY) & \xrightarrow{i^*} & K_G^O(TY_{\partial Y}) & \rightarrow & K_G^1(B, \partial B) \\
 & & \downarrow \text{ind}_G & & \downarrow \psi_Y & & \downarrow \psi_M & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & Z \cdot \text{reg} & \rightarrow & R(G) & \rightarrow & S_G^{-1}R(G) & \rightarrow & S_G^{-1}R(G)/R(G) & \rightarrow 0
 \end{array} \quad (3.1)$$

Das Bild des ersten Indexhomomorphismus liegt in $(\text{reg}) \subset R(G)$, da G frei auf ∂Y operiert: Nach [A-S1] ist für einen freien G -Raum X $I_G \cdot K_G^*(X)$ nilpotent (I_G = Augmentationsideal in $R(G)$) und da ind_G ein $R(G)$ -Modulhomomorphismus ist, muß das Bild von ind_G in (reg) liegen. ψ_M ist auf Bild i^* definiert.

Dem Diagramm (3.1) und der oben erwähnten Beziehung zwischen $a_Y(v)$ und $a_M(v)$ entnimmt man sofort, daß die zu v gebildete v-Invariante in $S_G^{-1}R(G)/R(G)$ verschwindet, wenn $a_M(v) \in K^O(TM \oplus \mathbb{R}) = K_G^O(TY_{\partial Y})$ verschwindet. Sowohl β_1 wie auch β_2 sind damit nur auf dem Untermodul $R(SO(2n+1)) \cdot \mu_n \subset K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ interessant. Die Definition von $\psi : K_1(BG) \rightarrow S_G^{-1}R(G)/R(G)$:

Der klassifizierende Raum BG wird approximiert durch die Folge der Linsenräume $L^n(q) = S^{2n-1}/G$ (Drehzahlen alle gleich 1, $q := |G|$). Der freie G -Raum S^{2n-1} wird von der Scheibe D^{2n} äquivariant berandet. Wegen $K_G^1(B(TD^{2n}), \partial B(TD^{2n})) = 0$ ist $\psi_{L^n(q)} =: \psi_n$ auf ganz $K_G^O(TD^{2n}|_{\partial D})$ definiert. Die Inklusion $i_{n,m} : D^{2n} \rightarrow D^{2m}$ ist G -äquivariant und induziert einen Umkehrhomomorphismus

$i_{n,m}^\vee : K_G(TD_{|\partial D}^{2n}) \rightarrow K_G(TD_{|\partial D}^{2m})$, der wegen der Verträglichkeit des G-Index mit Umkehrhomomorphismen von Inklusionen mit den ψ_n vertauschbar ist. Definiert man ψ_n über den Isomorphismus $P_n : K_G^O(TD_{|\partial D}^{2n}) \cong K^O(TL^n(q) \oplus \mathbb{R}) \cong K_1(L^n(q))$ auf der Gruppe $K_1(L^n(q))$, so wird aus der Vertauschbarkeit von ψ_n mit $i_{n,m}^\vee$ die Vertäglichkeit mit $i_{n,m}^* : K_1(L^n(q)) \rightarrow K_1(L^m(q))$. Die Folge der ψ_n definiert auf dem direkten Limes dieses Systems $\varinjlim K_1(L^n(q)) = K_1(BG)$ den Homomorphismus $\psi : K_1(BG) \rightarrow S_G^{-1}R(G)/R(G)$.

Die Definition von $\psi(x)$ läßt sich in dem folgenden Diagramm zusammenfassen :

Zu $x \in K_1(BG)$ gibt es ein n , so daß x im Bild von $K_1(L^n(q)) \rightarrow K_1(BG)$ liegt.

$$\begin{array}{ccccc}
 K_1(BG) & \xrightarrow{\psi} & S_G^{-1}R(G)/R(G) & & \\
 \uparrow i_{n,\infty}^* & & \uparrow \psi_{D^{2n}} & & (3.2) \\
 K_1(L^n(q)) & \xleftarrow{\hat{[TL^n \oplus \mathbb{R}]}_\tau} & K^O(TL^n(q) \oplus \mathbb{R}) & \xleftarrow{\varphi} & K_G^O(TD_{|\partial D}^{2n}) \xleftarrow{i^*} K_G^O(TD^{2n})
 \end{array}$$

Satz 3.3 a) Ist $|G| \equiv 1 \pmod{2}$, dann gilt $\psi \circ \beta_2 = \beta_1$ auf $\tilde{\Omega}_{2n-1}(BG)$
 b) Ist $|G| \equiv 0 \pmod{2}$, dann stimmen $\psi \circ \beta_2$ und β_1 auf dem Ω_* -Untermodul von $\Omega_*(BG)$ überein, der von den freien G-Aktionen auf den Sphären erzeugt wird. Auf den restlichen Elementen, die einen direkten Summanden bilden, ist die α -Invariante ganzzahlig, d.h. $\alpha_Z = 0$.

Beweis:

1. Aus dem Diagramm (3.2) folgt sofort die Gleichung $\psi \beta_2 = \beta_1$ für die freien G-Mannigfaltigkeiten (S^{2n-1}, G) : Unter $\varphi \circ i^*$ geht $a_{D^{2n}}(v)$ auf $a_{L^n(q)}(v)$ und weiter auf $(i_{n,\infty}^*)_*(q_{L^n(q)}(v) \wedge [TL^n(q) \oplus \mathbb{R}]) = \beta_2(L^n(q); i_{n,\infty}, v)$ in $K_1(BG)$. Die rechte Hälfte von (3.2) ist die Definition $\beta_1((S^{2n-1}, G), v)$, so daß aus der Definition von ψ die Behauptung folgt.
2. Wir zeigen jetzt die Behauptung für ein Produkt $X \times (L^n(q), i)$ mit $X \in \Omega_*$. Zunächst benötigen wir eine geeignete $\mathbb{Z}$ -Basis von $RSO(2n+1) = \mathbb{Z}[\tilde{p}k_1, \dots, \tilde{p}k_n]$. Sind σ_i die elementarsymmetrischen Funktionen in den n -Variablen $t_1, \dots, t_n$,

dann gibt es nach einem bekannten Verfahren (siehe [Mi]) zu jeder Partition ω von k ein eindeutig bestimmtes Polynom S_ω , so daß

$$S_\omega(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \sum t_1^{\omega_1} \dots t_r^{\omega_r}$$

wobei über alle Monome in $t_1, \dots, t_n$ zu summieren ist, die durch eine Permutation der Variablen ineinander übergehen. Die S_ω bilden eine $\mathbb{Z}$ -Basis von $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$. Insbesondere sind die Polynome $S_\omega(\tilde{p}k_1, \dots, \tilde{p}k_n)$ eine $\mathbb{Z}$ -Basis von $RSO(2n+1)$. Wie in [Mi] folgt dann für orientierte Bündel E, F über M die Whitney-Summenformel

$$S_\omega(pk_1(E \oplus F), \dots, pk_r(E \oplus F)) = \sum_{\epsilon + \tau = \omega} S_\epsilon(pk_1(E), \dots) \cdot S_\tau(pk_1(F), \dots) \quad (3.4)$$

Es sei jetzt $v \in K_{SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n})$ von der Form $S_\omega(\tilde{p}k_1, \tilde{p}k_r) \cdot 1_{n+m}$.

Wir berechnen $\beta_2(X \times S^{2n-1}, v)$: Das Tangentialbündel $T(X^{2m} \times L^n(q)) \oplus \mathbb{R}$ spaltet als Whitneysumme $pr_1^* TX \oplus pr_2^* TL^n \oplus \mathbb{R}$ und wegen der Multiplikativität von 1_n gilt $a_{X \times L}(1_{n+m}) = pr_1^* U_L(TX) \cup pr_2^* U_L(TL^n \oplus \mathbb{R})$. Zusammen mit (3.4) folgt

$$a_{X \times L}(v) = \sum_{\epsilon + \tau = \omega} pr_1^*(s_\epsilon(pk_1(TX), \dots) \cdot U_L(TX)) \cup pr_2^*(s_\tau(pk_1(TL), \dots) \cdot U_L(TL \oplus \mathbb{R}))$$

Die Fundamentalklasse $[T(X \times L^n(q)) \oplus \mathbb{R}]$ ist das Produkt der Klassen $[TX]$ und $[TL \oplus \mathbb{R}]$, deshalb

$$a_{X \times L}(v) \cap [T(X \times L) \oplus \mathbb{R}] = \sum (s_\epsilon(\dots) \cdot U_L(TX) \cap [TX]_T) \times (s_\tau(\dots) \cdot U_L(TL \oplus \mathbb{R}) \cap [TL \oplus \mathbb{R}]_T)$$

Mit $\pi : X \rightarrow * \rightarrow BG$ berechnet man

$$\begin{aligned} \beta_2(X \times L, v) &= (\pi \times i_n)_* (a_{X \times L}(v) \cap [TX \times L \oplus \mathbb{R}]_T) \\ &= \sum \langle s_\epsilon(pk_1(TX), \dots) \cup U_L(TX), [TX]_T \rangle_K \cdot \beta_2(L^n(q), s_\tau(\tilde{p}k_1, \dots) \cdot 1_n) \\ &= \sum_{\epsilon + \tau = \omega} \text{ind}_X(s_\epsilon(pk_1(TX), \dots) \cup U_L(TX)) \cdot \beta_1(L^n(q), s_\tau(\tilde{p}k_1, \dots) \cdot 1_n) \end{aligned}$$

Die Gleichung $\beta_1(X \times L, v) = \beta_2(X \times L, v)$ folgt dann sofort aus dem Multiplikativitätsaxiom für den Index, wie es in [A-S3] angegeben ist.

3. Ist $|G|$ ungerade, dann spielt es keine Rolle, ob wir l_n oder μ_n verwenden (siehe § 2), daher nehmen $\psi \circ \beta_2$ und β_1 für alle $v \in K_{SO(2n+2m)}(\mathbb{R}^{2n+2m})$ auf dem Produkt $X^{2n} \times L^n(|G|)$ den gleichen Wert an. Weiterhin bilden für $|G| \equiv 1(2)$ die Elemente $(L^n(|G|), i_n)$ ein System von Ω_* -Modul-Erzeugenden für $\tilde{\Omega}_*(BG)$ (siehe § 1) und damit gilt $\psi \circ \beta_2 = \beta_1$ auf ganz $\tilde{\Omega}_*(BG)$.

Sei jetzt $|G|$ gerade. Wir berechnen zuerst, wie sich $a_{X \times L}(\mu_{n+m})$ in ein Produkt von Symbolklassen zerlegen läßt: Nach (2.8) gilt

$$\begin{aligned} 2\mu_m \cdot 2\mu_n &= (e_m + l_m) \cdot (e_n + l_n) = e_m \cdot e_n + l_m \cdot l_n + l_m \cdot e_n + e_m \cdot l_n \\ &= e_{n+m} + l_{n+m} + e_m \cdot l_n + l_m \cdot e_n = 2\mu_{n+m} + e_m \cdot l_n + l_m \cdot e_n \end{aligned}$$

in $K_{SO(2m) \times SO(2n)}(\mathbb{R}^{2n+2m})$.

Da $l_m \cdot e_n$ im Kern von $a_{X \times L}$ liegt, folgt

$$\begin{aligned} a_{X \times L}(2\mu_{n+m}) &= a_X(l_m + e_m) \cdot a_L(2\mu_n) - a_X(e_m) \cdot a_L(l_n) \\ &= a_X(l_m) \cdot a_L(2\mu_n) + a_X(e_m) \cdot a_L(2\mu_n - l_n) \\ &= a_X(l_m) \cdot a_L(2\mu_n) \quad \text{und daher} \end{aligned}$$

$$a_{X \times L}(\mu_{n+m}) = a_X(l_m) \cdot a_L(\mu_n) \quad (3.4)$$

Für die Gleichheit von $\psi \circ \beta_2$ und β_1 kann man daher wie unter 2. schließen. Auf dem von den freien G-Aktionen auf den Sphären S^{2n-1} erzeugten Ω_* -Untermodul von $\tilde{\Omega}_*(BG)$ gilt damit $\psi \circ \beta_2 = \beta_1$.

Die restlichen Elemente haben alle die Ordnung 2, bilden einen direkten Summanden und kommen von $\tilde{\Omega}_*(BZ_2)$ (siehe [Kat]). Die zu μ gehörende v -Invariante hat auf diesen Elementen höchstens die Ordnung 2 und deshalb verschwindet auf ihnen die α_Z -Invariante. Da wir hauptsächlich an α_Z interessiert sind, und zudem die zu μ gehörende v -Invariante durch Stiefel-Whitney Zahlen (im Sinne von § 0) bestimmbar ist, verzichten wir auf den Vergleich der charakteristischen Zahlen und v -Invarianten auf diesen Elementen.

Wir setzen $[M]_S = U_L(TM \oplus \mathbb{R}) \cap [TM + \mathbb{R}]_T$ für eine ungerad-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit M . Nach Einführen von $\mathbb{Z}[1/2]$ Koeffizienten ist $[M]_S$, wie wir in § 2 gesehen haben, wirklich eine Fundamentalklasse.

Korollar 3.5 Es sei G endliche zyklische Gruppe. Der Thomhomomorphismus

$$\begin{aligned} \mu: \tilde{\Omega}_{2n-1}(BG) &\longrightarrow K_1(BG) & \mu((M, f)) &= f_* [M]_S \text{ läßt sich über} \\ \psi: K_1(BG) &\longrightarrow S_G^{-1}R(G)/R(G) & \text{ mit dem durch } \alpha_Z \text{-gegebenen Homo-} \\ & & \text{morphismus } (-1)\alpha_Z: \tilde{\Omega}_{2n-1}(BG) \longrightarrow S^{-1}R(G)/R(G) \text{ identifizieren.} \end{aligned}$$

Als nächstes untersuchen wir Kern und Kokern von ψ .

Für eine zyklische Gruppe G hat man die Lokalisation mit

$S_a = \{ \lambda_{-1}(V) \mid G \text{ operiert frei auf der Einheitssphäre des komplexen } G \text{ Moduls } V \}$ zur Verfügung.

Lemma 3.6 a) Für eine zyklische Gruppe G ist $S_a^{-1}R(G)/R(G)$ eine Untergruppe von $S_G^{-1}R(G)/R(G)$
b) Ist G eine zyklische P -Gruppe, dann gilt

$$S_a^{-1}R(G)/R(G) = S_G^{-1}R(G)/R(G)$$

Beweis: Es sei $R(G) = \mathbb{Z}[\lambda]/(\lambda^{|G|} - 1)$. Operiert G frei auf $S(V)$ dann ist V eine Summe von Darstellungen λ^i mit $(|G|, i) = 1$ und da $\text{reg}_G - |G|$ durch solche $\lambda^i - 1$ teilbar ist, ist $\lambda^i - 1$ in $S_G^{-1}R(G)$ eine Einheit. Da λ_{-1} Summen in Produkte überführt, besteht das Bild von S_a unter $\rho: R(G) \longrightarrow S_G^{-1}R(G)$ aus Einheiten und ρ faktorisiert zu $\bar{\rho}: S_a^{-1}R(G) \longrightarrow S_G^{-1}R(G)$. Da $(\text{reg}) \in R(G)$ im Kern von $R(G) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)$ liegt, ist $\bar{\rho}$ injektiv und a) bewiesen.

Für $G = \mathbb{Z}_p$ ist p in $S_a^{-1}R(G)$ invertierbar:

$(1-\lambda)^{p^r} = \prod_{i=0}^{p^r-1} (-1)^i \binom{p^r}{i} \lambda^i = \prod_{i=1}^{p^r-1} (-1)^i \binom{p^r}{i} \lambda^i$ ist durch p teilbar, und aus der Invertierbarkeit von $(1-\lambda)^{p^r}$ in $S_a^{-1}R(G)$ folgt die von p . Aus diesem Grund faktorisiert $\rho: R(G) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)$ über $S_G^{-1}R(G) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)$.

Zur Definition der v -Invarianten kann man nach (1.6) auch mit S_a lokalisieren.

Man erhält einen Homomorphismus $\psi: K_1(BG) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)/R(G)$.

Satz 3.7 Für eine endliche zyklische Gruppe G ist $\psi: K_1(BG) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)/R(G)$ ein Isomorphismus.

Beweis: Man bildet mit $Y = D^{2n}$ und den Umkehrhomomorphismen der Inklusionen $i_{n,m}: D^{2n} \longrightarrow D^{2m}$ den direkten Limes des Diagramms (3.1) und erhält das folgende Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \varinjlim_n K_G^O(TS^{2n-1}) & \longrightarrow & \varinjlim_n K_G^O(BTD^{2n}, \partial BTD^{2n}) & \longrightarrow & \varinjlim_n K_G^O(TD^{2n}) & \longrightarrow K_1(BG) \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{\psi} & \downarrow \gamma \\
 0 \longrightarrow & Z \cdot \text{reg} & \longrightarrow & R(G) & \longrightarrow & S_a^{-1}R(G) & \longrightarrow S_a^{-1}R(G)/R(G) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Wir zeigen, daß die ersten drei vertikalen Homomorphismen Isomorphismen sind.

a) $K_G^O(TS^{2n-1}) \longrightarrow Z \cdot \text{reg}$

Eine bekannte Eigenschaft der Indexfunktion ist es, mit dem Ausdividieren einer freien G -Aktion verträglich zu sein. Unter der Identifikation

$K_G^O(TS^{2n-1}) \cong K^O(TL^n) \xrightarrow[\cong]{\cap [TL]} K_O(L^n)$ erhält man aus der Indexfunktion den von der Projektion auf einen Punkt induzierten Homomorphismus, der hier ein Isomorphismus ist $(K_O(L^n) \cong K^1(L^n) \cong Z)$.

b) $\varinjlim_n K_G^O(BTD^n, \partial BTD^n) \longrightarrow R(G)$

Mit dem Thomisomorphismus der Inklusion des Fixpunktes erhält man ein kommutatives Diagramm, aus dem mit der Definition von ind_G sofort die Behauptung folgt.

$$\begin{array}{ccc}
 K_G^O(BTD^{2n}, \partial BTD^{2n}) & \xleftarrow[\cong]{i^?} & K_G^O(*) \\
 \downarrow (i_{n,m})^? & & \parallel \\
 K_G^O(BTD^{2m}, \partial BTD^{2m}) & \xleftarrow[\cong]{i^?} & K_G^O(*)
 \end{array}$$

c) $\varinjlim_n L_G(TD^{2n}) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)$

BTD^{2n}/STD^{2n} ist der Thomraum des Bündels $TD^{2n} \longrightarrow D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ und da $D(E^n)$ eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit mit Rand ist, hat man einen Thomisomorphismus $K_G(TD^{2n}) \xleftarrow{\phi} K_G(D^{2n})$. Wegen der verschiedenen komplexen Strukturen auf den

Normalenbündeln hat man statt ϕ $\bar{\phi}$ - d.h. den Thomisomorphismus mit der konjugierten Thomklasse zu wählen, damit das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} K_G(TD^{2n}) & \xleftarrow[\cong]{\bar{\phi}} & K_G(D^{2n}) \\ \downarrow (i_{n,m})^! & & \downarrow (i_{n,m})^! \\ K_G(TD^{2m}) & \xleftarrow[\cong]{\bar{\phi}} & K_G(D^{2m}) \end{array}$$

Das Diagramm läßt sich fortsetzen, wobei $i: * \rightarrow D$ die Inklusion des Fixpunktes ist

$$\begin{array}{ccccc} K_G(D^n) & & \xrightarrow[\cong]{i^*} & & K_G(*) \\ & \searrow & & & \downarrow h \\ & & K_G(D^n) & \xrightarrow{i^*} & \\ & \nearrow & & & \\ K_G(D^m) & & \xrightarrow[\cong]{i^*} & & K_G(*) \end{array}$$

Da $i_{n,m}^* \circ i_{n,m}^!$ die Multiplikation mit der Eulerklasse des Normalenbündels ν von D^n in D^m ist, hat man für h die Multiplikation mit $(1-\lambda)^{m-n} = \lambda_{-1}(\nu)$ einzusetzen um Kommutativität zu erreichen.

Damit gilt $\varinjlim_n (K_G(TD^{2n}), i^!) = \varinjlim (R(G); \text{Multiplikation mit } (1-\lambda))$. Das direkte System $R(G)_n \xrightarrow{(1-\lambda)^{n-n}} R(G)_m$ ($R(G)_n = R(G)$) läßt sich durch $R(G)_n \rightarrow S_a^{-1}R(G)$ $x \mapsto x / (1-\lambda)^n$ in das konstante System $S_a^{-1}R(G)$ abbilden. Man erhält einen Isomorphismus $\varinjlim_n K_G(TD^{2n}) = S_a^{-1}R(G)$. Indem man wieder die Definition von ind_G heranzieht, stellt man fest, daß dieser Isomorphismus von $\varinjlim_n \bar{\psi}_D$ induziert wird.

Bemerkungen:

- 1) Ohne Mühe überträgt man das Gesagte auf den Fall $G = S^1$. Man erhält ebenfalls einen Isomorphismus $\psi: K_0(BS^1) \rightarrow S_a^{-1}R(S^1)/R(S^1)$ und das Übereinstimmen von charakteristischen Zahlen und ν -Invarianten.
- 2) In [W] wird gezeigt, daß man ganz allgemein für eine endliche Gruppe G $K_1(BG)$ in $S_G^{-1}R(G)/R(G)$ einbetten kann.

- 3) Beschreibungen der Homologie von BG durch einen Quotienten einer lokalisierten äquivarianten Kohomologiegruppe $S^{-1}t_G$ und einer Kohomologiegruppe t_G , in die die Isomorphie $K_1(BG) \cong S_a^{-1}R(G)/R(G)$ einzuordnen ist, wurden von tom Dieck gefunden. In [tD 1] wird z.B. eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow U^* \longrightarrow U_G^* \longrightarrow S^{-1}U_G^* \longrightarrow U_*(BG) \longrightarrow 0$$

hergeleitet.

- 4) Für zyklisches G läßt sich $K_*(BG)$ leicht durch die Gysin-Sequenz des Bündels $H^p \longrightarrow BS^1$ berechnen. (Für $G = Z_p$ siehe [V1]) .

§ 4 Der Hurewicz-Homomorphismus für MSO

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, zu bestimmen inwieweit die in § 2 definierten charakteristischen Zahlen und damit die v-Invarianten, die Bordismusklassen in $\tilde{\Omega}(BG)$ festlegen. Unser Vorgehen orientiert sich am stabil-fast-komplexen Fall.

Für ein Spektrum $\{E_n\}$ und eine Homologietheorie h wird die h -Homologie des Spektrums durch $h_n(E) := \varinjlim_{r \geq n} h_{n+r}(E_r)$ definiert. Mit $\mathbb{S}$ soll das Sphären-Spektrum, das die stabile Homotopietheorie π^S definiert, bezeichnet werden. Ist die Homologietheorie h - etwa durch ein Spektrum $\{F_n\}$ gegeben - multiplikativ, so erhält man durch das Einselement $1 \in \tilde{h}_0(S^0)$ eine Abbildung von Spektren $\mathbb{S} \rightarrow F$ und damit eine natürliche Transformation $H: \pi^S(-) \rightarrow \tilde{h}(-)$ - den stabilen Hurewicz-Homomorphismus. In dieser Sprache ist der Satz von Hattori - Stong dann folgendermaßen formulierbar:

"Der Hurewicz-Homomorphismus $H: \pi_*^S(\underline{MU}) \rightarrow \tilde{K}_*(\underline{MU})$ ist ein spaltender Monomorphismus".

Die Gruppe $\pi_n^S(\underline{MU})$ ist nach Definition gerade $\Omega_n^U(*)$ und das Bild einer Bordismusklass unter H besteht aus einer "Ansammlung" von charakteristischen Zahlen - dies liefert den Zusammenhang zwischen dem Satz von Hattori - Stong und charakteristischen Zahlen. Wir benötigen ein analoges Resultat für das Thomspektrum $\underline{MSO}$. Durch direktes Übertragen der Methoden aus [Ha] werden wir den folgenden Satz herleiten:

Satz 4.1 Der stabile Hurewicz-Homomorphismus

$$H: \pi_*^S(\underline{MSO}) \otimes \mathbb{Z}[1/2] \longrightarrow \tilde{K}_*(\underline{MSO}; \mathbb{Z}[1/2])$$

ist eine Bijektion auf einen direkten Summanden.

Mit U soll das die K-Theorie definierende Spektrum bezeichnet werden. Damit ist auch $\Omega_*^{SO}(U)$ definiert und man hat die bekannte Beziehung $\Omega_*^{SO}(U) = K_*(\underline{MSO})$, die beim Beweis des Satzes von Hattori - Stong entscheidend eingeht.

Beweis von 4.1: Es sei wieder $R = \mathbb{Z}[1/2]$

In dem Diagramm,

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_{4n+4m}(\text{MSO}(4m)) \otimes R & \xrightarrow{\cong} & \pi_{4n}^S(\text{MSO}) \otimes R \cong \Omega_{4n}^{\text{SO}}(*) \otimes R & \xleftarrow{\cong} & \tilde{\Omega}_{4n+4k}^{\text{SO}}(S^{4k}; R) \\
 \downarrow H_m & & \downarrow H & & \downarrow {}_k H \\
 \tilde{K}_{4n+4m}(\text{MSO}(4m); R) & \longrightarrow & \tilde{K}_{4n}(\text{MSO}; R) \cong \Omega_{4n}^{\text{SO}}(U; R) & \longleftarrow & \tilde{\Omega}_{4n+4k}^{\text{SO}}(Z \times BU; R)
 \end{array} \quad (4.2)$$

in dem die horizontalen Abbildungen die kanonischen Homomorphismen in den direkten Limes sind, ist die linke Seite nach Definition von H_m und H kommutativ. H wird induziert durch $[S^{4n+4m}, \text{MSO}(4m)] \rightarrow [S^{4n+4m}, S^k, \text{MSO}(4m) \wedge U_k]$

$$f \longmapsto f \wedge i_k$$

wobei $i_k: S^k \rightarrow U_k$ die k -te Komponente der Spektrenabbildung $S \rightarrow U$ ist.

$i_{2k}: S^{2k} \rightarrow U_{2k} = Z \times BU$ entspricht unter $\tilde{K}(S^{2k}) \cong \tilde{K}(S^0) = K(*)$ der

$2k$ -fachen Einhängung des Einselementes, ist also - das Vorzeichen je nach Konvention - das Bottelement in $\tilde{K}(S^{2k})$. i_{4k} induziert ${}_k H$. Damit stellt

man sofort die Kommutativität des rechten Diagrammteils fest. Insbesondere

ist ${}_k H$ ein $\Omega^{\text{SO}} \otimes R$ -Modul-Homomorphismus.

Der Beweis verläuft in zwei Schritten:

a) Für $n = 0$ benutzt man die linke Seite des Diagramms (4.2) um zu zeigen:

H ist ein Isomorphismus auf einen direkten Summanden.

b) Für $n > 0$ folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß ${}_k H$ ein $\Omega \otimes R$ -Homomorphismus ist unter Verwendung von a), der rechten Diagrammseite und der

Kenntnis der Ω_* -Struktur von $\Omega_*(Z \times BU)$.

Da $\Omega_{4n} \otimes R$ ein endlich erzeugter freier R -Modul ist, genügt es zu zeigen,

daß wenn $x \in \Omega_{4n} \otimes R$ nur durch $\pm 2^i$ teilbar ist, dies auch für $H(x)$ gilt:

$H(\Omega_{4n} \otimes R)$ liegt in einem endlich erzeugten direkten Summanden F von $\tilde{K}_*(\text{MSO})$

und die Teilbarkeitsbedingung impliziert die Torsionsfreiheit des Kokerns von H

in F , aus der - wie für den Ring $\mathbb{Z}$ - die Freiheit von $F/H(\Omega_{4n} \otimes R)$ über R folgt.

Es sei $x \in \Omega_{4n}^{SO} \otimes R$ nur durch $\pm 2^i$ teilbar. Klar ist, daß, wenn ${}_k H(x) \in \tilde{\Omega}_{4n+2k}(Z \times BU; R)$ für jedes k nur durch $\pm 2^i$ teilbar ist, dies auch für den Limes der ${}_k H(x)$, also für $H(x)$ gilt. Aus (4.2) folgt dann natürlich auch, daß die Homomorphismen

$$H_m: \pi_{4m+4n}(MSO(4n)) \otimes R \longrightarrow \tilde{K}(MSO(4n); R) \quad (4m \leq 4n+4)$$

diese Eigenschaft besitzen, insbesondere daß H_m ein Isomorphismus auf einen direkten Summanden ist.

Zu a) $\Omega_0^{SO} \otimes R$ wird von 1 erzeugt. Wir zeigen $H_k(1)$ ist nur durch eine Potenz von ± 2 teilbar.

$1 \in \Omega_0 \otimes R$ entspricht unter der Thom-Pontrjagin-Konstruktion

$\Omega_0 \otimes R \cong \pi_{4n}(MSO(4n)) \otimes R$ der durch die Inklusion $s: S^{4n} \longrightarrow MSO(4n)$ gegebenen Abbildung. In $\tilde{K}^0(MSO(4n); R)$ liegt die Thomklasse U_L des universellen $4n$ -Bündels über $BSO(2n)$. Es folgt, wegen

$$\langle U_L, H_n(s) \rangle_K = \langle U_L, s_*[S^{4n}]_T \rangle_K = \langle s^* U_L, [S^{4n}]_T \rangle_K = \pm 2^{2n}$$

daß $H_n(1)$, $H(1)$ und auch ${}_k H(1)$ nur durch $\pm 2^i$ teilbar sind.

b) Es sei k fest und $x \in \Omega_{4n} \otimes R$ ($n > 0$) ein Element, das nur durch $\pm 2^i$ teilbar ist. Bekanntlich ist $\Omega_* \otimes R$ eine Polynomalgebra über R und $\tilde{\Omega}_*(Z \times BU; R)$ ein freier graduerter $\Omega_* \otimes R$ -Modul. Ist $\{q_i\}$ eine homogene $\Omega_* \otimes R$ -Modul-Basis von $\tilde{\Omega}_*(Z \times BU; R)$, dann läßt sich ${}_k H(1) \in \tilde{\Omega}_{4k}(Z \times BU; R)$ als Linearkombination der q_i schreiben:

$${}_k H(1) = \sum_{i=1}^s q_i x_i \quad \text{mit} \quad x_i \in \Omega_* \otimes R$$

Die Elemente $x_1, \dots, x_s$ lassen sich gemeinsam nur durch Potenzen von ± 2 teilen, denn dies gilt für ${}_k H(1)$ nach a). ${}_k H$ ist ein $\Omega_* \otimes R$ Modulhomomorphismus, und das impliziert

$${}_k H(x) = {}_k H(1) \cdot x = \sum q_i \cdot x_i \cdot x$$

Teilt jetzt die Zahl d das Produkt $x_{i_0} \cdot x$, dann muß wegen der Voraussetzungen

an x und da $\Omega_* \otimes R$ eine Polynomalgebra ist, d das Element x_{i_0} teilen.
 Wird ${}_k H(x)$ durch d geteilt, dann auch jedes der $x_{i_1} \cdot x$, somit alle x_{i_1} ,
 und das impliziert, daß d eine Potenz von ± 2 ist.

Bemerkungen:

- 1) Wie in [Ha] folgt dann als Korollar von (4.1), daß jeder Homomorphismus $f: \Omega_{4n}^{SO} \otimes R \longrightarrow R$ durch ein Element x aus $K^*(BSO; R)$ als Auswertungsabbildung auf x gegeben wird:

$$f(M) = \langle g^* x, [M] \rangle_K$$

(g = klassifizierende Abbildung des Normalenbündels von M).

- 2) Ebenso erhält man aus (4.1) einen Beweis für den in [St2] bewiesenen Satz, daß alle Relationen zwischen Pontrjaginzahlen einer orientierten n -dimensionalen Mannigfaltigkeit aus der Bedingung
 $\langle pk_\omega(M), [M]_S \rangle_K = \langle ch(pk_\omega(M)) \cup \tilde{L}(M), [M] \rangle_H$ (und der Ganzzahligkeit der Pontrjaginzahlen) folgen.

Unser nächstes Ziel ist die Anwendung von (4.1) auf $\tilde{\Omega}_*(BG)$.

Lemma 4.3 Es sei X ein CW-Komplex für den die Bordismusspektralsequenz mit Koeffizienten in R zusammenbricht. Dann brechen die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenzen
 $H_*(X; K_*(*, R)) \implies K_*(X; R)$ und $\tilde{H}_*(X; \tilde{K}_*(\underline{MSO}; R)) \implies \tilde{K}_*(X \wedge \underline{MSO}; R)$
 ebenfalls zusammen.

Beweis: Der Thomhomomorphismus $\mu: \Omega_*(*) \otimes R \longrightarrow K_*(*, R)$ wird auf den Koeffizienten durch die Signatur gegeben und ist daher surjektiv und spaltend. Mit der Natürlichkeit der Spektralsequenzen folgt die erste Behauptung aus der Surjektivität des durch μ auf den E^2 -Termen induzierten Homomorphismus $H_*(X; \Omega(*) \otimes R) \longrightarrow H_*(X; K_*(*, R))$. Das $\times$ -Produkt liefert einen Homomorphismus zwischen den Spektralsequenzen

$$\tilde{H}_*(X; K_*(*, R)) \otimes \tilde{K}_*(\underline{MSO}; R) \implies \tilde{K}_*(X; R) \otimes \tilde{K}_*(\underline{MSO}; R) \quad \text{und}$$

$$\tilde{H}_*(X; K_*(\underline{MSO}; R)) \implies \tilde{K}_*(X \wedge \underline{MSO}; R) \quad . \text{ Da } K_*(\underline{MSO}; R) \text{ frei über } R \text{ ist, induziert}$$

dieses Produkt einen Isomorphismus und aus dem Zusammenbrechen der ersten Spektralsequenz folgt die zweite Behauptung.

Satz 4.4 Bricht für X die Bordismusspektralsequenz zusammen, dann ist der Hurewicz-Homomorphismus

$$H: \Omega_*(X; R) \longrightarrow \tilde{K}_*(X^+ \wedge \underline{MSO}; R) \text{ injektiv.}$$

Beweis: H definiert einen Homomorphismus zwischen den jeweiligen Spektralsequenzen, der auf den E_2 -Termen vom Koeffizientenhomomorphismus $\Omega_* \otimes R \longrightarrow K_*(\underline{MSO}, R)$ induziert wird und wegen (4.1) dort spaltend injektiv ist. Mit (4.3) folgt $E^2 = E^\infty$ für beide Spektralsequenzen und damit die Injektivität von H .

Als nächstes soll H mit charakteristischen Zahlen in Verbindung gebracht werden.

Mit BSO^k werde eine Folge endlicher Skelette, die BSO approximieren, bezeichnet. Das Slantprodukt $K^*(BSO^k; R) \times K_*(BSO^k \times X; R) \xrightarrow{\smile} K_*(X; R)$ definiert einen Homomorphismus

$$\omega: K_*(BSO \times X; R) \longrightarrow \varinjlim_k \text{Hom}(K^*(BSO^k; R), K_*(X; R))$$

der in der Variablen X natürlich ist. Da $K_*(BSO^k; R)$ frei über R ist, folgt ω ist ein Isomorphismus. Zusammen mit dem universellen Thomisomorphismus erhält man einen Homomorphismus

$$T: \Omega_*(X; R) \xrightarrow{H} \tilde{K}_*(X^+ \wedge \underline{MSO}; R) \cong K(X \times BSO; R) \xrightarrow{\omega} \varinjlim_k \text{Hom}(K^*(BSO^k; R), K_*(X; R)) \quad (4.5)$$

der für X mit trivialer Bordismusspektralsequenz injektiv ist.

Die zu T adjungierte Abbildung (k genügend groß)

$$\tilde{T}: \Omega_n(X; R) \times K^0(BSO^k; R) \longrightarrow K_n(X; R)$$

liefert normale-charakteristische Zahlen und läßt sich daher im wesentlichen

mit β_2 (§2) identifizieren.

Dazu erinnern wir zuerst an die Thom-Pontrjagin-Konstruktion für

$$\Omega_n(X) \longrightarrow \pi_{n+k}(X^+ \wedge \text{MSO}(k)) .$$

Es sei $(M, f) \in \Omega_n(X)$ gegeben und $(\nu, \bar{\nu})$ die klassifizierende Abbildung des Normalenbündels N^k einer Einbettung von M^n in S^{n+k}

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\nu} & E_k \\ \downarrow \pi_N & & \downarrow \pi_{E_k} \\ M^n & \xrightarrow{\bar{\nu}} & \text{BSO}(k) \end{array}$$

Durch $(f \circ \pi_N) \times \nu$ erhält man eine Abbildung

$$(f \circ \pi_N) \times \nu : B(N)/S(N) \longrightarrow X^+ \wedge (B(E_k)/S(E_k))$$

und mit der kanonischen Abbildung $S^{n+k} \xrightarrow{j} B(N)/S(N)$ ein repräsentierendes Element g in $\pi_{n+k}(X^+ \wedge \text{MSO}(k))$. Betrachtet man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{K}_*(S^{n+k}; R) & \xrightarrow{j_*} & K_*(B(N), S(N); R) & \xrightarrow{(f \circ \pi_N) \times \nu_*} & \tilde{K}_*(X^+ \wedge \text{MSO}(k); R) \\ \downarrow \phi_N & & \uparrow \Delta_* & & \downarrow \phi_{E_k} \text{ (Thomiso.)} \\ & & K_*(M \times M; R) & \xrightarrow{(f \times \bar{\nu})_*} & \\ & \nearrow \Delta_* & \downarrow & & \\ K_*(M; R) & \xrightarrow{(f \times \bar{\nu})_* \circ \Delta_*} & & & K_*(X \times \text{BSO}(k); R) \end{array} \quad (4.6)$$

so folgt, daß $g_*[S^{n+k}] \in \tilde{K}_*(X^+ \wedge \text{MSO}(k); R)$ durch $\phi_E^{-1}((f \times \bar{\nu}) \circ \Delta)_*[M]$ gegeben wird, denn $\phi_N j_*[S^{n+k}]$ definiert gerade $[M]$.

Andererseits ist $g_*[S^{n+k}]$ nichts anderes als das Bild von (M, f) unter dem Hurewicz-Homomorphismus. Daher gilt: $\phi_E \circ H(M, f) = (f \times \bar{\nu})_* \circ \Delta_*[M]$ und unter der Identifikation ω geht - wie das folgende kommutative Diagramm zeigt - dieses Element in den Homomorphismus $x \mapsto f_*(\bar{\nu}^*(x) \wedge [M])$ über.

$$\begin{array}{ccccc} K^*(\text{BSO}) \otimes K_*(X \times \text{BSO}) & \xrightarrow{\quad} & K_*(X) \\ \downarrow \bar{\nu}^* & \uparrow (f \times \bar{\nu})_* & \uparrow f_* \\ K^*(M) \otimes K_*(M \times M) & \xrightarrow{\quad} & K(M) \\ \parallel & \uparrow \Delta_* & \parallel \\ K^*(M) \otimes K_*(M) & \xrightarrow{\quad} & K(M) \end{array}$$

Auf BSO gibt es eine Involution i die Normalen- in Tangentialbündel überführt, so daß der Übergang von normalen- zu tangentialen charakteristischen Zahlen keine Schwierigkeiten bereitet. Wählt man die Thomisomorphismen mit der Thomklasse U_S (§2), so zeigt (2.17), daß $\text{Hom}(i, \text{id}) \circ T$ zu β_2 adjungiert ist. Ist G eine zyklische Gruppe ungerader Ordnung, so ist die Bordismusspektralsequenz für BG trivial und es folgt:

Satz 4.7 $\tilde{\beta}_2: \tilde{\Omega}_*(BG) \longrightarrow \varinjlim_k \text{Hom}(K^*(BSO^{(k)}), K_1(BG))$
ist injektiv und die "K-Theorie-Pontrjaginzahlen" aus $K_1(BG)$ bestimmen die Bordismusklassen in $\tilde{\Omega}_*(BG)$.

Korollar 4.8 Die Atiyah-Singer-v-Invarianten bestimmen für eine zyklische Gruppe ungerader Ordnung die Bordismusklassen freier G -Mannigfaltigkeiten in $\tilde{\Omega}(G)$.

Bemerkungen:

1) $\Omega_* \otimes R \longrightarrow H_*(\underline{MSO}; R)$ ist ebenfalls injektiv, jedoch nicht spaltend.

Nur in dem Dimensionsbereich $2n-1 < 2p-2$ erhält man einen spaltenden Monomorphismus $H_*(BZ_p; \Omega_*) \longrightarrow H_*(BZ_p; H_*(\underline{MSO}))$.

2) Der Moore-Raum $M(p) = e^2 \smile_p S^1$ ist das 2-Skelett von BZ_p und daher ist der Hurewicz-Homomorphismus

$$\Omega_*(*; Z_p) = \tilde{\Omega}_*(M(p)) \longrightarrow \tilde{K}(\underline{MSO} \wedge M(p)) = \tilde{K}_*(\underline{MSO}; Z_p)$$

injektiv. Im Gegensatz zu gewöhnlichen - mod p -Pontrjaginzahlen bestimmen daher $K(; Z_p)$ -Pontrjaginzahlen die Bordismusklassen mit Z_p -Koeffizienten. Insbesondere kann man für die Elemente aus $\Omega(*, Z_p)$, die durch Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten repräsentiert werden und denen man eine Signatur in Z_p zuordnen kann (siehe [M-S]) eine Signaturformel mit diesen Pontrjaginzahlen herleiten.

§ 5 Die Isomorphie $\psi: K_1(BG) \longrightarrow S_a^{-1} R(G)/R(G)$

In diesem Paragraphen sollen die Natürlichkeitseigenschaften der Bijektion ψ untersucht werden. Entscheidend ausnutzen werden wir den Umstand, daß für die v -Invariante α_Z die Interpretation durch die äquivariante Signatur, d.h. das Anheben zu einer C -wertigen Invarianten, möglich ist.

Durch ψ lassen sich die von Gruppenhomomorphismen $\phi: G \rightarrow H$ induzierten Homomorphismen $(B\phi)_*: K_1(BG) \rightarrow K_1(BH)$ im Rahmen der Darstellungstheorie beschreiben. Solange ϕ eine Inklusion ist, ist $B\phi$ eine Überlagerung und man kann diese Beschreibung auch direkt herleiten. Das scheint für eine Projektion $\phi: G \rightarrow G/H$ wegen der Kompliziertheit der Abbildung $B\phi$ nicht möglich zu sein (siehe [v-1], wo ein erster Versuch unternommen wurde $B\pi_*: K_*(BZ_P) \rightarrow K_*(BZ_{P'})$ zu berechnen).

Es seien G und H endliche abelsche Gruppen. Ein Gruppenhomomorphismus $\phi: H \rightarrow G$ definiert nicht nur den Ringhomomorphismus $\phi^*: R(G) \rightarrow R(H)$, sondern auch einen Gruppenhomomorphismus $\phi^\vee: R(H) \rightarrow R(G)$, der im folgenden der zu ϕ gehörende Umkehrhomomorphismus genannt werden soll. Ist $\phi: H \rightarrow G$ die Inklusion einer Untergruppe, so ist $\phi^\vee(x)$ für $x \in R(H)$ die bekannte induzierte Darstellung von x . Für eine Projektion $p: H \rightarrow G$ ist $\text{Ker}(p) = U$ ein Normalteiler, $G \cong H/U$ und $p^\vee$ wird durch Einschränkung auf die Fixpunktmenge unter U $W \mapsto W^U$ (W^U mit der kanonischen G -Operation) definiert (siehe [H3]). Die Definition der induzierten Darstellung ist auch auf den Fall eines Isomorphismus $\phi: H \rightarrow G$ anwendbar; man erhält $\phi^\vee = \phi^{*-1}$. Damit ist ϕ für alle Gruppenhomomorphismen definiert; es gibt natürlich $(\phi \circ \psi)^\vee = \phi^\vee \circ \psi^\vee$.

Der Darstellungsrings $R(G)$ ist ein Unterring der zentralen Funktionen $Z(G)$ auf G , und Homomorphismen wie ϕ^* und $\phi^\vee$ lassen sich kanonisch zu Homomorphismen zwischen $Z(G)$ und $Z(H)$ erweitern.

Lokalisiert man $R(G)$ nach $S_G = \{ (\text{reg}_G - |G|)^i \mid i \geq 1 \}$, so kann man die Elemente

von $S_G^{-1}R(G)$ auf allen Gruppenelementen außer der 1 auswerten, und so $S_G^{-1}R(G)$ in $\overline{Z(G)} := Z(G) \setminus \{1\}$ - die zentralen Funktionen von G auf $G \setminus \{1\}$ eingeschränkt - abbilden. Die Einschränkung $Z(G) \rightarrow \overline{Z(G)}$ hat als Kern das von der regulären Darstellung erzeugte Ideal, so daß nach (1.12) der Homomorphismus $S_G^{-1}R(G) \rightarrow \overline{Z(G)}$ injektiv ist. Ein Homomorphismus $\phi: R(G) \rightarrow R(H)$, der die Bedingung

$$\phi((\text{reg}_G)) \subset (\text{reg}_H) \quad (5.1)$$

erfüllt, läßt sich kanonisch zu einem Homomorphismus $\bar{\phi}: \overline{Z(G)} \rightarrow \overline{Z(H)}$ erweitern. Teilt $|G|$ die Ordnung von H - wie bei der induzierten Darstellung einer Untergruppe - so bildet $\bar{\phi}: S_G^{-1}R(G) \rightarrow S_H^{-1}R(H)$ ab, und man hat einen Homomorphismus $S(\phi): S_G^{-1}R(G)/R(G) \rightarrow S_H^{-1}R(H)/R(H)$ definiert. Anderenfalls liegt das Bild von $S_G^{-1}R(G)$ in $S_H^{-1}R(H) \otimes Z[1/s]$ - wo s der zu $|H|$ relativ prime Teil von $|G|$ ist. Über

$$\frac{S_H^{-1}R(H) \otimes Z[1/s]}{R(H) \otimes Z[1/s]} \longrightarrow S_H^{-1}R(H)/R(H)$$

erhält man auch in diesem Fall einen Homomorphismus

$$S(\phi): S_G^{-1}R(G)/R(G) \longrightarrow S_H^{-1}R(H)/R(H) .$$

Es seien jetzt G und H zyklisch.

Umkehrhomomorphismen $\phi^!$ und die von Gruppeninklusionen induzierten Homomorphismen i^* erfüllen die Bedingung (5.1). Für diese Homomorphismen zeigen wir noch, daß $S(\phi)$ die Untergruppen $S_a^{-1}R(G)/R(G)$ in $S_a^{-1}R(H)/R(H)$ überführt.

Zunächst zu einer Inklusion $i: G \rightarrow H$ ($R(G) = Z[\rho_G]/(\rho_G^{|G|} - 1)$)

a) wegen $i^* \rho_H = \rho_G^r$ - wo $\rho_G^r R(G)$ erzeugt - und der Gleichung

$s \cdot i^!(x) = i^!(x \cdot i^*(s))$ führt $i^!$ die Untergruppe $\{x \in S_G^{-1}R(G) \mid \bigvee_{s \in S_a} s \cdot x \in \overline{R(G)}\}$ in $\{x \in S_H^{-1}R(H) \mid \bigvee_{s \in S_a} s \cdot x \in \overline{R(H)}\}$ über. Die Menge $\{x \in S_H^{-1}R(H) \mid \bigvee_{s \in S_a} s \cdot x \in \overline{R(H)}\}$ besteht aber gerade aus der Untergruppe $S_a^{-1}R(H)$ von $S_H^{-1}R(H)$.

b) Für $S(i^*)$ ist diese Behauptung trivial.

c) Es sei jetzt $\pi: G \rightarrow H$ eine Projektion. π induziert einen Homomorphismus $\prod_{\mathbb{P}}(\pi_{\mathbb{P}}): \prod_{\mathbb{P} \text{ prim}} G_{\mathbb{P}} \rightarrow \prod_{\mathbb{P} \text{ prim}} H_{\mathbb{P}}$ zwischen den Primkomponenten.

Wegen $S_a^{-1}R(G_{\mathbb{P}}) = S_{G_{\mathbb{P}}}^{-1}R(G_{\mathbb{P}})$ (nach (3.6)) führt $S(\pi_{\mathbb{P}}^{\vee}): S_a^{-1}R(G_{\mathbb{P}})$ in $S_a^{-1}R(H_{\mathbb{P}})$ über.

Für eine zyklische Gruppe H ist $\sum_{\mathbb{P}} S(i_{\mathbb{P}}^{\vee}): \sum_{\mathbb{P}} S_a^{-1}R(H_{\mathbb{P}})/R(H_{\mathbb{P}}) \rightarrow S_a^{-1}R(H)/R(H)$ ein Isomorphismus, wie man entweder direkt nachrechnet, oder durch Vergleich beider Seiten mit $K_1(BH) \cong \sum_{\mathbb{P}} K_1(BH_{\mathbb{P}})$ einsieht (unter Verwendung der weiter unten bewiesenen Natürlichkeit von Ψ bezgl. Inklusionen). Die Isomorphie $K_1(BH) \cong \sum_{\mathbb{P}} K_1(BH_{\mathbb{P}}) \cong K_1(\bigvee_{\mathbb{P}} BH_{\mathbb{P}})$ folgt sofort durch Vergleich der beiden Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenzen. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \sum_{\mathbb{P}} S_a^{-1}R(H_{\mathbb{P}})/R(H_{\mathbb{P}}) & \xrightarrow[\cong]{\sum S(i_{\mathbb{P}}^{\vee})} & S_a^{-1}R(H)/R(H) \\ \parallel & & \downarrow \\ \sum_{\mathbb{P}} S_{H_{\mathbb{P}}}^{-1}R(H_{\mathbb{P}})/R(H_{\mathbb{P}}) & \xrightarrow{\sum S(i_{\mathbb{P}}^{\vee})} & S_H^{-1}R(H)/R(H) \end{array}$$

folgt, daß die Untergruppe $S_a^{-1}R(H)/R(H)$ von $S_H^{-1}R(H)/R(H)$ aus Bild $\sum_{\mathbb{P}} S(i_{\mathbb{P}}^{\vee})$ besteht und daher aus Natürlichkeitsgründen die Behauptung.

Zusammengefaßt ist damit gezeigt:

Lemma 5.2 a) Ein Gruppenhomomorphismus $\phi: G \rightarrow H$ endlicher zyklischer Gruppen induziert auf kanonische Weise einen Homomorphismus

$$S(\phi^{\vee}): S_a^{-1}R(G)/R(G) \longrightarrow S_a^{-1}R(H)/R(H)$$

b) Die Inklusion einer Untergruppe $i: G \rightarrow H$ induziert einen Homomorphismus

$$S(i^{\vee}): S_a^{-1}R(H)/R(H) \longrightarrow S_a^{-1}R(G)/R(G)$$

Als nächstes stellen wir fest, wie sich die α -Invariante unter diesen Transformationen verhält.

a) Es sei $i: H \rightarrow G$ die Inklusion einer Untergruppe und X eine freie

H-Mannigfaltigkeit. Dann ist $G \times_H X$ mit der üblichen Diagonaloperation eine freie G Mannigfaltigkeit.

Lemma 5.3 $\alpha(-, G \times_H X) = \bar{i}^* \alpha(-, X) \quad (\alpha(-, X) \in \overline{Z}(H))$

Beweis: Es sei Y eine freie H-Mannigfaltigkeit mit $\partial Y = n \cdot X$ und $\dim Y \equiv 0(4)$. $G \times_H Y$ zerfällt in G/H Komponenten Y_ξ ($\xi \in G/H$), so daß $H^*(G \times_H Y; \mathbb{R}) = \sum_\xi H^*(Y_\xi; \mathbb{R})$. Zur Definition der äquivarianten Signatur von $G \times_H Y$ wählt man auf $H^*(G \times_H Y; \mathbb{R})$ ein G-invariantes inneres Produkt $\langle, \rangle$ und definiert den linearen Operator A durch die Gleichung $\langle a, Ab \rangle = B(a, b)$ (B = Schnittform). Es gilt $B = \sum_\xi B|_{H^*(Y_\xi; \mathbb{R})}$, A führt die $H^*(Y_\xi; \mathbb{R})$ in sich über und $\langle, \rangle|_{H^*(Y_\xi; \mathbb{R})}$ ist ein inneres Produkt. Bezeichnet $H^*(G \times_H Y; \mathbb{R})^+$ die Summe der zu positiven Eigenwerten von A gehörenden Eigenräume, dann gilt $H^*(G \times_H Y; \mathbb{R})^+ \cap H^*(Y_\xi; \mathbb{R}) = H^*(Y_\xi; \mathbb{R})^+$ und damit $H^*(G \times_H Y; \mathbb{R})^+ = \sum_\xi H^*(Y_\xi; \mathbb{R})^+$. G permutiert die $H^*(Y_\xi; \mathbb{R})^+$ transitiv und daher folgt nach [Se] (Aussage 12), daß $H^*(G \times_H Y, \mathbb{R})^+$ die von $H^*(Y_H; \mathbb{R})^+ = H^*(Y; \mathbb{R})^+$ induzierte Darstellung ist. Es folgt $\text{sign}(-, G \times_H Y) = i^* \text{sign}(-, Y)$ und damit die Behauptung. Analog ist der Fall $\dim Y \equiv 2(4)$ zu behandeln.

b) Es sei $i: H \rightarrow G$ wie oben. Ist X eine freie G-Mannigfaltigkeit, dann ist X mit eingeschränkter Operation eine freie H-Mannigfaltigkeit, die mit i^*X bezeichnet werden soll. Aus den Definitionen folgt dann sofort

$$\alpha(-, i^*X) = \bar{i}^* \alpha(-, X) \quad (5.4)$$

c) Für eine Projektion $\pi: G \rightarrow G/U = H$ ist der Quotient X/U einer freien G-Mannigfaltigkeit X eine freie H-Mannigfaltigkeit.

In [H 3] wird bewiesen (dort $\pi^* = p$)

$$\alpha(-, X/U) = \bar{\pi}^* \alpha(-, X) \quad (5.5)$$

Insbesondere gelten somit die Gleichungen

$$\alpha_Z(G \times_H X) = S(i^*) \alpha_Z(X) \quad (5.6)$$

$$\alpha_Z(i^*X) = S(i^*) \alpha_Z(X)$$

$$\alpha_Z(X/U) = S(\pi^*) \alpha_Z(X)$$

Jeder Gruppenhomomorphismus $\phi: H \longrightarrow G$ definiert eine stetige Abbildung

$B\phi: BH \longrightarrow BG$ und damit Homomorphismen $\Omega_*(B\phi): \Omega_*(BH) \longrightarrow \Omega_*(BG)$,

$K_*(B\phi): K_*(BH) \longrightarrow K_*(BG)$

a) Ist $\phi: H \longrightarrow G$ eine Inklusion, so wird $\Omega_*(\phi)$ in [C-f 1] explizit beschrieben:

$$\Omega_*(B\phi)(H, X) = (G, G \times_H X)$$

Wie bei der induzierten Darstellung läßt sich diese Konstruktion auf injektive Gruppenhomomorphismen erweitern.

b) Die Inklusion $\phi: H \longrightarrow G$ induziert nach [C-F 1] den Transferhomomorphismus

$t_\Omega: \Omega(BG) \longrightarrow \Omega(BH)$, der durch $t_\Omega(G, X) = (H, X) = \phi^*(G, X)$ beschrieben wird.

c) Für eine Projektion $\pi: G \longrightarrow G/U$ erhält man

Lemma 5.7 $\Omega_*(B\pi)(G, X) = (G/U, X/U)$

Beweis: Es sei $f: X/G \longrightarrow BG$ die klassifizierende Abbildung von (G, X) .

$B\pi$ induziert über BG aus dem universellen G/U -Bündel das G/U -Prinzipalbündel

$BU \longrightarrow BG$, daher ist $(B\pi)_*(G, X)$ das G/U -Prinzipalbündel $f^*(BU \rightarrow BG) = X/U \rightarrow X/G$.

Aus den Formeln (5.6) folgt damit

Satz 5.8 1) Für einen Gruppenhomomorphismus $\phi: G \longrightarrow H$ endlicher zyklischer Gruppen und $(G, X) \in \tilde{\Omega}(BG)$ gilt

$$\alpha_Z(\Omega_*(B\phi)(G, X)) = S(\phi^Z) \alpha_Z(X)$$

2) Für eine Inklusion $\phi: G \longrightarrow H$ mit Transfer $t: \Omega(BH) \longrightarrow \Omega(BG)$

und $(H, X) \in \tilde{\Omega}(BH)$ gilt

$$\alpha_Z(t(H, X)) = S(\phi^*) \alpha_Z(X)$$

Damit sind wir in der Lage, $K_*(B\phi): K_1(BG) \longrightarrow K_1(BH)$ zu beschreiben

Satz 5.9 Für einen Homomorphismus $\phi: G \longrightarrow H$ zyklischer Gruppen ungerader Ordnung gilt $\psi_H K_*(B\phi) = S(\phi^Z) \psi_G$

Beweis:

Im Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\Omega}_*(BG) & \xrightarrow{\mu_G} & K_1(BG) & \xrightarrow[\cong]{\psi_G} & S_a^{-1}R(G)/R(G) \\
 \downarrow \Omega_*(B\phi) & & \downarrow K_*(B\phi) & & \downarrow S(\phi^?) \\
 \tilde{\Omega}_*(BH) & \xrightarrow{\mu_H} & K_1(BH) & \xrightarrow[\cong]{\psi_H} & S_a^{-1}R(H)/R(H)
 \end{array} \quad (5.10)$$

ist das erste Quadrat nach Definition von μ und das äußere Rechteck nach (5.8) und (3.3) kommutativ ($\psi_G \mu_G(X, G) = -\alpha_Z(X, G)$). Deshalb ist auf Bild (μ_G) der Homomorphismus $K_*(\phi)$ durch $S(\phi^?)$ gegeben und die Behauptung folgt aus der Aussage:

Für zyklische Gruppen ungerader Ordnung ist μ surjektiv.

Es gilt $\tilde{\Omega}_*(BG; \mathbb{Z}[1/2]) = \tilde{\Omega}_*(BG)$, analog für K_1 . Der Thomhomomorphismus $\mu: \Omega_*(X; \mathbb{Z}[1/2]) \rightarrow K_*(X, \mathbb{Z}[1/2])$ ist jedoch immer surjektiv (Beweis wie für U_* in [C-F 3]). Direkt kann man die Surjektivität von μ für $X = BG$ auch mit Hilfe der Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenzen für Ω_* und K_* nachweisen: solange diese trivial sind, ist μ surjektiv, denn μ ist auf den Koeffizienten spaltend surjektiv.

Eine analoge Aussage erhält man für den Transfer (dazu gehört auch der Smith-Homomorphismus). Ist $\phi: H \rightarrow G$ eine Inklusion, dann wird der zu ϕ gehörende Transfer $\phi_*: K_1(BG) \rightarrow K_1(BH)$ von den Umkehrhomomorphismen $\phi_v: K_1(L^n(|G|)) \rightarrow K_1(L^n(|H|))$ induziert. Der Smithhomomorphismus wird von den zu der Inklusion $i: L^n(|G|) \hookrightarrow L^{n+1}(|G|)$ gehörenden Umkehrhomomorphismen - die mit den i_* vertauschbar sind und daher einen Homomorphismus im direkten Limes definieren - induziert. Es ist unmittelbar klar, wie ϕ_v durch $S(\phi^*)$ beschreibbar ist.

Für $G = \mathbb{Z}_2^i$ ist die angegebene Schlußweise nicht anwendbar, da μ nicht surjektiv ist.

Für Inklusionen kann man jedoch die Behauptung aus (5.9) direkt nachweisen - man siehe etwa [Kn] und [A-2] - so daß man von einer zyklischen Gruppe immer den 2-Torsionsanteil abspalten kann, ohne die Natürlichkeit von ψ zu verlieren.

§ 6 K-Theorie mit Koeffizienten

In diesem Paragraphen sollen einige später benötigte Tatsachen für die K-Theorie mit Koeffizienten zusammengestellt werden.

Mit $\{U_n\}$ bezeichnen wir wieder das Spektrum der K-Theorie $U_{2n} = Z \times BU$, $U_{2n+1} = U$.

Zu einer abelschen Gruppe G gibt es einen Moore-Raum $M(G, n)$ vom Typ $n > 1$, d.h. $M(G, n)$ ist ein einfachzusammenhängender CW-Komplex mit

$$\tilde{H}_n(M(G, n); Z) = G \text{ und } \tilde{H}_k(M(G, n); Z) = 0 \text{ für } k \neq n.$$

Das Spektrum $(\tilde{U})_m := U_{m-n} \wedge M(G, n)$ definiert dann die K-Theorie mit Koeffizienten in G

$$K_i(X, A; G) = \varprojlim_m [S^{m+i}, U_{m-n} \wedge M(G, n) \wedge (X/A)]_* \cong \tilde{K}_{i+n}((X/A) \wedge M(G, n)) \quad (6.1)$$

$$K^i(X, A; G) = \varprojlim_m [S^{m-i} \wedge (X/A), U_{m-n} \wedge M(G, n)]_* \quad (6.2)$$

In den hier vorkommenden Fällen $G = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/Z$, $Z[1/p]/Z$, Z_p hat man Kofasersequenzen zwischen den Moore-Räumen; etwa für $M(Z_p, 1) = S^1 \cup_p e^2$

$$S^1 \xrightarrow{xp} S^1 \xrightarrow{r} M(Z_p, 1) \xrightarrow{pr} S^2 \xrightarrow{xp} S^2 \longrightarrow M(Z_p, 2) \longrightarrow \quad (6.3)$$

Diese Sequenzen liefern die zugehörigen Bocksteinsequenzen

$$\longrightarrow K^i(X) \xrightarrow{xp} K^i(X) \longrightarrow K^i(X; Z_p) \longrightarrow K^{i+1}(X) \longrightarrow$$

aus denen man die universellen Koeffizientensätze ablesen kann

$$0 \longrightarrow K^n(X) \otimes Z_p \longrightarrow K^n(X; Z_p) \longrightarrow \text{Tor}(K^{n+1}(X), Z_p) \longrightarrow 0$$

Das Spektrum $\tilde{U}$ ist multiplikativ und in bestimmten Fällen läßt sich mittels Abbildungen zwischen den Moore-Räumen, eine multiplikative Struktur für die K-Theorie mit Koeffizienten einführen.

a) Immer hat man die sogenannten Modulmultiplikationen: z.B.

$$K^*(X; G) \otimes K^*(X) \xrightarrow{\cup} K^*(X; G) \quad (6.4)$$

$$K^*(X; G) \otimes K_*(X) \xrightarrow{\cap} K_*(X; G) \quad (6.5)$$

Als Beispiel soll (6.5) definiert werden:

$x \in K^i(X;G)$ werde durch eine Abbildung $f: S^{m-i} \wedge X^+ \longrightarrow U_{m-n} \wedge M(G,n)$ und $y \in K_j(X)$ durch $g: S^{k+j} \longrightarrow U_k \wedge X^+$ repräsentiert.

Aus g erhält man durch Einhängen, Vertauschen von Faktoren und Diagonalabbildung die Abbildung

$$S^{m-i} \wedge S^{k+j} \longrightarrow U_k \wedge S^{m-i} \wedge X^+ \wedge X^+ \quad \text{die mit } 1_U \wedge f \wedge 1_X$$

komponiert wird. Daraus erhält man mittels der Multiplikationsabbildung für U

$$\mu: U_k \wedge U_l \longrightarrow U_{k+l} \quad \text{einen Repräsentanten}$$

$$S^{m+k+j-i} \longrightarrow U_{m+k-n} \wedge M(G,n) \wedge X^+ \quad \text{für } x \wedge y \in K_{j-i}(X;G)$$

Durch $\langle x, y \rangle_K = pr_*(x \wedge y)$ erhält man ein Kroneckerprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_K: K^i(X;G) \times K_j(X) \longrightarrow K_{i-j}(*;G)$$

Für weitere Eigenschaften und Beweise sei auf [A - T] verwiesen.

b) Produkte zwischen den K-Gruppen mit Koeffizienten erhält man durch Abbildungen $M(G,n) \wedge M(G,n) \longrightarrow M(G,n+m)$ - von denen es i.A. jedoch mehrere verschiedene Homotopieklassen geben kann. Die resultierenden Produkte sind nicht immer assoziativ und kommutativ, insbesondere bei Anwesenheit von 2-Torsion in G . Beschränkt man sich, wie wir das im folgenden tun werden, auf zyklische Koeffizientengruppen ungerader Ordnung q , dann gibt es immer eine Abbildung $\alpha: M(\mathbb{Z}_q, 2) \wedge M(\mathbb{Z}_q, 2) \longrightarrow M(\mathbb{Z}_q, 4) = M(\mathbb{Z}_q, 2) \wedge S^2$, so daß das folgende Diagramm stabil bis auf Homotopie kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & M_q \wedge M_q & \\ \nearrow id \wedge \gamma & & \searrow \alpha \\ M_q \wedge S^2 & = & M_q \wedge S^2 \end{array}$$

$$(M_q := M(\mathbb{Z}_q, 2), r \text{ aus (6.3)})$$

Die Zusammensetzung

$$\mu_q: (U_{n-2} \wedge M_q) \wedge (U_{m-2} \wedge M_q) \longrightarrow (U_{n-2} \wedge U_{m-2}) \wedge (M_q \wedge M_q) \xrightarrow{\mu \wedge \alpha} U_{n+m-4} \wedge S^2 \wedge M_q \longrightarrow U_{n+m-2} \wedge M$$

liefert eine Paarung von Spektren und damit Produkte für $K(-; Z_q)$.

Bei geeigneter Wahl von α ist die Multiplikation auf $K(-; Z_q)$ assoziativ, kommutativ und mit der Reduktion $r : K(-; Z) \longrightarrow K(-; Z_q)$ verträglich, insbesondere ist $r(1)$ ein Einselement für $K^*(-; Z_q)$.

Für eine Primzahl $p \neq 2$ ist $K(-; Z_p)$ ein Z_p -Vektorraum und das Kroneckerprodukt $\langle , \rangle : K^*(-; Z_p) \times K_*(-; Z_p) \longrightarrow Z_p$ ist eine nichtentartete Paarung.

Da der Moore-Raum $M_q = e^3 \cup_p S^2$ dual zum Komooore-Raum $W(q, 2) = e^2 \cup_p S^1$ ist, - es gibt eine Dualitätsabbildung $u : M_q \wedge W(q, 2) \longrightarrow S^4$ - kann man die Koeffizienten Z_q für K^* auch durch die Definition

$$K^n(X, A; Z_q) := \tilde{K}^{n+2}((X/A) \wedge W(q, 2))$$

eingeführen. Eine Abbildung $\alpha' : S^2 W(q, 2) \longrightarrow W(q, 2) \wedge W(q, 2)$ induziert dann die Produkte. Die Dualitätsabbildung u liefert eine Bijektion

$$\{ X \wedge W(q, 2), Y \} \longrightarrow \{ X, Y \wedge M_q \}$$

und damit eine natürliche Äquivalenz zwischen den mit Moore- und Komooore-Räumen definierten K -Gruppen mit Koeffizienten. Wird α' dual zu α gewählt, ist diese Äquivalenz mit den Produkten verträglich (siehe [J]).

Es sei p eine ungerade Primzahl.

Ist X ein CW-Komplex mit $H^r(X; Z) = 0$ für $r \geq 2p$, so benötigt man zur Definition des Cherncharakters statt Q - nur $Z_{(p)}$ -Koeffizienten ($Z_{(p)} = Z$ lokalisiert bei p).

$$\tilde{ch}_r^{ev} : K^0(X) \longrightarrow H^{2r}(X; Z_{(p)}) \quad 0 \leq r \leq p-1$$

Für die ungeraden Dimensionen wird

$$\tilde{ch}_r^{od} : K^1(X) \longrightarrow H^{2r-1}(X; Z_{(p)}) \quad 1 \leq r \leq p$$

über den Suspensionsisomorphismus durch $\tilde{ch}_{r+1}^{ev}$ definiert. Bei $\tilde{ch}_p^{od}$ ist ein Extra-Argument nötig: Aus dem Verschwinden aller cup-Produkte auf $H^*(X \wedge S^1; Z_{(p)})$ und der bekannten Newton-Identität für symmetrische Polynome folgt, daß man ohne Nenner p auskommt.

Es ist klar, daß $\tilde{ch}$ ein Ringhomomorphismus ist. Für das folgende sei X ein CW-Komplex mit $H^r(X; \mathbb{Z}) = 0$ für $r \geq 2p-2$. $X^+ \wedge M_p$ erfüllt dann die obige Dimensionsvoraussetzung, so daß

$$\tilde{ch}: \tilde{K}^*(X^+ \wedge M_p) \longrightarrow \tilde{H}^*(X^+ \wedge M_p; \mathbb{Z}_{(p)}) \cong \tilde{H}^*(X^+ \wedge M_p)$$

erklärt ist. Der damit definierte mod- p -Cherncharakter $\overline{ch}: K(X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ ist ein Ringisomorphismus. Dies läßt sich etwa durch Induktion über den Zellaufbau von X leicht nachprüfen.

$\overline{ch}$ läßt sich verwenden, um auf einer orientierten Mannigfaltigkeit B mit $\dim B \leq 2p-3$ das Kroneckerprodukt

$$\langle, \rangle : K^*(B; \mathbb{Z}_p) \otimes K_*(B) \longrightarrow K_*(*, \mathbb{Z}_p)$$

durch $H^*(B; \mathbb{Z}_p)$ -Kroneckerprodukte zu berechnen.

Satz 6.6 Es sei p eine ungerade Primzahl und B eine orientierte Mannigfaltigkeit mit $\dim B \leq 2p-3$. Dann gilt

$$\langle x, [B]_S \rangle_{K(; \mathbb{Z}_p)} = \langle \overline{ch} \psi^2(x) \cup L(TB), [B] \rangle_{H(; \mathbb{Z}_p)}$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $\dim B = 2n$ aus, der Beweis für ungerade Dimension verläuft ähnlich.

B^{2n} sei in S^{2n+2q} mit orientiertem Normalenbündel ν ungebettet und

$j: S^{2n+2q} \longrightarrow M(\nu)$ die kanonische Abbildung. Das Kroneckerprodukt

$\langle x, [B]_S \rangle_K = \langle x, U(\nu) \wedge j_*[S^{2n+2q}] \rangle_K = \langle j^*(x \cup U(\nu)), [S^{2n+2q}] \rangle_K$ ist durch das Element $j^*(x \cup U(\nu)) \in \tilde{K}(S^{2n+2q} \wedge M_p)$ festgelegt.

Für ein Bündel ξ über einem $(2q-1)$ zusammenhängenden Raum X hat Adams in [Ad 5]

charakteristische Klassen $ch_{q,r}(\xi) \in H^{2q+2r}(X; \mathbb{Z})$ definiert, die unter dem Koeffizientenhomomorphismus auf $m(r) \cdot ch_{q+r}(\xi)$ abgebildet werden

$$(m(r) = \prod_{p \text{ prim}} p^{[r/(p-1)]}) .$$

Auf $S^{2n+2q} \wedge M_p$ ist daher $ch_{n+q,0}$ definiert. Aus den in [Ad 5] aufgeführten

Eigenschaften der Klassen $ch_{q,r}$ folgt (Koeffizienten in $Z_{(p)}$, $\bar{\cup}$ = Modulprodukt):

$$ch_{n+q,0}(j^*(x \bar{\cup} U(v))) = \frac{1}{m(n)} j^* ch_{q,n}(x \bar{\cup} U(v))$$

$U(v)$ und x lassen sich aus Klassen in $\tilde{K}(MU(q))$ bzw. $K(BU)$ induzieren. Da $H^*(BU)$ und $H^*(MU(q))$ torsionsfrei sind, ist auf $BU \wedge MU(q)$ $ch_{q,r}/m(r)$ durch ch_{q+r} eindeutig bestimmt. Daher gilt in $\tilde{H}^{2q+2n}(BU \wedge MU(q); Z_{(p)})$ die Produktformel

$$\frac{ch_{q,n}(a \times b)}{m(n)} = \sum_{i+j=n} \frac{ch_{0,i}(a)}{m(i)} \times \frac{ch_{q,j}(b)}{m(j)} \quad (n < p-1)$$

Insgesamt:

$$ch_{n+q,0}(j^*(x \bar{\cup} U(v))) = j^* \left(\sum_{i+j=n} \frac{1}{m(i)} \cdot ch_{q,i}(U(v)) \bar{\cup} \widetilde{ch}_j(x) \right)$$

Je nach Wahl der Thomklasse $U(v)$ erhält man verschiedene charakteristische Klassen $\phi^{-1} ch_{q,i}(U(v)) \in H^*(B; Z_{(p)})$.

Für $U = U_S$ folgt wie in § 2: (ϕ = Thomisomorphismus)

$$\frac{\phi^{-1} ch_{q,i}(U_S)}{m(i)} = y(TB)_{(i)}^{-1} = (-1)^n \cdot 2^{2i} \cdot L_i(TB) \in H^{4i}(B; Z_{(p)})$$

Man schließt wie dort weiter und erhält die behauptete Formel.

Die gemachten Dimensionseinschränkungen sind, wie als Beispiel der $2p-1$ dimensionale Linsenraum $L^P(p)$ zeigt, sowohl für ch wie auch für die Kroneckerproduktformel nicht zu umgehen.

§ 7 Die Verschlingungsform auf $K(BG)$

Ziel dieses Abschnittes ist es, für $G = Z_p^k$, p eine ungerade Primzahl, das Kroneckerprodukt

$$\langle , \rangle : K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes K_1(BG) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

zu bestimmen. Statt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ - Koeffizienten läßt sich auch $Z_p^\infty = Z[1/p]/Z$ als Koeffizientenbereich wählen.

Für den Darstellungsringsring von G gilt bekanntlich $R(G) = Z[\lambda] / (\lambda^q - 1)$ mit $q := p^k$.

λ sei so normiert, daß der Charakter von λ auf dem Erzeugenden von G gerade $e^{\frac{2\pi i}{p^k}}$ ist. Mittels eines G -Prinzipalbündels $EG \rightarrow BG$ erhält man eine (für zyklische p -Gruppen injektive) Abbildung $R(G) \xrightarrow{\alpha} K^0(BG)$, die nach Vervollständigung einen Isomorphismus $\widehat{R(G)} \xrightarrow{\hat{\alpha}} K^0(BG)$ liefert. Wir wählen als EG die Einschränkung desjenigen S^1 -Prinzipalbündels über BS^1 , dessen assoziiertes Linienbündel zum universellen Linienbündel dual ist, und bezeichnen $\hat{\alpha}(\lambda)$ mit ξ ($\xi|_{L^n(q)}$ ist dann das Normalenbündel von $L^n(q)$ in $L^{n+1}(q)$). Die Koeffizientensequenz zu $Z \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zeigt, daß der Bocksteinoperator $\beta: K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{K}^0(BG) \cong \widehat{I(G)} \subset \widehat{R(G)}$ ein Isomorphismus ist. Das durch $\beta^{-1}(\xi-1)$ definierte Element werde mit y bezeichnet. Alle anderen Elemente in $K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ lassen sich dann durch Produkte von y mit Elementen aus $K^0(BG)$ erhalten.

Für jedes $x \in S_G^{-1} R(G)/R(G) = S_a^{-1} R(G)/R(G)$ gibt es eine Zahl n , so daß $I^n x$ in $R(G)$ liegt, daher läßt sich das Tensorprodukt zwischen $R(G)$ und $S_G^{-1} R(G)/R(G)$ zu einer Operation $\bar{\otimes}$ von $\widehat{I(G)}$ auf $S_G^{-1} R(G)/R(G)$ fortsetzen ($I(G)$ = Augmentationsideal in $R(G)$). Damit läßt sich jetzt leicht das cap-Produkt auf $K(BG)$ beschreiben:

Lemma 7.1 Das cap-Produkt $\tilde{K}^0(BG) \times K_1(BG) \rightarrow K_1(BG)$ stimmt über die

Isomorphismen $\hat{\alpha}$ und ψ mit dem Tensorprodukt

$$\bar{\otimes} : \widehat{I(G)} \otimes S_G^{-1} R(G)/R(G) \longrightarrow S_G^{-1} R(G)/R(G) \quad \text{überein.}$$

Beweis: Auf den Gruppen des Diagramms (3.2) operiert $R(G)$ über das Tensorprodukt. Unter der Identifikation $K_G^O(TD_{|B|}^{2n}) \cong K^O(TL^n(q) \oplus \mathbb{R}) \cong K_1(L^n(q))$ geht das Tensorprodukt mit λ in das cap-Produkt mit $i^*\xi$ über. Damit folgt dann die Behauptung : $\psi(i_*(i^*\xi \cap x)) = \psi(\xi \cap i_*x) = \lambda \otimes \psi(i_*x)$

Direkt mit der Definition kann man $\psi i_*[L^n(q)]_S = \psi \mu(S^{2n-1}, G) = -\alpha_Z(-, S^{2n-1})$ berechnen und erhält

$$\psi i_*[L^n(q)]_S = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^n \quad (7.2)$$

Analog folgt

$$\psi i_*[L^n(q)]_T = \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^n \quad (7.3)$$

(direkt oder mit (7.2) und §2)

Damit läßt sich ebenfalls das cap-Produkt berechnen : Die Eulerklasse des Normalenbündels von $L^n(q)$ in $L^{n+1}(q)$ ist $1-\xi_{L^n(q)}$, daher gilt

$$e(\xi_{L^{n+1}(q)}) \cap [L^{n+1}(q)]_T = i_{n,n+1*}[L^n(q)]_T \quad \text{und somit}$$

$$\begin{aligned} \psi i_*([L^{n+1}(q)]_T \cap (1-\xi)) &= \psi((1-\xi) \cap i_*[L^{n+1}(q)]_T) = \psi i_*[L^n(q)]_T = (1-\lambda)^{-n} = \\ &= (1-\lambda) \otimes \psi(i_*[L^{n+1}(q)]_T) \end{aligned}$$

Es genügt natürlich die Behauptung auf den Fundamentalklassen der Linsenräume zu verifizieren, da diese $K_1(BG)$ erzeugen.

Bemerkung:

Für $G = Z_{2^r}$ hat $\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \right)^n$ in $K_1(BG)$ die Ordnung 2^{r-1} (unabhängig von n), während die Klassen $i_*[L^n(|G|)]_T = (1-\lambda)^{-n}$ eine mit n steigende Ordnung besitzen und $K_1(BG)$ erzeugen.

Die Multiplikation mit der Zahl n auf G induziert Homomorphismen

$(Bn)^* : K^O(BG) \rightarrow K^O(BG)$ und Adams-Operationen $\psi^n : R(G) \rightarrow R(G)$. Bekannt ist, daß unter der Identifikation $\hat{R}(G) \cong K^O(BG)$ $\hat{\psi}^n$ mit $(Bn)^*$ übereinstimmt. Wir bezeichnen deshalb die auf $K^O(BG)$ und $K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ durch Bn induzierten Homomorphismen ebenfalls mit ψ^n . Es folgt aus (5.9), daß $(Bn)_* : K_1(BG) \rightarrow K_1(BG)$ durch $S((\psi^n)^{\frac{1}{p}})$ beschrieben wird. Ist $n \not\equiv 0 \pmod{p}$, dann ist n in G invertierbar und mit $n \cdot \underline{n} \equiv 1 \pmod{p^k}$ folgt $(Bn)_* = S(\psi^{\underline{n}})$. Wir bezeichnen $(Bn)_*$ mit Ψ^n .

In $K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ definieren wir das Element $\tilde{r\acute{e}g}$ durch $\tilde{r\acute{e}g} = \sum_{i=1}^{q-1} \psi^i(y)$. Es gilt $(\xi-1) \cup \tilde{r\acute{e}g} = -|G| \cdot y$, denn unter dem Bocksteinhomomorphismus geht $\tilde{r\acute{e}g}$ auf das Element $\sum_{i=0}^{q-1} (\xi^i - 1)$. Für alle $x \in K_1(BG)$ gilt deshalb die Gleichung:

$$\langle y, (\sum_{i=1}^{q-1} \psi^i((\xi-1) \cap x/p^k)) + x \rangle_k = 0 \quad (7.4)$$

Beweis: ($q = p^k$, $\bar{\xi} := \xi - 1$)

$$\begin{aligned} \langle y, \sum \psi^i(\bar{\xi} \cap x/q) \rangle &= \langle \sum \psi^i(y), \bar{\xi} \cap x/q \rangle = \langle \tilde{r\acute{e}g} \cup \bar{\xi}, x/q \rangle = -\langle |G|y, x/q \rangle \\ &= -\langle y, x \rangle \end{aligned}$$

Für bestimmte $j \leq q-1$ können wir jetzt $\langle y, \lambda^j/p^r \rangle$ berechnen:

Lemma 7.5 Für $j \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $j \not\equiv -1 \pmod{p}$ und alle r gilt

$$\langle y, \lambda^j/p^r \rangle_k = 0$$

Beweis: Wir zeigen einfach $\sum_{i=1}^{q-1} \psi^i((\lambda^j/p^{r+k}) \cap \bar{\xi}) = 0$

Es ist (wir lassen den Nenner p^{r+k} weg) $\lambda^j \cap \bar{\xi} = \lambda^{j+1} - \lambda^j$ mit j und $j+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$

j und $j+1$ können wir invertieren und daher $\lambda^j = \psi^j(\lambda)$, $\lambda^{j+1} = \psi^{j+1}(\lambda)$.

Ist $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, dann läßt ψ^a die Summe $\sum_{i=1}^{q-1} \psi^i(z)$ invariant und da die ψ^i miteinander vertauschbar sind, verschwindet die Differenz $\sum_{i=1}^{q-1} \psi^i(\psi^j(\lambda) - \psi^{j+1}(\lambda))$.

Für $k=1$ d.h. $G = \mathbb{Z}_p$ sind wir damit fast fertig. Nur $\langle y, \lambda^{p-1}/p^s \rangle =: c_s$

kann nicht verschwinden. Die Zahlenfolge c_r beschreibt vollständig das Kroneckerprodukt für $B\mathbb{Z}_p$, denn durch die Operationen ψ^n und ihre Adjungierten Ψ^n läßt

sich $\langle x, y \rangle$ durch die c_r ausdrücken: Es gilt

$$\langle \psi^i(y), \lambda^j/p^r \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j \not\equiv -i \pmod{p} \\ c_r & \text{für } j \equiv -i \pmod{p} \end{cases} \quad (7.6)$$

Beweis:

$$\langle \psi^a(y), \lambda^b/p^r \rangle = \langle \psi^a(y), \Psi^b(\lambda/p^r) \rangle = \langle y, \psi^a \circ \psi^b(\lambda/p^r) \rangle = \langle y, \psi^{ab}(\lambda/p^r) \rangle$$

Aus $p \cdot c_r = \langle py, \lambda^{p-1}/p^r \rangle = \langle y, \lambda^{p-1}/p^{r-1} \rangle = c_{r-1}$ folgt, daß c_r die Ordnung p^r hat, wenn nur c_1 die Ordnung p hat.

Unser nächstes Ziel ist die Berechnung von c_r . Es sei jetzt wieder $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, k fest und $q = p^k$. Das 2-Skelett von BG ist der Moore-Raum $M_q = S^1 \cup_q e^2$ und

die Inklusion $i : S^1 \rightarrow BG$ faktorisiert über M_q $S^1 \xrightarrow{i_M} M_q \xrightarrow{i} BG$.

i_M gehört zur Kofasersequenz $S^1 \xrightarrow{q} S^1 \xrightarrow{i_M} M_q \rightarrow S^2 \rightarrow$. Die Q/Z

Koeffizienten schränken wir auf Z_q ein. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{K}^1(M_q; Q/Z) & \xrightarrow{i_M^*} & \tilde{K}^1(S^1; Q/Z) & \xrightarrow{q} & \tilde{K}^1(S^1; Q/Z) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{K}^1(M_q; Z_q) & \xrightarrow{i_M^*} & \tilde{K}^1(S^1; Z_q) & \xrightarrow{q} & \tilde{K}^1(S^1; Z_q) \end{array}$$

folgt $i_M^* : \tilde{K}^1(M_q; Z_q) \rightarrow \tilde{K}^1(S^1; Z_q) \cong Z_q$ ist ein Isomorphismus und daher hat c_1 die Ordnung q ; genauer :

$\tilde{K}^1(S^1; Z_q)$ wird von dem Bild der 1 unter dem Suspensionsisomorphismus Σ_q^* erzeugt, somit $i_M^*(y) = m \cdot \Sigma_q^*(1)$. Wegen $\langle \Sigma_q^*(1), [S^1]_T \rangle_K = 1 \in Z_q$ gilt $\langle i_M^*(y), [S^1]_T \rangle_K = m$ und da $i_*[S^1]_T = 1/(1-\lambda) = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \lambda^i / q$ in $K_1(BG)$ gilt, folgt mit $m = \langle y, i_*[S^1]_T \rangle_K$ für $G = Z_p$ schon hieraus $m = c_1 \neq 0$. Um m zu bestimmen, braucht man nur die Definitionen einzusetzen (siehe [A-T]).

Man erhält das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{K}^1(S^1; Z_q) & := & \tilde{K}^3(S^1 \wedge M_q) & \xrightarrow{T^*} & \tilde{K}^3(M_q \wedge S^1) & \xleftarrow{\Sigma_q^*} & \tilde{K}^2(M_q) =: \tilde{K}^0(S^0; Z_q) \\ \uparrow i_M^* & & \uparrow (i_M \wedge 1)^* & & \parallel & & \parallel \\ \tilde{K}^1(M_q; Z_q) & := & \tilde{K}^3(M_q \wedge M_q) & \xrightarrow{(i \wedge i_M)^*} & \tilde{K}^3(M_q \wedge S^1) & \xleftarrow{\Sigma_q^*} & \tilde{K}^2(M_q) \end{array}$$

Die obere Zeile ist die Definition von Σ_q^* und die untere die des Bockstein-

homomorphismus. Damit folgt $\Sigma_q^{*-1}(i_M^*(y)) = m = \beta(y) = \xi - 1$. ($\xi - 1$) aus

$\tilde{K}^2(M_q) = \tilde{K}^0(S^0; Z_q)$ definiert aber gerade wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} M_q & \xrightarrow{pr} & S^2 \\ \downarrow & & \parallel \\ L^2(q) & \rightarrow & P_1 \mathbb{C} \end{array}$$

das Einselement für $K^*(-; Z_q)$. Somit $m = 1 \in Z_q$ (Ob $m = +1$ oder -1 ist,

hängt von der Wahl des Bottisomorphismus ab).

Wir halten fest ($G = Z_q$, $q = p^k$, $R(Z_q) = Z[\mu]/(\mu^q - 1)$):

$$\langle y, i_*[S^1]_T \rangle = \langle y, \sum_{i=1}^{q-1} (-i) \cdot \mu^i / q \rangle = 1/q \quad (7.7)$$

Ist $i: Z_p \longrightarrow Z_q$ die Inklusion, dann gilt $(Bi)^* y_{Z_q} = y_{Z_p}$ da das Entsprechende für die Bündel ξ gilt. Daher

$$c_k = \langle y_{Z_p}, \lambda^{p-1}/q \rangle = \langle (Bi)^* y_{Z_q}, \lambda^{p-1}/q \rangle = \langle y_{Z_q}, (Bi)_* (\lambda^{p-1}/q) \rangle$$

Wir vergleichen c_k mit dem Kroneckerprodukt $\langle y_{Z_q}, i_*[S^1, Z_q]_T \rangle$, das den Wert $1/q$ hat (7.7). $i^*: R(Z_p) \longrightarrow R(Z_q)$ ist die Multiplikation mit

$$i^*(1) = \text{reg}(Z_q) / \text{reg}(Z_p) = \sum_{n=1}^{p-1} \mu^{q-np}$$

Daher ist $(Bi)_* (\lambda^{p-1}/q) = (\mu^{q-1}/q) \sum_{n=1}^{p-1} \mu^{q-np}$ und auf der rechten Seite des Kroneckerproduktes

$$c_k - \frac{1}{q} = \langle y_{Z_q}, (Bi)_* (\lambda^{p-1}/q) + \sum_{i=1}^{q-1} i \mu^i / q \rangle$$

stehen nur Summanden der Gestalt

- a) $j \cdot \mu^j / q$ mit $j \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $j \not\equiv -1 \pmod{p}$
- b) $np(\mu^{np} + \mu^{np-1})/q$ $n = 1, \dots, p^{k-1}-1$

Der Koeffizient von μ^{q-1} ist $q-1+1 = q$, daher liefert dieses Element keinen Beitrag zum Kroneckerprodukt.

Das Kroneckerprodukt von y und Termen der Gestalt a) und b) verschwindet. Für Summanden der Form a) folgt dies aus (7.5), und mit $(\mu^{np} + \mu^{np-1}) \wedge \bar{\xi} = \mu^{np+1} - \mu^{np-1}$ zeigt man genauso wie beim Beweis zu (7.5), daß $\langle y, \mu^{np} + \mu^{np-1} \rangle = 0$ gilt. Daher $c_k = 1/q$ und das Kroneckerprodukt auf BZ_p ist vollständig bestimmt:

Satz 7.8 Für das Kroneckerprodukt auf $K(BZ_p)$ gilt

$$\langle \psi^i(y), \lambda^j/p^r \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i+j \not\equiv 0 \pmod{p} \\ 1/p^r & \text{für } i+j \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

Das Kroneckerprodukt auf $K(BZ_{p^k})$:

Der wesentliche fehlende Schritt ist die Berechnung von $\langle y, \mu^{ap}/p^r \rangle$.

Wir führen vollständige Induktion nach k durch. Der Induktionsanfang wurde bereits erledigt. Es sei für $n < k$ gezeigt, daß für $r \neq -1$ (p^n) $\langle y, \mu^r/p^s \rangle = 0$ gilt. Zuerst zeigen wir die Unabhängigkeit des Kroneckerproduktes

$\langle y, \mu^{np}/p^s \rangle$ ($np \neq 0$ (p^k)) von n . Der Nenner p^s wird im folgenden wieder weggelassen.

$$\langle y, \mu^{(n+1)p} - \mu^{np} \rangle = \langle y, (\xi^{p-1}) \wedge \mu^{np} \rangle = \langle \xi \wedge \psi^p y - \psi^p y, \mu^{np} \rangle =$$

$$\langle \psi^p y, \mu^{np+1} - \mu^{np} \rangle = \langle (Bi)^* y, (B\pi)_* (\mu^{np+1} - \mu^{np}) \rangle = \langle -y_{Z_{p^{k+1}}}, \mu^n_{Z_{p^{k+1}}} \rangle = 0$$

nach Induktionsvoraussetzung. $\psi^p = (Bp)^*$ wurde hier in $Z_{p^k} \xrightarrow{\pi} Z_{p^{k+1}} \xrightarrow{i} Z_{p^k}$ zerlegt und $(B\pi)_*$ durch $S(\pi^*)$ berechnet.

Wegen der schon bewiesenen Gleichung $\langle y, \mu^{np} \rangle = -\langle y, \mu^{np-1} \rangle$ ($np \neq 0$ (p^k))

gilt :

$$2\langle y, \mu^p \rangle = \langle y, \mu^p - \mu^{p-1} \rangle = \langle y, \xi^{p-1} \wedge (\mu - 1) \rangle = \langle y \cdot \xi^{p-1}, \mu + \sum_{i=1}^{q-1} \mu^i \rangle$$

$$= \langle \psi^p y - \psi^{p-1} y, \mu + \sum_{i=1}^{q-1} \mu^i \rangle$$

$$= \langle y, \psi^p (\mu + \sum_{i=1}^{q-1} \mu^i) \rangle - \langle y, \psi^{p-1} (\mu + \sum_{i=1}^{q-1} \mu^i) \rangle$$

$$= \textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} = \langle y, \psi^{p-1} \mu \rangle + \langle y, \psi^{p-1} (\sum_{i=1}^{q-1} \mu^i) \rangle = \langle y, \mu^{mp-1} \rangle + \langle y, \mu^{q-1} \rangle$$

wo $(mp-1) \cdot (p-1) \equiv 1$ (p^k) ist (es ist $m \neq p^{k-1}$ (p^k), da sonst $k=1$). Man beachte, daß $\langle y, \sum_{i=1}^{q-1} \mu^i \rangle = \langle y, \mu^{q-1} \rangle$ da $\langle y, \mu^i \rangle = 0$ für

$i \neq 0, -1$ (p) und $\langle y, \mu^{np-1} + \mu^{np} \rangle = 0$ für $np \neq 0$ (p^k).

$$\textcircled{1} = \langle y, \psi^p (\sum_{i=1}^{q-1} \mu^i) \rangle = \langle y, (Bi)_* (B\pi)_* (\sum_{i=1}^{q-1} \mu^i) \rangle$$

$$= \langle y, (\sum_{i=1}^{r-1} \mu^i) \cdot (\sum_{i=0}^{p-1} \mu^{ir}) \rangle \quad (\text{mit } r := p^{k-1})$$

$$= \langle y, \mu^{r-1} (\sum_{i=0}^{p-1} \mu^{ir}) \rangle + \langle y, (\sum_{i=1}^{r-2} \mu^i) \cdot (\sum_{i=0}^{p-1} \mu^{ir}) \rangle$$

$$= \langle y, \mu^{q-1} \rangle + (p-1) \cdot \langle y, \mu^{p-1} \rangle$$

da $\langle y, (\sum_{i=1}^{r-2} \mu^i) \cdot (\sum_{i=0}^{p-1} \mu^{ir}) \rangle = \langle y, (Bi)_* (\sum_{i=1}^{r-2} \mu^i) \rangle = 0$ nach

Induktionsvoraussetzung.

Insgesamt folgt $p \cdot \langle y, \mu^p/p^s \rangle = 0$ und damit $\langle y, \mu^{np}/p^s \rangle = 0$ für

alle s und $n \not\equiv p^{k-1} \pmod{p^k}$. Mit ähnlichen Rechnungen berechnet man

$\langle \psi^a(y), \mu^b/p^s \rangle$ und es folgt

Satz 7.9 Das Kroneckerprodukt auf $K(BZ_{p^k})$ ist gegeben durch

$$\langle \psi^a(y), \mu^b/p^r \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } a+b \not\equiv 0 \pmod{p^k} \\ 1/p^r & \text{falls } a+b \equiv 0 \pmod{p^k} \end{cases}$$

Wegen des Zerfallens von $K_1(BG)$ in $\sum_{p \mid |G|} K_1(BZ_{p^{i_p}})$ für $G = \prod_p Z_{p^{i_p}}$ ist

damit das Kroneckerprodukt für alle zyklischen Gruppen ungerader Ordnung

berechnet. Wir bringen (7.9) noch in eine etwas andere Form :

Es sei wieder $G = Z_{p^k}$.

Nach (1.13) kann man $S_G^{-1}R(G)/R(G)$ mit $\overline{R(G)} \otimes Z_p^\infty$ identifizieren. $R(G)$

spaltet auf in $\overline{R(G)} \oplus \text{Bild } i^{\nabla}(R(\{1\}) \rightarrow R(G))$. Aus der Bocksteinsequenz

folgt $K_0(BG; Z_p^\infty) \cong \beta^{-1}(K_1(BG)) \oplus K_0(*; Z_p^\infty)$ und damit erhält man einen

Isomorphismus zwischen $R(G) \otimes Z_p^\infty$ und $K_0(BG; Z_p^\infty)$. Das Tensorprodukt in-

duziert eine lineare Abbildung $\bar{\otimes} : \hat{I}(G) \otimes (\overline{R(G)} \otimes Z_p^\infty) \rightarrow R(G) \otimes Z_p^\infty$, die

man wie in (7.1) mit dem cap-Produkt $K^1(BG; Z_p^\infty) \otimes K_1(BG) \xrightarrow{\hat{\cap}} K_0(BG; Z_p^\infty)$

identifizieren kann. Zwischen $R(G)$ und $R(\{1\})$ ist der Umkehrhomomorphismus

der Projektion $\pi: G \rightarrow \{1\}$ definiert. Damit läßt sich auch das Kronecker-

produkt im Rahmen der Darstellungstheorie formulieren:

Korollar 7.1 Für $G = Z_{p^k}$ stimmt der Homomorphismus

$$\hat{I}(G) \otimes (\overline{R(G)} \otimes Z_p^\infty) \rightarrow Z_p^\infty$$

der durch $a \otimes b \mapsto \pi^{\nabla}(a \bar{\otimes} b)$ gegeben wird, über die ange-

gebenen Identifikationen mit dem Kroneckerprodukt

$\langle, \rangle : K^1(BG; Z_p^\infty) \otimes K_1(BG) \rightarrow Z_p^\infty$ überein.

Erste Anwendungen:

Mit der Berechnung des Kroneckerproduktes $\langle, \rangle : K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes K_1(BG) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat man gleichzeitig das Kroneckerprodukt und damit die multiplikative Struktur auf den K-Gruppen der Linsenräume mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_{p^r}$ mit berechnet. Wählt man ganzzahlige Koeffizienten, so kann man dieses Kroneckerprodukt mit der üblichen Verschlingungsform auf den Torsionsklassen von $K(L^n(p^k); \mathbb{Z})$ identifizieren. Die zwischen $\tilde{K}^0(L^n(p^k))$ und $\text{Tor } K_1(L^n(p^k))$ definierte Verschlingungsform induziert eine Verschlingsform

$$L: \tilde{K}^0(B\mathbb{Z}_{p^k}) \otimes K_1(B\mathbb{Z}_{p^k}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

die natürlich über den Bocksteinhomomorphismus mit dem betrachteten Kroneckerprodukt übereinstimmt. L induziert einen Homomorphismus

$$\tilde{L}: \tilde{K}^0(BG) \longrightarrow \text{Hom}(K_1(BG), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

der die Pontrjagindualität zwischen $K^0(BG)$ und $K_1(BG)$ liefert. Die Injektivität von $\tilde{L}$ folgt aus (7.9), die Surjektivität mit einem Limes-Argument. Eine Isomorphie zwischen $\tilde{K}^0(BG)$ und $\text{Hom}(K_1(BG), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ wurde in [V2] als Folgerung aus dem Universellen Koeffiziententheorem der K-Theorie hergeleitet.

Eine andere Anwendung betrifft das Pontrjaginprodukt auf $K_*(BG, \mathbb{Z}_{p^m})$. Über das Kroneckerprodukt kann man es zu dem Koprodukt auf $K^0(BG, \mathbb{Z}_{p^m})$ in Beziehung setzen und da dies bekannt ist (siehe [A-Ho]), auf explizit gegebenen Elementen - wie etwa Fundamentalklassen von Linsenräumen - berechnen.

Für das Pontrjaginprodukt $\circ: K_0(BG; \mathbb{Z}_{p^m}) \otimes K_0(BG; \mathbb{Z}_{p^m}) \longrightarrow K_0(BG; \mathbb{Z}_{p^m})$ erhält man

$$\frac{\lambda^s}{p^n} \circ \frac{\lambda^k}{p^r} = \begin{cases} 0 & \text{falls } s \neq k \\ \lambda^{s/p^{n+r}} & \text{falls } s = k \end{cases} \quad (n+r \leq m)$$

§ 8 Der Signaturdefekt mod $\mathbb{Z}$ als charakteristische Zahl

In diesem Abschnitt sei G eine zyklische Gruppe ungerader Ordnung. Die Berechnung des Kroneckerproduktes aus § 7 soll für die Beschreibung von Bordismusinvarianten wie γ_Z und γ_Z^i ausgenutzt werden.

Die α -Invariante einer freien G -Aktion auf $\tilde{X}$ haben wir als Element in $S_a^{-1}R(G)$ aufgefaßt. Elemente aus $S_a^{-1}R(G)$ kann man auf Gruppenelementen, die von dem Einselement verschieden sind, auswerten. Unter dem Auswertungshomomorphismus $\chi_h: S_a^{-1}R(G) \longrightarrow \mathbb{Q}(\xi)$ wird $\alpha(-, \tilde{X})$ auf $\alpha(h, \tilde{X}) \in \mathbb{Q}(\xi)$ abgebildet. Schreibt man in $S_a^{-1}R(G)$ $\alpha(-, \tilde{X})$ als Linearkombination der Potenzen der irreduziblen primitiven Darstellung ρ $\alpha(-, \tilde{X}) = \sum_{i=1}^{|G|-1} a_i \rho^i$, dann folgt mit den in § 0 gemachten Konventionen $\alpha(g, \tilde{X}) = \sum_{i=1}^{|G|-1} a_i \xi^i$ und $\alpha(g^j, \tilde{X}) = \sum_i a_i \xi^{ij}$. Das setzt die Summe der α -Invarianten - von der wir wissen, daß sie den Signaturdefekt γ der regulären Überlagerung $\tilde{X} \longrightarrow X = \tilde{X}/G$ beschreibt - mit den Koeffizienten a_i in Beziehung:

$$\sum_{h \neq 1} \alpha(h, \tilde{X}) = \sum_{j=1}^{|G|-1} \sum_{i=1}^{|G|-1} a_i \xi^{ij} = \sum_{i=1}^{|G|-1} a_i \left(\sum_{j=1}^{|G|-1} \xi^{ij} \right) = - \sum_{i=1}^{|G|-1} a_i$$

und damit $\gamma = \sum a_i$. Dies impliziert für $\alpha_Z(\tilde{X}) \in S_a^{-1}R(G)/R(G) \subset \overline{R(G)} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ die Gleichung $\gamma_Z = \sum b_i$, wenn man $\alpha_Z(\tilde{X})$ in $S_a^{-1}R(G)/R(G)$ als Summe $\alpha_Z(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{|G|-1} b_i \rho^i$, $b_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dargestellt hat. Das Element $\tilde{\text{reg}} \in K^1(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, das durch $\tilde{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{|G|-1} \psi^i(Y)$ definiert ist, hat nach (7.9) genau die Eigenschaft $\langle \tilde{\text{reg}}, \sum_i a_i \rho^i \rangle = \sum_i a_i$ und deshalb folgt

$$\gamma_Z(\tilde{X} \longrightarrow X) = \langle -\tilde{\text{reg}}, f_*[X]_S \rangle_K \quad (8.1)$$

wenn $f: X \longrightarrow BG$ die klassifizierende Abbildung der Überlagerung $\tilde{X} \longrightarrow X$ ist.

Da G ungerade Ordnung hat, können wir statt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ Koeffizienten auch die Koeffizientengruppe $H = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ wählen und sowohl $\tilde{\text{reg}}$, wie auch γ als

Element in $K^1(BG; H)$ auffassen. Die Fundamentalklasse $[X]_S$ ist ein Element in $K_1(X; Z[\frac{1}{2}])$ und mit dem Kroneckerprodukt $\langle, \rangle : K^*(X; H) \otimes K_*(X; Z[\frac{1}{2}]) \longrightarrow H$ läßt sich (8.1) umformulieren:

Satz 8.2 Der Signaturdefekt der durch eine freie G -Aktion auf der $2n-1$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit X definierten Überlagerung $X \longrightarrow X/G$ mit klassifizierender Abbildung $f: X/G \longrightarrow BG$ wird modulo Z gegeben durch das K-Theorie-Kroneckerprodukt

$$\gamma_Z(X \longrightarrow X/G) = \langle -f^* \tilde{r}eg_G, [X/G]_S \rangle_K$$

Dieses Kroneckerprodukt beschreibt γ_Z als eine K-Theorie charakteristische Zahl, die analog zu den in § 0 betrachteten mod p - charakteristischen Zahlen aus [C-F1] gebildet wird: In § 2 hatten wir verallgemeinerte charakteristische Zahlen für eine singuläre Mannigfaltigkeit $(M, f) \in \Omega_*(X)$ in $K_*(X)$ betrachtet. Diese Bordismusinvarianten lassen sich mittels des universellen Koeffiziententheorems in gewöhnliche Zahlen zerlegen. Für endliche C-W-Komplexe gilt die Koeffizientenformel

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(K^{n+1}(X), Z) \longrightarrow K_n(X) \longrightarrow \text{Hom}(K^n(X), Z) \longrightarrow 0$$

und da diese spaltet, erhält man aus $x \in K_n(X)$ einen Homomorphismus $K^n(X) \longrightarrow Z$ und einen Homomorphismus $\text{Tor}(K^{n+1}(X)) \longrightarrow \mathbb{Q}/Z$. Der letzte Homomorphismus wird durch ein Kroneckerprodukt $y \mapsto \langle \beta^{-1}(y), x \rangle$ - wo β der Bocksteinoperator zur Sequenz $Z \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/Z$ ist - gegeben. Insgesamt kann man daher der charakteristischen Zahl $x = f_*(p_\omega(TM) \cap [M]_S) \in K_1(X)$ die charakteristischen Zahlen $\langle f^*y \cup p_\omega(TM), [M] \rangle \in Z$ für $y \in K^1(X)$ (8.3) und $\langle f^*y \cup p_\omega(TM), [M] \rangle \in \mathbb{Q}/Z$ für $y \in \beta^{-1}(\text{Tor } K^{i+1}(X)) \subset K^i(X, \mathbb{Q}/Z)$ zuordnen, und es gilt natürlich der Satz, daß, wenn die charakteristischen Zahlen aus $K_*(X)$ die Bordismusklassen bestimmen, dies auch für die charakteristischen Zahlen (8.3) gilt.

Da wir uns bei $X = BG$ mit den Aussagen aus §7 behelfen können, soll auf einen Beweis der obigen Behauptungen - den man aus einer Herleitung der Koeffizientenformel unmittelbar erhalten kann - nicht eingegangen werden.

Aus (7.9) folgt, daß für $G = \mathbb{Z}_{p^r}$ ein Element $x \in K_1(BG)$ durch die Kroneckerprodukte $\langle \psi^i(y), x \rangle \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, |G|-1$) eindeutig bestimmt ist. Wegen des Zerfallens von $K_1(BG)$ in die Primanteile folgt eine analoge Aussage auch für alle zyklischen Gruppen ungerader Ordnung:

Korollar 8.4 Ist G eine zyklische Gruppe ungerader Ordnung, dann bestimmen die charakteristischen Zahlen

$$\langle f^* z \cup p_\omega(TX), [X]_S \rangle_K \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

mit $z \in K^1(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, die Bordismusklass eines Elementes $(X, f) \in \tilde{\Omega}_{2n-1}^{BG}$.

Bemerkungen:

1. Eine analoge Aussage gilt auch für $\tilde{\Omega}_*^U(BG)$.
2. Die Bemerkung 1 am Ende von § 4 zeigt jetzt einen Grund für das Versagen der mod- p -charakteristischen Zahlen aus $[C-F1]$ in den Dimensionen größer als $2p-2$ zur Bestimmung der Bordismusklassen.
3. Die charakteristischen Zahlen aus (8.4) lassen sich in bestimmten Fällen als K-Theorie-Verschlingungszahlen zwischen charakteristischen Untermannigfaltigkeiten und anderen K-Homologieklassen deuten.

Genau wie γ_Z können wir γ_Z^i als eine charakteristische Zahl erhalten: Wegen (0.6) gilt $a_i = \gamma_Z^i$ wenn $\alpha_Z(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{|\tilde{X}|-1} a_i \rho^i$ und aus (7.9) folgt:

Korollar 8.5 Der getwistete Signaturdefekt $\gamma_Z^{-i}(\tilde{X} \rightarrow X)$ wird durch die charakteristische Zahl

$$- \langle \psi^i(f^* y), [X]_S \rangle_K \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ gegeben}$$

($f: X \rightarrow BG$ klassifizierende Abbildung der G -Aktion auf $\tilde{X}$)

Die Koeffizienten von v -Invarianten bei der Entwicklung als Linearkombination

der ρ^i in $S_a^{-1}R(G)/R(G)$ wurden in § 1 als v-Defekte γ_v^i bezeichnet. Die Aussage "die getwisteten Defekte γ_v^i zu den v-Invarianten bestimmen die Bordismusklassen in $\tilde{\Omega}_*(BG)$ " ist dann wegen (2.12) eine andere Formulierung von (8.4).

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Ordnung von γ_Z^i und γ_Z .

1. Es sei zunächst $G = Z_{p^r}$ (p ungerade Primzahl). Die Ordnung von $L^n(p^r)$ in $\tilde{\Omega}_*(BZ_p)$ oder die Ordnung von $i_*[L^n(p^r)]_S = -\alpha_Z(L^n(p^r))$ ist bekanntlich $([C-F1])$ p^{r+a} wo a durch die Ungleichung $a(2p-2) < 2n-1 < (a+1)(2p-2)$ bestimmt ist. Nun gilt :

$$\begin{aligned} \gamma_Z(S^{2n-1} \rightarrow L^n(p^r)) &= -\langle \tilde{r}eg, i_*[L^n(p^r)]_S \rangle_K = -\langle \tilde{r}eg, i_*[L^{n+1}(p^r)]_S \wedge \frac{\xi-1}{\xi+1} \rangle_K \\ &= -\langle \tilde{r}eg \cup (\xi-1), i_*[L^{n+1}(p^r)]_S \cap (1+\xi)^{-1} \rangle_K \\ &= +\langle p^r y, i_*[L^{n+1}(p^r)]_S \cap (1+\xi)^{-1} \rangle_K \end{aligned}$$

Daher : Ordnung $(\gamma_Z) \leq p^{-r}$ Ordnung $\alpha_Z(L^{n+1}(p^r)) = p^{\bar{a}}$, wo jetzt $\bar{a}$ durch die Ungleichung $\bar{a}(2p-2) < 2n+1 < (\bar{a}+1)(2p-2)$ festgelegt ist. Man rechnet sofort nach, daß $\bar{a} = [n/(p-1)]$ gilt ($[x]$ = größte ganze Zahl n mit $n \leq x$).

Damit folgt für eine $(2n-1)$ -dimensionale freie Z_{p^r} -Mannigfaltigkeit M :

$$p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \cdot \gamma(M \rightarrow M/Z_{p^r}) \in \mathbb{Z}$$

2. Für die Primzahl 2 gilt, daß $\gamma(M \rightarrow M/Z_{2^r})$ immer ganzzahlig ist. Für $r = 1$ folgt dies aus der Ganzzahligkeit der α -Invariante einer Involution. Ist r größer als 1 kann man die Z_{2^r} -Überlagerung in 2-fache Überlagerungen $M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_r$ ($M_i = M/Z_{2^i}$) zerlegen. Nun gilt ganz allgemein für für zusammengesetzte Überlagerungen $M \xrightarrow{p} M_1 \xrightarrow{q} M_2$

$$\gamma(M \rightarrow M_2) = \gamma(M \rightarrow M_1) + p\gamma(M_1 \rightarrow M_2) \quad (8.6)$$

was man sofort durch Einsetzen der Definitionen einsehen kann. Induktiv folgt dann, daß auch $\gamma(M \rightarrow M/Z_{2^r})$ ganzzahlig ist.

3. Es sei jetzt G eine beliebige endliche Gruppe. Man schreibt G als ein Produkt

von zyklischen p -Gruppen $G = \prod \mathbb{Z}_{p^{r_p}}$ und zerlegt die Überlagerung in eine Folge von Überlagerungen, die jeweils Primpotenzüberlagerungsgrad besitzen. Wie unter 2) beschrieben erhält man für γ eine Summendarstellung, in der der Summand, der zur Überlagerung mit Grad p^{r_p} gehört, höchstens den Nenner $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}$ hat. Damit ist gezeigt:

Satz 8.7 Es sei G eine endliche zyklische Gruppe und M eine freie G -Mannigfaltigkeit der Dimension $2n-1$.

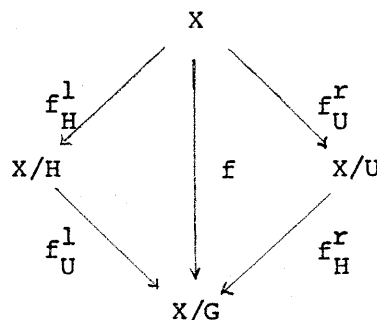
Der Nenner des Signaturdefektes der Überlagerung $M \rightarrow M/G$ teilt das Produkt $\prod p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}$, wobei p die ungeraden Primzahlen, die $|G|$ teilen, durchläuft.

Bemerkungen:

1. Natürlich gilt diese Schranke für die Ordnung eines Defektes auch für die zu anderen v -Invarianten gehörenden (totalen) Defekte.
2. Man beachte die Ähnlichkeit der Ordnung von γ_Z mit dem Nenner der L -Polynome (siehe [H1]).

Zagier hat in [Z] höherdimensionale Dedekindsummen $d(p; a_1, \dots, a_n)$ definiert und untersucht. Wegen $d(p; a_1, \dots, a_n) = \gamma(S^{2n-1} \xrightarrow{\quad} L^n(p; a_1, \dots, a_n))$ stellt der Beweis zu (8.7) einen "topologischen" Beweis für die dort zahlentheoretisch bewiesene dem obigen Satz entsprechende Aussage für Dedekindsummen dar.

Wir wollen das Verhalten von γ_Z bei Zusammensetzung von Überlagerungen noch etwas näher betrachten. Dabei sei G ein Produkt zweier Gruppen U und H . Zu einer ungeradedimensionalen freien G Mannigfaltigkeit X erhält man ein Diagramm von Überlagerungen



Die Gleichung $\gamma(X \longrightarrow X/U) + |U|\gamma(X/U \longrightarrow X/G) = \gamma(X \longrightarrow X/G)$ wurde schon unter 2. erwähnt.

Sind die Ordnungen von U und H relativ prim und U und H zyklisch, dann kann man den Signaturdefekt mod $\mathbb{Z}$ der Überlagerung $X \longrightarrow X/G$ nicht nur durch $\gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/U)$ und $\gamma_{\mathbb{Z}}(X/U \longrightarrow X/G)$ berechnen, sondern auch durch $\gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/U)$ und $\gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/H)$ bzw. durch $\gamma_{\mathbb{Z}}(X/U \longrightarrow X/G)$ und $\gamma_{\mathbb{Z}}(X/H \longrightarrow X/G)$:

Lemma 8.8 Es seien G, U, H wie oben mit $(|H|, |U|) = 1$. Dann gilt

1. $\gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/G) = \gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/U) + \gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/H)$
2. $\gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/G) = |H|\gamma_{\mathbb{Z}}(X/H \longrightarrow X/G) + |U|\gamma_{\mathbb{Z}}(X/U \longrightarrow X/G)$
3. $\gamma_{\mathbb{Z}}(X \longrightarrow X/U) = |H|\gamma_{\mathbb{Z}}(X/H \longrightarrow X/G)$

Beweis: Wegen $\gamma(X \longrightarrow X/U) - |H|\gamma(X/H \longrightarrow X/G) = \gamma(X \longrightarrow X/H) + |U|\gamma(X/U \longrightarrow X/G)$

kann man eine Invariante $\Delta(X, f, U, H) := \gamma(X \longrightarrow X/U) - |H|\gamma(X/H \longrightarrow X/G)$

definieren. Δ beschreibt den Defekt den die γ -Invariante einer Überlagerung

$X/H \longrightarrow X/G$ erleidet, wenn man diese Überlagerung mit der Überlagerung

$X/U \longrightarrow X/G$ auf X/U zurückzieht. Sind die Ordnungen von H und U relativ

prim, dann ist Δ ganzzahlig, denn $\Delta = \gamma(X \longrightarrow X/U) + |H|\gamma(X/H \longrightarrow X/G) \in \mathbb{Z}[1/|U|]$

$$\text{und } \Delta = \gamma(X \longrightarrow X/H) + |U|\gamma(X/U \longrightarrow X/G) \in \mathbb{Z}[1/|H|]$$

Damit ist 3. gezeigt. 1. und 2. sind Folgerungen aus 3. mit (8.6). Die Gleichung

1) ist einfach eine Folge des Zerfallens von $K_1(BG)$ in $K_1(BH) \oplus K_1(BU)$ unter

der Voraussetzung $(|H|, |G|) = 1$

Bemerkungen:

1. Analog hierzu läßt sich die $\alpha_{\mathbb{Z}}$ -Invariante der G -Aktion durch die $\alpha_{\mathbb{Z}}$ -Invarianten der Aktionen von U und H ausdrücken. Das Verhalten von $\alpha_{\mathbb{Z}}$ unter dem Isomorphismus $K_1(BG) = K_1(BH) \oplus K_1(BU)$ wurde in § 5 betrachtet. Ebenfalls analoge Formeln gelten für die Defekte anderer v -Invarianten, wie etwa der Todd-Defekt.

2. Die Formel (8.6) impliziert insbesondere, daß die Ordnung von γ_Z einer Z_{p^r} -Aktion nicht mit r anwächst. Die maximale Ordnung von γ_Z ist im Gegensatz zur Ordnung von γ_Z^1 und α_Z unabhängig von r . γ_Z zeigt sogar ein gewisses Stabilitätsverhalten gegenüber der Variation von r (falls eine genügend "große" Z_{p^r} -Aktion überhaupt definiert ist). Hält man n fest, so gilt ab $r \geq r_0 = [n/(p-1)]$

$$\gamma_Z(M \rightarrow M/Z_{p^{r+1}}) = \gamma_Z(M \rightarrow M/Z_{p^r})$$

denn die Differenz $\gamma(M \rightarrow M/Z_{p^{r+1}}) - \gamma(M \rightarrow M/Z_{p^r}) = p^r \cdot \gamma(M/Z_{p^r} \rightarrow M/Z_{p^{r+1}})$ ist unter der Voraussetzung $r \geq [n/(p-1)]$ ganzzahlig.

Das läßt sich insbesondere auf Aktionen auf Sphären anwenden: Da z.B. immer $\gamma_Z(S^{2n-1} \rightarrow L^n(p)) = \frac{1}{p}$ für $n = p-1$ gilt, folgt, da der stabile Bereich schon erreicht ist,

$$\gamma_Z(S^{2n-1} \rightarrow L^n(p^r)) = \frac{1}{p} \text{ für } n = p-1$$

3. Hat G wie oben eine Untergruppe $\{1\} \neq U \neq G$, dann läßt sich aus den Werten $\alpha(g, X) \in \mathbb{C}$ durch Linearkombination nicht nur die rationale Zahl $\gamma(X \rightarrow X/G)$ bilden, sondern man erhält schon mit einer geringeren Anzahl von Summanden rationale Zahlen. Es ist klar wie sich diese Zahlen als Signaturdefekte von Aktionen von Untergruppen von G deuten lassen. Genau wie für γ_Z gibt es in $K^1(BG, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ dann auch Elemente, die über das Kroneckerprodukt, die Restklassen dieser Zahlen in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ liefern.

Durch die Darstellung des Signaturdefektes γ als die Summe der α -Invarianten kann man γ über Fixpunktmenge berechnen. Die Formeln werden besonders übersichtlich, wenn die Gruppenaktion die Einschränkung einer freien S^1 -Aktion ist. Für eine freie S^1 -Aktion auf X^{2K-1} ist die Orbitabbildung $X \rightarrow X/S^1 =: Y$ ein S^1 -Prinzipalbündel ξ und man kann das assoziierte Scheibenbündel $D(\xi)$ als berandende S^1 -Mannigfaltigkeit nehmen. Die Fixpunktmenge besteht aus dem Nullschnitt Y .

Nach [H-Z] oder [A-S4] gilt dann mit $x = c_1(\xi)$ für die α -Invariante :

$$\alpha(t, x) = - \left\langle \frac{te^{2x} + 1}{te^{2x} - 1} \cup L(Y), [Y] \right\rangle + \text{sign}(Y, x) \quad (8.9)$$

($\text{sign}(Y, x)$ ist die Signatur der quadratischen Form $(a, b) \rightarrow \langle abx, [Y] \rangle$ mit a, b aus $H^{k-2}(Y)$)

Schränkt man die S^1 -Aktion auf die Untergruppe der p -ten Einheitswurzeln ein, so erhält man durch (8.9) die α -Invariante dieser Z_p -Aktion und zusammen mit der bekannten trigonometrischen Identität $\frac{1}{n} \sum_{a \neq y} \frac{az+1}{az-1} = \frac{yz^n+1}{yz^n-1}$ die Formel

$$\gamma(X \rightarrow X/Z_p) = - \sum_{\xi \neq 1} \alpha(\xi, x) = \left\langle \left(p \cdot \frac{e^{2px} + 1}{e^{2px} - 1} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} \right) \cup L(Y), [Y] \right\rangle_H - (p-1) \text{sign}(Y, x) \quad (8.10)$$

und für

$$\gamma^r(X \rightarrow X/Z_p) = \left\langle \left(1 - 2 \cdot \frac{e^{2rx} - 1}{e^{2px} - 1} \right) \cup L(Y), [Y] \right\rangle - \text{sign}(Y, x) \quad (8.11)$$

was man unmittelbar durch Einsetzen verifiziert oder über den Residuensatz herleiten kann.

Wie man der Bordismus-Gysinsequenz des Bündels $H^p \rightarrow BS^1$ (H = universelles Linienbündel, $S(H^p) = BZ_p$) entnimmt, ist der Transfer $\Omega_{2n}(BS^1) \rightarrow \tilde{\Omega}_{2n-1}(BZ_p)$ surjektiv, so daß man für eine gegebene Z_p -Mannigfaltigkeit bis auf Bordismus immer die obige Situation erreichen kann.

Für Mannigfaltigkeiten genügend kleiner Dimension können wir $K(-; Z_p)$ -Kroneckerprodukte durch $H^*(-; Z_p)$ Produkte ausrechnen (siehe § 6).

Es sei $(X, f) \in \tilde{\Omega}_{2r-1}^{(BZ_p)}$, $r \leq p-1$ und p eine ungerade Primzahl. Um $\langle f^*y, [X]_S \rangle_K$ zu berechnen, müssen wir $\bar{ch}(y)$ kennen. Auf $L^{p-1}(p)$ läßt sich $\bar{ch}(y)$ leicht bestimmen. Die unteren Terme von $\bar{ch}(y) \in H^*(L^{p-1}(p); Z_p)$ erhält man über den Bocksteinhomomorphismus aus $ch(\xi)$. Für den Term aus $H^{2p-3}(L^{p-1}(p); Z_p)$ sind einige Extraüberlegungen, die wir uns hier ersparen wollen, nötig.

Es gilt: $\bar{ch}(y) = \sum_{i=0}^{p-2} (x^i \cdot y) / (i+1)! \quad (x, y \text{ wie in } \S 0) \quad \text{und daher}$

$$\gamma_Z^{-1}(x, f) = \langle f \bar{y}, [x]_S \rangle_K = \langle \bar{ch} f^* \psi^2_{Y \cup L(x)}, [x] \rangle_{H(\cdot; Z_p)}$$

Dies ist genau das in § 0 hergeleitete Kroneckerprodukt.

§ 9 α_Z und γ_Z auf stabil-parallelisierbaren Mannigfaltigkeiten

Sowohl für endliche als auch für abelsche Liegruppen kann man - ganz analog zum orientierten Bordismus - die Bordismusgruppen freier stabil-parallelisierter G -Mannigfaltigkeiten mit den stabilen Homotopiegruppen des klassifizierenden Raumes von G $\Omega_*^{\text{fr}}(BG) = \pi_*^S(BG^+)$ identifizieren. Dabei hat man die Parallelisierung als verträglich mit der G -Aktion vorauszusetzen, genauer: eine stabile äquivariante Parallelisierung einer G -Mannigfaltigkeit M ist ein G -Vektorbündelisomorphismus

$$TM \oplus \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^{n+m}$$

wo G auf TM über die Ableitungen und auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+m}$ trivial operiert. Die Orbitmannigfaltigkeit ist dann wieder parallelisierbar (siehe [L-S]).

Für eine Inklusion $H \subset G$ existiert ebenfalls ein Transfer (siehe z.B. [K-P]), der wiederum durch die Einschränkung der G -Aktion induziert wird. Der sonst recht triviale Transfer zur Inklusion $\{1\} \subset G$ gewinnt für Ω_*^{fr} eine überraschende Bedeutung: Kahn und Priddy haben in [K-P] gezeigt, daß z.B. für eine Primzahl p der Transfer $t : \Omega_*^{\text{fr}}(BZ_p) \longrightarrow \Omega_*^{\text{fr}}(*) = \Omega_*^{\text{fr}}(B\{1\})$, auf $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BZ_p)$ eingeschränkt, eine Surjektion auf die p -Komponenten von $\Omega_*^{\text{fr}}(*)$ liefert. Auf $\Omega_*^{\text{fr}}(*)$ ist die e -Invariante von Adams, die wie γ_Z $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ -wertig ist, definiert. Auf die Beziehungen zwischen diesen Invarianten gehen wir zuerst ein.

Der zum Todd-Geschlecht bzw. zum komplexen Bordismus gehörenden e_C -Invarianten entspricht für den orientierten Bordismus die zum L-Geschlecht gehörende, von Kreck in [K] definiert und untersuchte δ -Invariante (mod $\mathbb{Z}$).

Ähnlich wie bei der zum L-Geschlecht gehörenden v -Invarianten α_Z läßt sich diese Invariante zu einer $\mathbb{Q}$ -wertigen - allerdings nicht bordismusinvarianten - Funktion anheben:

Man wählt zur stabil-parallelisierten Mannigfaltigkeit (M^{4m-1}, α) eine berandende Mannigfaltigkeit X und setzt (siehe [K]):

$$\delta(M, \alpha) := \text{sign}(X) - L(TX/\alpha)$$

wobei TX/α das durch die stabile Trivialisierung α auf $X/\partial X$ definierte stabile Bündel ist.

Wie in [K] bewiesen wird, ist der Defekt, den δ bei einer regulären p -fachen Überlagerung erfährt, gerade die negative Summe der α -Invarianten, d.h.

$$\delta(\tilde{M}, \pi^* \alpha) - p \cdot \delta(M, \alpha) = \gamma(\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M) \quad (9.1)$$

Damit folgt sofort: die Hintereinanderschaltung

$$\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BZ_p) \xrightarrow{t} \Omega_*^{\text{fr}}(*) \xrightarrow{\delta_Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ist nichts anderes als der Signaturdefekt mod $\mathbb{Z}$.

Denn für $(\tilde{M} \rightarrow M) \in \tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BZ_p)$ ist M als Element in $\Omega_*^{\text{fr}}(*)$ nullbordant, daher $\delta(M) \in \mathbb{Z}$ und aus (9.1) folgt:

$$\gamma_Z(\tilde{M} \rightarrow M) = \delta_Z(\tilde{M}) = \delta_Z \circ t(\tilde{M}) \quad (9.2)$$

Damit läßt sich in manchen Fällen der p -Anteil von δ_Z durch γ_Z leicht berechnen.

Bemerkungen:

1. Während auf dem Untermodul $\Omega_*^{\text{fr}}(*) \subset \Omega_*^{\text{fr}}(BZ_p)$ der Signaturdefekt verschwindet, ist dies i. A. für $\delta_Z \circ t$ nicht der Fall.
2. Ersetzt man δ_Z durch die $e_{\mathbb{C}}$ -Invariante so gilt die analoge Aussage mit dem Todd-Defekt $\gamma_Z^T = e_{\mathbb{C}} \circ t$. Man braucht nur nachzurechnen, daß sich γ_Z und γ_Z^T um den gleichen Faktor wie δ_Z und $e_{\mathbb{C}}$ unterscheiden: Für $e_{\mathbb{C}}$ und δ_Z folgt aus den Ergebnissen von [K] $\delta_Z(M, \alpha) = -2^{2n} e_{\mathbb{C}}(M, \alpha)$ auf $\Omega_{4n-1}^{\text{fr}}(*)$; für γ_Z und γ_Z^T müssen wir den Unterschied der beiden Fundamentalklassen $[M]_S$ und $[M]_T$ bestimmen. Da das stabile Tangentialbündel von M trivial ist, folgt $\Lambda^*(TM \oplus \mathbb{R}) = 2^{2n}$ und aus § 2 daher $[M]_S = 2^{2n} [M]_T$. Das Vorzeichen wird von der Konvention, α_Z als negative v -Invariante zum L -Geschlecht zu definieren, verursacht.
Damit ist auf $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BZ_p)$ der Defekt der $e_{\mathbb{C}}$ -Invarianten mit γ_Z^T identifiziert.
3. Wie unter 2. kann man zeigen, daß alle auf diese Art und Weise zu v -Invarianten

gebildete $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ -wertige Invarianten sich auf dem gemeinsamen Definitionsbereich nur um einen Faktor unterscheiden.

4. Da der p -Anteil der $e_{\mathbb{C}}$ -Invarianten in allen von $2n(p-1)-1$ verschiedenen Dimensionen verschwindet (siehe [Ad2]) hat das Faktorisieren von γ_Z über $\Omega_*^{\text{fr}}(*)$ die Konsequenz, daß in diesem Dimensionsbereich γ_Z ebenfalls verschwindet.

Die Komposition $\Omega_*^{\text{fr}}(\text{BS}^1) \xrightarrow{t} \Omega_*^{\text{fr}}(*) \xrightarrow{\delta_Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, die wir als nächstes betrachten werden, faßt in gewisser Weise die durch die zu verschiedenen Primzahlen p gehörenden Invarianten $\Omega_*^{\text{fr}}(\text{BZ}_p) \xrightarrow{t} \Omega_*^{\text{fr}}(*) \xrightarrow{\delta_Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zusammen: In [L-S] haben Löffler und Smith u.a. den Transfer $\Omega_*^{\text{fr}}(\text{BS}^1) \longrightarrow \Omega_*^{\text{fr}}(*)$ untersucht und eine Formel für $e_{\mathbb{C}} \circ t$ angegeben. Abgekürzt läßt sich diese Formel - in der Notation von [L-S] durch

$$e_{\mathbb{C}}([S(\lambda), \Phi_{\lambda}]) = \langle 1/(1-e^{-c_1(\lambda)}) \rangle, [M] >_H \quad (9.3)$$

wiedergeben. Dabei ist $[S(\lambda), \Phi_{\lambda}]$ das zur stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit M und dem S^1 -Bündel λ auf M gehörende Bild unter dem Transfer (Φ_{λ} bezeichnet eine kanonische stabile Trivialisierung des Tangentialbündels des Totalraumes $S(\lambda)$). Das Kroneckerprodukt ist natürlich so zu interpretieren, daß man $1/(1-e^{-c_1(\lambda)})$ in eine Laurentreihe entwickelt und den vor $t^{\dim M/2}$ stehenden Koeffizienten auswertet.

Ersetzt man wieder die e -Invariante durch δ_Z , so erhält man mit minimalem Modifikationen aus dem Beweis zu (9.3) in [L-S] die Formel:

$$\delta([S(\xi), \Phi_{\xi}]) = - \langle \frac{e^{2c_1(\xi)} + 1}{e^{2c_1(\xi)} - 1} \rangle, [M] > + a \quad (9.4)$$

(a ganzzahlige Konstante)

Vergleicht man die Reihenentwicklung von $-(e^{2c_1(\xi)} + 1)/(e^{2c_1(\xi)} - 1)$ mit der von $1/(1-e^{-c_1(\xi)})$, so folgt die schon erwähnte Beziehung

$$\delta([S(\xi), \Phi_{\xi}]) \mod \mathbb{Z} = -2^{2n} e_{\mathbb{C}}([S(\xi), \Phi_{\xi}])$$

die deshalb auch als Beweis für (9.4) (mod $\mathbb{Z}$) dienen kann.

Zwar kann man für S^1 -Bündel keinen Signaturdefekt in der Art von (0.2) definieren, man hat jedoch - zumindest im stabil-parallelisierten Fall - als Ersatz den invarianten Teil der α -Invarianten der S^1 -Aktion, d.h. den Wert von $\alpha(t, S(\xi))$ an der "Polstelle" 1. (8.9) und (9.4) zeigen gerade $\delta(S(\xi), \phi_\xi) = \alpha(1, S(\xi)) + \text{ganzzahlige Konstante}$. Analog hat man in der Formel für $e_{\mathbb{C}} \circ t$ die zum Todd-Geschlecht gehörende v -Invariante an der "Polstelle" $t = 1$ auszuwerten. Die p -Komponente der Komposition

$\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BS^1) \xrightarrow{t} \Omega_*^{\text{fr}}(*) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wird nun durch $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BS^1) \xrightarrow{t} \Omega_*^{\text{fr}}(B\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ angegeben: Denn nach (8.10) unterscheiden sich $\delta_Z \circ t \equiv \alpha(1, -)$ und γ_Z durch das Kroneckerprodukt $p < (e^{2px} + 1)/(e^{2px} - 1)$, $[B] >$, das aber keinen p -Anteil im Nenner besitzt (siehe [H 1]).

Man beachte, daß da das Bild des Transfers $t: \tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BS^1) \rightarrow \Omega_*^{\text{fr}}(B\mathbb{Z}_p)$ nicht in $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(B\mathbb{Z}_p)$ liegt, (9.2) nicht direkt anwendbar ist. Für ein Element $(S(\xi) \rightarrow B)$ aus $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BS^1)$ ist damit durch die rationale Zahl $\alpha(1, S(\xi))$ der Wert aller Signaturdefekte mod $\mathbb{Z}$ der aus der S^1 -Aktion durch Einschränkung hervorgehenden $\mathbb{Z}_p$ -Aktionen gegeben.

Unser nächstes Ziel ist die Beschreibung von α_Z auf $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(B\mathbb{Z}_p)$ für eine ungerade Primzahl p .

Eine stabil parallelisierte Mannigfaltigkeit hat eine kanonische stabile fast-komplexe Struktur und Orientierung. Daher sind Vergißhomomorphismen

$\Omega_*^{\text{fr}}(X) \xrightarrow{F_c} \Omega_*^U(X)$ und $\Omega_*^{\text{fr}}(X) \xrightarrow{F_r} \Omega_*^{\text{SO}}(X)$ definiert. Die Zusammensetzung

$\Omega_*^{\text{fr}}(X) \xrightarrow{F_c} \Omega_*^U(X) \xrightarrow{\mu_c} K_*(X)$ ergibt genau den Thomhomomorphismus

$\Omega_*^{\text{fr}}(X) \xrightarrow{H_c} K_*(X)$ (bzw. $\Omega_*^{\text{fr}}(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \xrightarrow{H_r} K_*(X; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$). Andererseits

wird $H_{\mathbb{C}}$ auch durch den Hurewiczhomomorphismus zu $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{B}U$ definiert. Dies

liefert eine zweite Beschreibung von $\mu_{\mathbb{C}}((M, f)) = f_*[M]_T$: (M, f) wird durch

eine Homotopieklasse $g: S^i \rightarrow X^* \wedge S^j$ repräsentiert. $g_*[S^i]_T \in \tilde{K}_i(X^* \wedge S^j)$

definiert über den Bottisomorphismus B ein Element $Bg_*[S^i]_T \in \tilde{K}_{i-j}(X)$ und

es gilt $Bg_*[S^i]_T = \mu_{\mathbb{C}}((M, f))$ (siehe [C-F3], [Ha]).

Damit hat man $\alpha_Z(M, f)$ und $H_R((M, f))$ für $(M, f) \in \Omega_*^{\text{fr}}(BG)$ identifiziert

(bzw. $\text{Todd}_Z(M, f)$ und $H_C(M, f)$).

Weiterhin sind μ_C bzw. μ_R auf Bild F_C bzw. Bild F_R injektiv, denn auf stabil parallelisierten Mannigfaltigkeiten verschwinden alle charakteristische Zahlen $f_*(c_i(TM) \cap [M])$ außer $f_*(1 \cap [M]) = \mu(M, f)$ und nach §4 ist die Abbildung, die (M, f) ihren Satz charakteristische Zahlen zuordnet, injektiv. Das Studium von H_C läßt damit Rückschlüsse auf das Verhalten von F_C zu.

Wie sehen die Komponentenfunktionen γ_Z^i der α_Z -Invarianten auf $\tilde{\Omega}_*^{\text{fr}}(BZ_p)$ aus?

Mit der Darstellung von γ_Z^i als K-Theorie-charakteristische Zahl ist es möglich, Relationen zwischen den γ_Z^i für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten zu finden:

Lemma 9.5 Es sei p eine ungerade Primzahl und $(\tilde{M} \rightarrow M)$ aus $\tilde{\Omega}_{2n-1}^{\text{fr}}(BZ_p)$, dann gilt $\gamma_Z^{-k}(\tilde{M} \rightarrow M) = k^n \cdot \gamma_Z^{-1}(\tilde{M} \rightarrow M)$.

Beweis : $(\tilde{M} \rightarrow M)$ werde repräsentiert durch $g : S^{2n+2i-1} \rightarrow BZ_p \wedge S^{2i}$. Nach (8.5) gilt $\gamma_Z^{-k}(\tilde{M} \rightarrow M) = \langle \psi^k(y), B \cdot g_*[S^{2n+2i-1}]_S \rangle_K$

Bekanntlich ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} K^1(BZ_p \wedge S^{2i}; Z_p^\infty) & \xrightarrow{\cong} & K^1(BZ_p; Z_p^\infty) \\ \psi^k \downarrow & & \downarrow \psi \cdot k^i \\ K^1(BZ_p \wedge S^{2i}; Z_p^\infty) & \xrightarrow{\cong} & K^1(BZ_p; Z_p^\infty) \end{array}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} k^i \cdot \gamma_Z^{-k}(\tilde{M} \rightarrow M) &= \langle k^i \psi^k(y), B \cdot g_*[S^{2n+2i-1}]_S \rangle_K = \langle -g^* \psi^k(By), [S^{2n+2i-1}]_S \rangle_K \\ &= \langle -k^{n+i} g^*(By), [S^{2n+2i-1}]_S \rangle_K = \langle -k^{n+i} y, B \cdot g_*[S^{2n+2i-1}]_S \rangle_K \\ &= k^{n+i} \gamma_Z^{-1}(\tilde{M} \rightarrow M) \end{aligned}$$

was die Behauptung $\gamma_Z^{-k}(\tilde{M} \rightarrow M) = k^n \cdot \gamma_Z^{-1}(\tilde{M} \rightarrow M)$ impliziert.

Bemerkung:

Bei dem Beweis zu (9.5) haben wir gleichzeitig die Operation ψ^k auf Bild H_R mitberechnet. Für x aus $\text{Bild}(H_R : \tilde{\Omega}_{2n-1}^{\text{fr}}(BZ_p) \rightarrow K_1(BZ_p))$ gilt :

$$\psi^k(x) = k^n \cdot x \quad (9.6)$$

Denn wegen der Beziehungen zwischen den γ_Z^1 wird x schon durch das eine Kroneckerprodukt $\langle y, x \rangle$ eindeutig festgelegt, somit $\langle y, \psi^k x \rangle = \langle \psi^k y, x \rangle = k^n \langle y, x \rangle$

$\alpha_Z: \Omega_*^{\text{fr}}(\text{BZ}_P) \longrightarrow K_1(\text{BZ}_P)$ wird also schon durch die Funktion γ_Z^1 vollständig beschrieben. Damit haben wir bewiesen:

Satz 9.7 Bild $H: \Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P) \longrightarrow K_1(\text{BZ}_P)$ ist eine endliche zyklische Gruppe.

Beweis: Man braucht nur zu beachten, daß $\Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P)$ eine endliche Gruppe ist und daß eine endliche Untergruppe von Z_P^∞ zyklisch ist.

Mit ganz anderen Methoden hat Smith in [S] die folgende Aussage, die wir wegen der Injektivität von μ_C aus (9.7) erhalten, bewiesen.

Korollar 9.8 (Smith [S]) Bild $F_C: \Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P) \longrightarrow \Omega_{2n-1}^U(\text{BZ}_P)$ ist zyklisch. Eine analoge Aussage gilt auch für Bild F_R .

Als nächstes schätzen wir die Ordnung der Gruppe $H(\Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P))$ nach oben ab:

Satz 9.9 Die Ordnung des Bildes von $H: \Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P) \longrightarrow K_1(\text{BZ}_P)$ ist nicht größer als $p^{1+v_p(n)}$ (p ungerade Primzahl)

Hierbei bezeichnet $v_p(n)$ den Exponenten von p in der Primzerlegung von n .

Beweis: Für $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ hatten wir festgestellt $\psi^k(x) = k^n \cdot x$ für x aus $H(\Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P))$. Das ist eine ziemlich starke Einschränkung für ein Element x aus $K_1(\text{BZ}_P)$, denn aus $k \equiv k' \pmod{p}$ muß $k^n x = k'^n x$ folgen. Insbesondere gilt mit $r = k^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ $(k^{n(p-1)} - 1)x = 0$ für $x \in H(\Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P))$. Nach [Ad 1] ist der p -Anteil in $k^{n(p-1)} - 1$ im "ungünstigsten Fall" (man wählt k so, daß die Restklasse von k die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}/2p^2)^*/(\pm 1)$ erzeugt) gerade $p^{(1+v_p(n))}$, so daß x höchstens diese Ordnung haben kann.

Nun hat Smith in [S] Elemente $\delta_k \in \Omega_{2k-1}^{\text{fr}}(\text{BZ}_P)$ angegeben und vermutet, daß diese Elemente das Bild von $F_C: \Omega^{\text{fr}}(\text{BZ}_P) \longrightarrow \Omega^U(\text{BZ}_P)$ erzeugen.

Für den Dimensionsbereich $2n(p-1)-1$ hat er diese Vermutung bewiesen.

Mit der oben gemachten Abschätzung der Ordnung von Bild H sind wir nun in der Lage, diese Vermutung vollständig zu beweisen:

Satz 9.10 Bild $H: \Omega_{2n-1}^{fr}(B\mathbb{Z}_p) \longrightarrow K_1(B\mathbb{Z}_p)$ ist zyklisch von der Ordnung $p^{1+Vp(n)}$ und wird von dem Element σ_n erzeugt.

Die Aussage gilt natürlich auch für Bild F_R und Bild F_C .

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die Ordnung von σ_n in $K_1(B\mathbb{Z}_p)$ genau $p^{1+Vp(n)}$ ist.

Zunächst zur Definition von σ_k :

Über der stabil parallelisierten Mannigfaltigkeit $N^{2(k-1)} := S^2 \times \dots \times S^2$

($k-1$ Faktoren, mit Produkt-Parallelisierung) ist das Linienbündel

$\zeta_{k-1} := \gamma \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \gamma$ definiert ($\hat{\otimes}$ = äußeres Tensorprodukt, γ = Hopfbündel).

$S(\zeta_{k-1})$ ist damit ein Element in $\Omega_{2k-1}^{fr}(BS^1)$ und man setzt

$\sigma_k := \text{Transfer}(S(\zeta_{k-1}), N^{2(k-1)}) = (S(\zeta_{k-1}) \rightarrow S(\zeta_{k-1}^p))$. Nach $[S]$ gilt für die klassifizierende Abbildung $f_{k-1}: N^{2(k-1)} \rightarrow P_{k-1}\mathbb{C}$ des Linienbündels

ζ_{k-1} $\text{degree}(f_{k-1}) = (k-1)!$

Deshalb gilt $\langle c_1(\zeta_k)^{k-1}, [N^{2(k-1)}] \rangle_H = (k-1)! \cdot (-1)^{k-1}$

Mit der Formel (8.11) können wir damit $\gamma_Z^1(S(\zeta_{k-1})) \longrightarrow S(\zeta_{k-1}^p)$ berechnen:

$$\gamma_Z^1(\sigma_k) = -2 \langle \frac{e^{2x}-1}{e^{2px}-1}, [N^{2(k-1)}] \rangle = -\frac{2}{p} \langle \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2px}{e^{2px}-1}, [N^{2(k-1)}] \rangle$$

($x = c_1(\zeta_{k-1})$) Mit den Reihenentwicklungen

$$\frac{e^{2x}-1}{2x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2x)^i}{(i+1)!}, \quad \frac{2px}{e^{2px}-1} = 1 - px + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{B_j}{(2j)!} (px)^{2j}$$

und $\text{degree } f_{k-1} = (k-1)!$ folgt, daß zum Wert des Kroneckerproduktes mod $\mathbb{Z}$ nur der oberste Term von $(e^{2x}-1)/2x$ etwas beitragen kann, nämlich der Summand $(2x)^{k-1}/k!$. Daher

$$\gamma_Z^1(\sigma_k) = + \frac{(-2)^k}{p \cdot k} \quad (9.11)$$

und $H(\sigma_k)$ hat die Ordnung $p^{Vp(k)+1}$.

Bemerkungen:

1. $(\gamma_Z^T)^1$ hat die etwas einfachere Gestalt $1/p \cdot k$.

2. Für γ_Z erhält man $\gamma_Z(\sigma_n) = (-2)^n \cdot \left(\sum_{k=1}^{p-1} k^n \right) \cdot 1/(p \cdot n)$. Für $n = a(p-1)$

ist diese Summe nicht durch p teilbar ($p > 3$) und γ_Z hat die Ordnung von

γ_Z^1 . In allen Fällen verschwindet γ_Z auf $\Omega_{2n-1}^{fr}(BZ_p)$. Mit der Formel

(8.10) erhält man $\gamma_Z(\sigma_n) = -(-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot 2^n \cdot (B_{\frac{n}{2}})/(2n)$, woraus das schon be-

schriebene Verhalten von γ_Z folgt. Mit (9.10) und (9.11) ist damit α_Z

auf $\Omega_{*}^{fr}(BZ_p)$ vollständig bestimmt.

§10 Der funktionale Cherncharakter auf BZ_p

Der n -te Term des Cherncharakters ch^n ist eine Kohomologieoperation von $K^*(X)$ nach $H^{2n}(X; \mathbb{Q})$ und definiert deshalb auf Klassen in $K^0(X)$, die sowohl im Kern von ch^n als auch im Kern des von einer stetigen Abbildung $f: Y \rightarrow X$ induzierten Homomorphismus liegen, eine funktionale Kohomologieoperation, den funktionalen Cherncharakter zu f (siehe [T]).

Wählt man für Y eine ungeradedimensionale Sphäre S^{2n-1} und für X einen Raum ohne rationale Kohomologie in den Dimensionen $2n$ und $2n-1$, dann gilt immer $f^*(x) = ch^n(x) = 0$ für $x \in \tilde{K}^0(X)$ und man erhält einen Homomorphismus $ch_f^n: \tilde{K}^0(X) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. In Diagrammschreibweise:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \tilde{K}^0(S^{2n-1}) & \rightarrow & \tilde{K}^0(C_f) & \xrightarrow{j^*} & \tilde{K}^0(X) \xrightarrow{f^*} 0 \\ & & \downarrow ch^n & & \downarrow ch^n & & \downarrow ch^n \\ 0 & \rightarrow & H^{2n}(S^{2n}; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H^{2n}(C_f; \mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \end{array} \quad (10.1)$$

$$(f: S^{2n-1} \rightarrow X, C_f := e^{2n} \cup_f X)$$

$$ch_f^n(x) := \delta^{-1} \cdot ch^n \circ j^{*-1}(x) \in H^{2n}(S^{2n}; \mathbb{Q}) / ch \tilde{K}^0(S^{2n}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

ch_f^n hängt nur von der Homotopieklasse von f ab, und die Zuordnung $[f] \mapsto ch_f^n$ definiert eine Abbildung $\overline{CH}^n: \pi_{2n-1}(X) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Hängt man f zweimal ein, dann ist auf $\Sigma^2(f)$ ch^{n+1} definiert, und aus den bekannten Eigenschaften des Cherncharakters und der Puppesequenz folgt $ch_{\Sigma^2 f}^{n+1}(\Sigma^2 x) = ch_f^n(x)$, so daß man eine Abbildung

$$CH^n: \pi_{2n-1}^S(X) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{K}^0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

erhält. Wie in [Ad2] zeigt man: CH ist ein Homomorphismus.

Ein bekanntes Beispiel liefern die Sphären: für $X = S^{2k}$ $2k \gg n$ gilt

$$\pi_{2n+2k-1}^S(S^{2k}) \cong \pi_{2n-1}^S(S^0) \text{ und } CH^n \text{ stimmt mit der Adams-Invarianten}$$

$$e_c: \pi_{2n-1}^S(S^0) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ überein.}$$

Wählt man für X ein genügend großes Skelett von BZ_p , so sind die oben aufgeführten Voraussetzungen erfüllt, und man kann den funktionalen Cherncharakter

$$CH^n : \pi_{2n-1}^S(BZ_p) \longrightarrow \varinjlim_r \text{Hom}(\tilde{K}^0(L^r(p)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

definieren.

Über die δ -Invariante von Kreck steht die e-Invariante -d.h. der funktionale Cherncharakter auf den Sphären - mit der Signatur in Beziehung. Mit dem folgenden Satz erhalten wir eine Verbindung zwischen dem funktionalen Cherncharakter auf BZ_p und der äquivarianten Signatur über die α -Invariante :

Satz 10.2 Über die Identifikation

$$\varinjlim_r \text{Hom}(\tilde{K}^0(L^r(p)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_r \text{Ext}(\tilde{K}^0(L^r(p)), \mathbb{Z}) = K_1(BZ_p)$$

$$\text{stimmt } CH^n : \pi_{2n-1}^S(BZ_p) \longrightarrow \varinjlim_r \text{Hom}(\tilde{K}^0(L^r(p)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \text{ mit dem}$$

$$\text{Hurewicz-Homomorphismus } H_{\mathbb{C}} : \tilde{\Omega}_{2n-1}^{\text{fr}}(BZ_p) \longrightarrow K_1(BZ_p) \text{ überein}$$

(zumindest bis auf Multiplikation mit einer zu p primen Konstanten).

Da wir in §9 $H_{\mathbb{C}}$ berechnet haben, ist damit auch CH bestimmt.

Korollar 10.3 Ist p eine ungerade Primzahl, dann gilt für ein Element

$$(X, Z_p) \text{ aus } \tilde{\Omega}_{2n-1}^{\text{fr}}(BZ_p) \quad CH^n((X, Z_p)) = c \cdot \alpha_Z(X, Z_p)$$

Beweis: $H_{\mathbb{C}}(X, Z_p)$ ist bis auf eine Konstante das Bild von (X, Z_p) unter $H_{\mathbb{R}}$.

Damit $H_{\mathbb{C}}(X, Z_p) = c \cdot f_*[X/Z_p]_S = c \cdot \alpha_Z(X, Z_p)$ in $K_1(BZ_p)$.

Bemerkung:

Für $ch_{\tau}^n(\beta_i)$ ergibt sich die folgende Interpretationsmöglichkeit ($\beta_i = \xi^{i-1}$ aus $\tilde{K}^0(BZ_p)$, $\tau \in \tilde{\Omega}_{2n-1}^{\text{fr}}(BZ_p)$) :

τ wird durch eine stabil parallelisierte freie Z_p -Mannigfaltigkeit X^{2n-1} repräsentiert. Man wähle eine orientierte Z_p -Mannigfaltigkeit Y^{2n} mit Rand X (so daß die induzierte Orientierung zur Parallelisierung paßt), und berechne die α_Z -Invariante - etwa über die Fixpunktmenge. Die $(p-1)$ -te Komponente von α_Z ist dann genau $ch_{\tau}^n(\beta_i)/c$. Analoges gilt mit geeigneten Faktoren auch für andere v -Invarianten. Bildet man $ch_{\tau}^n(\sum_{i=1}^{p-1} \beta_i)$, dann erhält man gerade den Signaturdefekt mod $\mathbb{Z}$ auf $\tau = (X \rightarrow X/Z_p)$.

Beweis von (10.2):

Es sei $f : S^{2n+2i-1} \rightarrow S^{2i} \wedge BZ_p$ ein Repräsentant für $\tau \in \hat{\Omega}_{2n-1}^{fr}(BZ_p)$ und $\theta \in \tilde{K}^0(L^m(p))$, m genügend groß. Wir müssen zeigen

$$ch_f^{n+i}(\theta) = c \cdot \langle \beta^{-1}(\theta), H_{\mathbb{C}}(\tau) \rangle_K$$

denn die Identifikation $K_1(BZ_p)$ mit $\varinjlim_m \text{Hom}(K^0(L^m(p)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ geschieht - siehe §8 - durch die Zuordnung $x \mapsto (y \mapsto \langle \beta^{-1}(y), x \rangle_K)$ ($\beta: K^1(BZ_p; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \tilde{K}^0(BZ_p)$ ist der Bocksteinhomomorphismus und $\langle, \rangle_K$ das Kroneckerprodukt

$$K^1(BZ_p; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes K_1(BZ_p) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Aus Bocksteinsequenzen und Kofasersequenzen erhält man ein Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten (m genügend groß, $C_f = e^{2n+2i} \cup_f L^m(p)$):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K^1(C_f; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & K^1(S^{2i} \wedge L^m(p); \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & K^1(S^{2i-1}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \text{(2) } \dashrightarrow & \downarrow \beta \text{ (2)} \dashrightarrow \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^{2i}) & \longrightarrow & \tilde{K}^0(C_f) & \xrightarrow{f} & \tilde{K}^0(S^{2i} \wedge L^m(p)) \xrightarrow{f} 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \text{(4)} \dashrightarrow & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \tilde{K}^0(S^{2i}; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & \tilde{K}^0(C_f; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \text{(4)} \dashrightarrow & \downarrow \\
 \tilde{K}^0(S^{2i-1} \wedge L^m(p); \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{Sf^*} & \tilde{K}^0(S^{2i}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \tilde{K}^0(C_f; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & & & & & &
 \end{array} \quad (10.5)$$

($q := 2n+2i$)

Der Weg (1) läßt sich sofort mit $\theta \mapsto ch_f^{n+i}(\theta)$ identifizieren; dabei haben wir die kanonischen Identifikationen zwischen $\tilde{K}^0(S^{2n+2i})$ und $H^{2n+2i}(S^{2n+2i})$ zu machen. Der Weg (2) beschreibt nichts anderes als $\theta \mapsto \langle \beta^{-1}(\theta), f_*[S^{2n+2i-1}] \rangle$ ($= \langle f^* \beta^{-1}(\theta), [S^{2n+2i-1}]_T \rangle_K = f^* \beta^{-1}(\theta) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) und wegen $H_{\mathbb{C}}(\tau) = Bf_*[S^{2n+2i-1}]_T$ die Zuordnung $\theta \mapsto \langle \beta^{-1}(\theta), H_{\mathbb{C}}(\tau) \rangle_K$.

Auf der Untergruppe $\text{Bild}(Sf)^*$ von $\tilde{K}^0(S^{2n+2i}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ kann man den Weg (1) auch "rückwärts gehen". Komposition mit (2) definiert einen Homomorphismus von $\text{Bild}(Sf)^*$ in $\text{Bild}(f^*) \subset K^1(S^{2n+2i-1}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Das Rückwärtsgehen auf (2) von $\text{Bild } f^*$

über (1) nach $\text{Bild}(\text{Sf})^*$ liefert ein Inverses zu dieser Abbildung. Da $\text{Bild } f^*$ eine Gruppe Z_{p^r} (oder 0) ist, wird dieser Isomorphismus durch die Multiplikation mit einer zu p primen Konstante c gegeben. Nach §9 ist $\text{Bild } H_{\mathbb{C}}$ zyklisch, so daß diese Konstante nur von der Dimension abhängt.

Für bestimmte Dimensionen können wir diese Konstante leicht berechnen:

Die Inklusion $B\{1\} \rightarrow BZ_p$ induziert die beiden Transferhomomorphismen

$$t_{\Omega} : \Omega_{*}^{\text{fr}}(BZ_p) \rightarrow \Omega_{*}^{\text{fr}}(*) \quad \text{und} \quad t_K : K_0(BZ_p; \mathbb{Q}/Z) \rightarrow K_0(*; \mathbb{Q}/Z).$$

Lemma 10.6 Die Komposition $\Omega_{2n-1}^{\text{SO}}(BZ_p) \xrightarrow{-\mu} K_1(BZ_p) \xrightarrow{\beta^{-1}} \tilde{K}_0(BZ_p; \mathbb{Q}/Z) \xrightarrow{t} \mathbb{Q}/Z$ ist der Signaturdefekt mod Z .

Beweis: Nach §7 gilt für den Transfer in der Kohomologie $t^* : K^0(B\{1\}) \rightarrow K^0(BZ_p)$
 $t^*(1) = \text{reg}(Z_p)$ und daher für $x \in \tilde{K}_0(BZ_p; \mathbb{Q}/Z)$

$$\begin{aligned} t(x) &= \langle 1, t(x) \rangle_K = \langle t^*(1), x \rangle = \langle t^*(1) - p, x \rangle = \langle \beta^{-1}(t^*(1) - p), \beta(x) \rangle \\ &= \langle \tilde{\text{reg}}, \beta(x) \rangle \end{aligned}$$

Setzt man $x = -\beta^{-1}\mu(X/Z_p, f)$ ein, so folgt nach (8.2) $t(x) = \langle -\tilde{\text{reg}}, f_*[X/Z_p]_S \rangle_K = \gamma_Z(X \rightarrow X/Z_p)$.

Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\Omega}_{2n-1}^{\text{fr}}(BZ_p) & \xrightarrow{\beta_{\Omega}^{-1}} & \tilde{\Omega}_{2n}^{\text{fr}}(BZ_p; \mathbb{Q}/Z) & \xrightarrow{t_{\Omega}} & \Omega_{2n}^{\text{fr}}(*; \mathbb{Q}/Z) & \xrightarrow{\beta_{\Omega}} & \Omega_{2n-1}^{\text{fr}}(*) \\ \downarrow H_{\mathbb{C}} \quad (A) & & \downarrow H_{\mathbb{C}} \quad (B) & & \downarrow H_{\mathbb{C}} \quad (C) & & \downarrow e_{\mathbb{C}} \\ K_1(BZ_p) & \xrightarrow{\beta_K^{-1}} & \tilde{K}_0(BZ_p; \mathbb{Q}/Z) & \xrightarrow{t_K} & K_0(*; \mathbb{Q}/Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Q}/Z \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \downarrow \eta & & \nearrow \eta \\ \lim_m \text{Hom}(K^0(L^m(p)), \mathbb{Q}/Z) & \xrightarrow{\text{Hom}(t_K, 1)} & \text{Hom}(K^0(*), \mathbb{Q}/Z) & & & & \end{array} \quad (10.7)$$

Wegen der Vertauschbarkeit von Transferabbildungen mit natürlichen Transformationen

- siehe [K-P] - sind (A) und (B) kommutativ. Nach (9.4) gilt $t_K \beta_K^{-1} H_{\mathbb{C}} = \gamma_Z^T$

(Todd-Defekt wegen des komplexen Hurewicz $H_{\mathbb{C}}$). Es folgt nach §9

$$H_{\mathbb{C}} t_{\Omega} \beta_{\Omega}^{-1} = \gamma_Z^T = e_{\mathbb{C}} \circ t_{\Omega} \quad \text{und somit} \quad H_{\mathbb{C}} \beta_{\Omega}^{-1} t_{\Omega} = e_{\mathbb{C}} t_{\Omega}$$

Für $n > 0$ und $n = a(p-1)$ wissen wir aber aus [Ad2], daß $e_c \circ t_\Omega(\sigma_n) = \sigma_n$ aus $\Omega_{2n-1}^{fr}(BZ_p)$ wie in §9 - die p-Komponente von Bild $e_c \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ erzeugt (p-Komponente von $\gamma_Z^T(\sigma_n) = 1/p^{1+v_p(a)} = p$ -Komponente des Nenners von $B_{n/2}/2n$). $H_c \beta^{-1}$ und e_c müssen damit gleich sein (für $p = 2$ folgt dies mit einem Argument wie unter (10.2)). Damit ist bewiesen (β = Bocksteinhomomorphismus) :

Korollar 10.8 Die e_c -Invariante stimmt mit dem funktionalen Hurewicz-Homomorphismus $(H_c)_\beta$ überein.

Also ist auch (C) in (10.7) kommutativ. Aus der Kommutativität von (10.7) folgt jetzt $c \cdot \text{Hom}(t'_K, 1) CH^n = t_K \cdot \beta_K^{-1} H_c = \gamma_Z^T = e_c \circ t_\Omega$ (10.9)

Man rechnet leicht nach, daß CH natürlich ist, und da man nach [K-P] den Transfer bis auf Suspensionsisomorphismen durch eine stetige Abbildung induzieren kann, ist CH mit t vertauschbar: $\text{Hom}(t'_K, 1) \cdot CH^n = CH^n \cdot t_\Omega = e_c \circ t_\Omega$ (10.10)

In den Dimensionen $2n-1$ mit $n = a(p-1)$, $a > 0$ ist γ_Z^T auf Bild

$(H_c: \Omega_{2n-1}^{fr}(BZ_p) \rightarrow K_1(BZ_p))$ injektiv (siehe § 9), daher folgt aus (10.9) und (10.10) $c = 1$

Damit: $CH^n = -2^n \alpha_Z$ für $n = a(p-1)$

Bemerkung:

Die Analogie von CH^n zur e-Invariante wird noch stärker durch die folgende Definitionsmöglichkeit von CH^n durch Adams-Operationen:

(Bezeichnungen wie bei 10.5)

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(S^{2n+2i}) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(C_f) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(S^{2i} \wedge L^m(p)) \longrightarrow 0$$

Wählt man für $\beta \in \tilde{K}^0(S^{2i} \wedge L^m(p))$ ein Urbild β^* unter j^* , dann ist $\psi^p(\beta^*)$

ein Vielfaches von $i_*[S^{2n+2i}]_T$: $\psi^p(\beta^*) = a(\beta^*) \cdot i_*[S^{2n+2i}]_T$, denn

$j^* \psi^p(\beta^*) = \psi^p(\beta) = 0$. Wählt man ein anderes Urbild β^* von β , dann gilt

$\beta^* - \beta^* = a \cdot i_*[S^{2n+2i}]_T$ und daher $\psi^p(\beta^* - \beta^*) = a \cdot i_* \psi^p[S^{2n+2i}]_T = a \cdot p^{n+i} i_*[S]_T$

$= (a(\beta^*) - a(\beta^*)) i_*[S]_T$. Damit ist $a(\beta^*)/p^{n+i} - a(\beta^*)/p^{n+i}$ ganzzahlig und die

Restklasse $[a(\beta^*)/p^{n+i}]$ in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht mehr von der Urbildauswahl abhängig. Man

zeigt leicht $ch_f(\beta) = [a(\beta^*)/p^{n+i}]$.

Bezeichnungen

$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$
$[\frac{a}{p}]$	größte ganze Zahl z mit $z \leq a/p$
$\Omega_* = \Omega_*^{SO}$	orientierter Bordismusring
Ω_*^U	komplexer Bordismusring
Ω_*^{fr}	stabil-parallelisierter Bordismusring $(\hat{\Omega}^{fr}(X) = \pi^S(X))$
$R(G)$	komplexer Darstellungsring der Gruppe G
$K_G(X)$	Für einen lokalkompakten Raum X ist $K_G(X)$ als $K_G^*(X^c)$, X^c = Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X definiert z.B. $K^*(TM) = K^*(B(TM), S(TM))$
BG	klassifizierender Raum der Gruppe G
TM	Tangentialbündel von M
BTM	Ballbündel von TM
STM	Shärenbündel von TM
L_m	m -te L -Klasse in den Pontrjagin-Klassen, siehe [H 1]
ψ^k	k -te Adamsoperation
ch	Cherncharakter
$[M]$	Fundamentalklasse von M
$\langle, \rangle_K$	Kroneckerprodukt in der K -Theorie
$\langle, \rangle_H$	Kroneckerprodukt in der gewöhnlichen Homologietheorie
S_G	$S_G = \{ (reg - G)^k \mid k \in \mathbb{N} \} \subset R(G)$
S_a	$S_a = \{ \lambda_{-1}^k(V) \mid k \in \mathbb{N}, G \text{ operiert frei auf der Einheitsphäre } S(V) \text{ des komplexen } G \text{ Moduls } V \}$
$\lambda_{-1}(V)$	K -Theorie Eulerklasse von V

Tabelle 1

Die Werte von γ^1 , γ_Z^1 , γ und γ_Z auf Linsenräumen

Linsenraum	γ	γ^1	γ^2	γ_Z	γ_Z^1	γ_Z^2
L(5;1,1)	-5	-3/5	-7/5	0	2/5	3/5
L(5;1,2)	0	1/5	-1/5	0	1/5	4/5
L(5;1,1,1)		-1	-3/5		0	2/5
L(5;1,1,2)		-1/5	-1/5		4/5	4/5
L(5;1,1,1,1)	36/5	1	13/5	1/5	0	3/5
L(5;1,1,1,2)	8/5	1/5	3/5	3/5	1/5	3/5
L(5;1,1,2,2)	4/5	1/5	1/5	4/5	1/5	1/5
L(5;1,1,1,1,1)		47/5 ²	29/5 ²		22/5 ²	4/5 ²
L(5;1,1,1,1,2)		11/5 ²	7/5 ²		11/5 ²	7/5 ²
L(5;1,1,1,2,2)		3/5 ²	1/5 ²		3/5 ²	1/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,1)	-68/5	-47/5 ²	-123/5 ²	2/5	3/5 ²	2/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,2)	-16/5	-11/5 ²	-29/5 ²	4/5	14/5 ²	21/5 ²
L(5;1,1,1,1,2,2)	-4/5	-3/5 ²	-7/5 ²	1/5	22/5 ²	18/5 ²
L(5;1,1,1,2,2,2)	0	1/5 ²	-1/5 ²	0	1/5 ²	24/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,1,1)		-89/5 ²	-11/5 ¹		11/5 ²	14/5 ¹
L(5;1,1,1,1,1,1,2)		-21/5 ²	-13/5 ²		4/5 ²	12/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,2,2)		-1/5 ¹	-3/5 ²		4/5 ¹	22/5 ²
L(5;1,1,1,1,2,2,2)		-1/5 ²	-1/5 ²		24/5 ²	24/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,1,1,1)	644/5 ²	89/5 ²	233/5 ²	19/5 ²	14/5 ²	8/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,1,1,2)	152/5 ²	21/5 ²	11/5 ¹	2/5 ²	11/5 ²	1/5 ¹
L(5;1,1,1,1,1,1,2,2)	36/5 ²	1/5 ¹	1/5 ²	11/5 ²	1/5 ¹	1/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,2,2,2)	8/5 ²	1/5 ²	3/5 ²	8/5 ²	1/5 ²	3/5 ²
L(5;1,1,1,1,2,2,2,2)	4/5 ²	1/5 ²	1/5 ²	4/5 ²	1/5 ²	1/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,1,1,1,1)		843/5 ³	521/5 ³		93/5 ³	21/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,1,1,2)		199/5 ³	123/5 ³		74/5 ³	123/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,1,2,2)		47/5 ³	29/5 ³		47/5 ³	29/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,2,2,2)		11/5 ³	7/5 ³		11/5 ³	7/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,2,2,2,2)		3/5 ³	1/5 ³		3/5 ³	1/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)	-244/5 ¹	-843/5 ³	-2207/5 ³	1/5 ¹	32/5 ³	43/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,1,1,1,2)	-288/5 ²	-199/5 ³	-521/5 ³	12/5 ²	51/5 ³	104/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,1,1,2,2)	-68/5 ²	-47/5 ³	-123/5 ³	7/5 ²	78/5 ³	2/5 ³
L(5;1,1,1,1,1,1,1,2,2,2)	-16/5 ²	-11/5 ³	-29/5 ³	9/5 ²	114/5 ³	96/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,1,2,2,2,2)	-4/5 ²	-3/5 ³	-7/5 ³	21/5 ²	122/5 ³	118/5 ²
L(5;1,1,1,1,1,2,2,2,2,2)	0	1/5 ³	-1/5 ³	0	1/5 ³	124/5 ²

Tabelle 2

Die Werte von γ_Z und γ_Z^i auf Linsenräumen

Linsenraum	γ_Z	γ_Z^1	γ_Z^2	γ_Z^3	γ_Z^4	γ_Z^5
L(7;1,1)	0	2/7	1/7	4/7		
L(7;1,2)	0	1/7	4/7	1/7		
L(7;1,3)	0	3/7	5/7	6/7		
L(7;1,1,1)	0	6/7	4/7	0		
L(7;1,1,2)	0	2/7	0	4/7		
L(7;1,1,3)	0	1/7	4/7	4/7		
L(7;1,2,2)	0	4/7	6/7	4/7		
L(7;1,2,3)	0	6/7	6/7	1/7		
L(7;1,3,3)	0	0	3/7	5/7		
L(7;1,1,1,1)	0	1/7	5/7	1/7		
L(7;1,1,1,2)	0	5/7	3/7	6/7		
L(7;1,1,1,3)	0	6/7	1/7	0		
L(7;1,1,2,2)	0	3/7	0	4/7		
L(7;1,1,2,3)	0	1/7	3/7	3/7		
L(7;1,1,3,3)	0	0	4/7	3/7		
L(7;1,2,2,2)	0	0	1/7	6/7		
L(7;1,2,2,3)	0	3/7	1/7	3/7		
L(7;1,2,3,3)	0	4/7	4/7	6/7		
L(7;1,3,3,3)	0	4/7	1/7	2/7		
L ⁵ (7;1,....,1)	0	5/7	5/7	5/7		
L ⁶ (7;1,....,1)	1/7	2/7	6/7	3/7		
L ⁷ (7;1,....,1)	0	37/7 ²	32/7 ²	20/7 ²		
L ⁸ (7;1,....,1)	5/7	12/7 ²	41/7 ²	38/7 ²		
L ⁹ (7;1,....,1)	0	19/7 ²	46/7 ²	47/7 ²		
L ¹⁰ (7;1,....,1)	4/7	30/7 ²	2/7 ¹	19/7 ²		
L ¹¹ (7;1,....,1)	0	27/7 ²	40/7 ²	15/7 ²		
L ¹² (7;1,....,1)	48/7 ²	22/7 ²	4/7 ²	47/7 ²		
L ² (11;1,....,1)	0	2/11	8/11	7/11	10/11	6/11
L ⁴ (11;1,....,1)	0	7/11	3/11	1/11	8/11	3/11
L ⁶ (11;1,....,1)	0	4/11	8/11	9/11	6/11	6/11
L ⁸ (11;1,....,1)	0	1/11	1/11	2/11	7/11	0
L ¹⁰ (11;1,....,1)	1/11	3/11	2/11	10/11	1/11	1/11
L ¹² (11;1,....,1)	3/11	9/11 ²	58/11 ²	4/11 ²	34/11 ²	38/11 ²

Literaturverzeichnis

- [Ad1] J.F.Adams: On the groups $J(X)$ -II, Topology 3 (1965), 137-171
- [Ad2] J.F.Adams: On the groups $J(X)$ -IV, Topology 5 (1966), 21- 71
- [Ad3] J.F.Adams: Lie groups, Benjamin (1969)
- [Ad4] J.F.Adams: Lectures on generalised cohomology, in Springer Lect.Notes
99 (1969), 1-138
- [Ad5] J.F.Adams: On cherncharakters and the structure of the unitary group
Proceed. of Camb. Phil.Soc. 57 (1961), 189-199
- [AnH] D.W. Anderson, Hodgkin: The K-theory of Eilenberg Mac-Lane complexes,
Topology 7 (1965), 317-330
- [A-T] S.Araki, H.Toda: Multiplikative struktues in mod-p-cohomology theories I,
Osaka J.Math. 2 (1965), 71-115
- [A 1] M.F.Atiyah: K-theory, Benjamin(1967)
- [A 2] M.F.Atiyah: Characters and cohomology of finite groups, Publ.I.H.E.S. 9
(1961), 23-64
- [A-H1] M.F.Atiyah, F.Hirzebruch: Vectorbundles and homogeneous spaces,
Proceedings of Symposia in Pure Math. III, Amer.Math.Soc.(1961)
7-38
- [A-H2] M.F.Atiyah, F.Hirzebruch: Quelques théorèmes de non-prologement pour
lesvariétés differentiables, Bull.Soc.Math.France 87 (1959),
383-396
- [A-S1] M.F.Atiyah, G.B.Segal: Equivariant K-theory and completion, J.Differential
Geometry 3. (1969), 1-18
- [A-S2] M.F.Atiyah, G.B.Segal: The index of elliptic operators II, Ann. of Math.
87 (1968), 531-545
- [A-S3] M.F.Atiyah, I.M.Singer: The index of elliptic operators I, Ann. of Math.87
(1968), 484-530

- [A-S4] M.F.Atiyah, I.M.Singer: The index of elliptic operators III,
Ann.of Math. 87 (1968), 546-604
- [A-S5] M.F.Atiyah, L.Smith: Compact Lie groups and the stable homotopy
of spheres, Topology 13 (1974), 153-142
- [B] R.O.Burdick: On the oriented bordism group of Z_2 ,
Dissertation Uni. of Virginia (1966)
- [C] A.Conde: On an integrality theorem of Atiyah and Hirzebruch
An.Acad.brasil. Cienc. (1972) 44, 377-380
- [C-F1] P.E.Conner, E.E.Floyd: Differentiable periodic maps, Springer (1964)
- [C-F2] P.E.Conner, E.E.Floyd: Maps of odd period, Ann.of Math. 84 (1966),
132-156
- [C-F3] P.E.Conner, E.E.Floyd: The relation of cobordism to K-theories,
Springer Lecture Notes 28 (1966)
- [tD1] T.tom Dieck: Bordism of G-Manifolds and integrality theorems, Topology 9
(1970), 345-358
- [tD2] T.tom Dieck: Lokalisierung äquivarianter Kohomologie-Theorien
Math. Zeitschr. 121 (1971), 253-262
- [tD3] T.tom Dieck: Periodische Abbildungen unitärer Mannigfaltigkeiten,
Math. Zeitschr. 126 (1972), 275-295
- [Ha] A. Hattori: Integral characteristic numbers for weakly almost complex
manifolds, Topology 5 (1966), 259-280
- [H1] F.Hirzebruch: Topological methods in algebraic geometry, Third edition
Springer (1966)
- [H2] F.Hirzebruch: The signature of ramified coverings, Global Analysis,
Papers in Honor of K. Kodaira, Univ. of Tokyo Press (1969),
253-265
- [H3] F.Hirzebruch: Free involutions on manifolds and some elementary
number theory, in Institutio Nazionale di Alta Matematica
Symposia Mathe. Vol.5 (1970), 411-419

- [H4] F.Hirzebruch: The signature theorem: reminiscences and recreation,
in Prospects in Mathematics Ann. of Math.Studies No. 70
(1971), 3-31
- [H5] F.Hirzebruch: A Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds,
Seminar Bourbaki Février 1959 177 (01-21)
- [H-Z] F.Hirzebruch, D.Zagier: The Atiyah-Singer theorem and elementary
number theory, Math.Lecture Series 3, Publish or perish
Inc. Boston (1974)
- [Hu] D.Husemoller: Fibre bundles Mc. Graw-Hill (1966)
- [J] A.Jankowski: Algebras of the cohomology operations in some cohomology theories
Dissertationes Mathematicae, Polska Akademia Nauk.Warszawa (1974)
- [K-P] D.S.Kahn, S.B.Priddy: Applications of the transfer to stable homotopy theory
Bull.Am.Math. Soc 78 (1972), 981-987
- [Ka] T.Kambe: The structure of K_{Λ} -rings of the lens space and their applications
J.Math. Soc.Japan Vol 18 (1966), 135-146
- [Kat] Y.Katsube: Principal oriented bordism algebra $\Omega_*(\mathbb{Z}_2^k)$
Hiroshima Math.J 4 (1974), 265-277
- [Kn] J.Knopfmacher: On chern classes of representations of finite groups
J.London Math. Soc. 41 (1966), 535-541
- [K] M. Kreck: Eine Invariante für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten
Dissertation Bonn 1972
- [L-S] P.Löffler, L.Smith: Line bundles over framed manifolds, Math.Z. 138
(1974), 35-52
- [L] G.Lusztig: Novikov's higher signature and families of elliptic operators
Dissertation Princeton 1971
- [M] W.Mayer: Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln
Dissertation Bonn 1971
- [Mi] J.Milnor: Lectures on characteristic classes, Notes by J.Stasheff (1958)

- [M-S] J.Morgan, D.Sullivan: The transversality characteristic classes and linking cycles in surgery theory, Ann. of Math. 99 (1974), 463-544
- [N] W.D.Neumann: Signature related invariants of manifolds (in Vorbereitung)
- [O] E.Ossa: Cobordismustheorie von fixpunktfreien und semifreien S^1 -Mannigfaltigkeiten, Dissertation Bonn 1969
- [P] T.Petrie: Representation theory, surgery and free actions of finite groups on varieties and homotopy spheres in Spr.Lect.Notes 168 (1970), 250-266
- [Pa] R.S.Palais: Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Annals of Math. Studies 57 (1965)
- [R] R.J-Rowlett: Bounding a free action of an abelian group, Duke Math. Journal (1974) 41, 381-385
- [Se] J.P.Serre: Lineare Darstellungen endlicher Gruppen, Vieweg u.Sohn, Braunschweig (1972)
- [Sm] L.Smith: On $\text{Im} \{ \Omega_*^{\text{fr}}(\text{BZ}_p) \rightarrow \Omega_*^U(\text{BZ}_p) \}$ Preprint, Indiana Uni. (1974)
- [St1] R.E. Stong: Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press (1969)
- [St2] R.E. Stong: Relations among characteristic numbers I, Topology 4 (1965) 267-281
- [Su] D.Sullivan: Geometric topology, Part I, M.I.T. 1970 (mimeographed Notes)
- [T] H. Toda: A survey of homotopy theory, Advances in Mathematics 10 (1973), 417-455
- [V1] J.W. Vick: An application of K-theory to equivariant maps, Bull. A.M.S. 75 (1969), 1017-1019
- [V2] J.W. Vick: Pontryagin duality in K-theory, Proceed. of Am.M.Soc. 24 (1970), 611-616
- [W] G.Wilson: K-theory invariants for unitary G-bordism, Quart.J.Math. Oxford 24 (1973), 499-526
- [Z] D.Zagier: Higher dimensional Dedekind sums, Math. Ann. 202 (1973), 149-172