Bestimmung des Zentrums der Cliffordschen Algebren einer quadratischen Form über einem Körper der Charakteristik 2.

Von *Martin Kneser* in Heidelberg.

$\mathfrak{V} = \{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots\}$ sei ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $K = \{a, b, \ldots\}$ der Charakteristik $\chi(K) = 2$, $q(\mathfrak{x})$ eine quadratische Form[1]) in $\mathfrak{V}$, also eine Funktion auf $\mathfrak{V}$ mit Werten in K, für die

$$q(a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y}) = a^2 q(\mathfrak{x}) + b^2 q(\mathfrak{y}) + ab(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

gilt mit einem gewissen bilinearen „Skalarprodukt" $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Wir setzen voraus, daß q vollregulär ist, daß es also keinen Vektor $\mathfrak{x} \neq 0$ gibt, für den $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist mit allen Vektoren $\mathfrak{y} \in \mathfrak{V}$. Dann ist die Dimension von $\mathfrak{V}$ gerade und es gibt eine Basis $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_m, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m$ von $\mathfrak{V}$ derart, daß $(\mathfrak{u}_i, \mathfrak{v}_i) = 1$ ist, während alle anderen Skalarprodukte zweier Basisvektoren verschwinden[2]). Nach Č. Arf[3]) ist das Element $c = \sum_{i=1}^{m} q(\mathfrak{u}_i)\, q(\mathfrak{v}_i)$ bis auf additive Abänderung um Summanden der Form $a^2 - a\ (a \in K)$ eine Invariante der quadratischen Form q. Hier soll eine von der Wahl einer Basis von vornherein unabhängige Definition von c gegeben werden. Dazu bilde man — dem Fall $\chi(K) \neq 2$ entsprechend[4]) — die beiden Cliffordschen Algebren von q. Die erste besteht aus Summen von formalen Produkten

$$a\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_t \quad (t \geqq 0,\ a \in K,\ \mathfrak{x}_\tau \in \mathfrak{V}),$$

deren Multiplikation durch

$$(a\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_s)(b\mathfrak{x}_{s+1} \cdots \mathfrak{x}_t) = ab\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_t$$

und im übrigen distributiv erklärt ist. Außerdem sollen die Regeln

$$(1) \qquad \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{s-1}(a\mathfrak{y} + b\mathfrak{z})\mathfrak{x}_{s+1} \cdots \mathfrak{x}_t = a\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{s-1}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_{s+1} \cdots \mathfrak{x}_t + b\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{s-1}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_{s+1} \cdots \mathfrak{x}_t$$

$$(2) \qquad \mathfrak{x}^2 = q(\mathfrak{x})$$

gelten. Aus der letzten folgt durch Anwendung auf $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ die weitere

$$(3) \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{y}\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y});$$

daher bilden die Produkte $\mathfrak{u}_{i_1} \cdots \mathfrak{u}_{i_r} \mathfrak{v}_{k_1} \cdots \mathfrak{v}_{k_s}$ mit $i_1 < \cdots < i_r$ und $k_1 < \cdots < k_s$ eine Basis dieser ersten Cliffordschen Algebra. Die zweite besteht aus den Summen von Produkten $a\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{2t}$ einer geraden Anzahl von Vektoren aus $\mathfrak{V}$ mit denselben Regeln.

---

[1]) Im Sinne von *J. Dieudonné*, Sur les groupes classiques, Paris 1948, S. 39; ist $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ und sind $x_1, \ldots, x_n$ Unbestimmte, so ist $q(\Sigma x_i \mathfrak{e}_i)$ eine quadratische Form im klassischen Sinne.

[2]) *Čahit Arf*, Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2, dieses Journal **183** (1941), S. 148—167, Satz 1.

[3]) loc. cit. [2]), Satz 5; vgl. auch die beiden vorangehenden Noten von *Witt* bzw. *Klingenberg* und *Witt*.

[4]) *M. Eichler*, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer-Verlag 1952, S. 22ff.

Ihr Zentrum ist eine Invariante der quadratischen Form q. Die Klasse c mod $(a^2 - a)$ bestimmt sich hieraus nach dem Satz:

Das Zentrum der zweiten Cliffordschen Algebra ist isomorph dem Restklassenring $K[x]/(x^2 - x - c)$.

Beweis. Besteht die Menge M bzw. N aus den Zahlen $i_1 < \cdots < i_r$ bzw. $k_1 < \cdots < k_s$, so schreiben wir $e_{M,N}$ für das Basiselement $\mathfrak{u}_{i_1} \cdots \mathfrak{u}_{i_r} \mathfrak{v}_{k_1} \cdots \mathfrak{v}_{k_s}$. Zur Bestimmung des Zentrums beweisen wir zunächst:

a) Die mit allen Produkten $\mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ vertauschbaren Elemente sind von der Form $\sum_N a_N e_{N,N}$ mit $a_N \in K$. Dazu beachte man die wegen $\chi(K) = 2$ aus (3) folgenden Vertauschungsregeln

$$\mathfrak{u}_i e_{M,N} - e_{M,N} \mathfrak{u}_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin N \\ e_{M,N-i} & \text{falls } i \in N \end{cases},$$

$$\mathfrak{v}_i e_{M,N} - e_{M,N} \mathfrak{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin M \\ e_{M-i,N} & \text{falls } i \in M \end{cases},$$

und die aus (2) fließenden Regeln

$$\mathfrak{u}_i e_{M,N} = \begin{cases} e_{M+i,N} & \text{falls } i \notin M \\ q(\mathfrak{u}_i)\, e_{M-i,N} & \text{falls } i \in M \end{cases},$$

$$e_{M,N} \mathfrak{v}_i = \begin{cases} e_{M,N+i} & \text{falls } i \notin N \\ q(\mathfrak{v}_i)\, e_{M,N-i} & \text{falls } i \in N \end{cases}.$$

Danach gilt auf Grund der Formel

$$uvt - tuv = u(vt - tv) + (ut - tu)\, v$$

für ein mit $\mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i$ vertauschbares Element $\sum_{M,N} a_{M,N} e_{M,N}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i \sum_{M,N} a_{M,N} e_{M,N} - \sum_{M,N} a_{M,N} e_{M,N} \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i \\ &= \mathfrak{u}_i \sum_{i \in M} a_{M,N} e_{M-i,N} + \sum_{i \in N} a_{M,N} e_{M,N-i} \mathfrak{v}_i \\ &= \sum_{i \in M} a_{M,N} e_{M,N} + \sum_{i \in N} a_{M,N} e_{M,N}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $a_{M,N} = 0$, falls $i \in M$, $\notin N$ oder $i \notin M$, $\in N$. Läßt man i alle Zahlen von 1 bis m durchlaufen, so erhält man $a_{M,N} = 0$ für $M \neq N$.

b) Ist $\sum_N a_N e_{N,N}$ mit $\mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_k (i \neq k)$ vertauschbar, so hat man

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_k \sum_N a_N e_{N,N} - \sum_N a_N e_{N,N} \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_k \\ &= \mathfrak{u}_i \sum_{k \in N} a_N e_{N-k,N} + \sum_{i \in N} a_N e_{N,N-i} \mathfrak{v}_k \\ &= \sum_{i \notin N,\, k \in N} a_N e_{N+i-k,N} + \sum_{i \in N,\, k \notin N} a_N e_{N,N-i+k} \\ &\quad + \sum_{i,k \in N} a_N [q(\mathfrak{u}_i)\, e_{N-i-k,N} + q(\mathfrak{v}_k)\, e_{N,N-i-k}] \\ &= \sum_{i,k \notin M} [(a_{M+k} + a_{M+i})\, e_{M+i,M+k} \\ &\quad + a_{M+i+k} (q(\mathfrak{u}_i)\, e_{M,M+i+k} + q(\mathfrak{v}_k)\, e_{M+i+k,M})]. \end{aligned}$$

Daraus folgt $a_{M+k} + a_{M+i} = 0$.

c) Für ein Zentrumselement $\sum\limits_N a_N e_{N,N}$ gilt weiter die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{v}_i \mathfrak{v}_k \sum_N a_N e_{N,N} - \sum_N a_N e_{N,N} \mathfrak{v}_i \mathfrak{v}_k \\
&= \mathfrak{v}_i \sum_{k \in N} a_N e_{N-k,N} + \sum_{i \in N} a_N e_{N-i,N} \mathfrak{v}_k \\
&= \sum_{i,k \in N} a_N e_{N-i-k,N} + \sum_{k \in N} a_N e_{N-k,N} \mathfrak{v}_i + \sum_{i \in N} a_N e_{N-i,N} \mathfrak{v}_k \\
&= \sum_{i,k \in N} a_N [e_{N-i-k,N} + q(\mathfrak{v}_i) e_{N-k,N-i} + q(\mathfrak{v}_k) e_{N-i,N-k}] \\
&\qquad + \sum_{i \notin N,\, k \in N} a_N e_{N-k,N+i} + \sum_{i \in N,\, k \notin N} a_N e_{N-i,N+k} \\
&= \sum_{i,k \notin M} [(a_{M+i+k} + a_{M+k} + a_{M+i}) e_{M,M+i+k} \\
&\qquad + a_{M+i+k}(q(\mathfrak{v}_i) e_{M+i,M+k} + q(\mathfrak{v}_k) e_{M+k,M+i})].
\end{aligned}$$

Nach b) folgt daraus $a_{M+i+k} = 0$, also $a_N = 0$, falls N mindestens zwei Zahlen enthält. Jedes Zentrumselement ist also von der Form $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i e_{i,i} + b$ und nach b) ist hierin $a_i = a_k (= a)$; diese Elemente liegen aber tatsächlich im Zentrum.

d) Das Zentrum der zweiten Cliffordschen Algebra besteht somit aus den Elementen $az + b$ mit $a, b \in K$ und $z = \sum\limits_{i=1}^{m} e_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i$. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus der wegen (3) und (2) gültigen Gleichung

$$z^2 = (\sum_i \mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i)^2 = \sum_i (\mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i)^2 = \sum_i \mathfrak{u}_i (\mathfrak{u}_i \mathfrak{v}_i + 1) \mathfrak{v}_i = z + c.$$

Das Zentrum der ersten Cliffordschen Algebra ist der Grundkörper. Der Beweis dafür ist wesentlich einfacher und ergibt sich, indem man die Vertauschbarkeit mit $\mathfrak{u}_i$ und $\mathfrak{v}_i$ ausnutzt. Es liegen also für die Zentren der Cliffordschen Algebren ähnliche Verhältnisse vor wie im Fall $\chi(K) \neq 2$ [5].

[5]) loc. cit. [4]), S. 24.

Eingegangen 14. August 1953.