

Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

by Kneser, Martin; Puppe, Dieter
in Mathematische Zeitschrift
volume 58; pp. 376 - 384



Göttingen State and University Library

Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online-systems to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Digitalisierungszentrum
37070 Göttingen
Germany
E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de

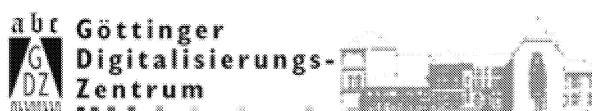
Purchase a CD-ROM

The Göttingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Digitalisierungszentrum
37070 Göttingen
Germany
E-Mail: gdz@www.sub.uni-goettingen.de



Göttingen State and University Library



Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

Von

MARTIN KNESER und DIETER PUPPE.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist in Verschärfung von [7] der Nachweis, daß die quadratische Form eines Knotens (GOERTZ [3]) und die eindimensionale Homologiegruppe der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes, aufgefaßt als Gruppe mit Verschlingung, sich gegenseitig eindeutig bestimmen. Der Beweis dieses Satzes ist, wenn man sich auf das Ergebnis von SEIFERT [8] stützt, rein algebraischer Natur und zeigt zugleich, ganz unabhängig von der Knotentheorie, einen engen Zusammenhang zwischen Gruppen ungerader Ordnung mit Verschlingung und gewissen Klassen quadratischer Formen. Der gleiche Zusammenhang besteht auch für Gruppen gerader Ordnung, doch erfordert der Beweis dafür weitere Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen. So tritt insbesondere an die Stelle des hier benutzten Satzes von MEYER über Geschlechter indefiniter quadratischer Formen der allgemeinere Satz von EICHLER ([4] S. 99), und daher ist ein Eingehen auf die Spinordarstellung der orthogonalen Gruppen (vgl. [4] § 4) nötig. Um den Beweis möglichst einfach zu halten, ist hier nur der für die Knotentheorie interessante Spezialfall von Gruppen ungerader Ordnung, in dem man ohne diese Hilfsmittel auskommt, durchgeführt.

§ 1. Die quadratische Form eines Knotens.

Jeder regulären Projektion einer Knotenlinie ist nach GOERTZ [3] eine ganzzahlige symmetrische Matrix $A = (a_{ik})$ (d.h. die quadratische Form $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$) mit ungerader Determinante zugeordnet. Sie ist durch den Knoten (d.h. die Isotopieklasse der Knotenlinie) bis auf folgende Abänderungen bestimmt:

Q_1 : Unimodulare Transformation: $A \rightarrow S' A S$ mit S ganz und $|S| = \pm 1$.

Q_2 : „Anhängen von ± 1 “:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

sowie die umgekehrte Operation.

Die durch diese zulässigen Abänderungen definierte Äquivalenzklasse von quadratischen Formen wird kurz als die „quadratische Form des Knotens“ bezeichnet.

Die eben behauptete Invarianz von A bis auf die Abänderungen Q_1, Q_2 folgt insofern noch nicht unmittelbar aus [3], als dort noch eine weitere Abänderung zugelassen wird, nämlich

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die inverse. Tatsächlich läßt sich diese aber aus Q_1 und Q_2 zusammensetzen, was wir nun zeigen wollen:

1. Fall. a ist ungerade. Hier folgt die Behauptung sofort aus der unimodularen Äquivalenz von

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Man erhält die zweite aus der ersten Matrix durch Subtraktion der mit $[a/2]$ multiplizierten zweiten Zeile und Spalte von der ersten und anschließende Subtraktion der ersten Zeile und Spalte von der zweiten.)

2. Fall. a ist gerade. Dann ist offenbar

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Nun ist zwar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nicht mit} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

äquivalent, wohl aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Die Überführung der ersten in die zweite Matrix läßt sich in folgenden Schritten vollziehen:

Addition der dritten Zeile und Spalte zur ersten.

Subtraktion der ersten Zeile und Spalte von der zweiten und dritten.

Subtraktion der zweiten Zeile und Spalte von der dritten.)

Danach ist auch in diesem Fall klar, wie sich die dritte Abänderung aus Q_1 und Q_2 zusammensetzt: Man hängt der Reihe nach $1, -1, 1$ an, transformiert unimodular und läßt 1 weg.

§ 2. Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen.

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen zusammengestellt werden, die in dem folgenden Beweis des angekündigten Ergebnisses benutzt werden. Die entscheidende Rolle wird dabei die lokale Betrachtung einer quadratischen Form an den einzelnen Primstellen spielen. Das bedeutet: Wir werden die Äquivalenzklassen von

Formen zunächst nicht im rationalen Zahlkörper K sondern in seinen perfekten Hüllen K_q untersuchen ($q = p = \text{Primzahl}$ entspricht der p -adischen Bewertung von K und $q = \infty$ der gewöhnlichen Betragsbewertung) und daraus auf das Verhalten in K Rückschlüsse ziehen. Wir bezeichnen den Ganzheitsbereich in K und K_p mit Z bzw. Z_p . Der Ring der n -reihigen Matrizen aus Elementen eines Ringes R sei $\mathfrak{M}^n(R)$ oder kürzer $\mathfrak{M}(R)$. Unimodulare Transformation in K_p bedeutet dann Transformation mit einem $S \in \mathfrak{M}(K_p)$, so daß $S, S^{-1} \in \mathfrak{M}(Z_p)$.

Hilfssatz 1. *Ist p ungerade, so läßt sich jede symmetrische Matrix aus $\mathfrak{M}(Z_p)$ unimodular in eine Diagonalmatrix aus $\mathfrak{M}(Z)$ transformieren ([5] S. 83 th. 32).*

Hilfssatz 2. *Ist p ungerade, so lassen sich zwei symmetrische Matrizen aus $\mathfrak{M}(Z_p)$, deren Determinanten Einheiten (in Z_p) sind und sich nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, unimodular ineinander transformieren ([5] S. 92 cor. 36b).*

Im Falle $p=2$ haben wir es nur mit eigentlich primitiven Matrizen zu tun; das sind Matrizen $A \in \mathfrak{M}(Z_2)$, bei denen mindestens eines der Diagonalglieder a_{ii} ungerade ist. Für sie gilt:

Hilfssatz 3. *Zwei symmetrische, eigentlich primitive Matrizen aus $\mathfrak{M}(Z_2)$ mit ungerader Determinante, die sich in K_2 ineinander transformieren lassen, kann man sogar unimodular ineinander transformieren ([5] S. 91 th. 36).*

Ein weiterer Hilfssatz erlaubt es, aus der Äquivalenz zweier rationaler Matrizen in allen K_q mit $q \neq p$ auf die Äquivalenz in K_p zu schließen:

Hilfssatz 4. *Sind zwei symmetrische rationale Matrizen, deren Determinanten sich nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, in allen K_q mit höchstens einer Ausnahme $q = p \neq \infty$ ineinander transformierbar, so sind sie es auch in K_p .*

Dieser Satz folgt z. B. aus [5] S. 32 th. 12 und S. 47 th. 15, wenn man beachtet, daß die Invariante c_p wegen $\prod_q c_q = 1$ (vgl. [5] S. 77 th. 29) durch die anderen c_q bestimmt ist.

Schließlich brauchen wir zum Übergang von der unimodularen Äquivalenz in allen K_q zu der in K einen Spezialfall des Satzes von MEYER ([6] S. 247), der besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen in einem Geschlecht indefiniter quadratischer Formen nur eine Klasse liegt.

Hilfssatz 5. *Haben zwei ganzzahlige symmetrische Matrizen ungerade Determinante und die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

und sind sie in jeder perfekten Hülle K_q von K unimodular ineinander transformierbar¹⁾, so sind sie es auch in K .

¹⁾ Für den Fall $q = \infty$ entfällt der Zusatz „unimodular“.

§ 3. Gruppen mit Verschlingung.

Es sei zunächst noch einmal an die Definition einer Gruppe mit Verschlingung erinnert (vgl. [1], [2], [8]): Ist $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe und K/Z die Gruppe der rationalen Zahlen mod 1, so heißt eine bilineare symmetrische Abbildung

$$V: \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow K/Z$$

eine Verschlingung in $\mathfrak{G}$. Erfüllt V die Bedingung:

Aus $V(a, x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ folgt $a = 0$, so heißt die Verschlingung primitiv. Eine Gruppe, in der eine primitive Verschlingung festgelegt ist, wird Gruppe mit Verschlingung oder kurz V -Gruppe genannt. Ist V irgendeine (nicht notwendig primitive) Verschlingung in $\mathfrak{G}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Untergruppe $\mathfrak{N} < \mathfrak{G}$, so daß V in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine primitive Verschlingung induziert; es ist nämlich $\mathfrak{N} = \{a \mid V(a, x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{G}\}$.

Üblicherweise wurde bisher bei der Definition der Gruppe mit Verschlingung die Endlichkeit von $\mathfrak{G}$ verlangt. Wir erhalten als Folgerung:

Eine endlich erzeugte V -Gruppe ist sogar endlich.

Beweis. Sei $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem. Es gibt offenbar eine ganze Zahl g , so daß $V(a_i, a_k) \cdot g = 0$ ist für alle i, k . Daraus folgt wegen der Bilinearität und der Primitivität von V : $g \cdot a_i = 0$. Die Ordnung der Gruppe ist also höchstens g^n .

Im folgenden wird nur von endlich erzeugten, also endlichen V -Gruppen die Rede sein. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei noch vereinbart, daß $V(x, y)$ auch als Multiplikation $x \cdot y$ geschrieben wird.

Ist $a = (a_i)$ ein (endliches) Erzeugendensystem einer V -Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist durch

$$(1) \quad a \cdot a' \equiv A \pmod{1}$$

eine symmetrische rationale Matrix A bis auf Kongruenz mod 1 bestimmt. Wir nennen sie Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}$ zum Erzeugendensystem a . Umgekehrt ist durch A die Struktur der V -Gruppe festgelegt. (1) bestimmt nämlich die Verschlingung für die Erzeugenden, wegen der Bilinearität also für alle Elemente von $\mathfrak{G}$, und die Forderung der Primitivität definiert die Relationen zwischen den Erzeugenden a_i ; denn für ein System ganzer Zahlen ξ verschwindet $\xi' a$ genau dann, wenn $\xi' a \cdot a' \equiv \xi' A \equiv 0 \pmod{1}$ ist. Schließlich gibt es wirklich zu jeder symmetrischen rationalen Matrix A eine V -Gruppe — wir nennen sie $\mathfrak{G}(A)$ —, für die A eine Verschlingungsmatrix ist; denn ist n die Reihenzahl von A und $a = (a_i)$ die kanonische Basis der Gruppe Z^n , so ist durch (1) eine Verschlingung V in Z^n definiert, und die Faktorgruppe, für die V primitiv ist, hat A als Verschlingungsmatrix.

Ist S eine unimodulare Matrix, A Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}$ bezüglich a , so ist

$SA S'$ Verschlingungsmatrix bezüglich $S a$,

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ Verschlingungsmatrix bezüglich $(a, 0)$.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz 1. *Jede rationale symmetrische Matrix A bestimmt genau eine V -Gruppe $\mathfrak{G}(A)$, deren Verschlingungsmatrix sie ist, und $\mathfrak{G}(A)$ ändert sich nicht, wenn man auf A die Operationen Q_1, Q_2 von § 1 anwendet.*

Ein Beispiel für eine V -Gruppe ist die Torsionsgruppe der Dimension $2n+1$ einer orientierbaren $(4n+3)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit (vgl. [8]). Die Verschlingung zweier Homologieklassen ist definiert durch die Verschlingungszahl von zwei Repräsentanten, nachdem man die Mannigfaltigkeit in fester Weise orientiert hat. Für die zweifache Überlagerung des Außenraumes eines Knotens $\mathfrak{k}$ zeigte SEIFERT [9]: Die Torsionsgruppe der Dimension 1 stimmt mit der Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$ überein und ist (in unserer Bezeichnung) die V -Gruppe $\mathfrak{G}(Q^{-1})$, wenn Q die nach § 1 zu einer regulären Projektion eines Repräsentanten von $\mathfrak{k}$ gehörende Matrix ist. Daraus und aus Satz 1 folgt nun:

Satz 2. *Die V -Gruppe $\mathfrak{H}^1$ (Homologiegruppe der zweifachen Überlagerung des Knotens $\mathfrak{k}$) ist durch die quadratische Form von $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt.*

Das ist der eine Teil des angekündigten Ergebnisses. Um den Beweis des zweiten Teils vorzubereiten, betrachten wir den Übergang von K zu seinen perfekten Hüllen nun auch bei den V -Gruppen. K_∞ kommt dabei nicht in Betracht; es wird sich nur um K_p mit p = Primzahl handeln. Bekanntlich gibt es für jedes $c \in K_p$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$c = \sum_{v=-k}^{\infty} c_v \cdot p^v, \quad 0 \leq c_v < p.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Abbildung

$$\varphi_p: c \rightarrow \sum_{v=-k}^{-1} c_v \cdot p^v$$

einen Isomorphismus von K_p/Z_p in K/Z definiert. Die Abbildung φ_p hat die Eigenschaft, daß für rationales r im Nenner der Differenz $r - \varphi_p(r)$ die Primzahl p nicht aufgeht, während der Nenner von $\varphi_p(r)$ eine Potenz von p ist. Daraus folgt, daß im Nenner von $r - \sum_p \varphi_p(r)$ überhaupt keine Primzahl aufgeht, diese Zahl also ganz ist. Anders ausgedrückt

$$\sum_p \varphi_p(r) \equiv r \pmod{1}.$$

Wir können nun auch jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathfrak{M}(K_p)$ durch die Festsetzung

$$\mathfrak{G}_p(A) = \mathfrak{G}(\varphi_p(A))$$

eine V -Gruppe $\mathfrak{G}_p(A)$ zuordnen. Für rationales A ist sowohl $\mathfrak{G}(A)$ als auch $\mathfrak{G}_p(A)$ für alle p definiert. Der Zusammenhang dieser Gruppen ergibt sich aus dem Hilfssatz 6. Zuvor definieren wir: Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_v$ V -Gruppen, von denen nur endlich viele sich nicht auf Null reduzieren, ist $\mathfrak{G} = \sum_v \mathfrak{G}_v$ im Sinne der

bloßen Gruppenstruktur und gilt

$$V\left(\sum_v a_v, \sum_v b_v\right) = \sum_v V(a_v, b_v), \quad a_v, b_v \in \mathfrak{G}_v,$$

so heißt $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der V -Gruppen $\mathfrak{G}_v$. Offensichtlich kann man aus vorgegebenen V -Gruppen $\mathfrak{G}_v$ ihre direkte Summe eindeutig konstruieren.

Hilfssatz 6. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist eine p -Gruppe für beliebiges symmetrisches $A \in \mathfrak{M}(K_p)$ und für rationales A ist $\mathfrak{G}(A)$ direkte Summe der V -Gruppen $\mathfrak{G}_p(A)$:

$$\mathfrak{G}(A) = \sum_p \mathfrak{G}_p(A),$$

d. h. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist der p -Bestandteil von $\mathfrak{G}(A)$.

Beweis. $\mathfrak{G}_p(A)$ hat $\varphi_p(A)$ als Verschlingungsmatrix, in deren Nennern nur die Primzahl p vorkommt; also annulliert eine genügend hohe Potenz von p als Faktor die ganze Verschlingungsfunktion V und daher wegen der Primitivität auch jedes Element der Gruppe, d. h. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist p -Gruppe.

Da $\varphi_p(A)$ bei rationalem A für fast alle p ganz ist, können wir die direkte Summe $\mathfrak{G}$ der V -Gruppen $\mathfrak{G}_p(A)$ bilden. Gehört $\varphi_p(A)$ zu dem Erzeugendensystem $\alpha^p = (a_i^p)$ von $\mathfrak{G}_p(A)$, so ist $\alpha = \sum_p \alpha^p = \left(\sum_p a_i^p\right)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ mit

$$\alpha \cdot \alpha' \equiv \sum_p \varphi_p(A) \equiv A \bmod 1.$$

Wie behauptet, ist also $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}(A)$.

Wir haben oben gesehen, daß $\mathfrak{G}(A)$ sich bei unimodularen Transformationen nicht ändert. Für $\mathfrak{G}_p(A)$ gilt eine analoge Aussage, die wir in folgendem brauchen werden.

Hilfssatz 7. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist gegenüber unimodularen Transformationen von A in K_p invariant.

Beweis. Sei S eine in K_p unimodulare Matrix und p^ω der Hauptnenner von A , woraus folgt, daß Multiplikation mit p^ω die ganze Gruppe annulliert. Dann wählen wir ganzrationale Matrizen $\bar{S}$ und $\bar{S}_1$, für die

$$\bar{S} \equiv S \bmod p^\omega, \quad \bar{S}_1 \equiv S^{-1} \bmod p^\omega$$

gilt. Gehört die Verschlingungsmatrix $\varphi_p(A)$ zu dem Erzeugendensystem α , so ist $\bar{\alpha} = \bar{S}\alpha$ ein Erzeugendensystem (wegen $\bar{S}_1 \bar{\alpha} = \alpha$) mit

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}' \equiv \bar{S} \varphi_p(A) \bar{S}' \equiv \varphi_p(\bar{S} A \bar{S}') \bmod 1.$$

Da $p^\omega \cdot A$ in Z_p liegt, ist

$$\bar{S} A \bar{S}' \equiv S A S' \bmod Z_p,$$

folglich

$$\varphi_p(\bar{S} A \bar{S}') \equiv \varphi_p(S A S') \bmod 1,$$

d. h. $\varphi_p(S A S')$ ist Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}_p(A)$, und das war zu zeigen.

Insbesondere kann man für ungerades p $p^\omega A$ in K_p unimodular in eine ganzzahlige Diagonalmatrix überführen (Hilfssatz 1), also A selber in eine Diagonalmatrix D mit Gliedern der Form $c_i p^{-\omega_i}$, c_i ganz rational und nicht durch p teilbar. Ist (b_i) ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}_p(A)$, zu dem $\varphi_p(D) \equiv D \pmod{1}$ Verschlingungsmatrix ist, so verschwindet $\sum_i \beta_i b_i$ genau dann, wenn

$$V\left(\sum_i \beta_i b_i, b_j\right) \equiv \beta_j c_j p^{-\omega_j} \equiv 0 \pmod{1},$$

d. h. wenn

$$\beta_j \equiv 0 \pmod{p^{\omega_j}}$$

für alle j gilt. Das bedeutet, daß das System aller b_i mit $\omega_i > 0$ eine Basis von $\mathfrak{G}_p(A)$ im Sinne von SEIFERT [8] bildet. Nun kann man die Torsionskoeffizienten und Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{G}_p(A) = \mathfrak{G}_p(D)$ unmittelbar ablesen. Wir formulieren es als Hilfssatz:

Hilfssatz 8. *Ist D eine Diagonalmatrix mit den Gliedern $c_i p^{-\omega_i}$, c_i ganz und nicht durch p teilbar, p ungerade, so sind p^{ω_i} mit $\omega_i > 0$ die Torsionskoeffizienten und $v_{p^\omega} = \prod_{\omega_i=\omega} \left(\frac{c_i}{p}\right)$ mit $\omega > 0$ die Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{G}_p(D)$ (vgl. [7], [8]).*

§ 4. Beweis des angekündigten Ergebnisses.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen: Die 1-dimensionale Homologiegruppe $\mathfrak{S}^1$ der zweifachen Überlagerung des Knotens ist die V -Gruppe $\mathfrak{G}(Q^{-1})$, wenn Q ein Repräsentant der quadratischen Form des Knotens ist. Daß umgekehrt auch die quadratische Form durch die V -Gruppe $\mathfrak{S}^1$ bestimmt ist, ergibt sich nun aus dem folgenden Satz:

Satz 3. *Zwei ganzzahlige Matrizen A, B mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{G}(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}(B^{-1})$ ist und ungerade Ordnung hat, lassen sich durch die Operationen Q_1 und Q_2 (vgl. § 1) ineinander überführen.*

Die quadratische Form eines Knotens erhält man aus der V -Gruppe $\mathfrak{S}^1$ also folgendermaßen: Man wähle eine Verschlingungsmatrix A^{-1} von $\mathfrak{S}^1$, deren Inverse A ganz ist. Ist A nicht schon selber Matrix der quadratischen Form einer Projektion des Knotens, so läßt sie sich nach Satz 3 jedenfalls durch Q_1 und Q_2 in eine solche überführen und repräsentiert daher die quadratische Form des Knotens. In dem in der Einleitung erwähnten allgemeinen Fall läßt sich ebenso (unabhängig von der Knotentheorie) einer beliebigen V -Gruppe eine Klasse quadratischer Formen zuordnen. Man kann nämlich mit den genannten Hilfsmitteln aus [4] den Satz 3 auch ohne die Voraussetzung ungerader Ordnung beweisen und ferner zeigen, daß jede V -Gruppe — also auch eine solche die nicht zu einem Knoten gehört — eine Verschlingungsmatrix mit ganzer Inverser besitzt. Damit ist dann eine vollständige umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen V -Gruppen und den hier betrachteten Klassen quadratischer Formen hergestellt.

Beweis von Satz 3. Ist α das Erzeugendensystem von $\mathcal{G}(A^{-1})$, zu dem A^{-1} Verschlingungsmatrix ist, so bildet

$$(2) \quad A \alpha = 0$$

ein System von definierenden Relationen; denn einerseits gilt

$$A \alpha \cdot \alpha' \equiv A A^{-1} \equiv 0 \pmod{1},$$

wegen der Primitivität der Verschlingung also $A \alpha = 0$, und andererseits folgt aus $\xi' \alpha = 0$ für ein gewisses System ganzer Zahlen ξ

$$0 \equiv \xi' \alpha \cdot \alpha' \equiv \xi' A^{-1} \pmod{1};$$

d. h. $\xi' A^{-1} = \eta'$ ist ganz und $\xi' \alpha = \eta' A \alpha = 0$ Folgerelation von (2). Demnach ist der Betrag von $|A|$ die Ordnung von $\mathcal{G}(A^{-1})$. Das gleiche gilt für B , und wir entnehmen daraus: $|A|$ und $|B|$ sind ungerade und unterscheiden sich höchstens durch das Vorzeichen.

Mit Hilfe der Operation Q_2 kann man A und B in zwei Matrizen überführen, die gleiche Reihenzahl und Signatur sowie beide die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

haben. Es wird zu keinen Mißverständnissen führen, wenn wir sie wieder mit A und B bezeichnen. Unter Berufung auf Hilfssatz 5 ist unsere Behauptung bewiesen, wenn sich A und B in jedem K_q unimodular ineinander transformieren lassen. Wir unterscheiden für diesen Nachweis drei Fälle:

I. $q = \infty$. In diesem Falle ist die Behauptung klar, da Reihenzahl und Signatur bekanntlich ein vollständiges Invariantensystem bilden.

II. $q = p =$ ungerade Primzahl. Nach Hilfssatz 1 können wir A und B in K_p unimodular auf Diagonalform transformieren, wobei Diagonalglieder $a_i p^{\alpha_i}$ bzw. $b_i p^{\beta_i}$ mit ganzen, nicht durch p teilbaren a_i, b_i und nicht negativen α_i, β_i auftreten. A^{-1} und B^{-1} sind dann in zwei Diagonalmatrizen mit den Elementen $a_i^{-1} p^{-\alpha_i}$ und $b_i^{-1} p^{-\beta_i}$ überführbar, also, da a_i, b_i Einheiten in Z_p sind, auch in solche mit den Elementen $a_i p^{-\alpha_i}$ bzw. $b_i p^{-\beta_i}$. Aus der Voraussetzung $\mathcal{G}(A^{-1}) \cong \mathcal{G}(B^{-1})$ folgt nach Hilfssatz 6 $\mathcal{G}_p(A^{-1}) \cong \mathcal{G}_p(B^{-1})$. Nach den Hilfssätzen 7 und 8 sind die p -Potenzen p^{α_i} und p^{β_i} , soweit sie positive Exponenten haben, die Torsionskoeffizienten dieser Gruppe und stimmen daher bis auf die Reihenfolge überein. Die p -Potenzen mit dem Exponenten 0 sind alle übrigen, also ist ihre Anzahl ebenfalls in beiden Matrizen die gleiche. Für $\omega > 0$ sind die Ausdrücke

$$\prod_{\alpha_i=\omega} \binom{a_i}{p} \quad \text{und} \quad \prod_{\beta_i=\omega} \binom{b_i}{p}$$

als Verschlingungsinvarianten derselben V -Gruppe einander gleich. Ferner gilt $\prod_i a_i = \prod_i b_i$ (erstreckt über alle i) wegen $|A^{-1}| = |B^{-1}|$. Demnach können

$$\prod_{\alpha_i=\omega} a_i \quad \text{und} \quad \prod_{\beta_i=\omega} b_i$$

sich für alle ω nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, und daraus folgt bekanntlich die unimodulare Äquivalenz der beiden Matrizen in K_p (durch Zerlegen in Teilmatrizen und Anwenden von Hilfssatz 2).

III. $q=2$. Auf Grund von I und II folgt aus Hilfssatz 4, daß A und B in K_2 ineinander transformierbar sind, und Hilfssatz 3 besagt dann, daß dies sogar unimodular möglich ist.

Literatur.

- [1] BLANCHFIELD, R. C., and R. H. FOX: Invariants of self-linking. *Ann. of Math.* **53**, 556 (1951). — [2] BURGER, E.: Über Gruppen mit Verschlingungen. *Crelles J.* **188**, 193 (1950). — [3] GOERITZ, L.: Knoten und quadratische Formen. *Math. Z.* **36**, 647 (1933). — [4] EICHLER, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952. — [5] JONES, B. W.: The Arithmetic Theory of Quadratic Forms. (The Carus Mathematical Monographs Nr. 10.) New York 1950. — [6] MEYER, A.: *Mathematische Mitteilungen*. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* **36**, 241 (1891). — [7] PUPPE, S. D.: Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten. *Math. Z.* **56**, 33 (1952). — [8] SEIFERT, H.: Verschlingungsinvarianten. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl.* **26**, 811 (1933). — [9] SEIFERT, H.: Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. *Hamburg. math. Abh.* **11**, 84 (1936).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Februar 1953.)