Sur les formes quadratiques positives.

Par

A. Korkine et G. Zolotareff,

Professeurs à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Dans nos recherches sur les formes quadratiques, nous avons rencontré et défini les formes que nous nommons *extrêmes*. La question sur la détermination précise de la limite des minima des formes quadratiques se réduit à la recherche d'une forme extrême au plus grand minimum. Or il est facile de voir que d'autres questions fondamentales de la théorie des formes quadratiques dépendent aussi de l'étude de telles formes.

A cet effet, et pour compléter les recherches que nous avons déjà publiées, nous nous sommes proposé de donner dans ce Mémoire, avec quelques propriétés fondamentales de ces formes, toutes les formes extrêmes binaires, ternaires, quaternaires et à cinq variables.

Notre Mémoire est divisé en deux chapitres:

Dans le premier, nous considérons principalement les formes à un nombre quelconque de variables.

Le second est consacré aux formes à cinq variables.

Chapitre premier.

1. Rappelons d'abord la définition des formes extrêmes.

Nous nommons *extrême* une forme quadratique positive si son minimum est diminué, lorsqu'on attribue aux coefficients des accroissements infiniment petits, tels que la valeur du déterminant de la forme reste invariable. Il est clair que toutes les formes équivalentes à une forme extrême sont aussi des formes extrêmes. Nous considérons dans ce qui suit toute la classe de formes équivalentes comme une seule forme.

Quoique la définition que nous venons de donner exprime la propriété caractéristique des formes extrêmes par laquelle elles sont complétement déterminées, toutefois la recherche de ces formes pour un nombre donné de variables présente de grandes difficultés.

Elle demande, en effet, une étude étendue des propriétés des valeurs entières des variables pour lesquelles la forme reçoit la valeur minimum.

Quelles que soient, d'ailleurs, les difficultés de la recherche, la question des formes extrêmes est cependant la première qu'on puisse se proposer dans la théorie des formes quadratiques.

Les formes binaires et ternaires qui ont été étudiées sont si peu compliquées en comparaison avec les autres, où le nombre de variables est plus grand, que la recherche des formes extrêmes ne s'est point présentée dans leur théorie comme une question séparée; mais elle entrait implicitement dans la réduction de ces formes. Or, si l'on suivait la même voie dans l'étude des formes avec un nombre de variables un peu considérable, il faudrait établir des tables avec un nombre énorme d'inégalités, qui déterminent la forme réduite dans des cas donnés.

Si même on n'avait aucune peine à former ces inégalités, il faudrait néanmoins abandonner tout espoir d'en tirer des conclusions semblables à celles qui ont été déduites pour les formes binaires et ternaires. Or la composition même de ces inégalités demande la connaissance des propriétés des valeurs entières des variables pour lesquelles la forme est la plus petite possible, ce qui constitue la partie la plus essentielle dans la recherche des formes extrêmes. Quand une forme est donnée, on peut facilement reconnaître si elle est extrême ou non, par une méthode que nous allons appliquer à trois formes:

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n],$$

$$V_n = \sqrt[n]{2^{n-2}D}\,[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots+x_2x_3+\cdots + x_{n-1}x_n],$$

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9}{3^4}D}\,[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\tfrac{1}{2}x_1x_2-\tfrac{1}{2}x_1x_3-\tfrac{1}{2}x_1x_4 -\tfrac{1}{2}x_1x_5+\tfrac{1}{2}x_2x_3+\tfrac{1}{2}x_2x_4-x_2x_5+\tfrac{1}{2}x_3x_4-x_3x_5 -x_4x_5].$$

Ce sont les seules formes extrêmes dont nous aurons à nous occuper dans ce Mémoire.

2. Considérons d'abord la forme U_n. Son minimum s'obtient:

1°. Lorsque $x_i=1$, $x_1=x_2=\cdots=x_{i-1}=x_{i+1}=\cdots=x_n=0$. Cela nous donne n représentations, i étant un des nombres $1, 2, 3, \cdots, n$.

2°. Lorsque $x_i=1$, $x_k=-1$, les autres x étant égaux à zéro.

Nous obtenons de cette manière $\frac{n(n-1)}{2}$ représentations, les nombres i et k étant différents entre eux et compris dans la suite $1, 2, 3, \cdots, n$ *).

Considérons avec U_n une forme f de même déterminant $-D$, telle que la différence $f - U_n$ soit une forme quadratique à coefficients infiniment petits. Une telle forme f peut être écrite comme il suit:

$$f = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,[(1+\alpha_{11})x_1^2+(1+\alpha_{22})x_2^2+\cdots+(1+\alpha_{n,n})x_n^2+(1+\alpha_{12})x_1x_2 + (1+\alpha_{13})x_1x_3+\cdots+(1+\alpha_{n-1,n})x_{n-1}x_n].$$

Ici les quantités α_{ii} et $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ sont infiniment petites ou zéros.

Nous exceptons le cas dans lequel tous les α sont égaux à zéro, car on aura alors identiquement $f = U_n$.

En égalant le déterminant de f à $-D$, on aura, après les réductions,

$$(1)\quad n(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}) - (\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{23}+\cdots+\alpha_{n-1,n}) + \Omega = 0,$$

Ω étant la somme des termes dont chacun est infiniment petit en comparaison avec quelques-unes des quantités α. Donnons maintenant une autre forme à l'équation (1).

Supposons d'abord que, pour

$$x_i = 1,\quad x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0,$$

la forme f devienne égale à

$$(2)\qquad 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,(1+\omega_{ii}),$$

de sorte que $\omega_{ii} = \alpha_{ii}$.

Supposons ensuite que, pour $x_i = 1$, $x_k = -1$, les autres x égaux à zéro, la forme f devienne

$$(3)\qquad 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,(1+\omega_{ik}),$$

de sorte que $\omega_{ik} = \omega_{ki} = \alpha_{ii} + \alpha_{kk} - \alpha_{ik}$.

En désignant maintenant par $\Sigma\omega$ la somme de toutes les quantités ω_{ii} et ω_{ik} en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$, nous aurons facilement

$$\Sigma\omega = n(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}) - (\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{23}+\cdots+\alpha_{n-1,n}).$$

Cela nous conduit à cette forme de l'équation (1)

$$(4)\qquad \Sigma\omega + \Omega = 0.$$

*) Les autres représentations en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$, qui s'obtiennent de celles que nous donnons ici par le changement des signes de toutes les variables, ne nous étant point nécessaires, nous en faisons abstraction.

Les quantités ω ne peuvent pas être égales à zéro toutes ensemble, car il s'ensuivrait que tous les α seraient égaux à zéro et nous avons fait abstraction de ce cas. Il est évident, de ce que nous avons dit de Ω, que, parmi les quantités ω, quelques-unes sont négatives et les autres positives, car il serait impossible de satisfaire à l'équation (4) dans une autre supposition.

Supposons que ω_{ii} soit négatif. Alors la valeur (2) de la forme f sera moindre que $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$.

Si maintenant ω_{ik} est négatif, alors la valeur (3) de f sera moindre que $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$. Ainsi, dans tous les cas, il y a une valeur de f plus petite que le minimum de U_n. Il s'ensuit que le minimum de f est, *à fortiori*, inférieur à celui de U_n.

Donc le minimum de toute forme de déterminant $-D$, obtenue de U_n par des variations infiniment petites des coefficients est moindre que celui de U_n, et par conséquent U_n est une forme extrême.

3. Passons maintenant à la forme V_n. Son minimum s'obtient:

1°. Lorsque $x_i = 1$, les autres x égaux à zéro

$$i = 1, 2, \cdots n.$$

2°. Lorsque $x_i = 1$, $x_k = -1$; les autres x sont égaux à zéro, i et k étant deux nombres différents pris de la suite $1, 2, 3, \cdots, n$, la combinaison $i = 1$, $k = 2$ exceptée.

3°. Lorsque $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_i = 1$, $i = 3, 4, \cdots, n$; les autres x sont égaux à zéro.

4°. Lorsque $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_i = 1$, $x_k = 1$; les autres x sont nuls, i et k étant deux nombres différents de la suite $3, 4, \cdots, n$.

Considérons avec V_n une autre forme f du même déterminant $-D$ et telle que la différence $f - V_n$ soit une forme dont tous les coefficients soient infiniment petits. La forme f peut être représentée comme il suit:

$$f = \sqrt[n]{2^{n-2}D}\,[(1+\alpha_{11})x_1^2 + (1+\alpha_{22})x_2^2 + \cdots + (1+\alpha_{nn})x_n^2 + \alpha_{12}x_1x_2 \\ + (1+\alpha_{13})x_1x_3 + (1+\alpha_{23})x_2x_3 + \cdots + (1+\alpha_{n-1,n})x_{n-1}x_n];$$

les quantités α_{ii} et α_{ik} sont des infiniment petits ou zéros.

En exprimant que le déterminant de f est égal à $-D$, il viendra, après quelques réductions,

$$(1) \qquad n(\alpha_{11}+\alpha_{22}) + 4(\alpha_{33}+\alpha_{44}+\cdots+\alpha_{nn}) + (n-2)\alpha_{12} \\ -2(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\cdots+\alpha_{1n}) \\ -2(\alpha_{23}+\alpha_{24}+\cdots+\alpha_{2n}) + \Omega = 0,$$

Ω étant la somme des termes qui sont infiniment petits par rapport à *quelques-unes* des quantités α.

Maintenant nous allons donner une autre forme à l'équation (1) et, dans ce but, nous supposerons que:

1°. x_i étant égal à l'unité et les autres x à zéro, la valeur de f soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\omega_{ii}),$$

de sorte que $\omega_{ii}=\alpha_{ii}$;

2°. x_i étant égal à -1, x_k à $+1$ et les autres x à zéro, la valeur de f soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\omega_{ik}),$$

de sorte que $\omega_{ik}=\alpha_{ii}+\alpha_{kk}-\alpha_{ik}$, la combinaison $i=1$, $k=2$ étant exceptée;

3°. x_1 et x_2 étant égaux à -1, x_i à $+1$ et les autres x à zéro, la valeur de f soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\varepsilon_i)$$
$$(i=3,\ 4,\ \cdots,\ n),$$

de manière que $\varepsilon_i=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{2i}$;

4°. x_1 et x_2 étant égaux à -1, x_i et x_k à $+1$ et les autres x à zéro, la valeur de f soit

$$\sqrt[n]{2^{n-2}D}(1+\varepsilon_{ik}),$$

de sorte que $\varepsilon_{ik}=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{kk}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{1k}-\alpha_{2i}-\alpha_{2k}+\alpha_{ik}$.

Maintenant, en ajoutant toutes les équations,

$$\begin{aligned}
\omega_{ii} &= \alpha_{ii},\\
\omega_{ik} &= \alpha_{ii}+\alpha_{kk}-\alpha_{ik},\\
\varepsilon_i &= \alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{2i},\\
\varepsilon_{ik} &= \alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{ii}+\alpha_{kk}+\alpha_{12}-\alpha_{1i}-\alpha_{1k}-\alpha_{2i}-\alpha_{2k}+\alpha_{ik},
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\Sigma\omega_{ii}+\Sigma\omega_{ik}+\Sigma\varepsilon_i+\Sigma\varepsilon_{ik}\\
&\quad=\frac{n-1}{2}\{n(\alpha_{11}+\alpha_{22})+4(\alpha_{33}+\alpha_{44}+\cdots+\alpha_{nn})+(n-2)\alpha_{12}\\
&\qquad\qquad-2(\alpha_{13}+\alpha_{14}+\cdots+\alpha_{1n})\\
&\qquad\qquad-2(\alpha_{23}+\alpha_{24}+\cdots+\alpha_{2n})\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent l'équation (1) prend la forme

$$\Sigma\omega_{ii}+\Sigma\omega_{ik}+\Sigma\varepsilon_i+\Sigma\varepsilon_{ik}+\frac{2}{n-1}\Omega=0.$$

Il résulte de là, comme précédemment pour la forme U_n, que la forme V_n est extrême.

4. Discutons de la même manière la forme

$$Z = \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}\Big[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{1}{2}x_1x_4 - \frac{1}{2}x_1x_5 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_2x_4 - x_2x_5 + \frac{1}{2}x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5\Big]$$

$$= \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}\Big[\Big(x_5 - \frac{x_2+x_3+x_4}{2} - \frac{x_1}{4}\Big)^2 + \frac{3}{4}\Big(x_2 - \frac{x_1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}\Big(x_3 - \frac{x_1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}\Big(x_4 - \frac{x_1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{8}x_1^2\Big].$$

Ayant Z en forme d'une somme de carrés, il est facile de trouver les représentations de son minimum. Elles sont contenues dans la table suivante:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	2

Chaque ligne contient une représentation du minimum de Z; par exemple, dans la dernière ligne, figure la représentation

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$$

Pour démontrer que Z est une forme extrême, considérons la forme

$$f = \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}\,[(1+\alpha_{11})x_1^2 + (1+\alpha_{22})x_2^2 + (1+\alpha_{33})x_3^2 + (1+\alpha_{44})x_4^2 + (1+\alpha_{55})x_5^2 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{12})x_1x_2 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{13})x_1x_3 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{14})x_1x_4 + (-\tfrac{1}{2}+\alpha_{15})x_1x_5 + (\tfrac{1}{2}+\alpha_{23})x_2x_3 + (\tfrac{1}{2}+\alpha_{24})x_2x_4 + (-1+\alpha_{25})x_2x_5 + (\tfrac{1}{2}+\alpha_{34})x_3x_4 + (-1+\alpha_{35})x_3x_5 + (-1+\alpha_{45})x_4x_5],$$

toutes les quantités α étant infiniment petites.

Désignons maintenant par

$$\sqrt[3]{\frac{2^9 D}{3^4}}\,(1+\omega_1),\quad \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}\,(1+\omega_2),\ \cdots,\ \sqrt[5]{\frac{2^9 D}{3^4}}\,(1+\omega_{15})$$

les valeurs de f qui s'obtiennent en attribuant aux variables successivement les quinze systèmes de valeurs contenues dans la table qui précède.

En exprimant que le déterminant de f est égal à celui de Z, on aura, après quelques réductions,

$$(1)\quad 7\alpha_{55}+3\alpha_{22}+3\alpha_{33}+3\alpha_{44}+4\alpha_{11}+3\alpha_{25}+3\alpha_{35}+3\alpha_{45}+4\alpha_{15} \\ +\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+2\alpha_{12}+2\alpha_{13}+2\alpha_{11}+\Omega=0,$$

Ω désignant la somme des termes dont chacun est infiniment petit par rapport à quelques-unes des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{15}$. D'après la définition des quantités $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{15}$, il viendra

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\omega = 7\alpha_{55}+3\alpha_{22}+3\alpha_{33}+3\alpha_{44}+4\alpha_{11}+3\alpha_{25}+3\alpha_{35}+3\alpha_{15} \\ +4\alpha_{15}+\alpha_{23}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+2\alpha_{12}+2\alpha_{13}+2\alpha_{14},$$

de sorte que l'équation (1) prendra la forme

$$\Sigma\omega + 2\Omega = 0.$$

Donc, etc.

5. La méthode que nous avons appliquée aux formes U_n, V_n et Z peut être employée toutes les fois qu'on demande si une forme donnée est extrême ou non. Mais il faut recourir à d'autres moyens si l'on a à trouver toutes les formes extrêmes pour un nombre donné de variables.

Dans notre Mémoire *Sur les formes quadratiques**), nous avons énoncé un théorème concernant le nombre de représentations du minimum d'une forme extrême. Ce nombre ne peut être inférieur à $\frac{n(n+1)}{2}$. On peut facilement vérifier cette proposition pour toutes les formes extrêmes que nous y avons données. Comme elle est fondamentale pour nous, nous en donnerons la démonstration. Soit

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

une forme de déterminant $-D$.

Désignons les différentes représentations du minimum M de f comme il suit:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n. \end{array}\right.$$

*) *Mathematische Annalen* VI. Band, S. 366.

Supposons que cette table ne renferme pas au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations, qui déterminent complétement la forme f, son minimum étant donné.

Cela posé, nous allons démontrer qu'en faisant varier infiniment peu les coefficients de f, on obtient une forme de même déterminant et dont le minimum surpasse celui de f.

En exprimant que la table (1) contient les représentations du nombre M, on aura les équations

$$(2) \qquad \Sigma p_i p_k a_{ik} = M, \quad \Sigma q_i q_k a_{ik} = M, \ \ldots .$$

La supposition que ces représentations ne déterminent pas la forme f consiste en ce que les équations (2) avec inconnues a_{ik} ont un nombre infini de solutions.

Il suit de là que les équations

$$\Sigma p_i p_k \lambda_{ik} = 0, \ \ldots$$

peuvent être satisfaites par les valeurs λ_{ik} qui ne s'annulent pas toutes à la fois. De telles valeurs λ_{ik} étant trouvées, considérons la forme

$$f + \varepsilon\varphi,$$

ε désignant une quantité infiniment petite et φ la forme

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i x_k.$$

La forme

$$f + \varepsilon\varphi$$

devient minimum pour les mêmes valeurs (1) des variables que f; mais, pour ces valeurs, la forme φ s'annule; par conséquent le minimum de $f + \varepsilon\varphi$ sera aussi égal à M, comme celui de f.

Faisons voir que le déterminant de $f + \varepsilon\varphi$, pour la valeur convenable de ε, devient inférieur à D en valeur absolue. Désignons-le par $-D'$; on a

$$D' = D + \varepsilon\Big(\frac{dD}{da_{11}}\lambda_{11} + \frac{dD}{da_{22}}\lambda_{22} + \cdots + \frac{dD}{da_{nn}}\lambda_{nn}$$
$$+ \frac{dD}{da_{12}}\lambda_{12} + \frac{dD}{da_{13}}\lambda_{13} + \cdots + \frac{dD}{da_{n-1,n}}\lambda_{n-1,n}\Big) + \Omega,$$

Ω étant la somme de termes des ordres supérieurs au premier par rapport à ε.

Il y a ici deux cas à distinguer:

1°. Lorsque l'expression

$$P = \frac{dD}{da_{11}}\lambda_{11} + \frac{dD}{da_{22}}\lambda_{22} + \cdots + \frac{dD}{da_{n-1,n}}\lambda_{n-1,n}$$

diffère de zéro;

2°. Lorsque

$$P = 0.$$

Dans le premier cas, ε étant pris avec le signe contraire à celui de P, on voit immédiatement que

$$D' = D + \varepsilon P + \Omega < D.$$

Dans le second cas lorsque $P = 0$ représentons Ω sous la forme

$$\Omega = K\frac{\varepsilon^2}{2} + \Omega_1,$$

K étant indépendant de ε et Ω_1 une quantité infiniment petite par rapport à ε^2.

Cela posé, nous faisons voir que le coefficient

$$K = \frac{d^2 D}{d a_{11}^2}\lambda_{11}^2 + 2\frac{d^2 D}{d a_{12}\, d a_{13}}\lambda_{12}\lambda_{13} + \cdots$$

est négatif.

A cet effet, considérons l'expression

$$P^2 - DK,$$

qui est, comme on sait, l'invariant simultané des deux formes f et φ. Transformons dans f et φ les variables par une même transformation linéaire dont le déterminant est égal à l'unité. Soient $z_1, z_2, \cdots, z_n$ les nouvelles variables.

La transformation mentionnée peut être choisie de sorte que f devienne

$$f = \alpha_{11} z_1^2 + \alpha_{22} z_2^2 + \cdots + \alpha_{nn} z_n^2.$$

Supposons que φ prenne la forme

$$\varphi = \Sigma \mu_{ik} z_i z_k.$$

Composons maintenant, pour la nouvelle forme de f et φ, l'expression $P^2 - DK$. Nous aurons facilement

$$P^2 - DK = D^2\left[\left(\frac{\mu_{11}}{\alpha_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{22}}{\alpha_{22}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mu_{nn}}{\alpha_{nn}}\right)^2 + 2\frac{\mu_{12}^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}} \right.$$
$$\left. + 2\frac{\mu_{13}^2}{\alpha_{11}\alpha_{33}} + \cdots + 2\frac{\mu_{n-1,n}^2}{\alpha_{n-1,n-1}\alpha_{n,n}}\right].$$

On voit de là que $P^2 - DK$ est positif, car α_{ii} sont tous positifs. Or de l'inégalité

$$P^2 - DK > 0,$$

à cause de l'équation

$$P = 0.$$

on déduit que K est négatif. Dans le cas considéré, on a

$$D' = D + K\frac{\varepsilon^2}{2} + \Omega,$$

et il suit de là que $D' < D$.

Ainsi on peut supposer, dans l'un et l'autre cas,

$$D' = D(1-\eta), \quad \eta > 0.$$

Alors la forme

$$\frac{f+\varepsilon\varphi}{\sqrt[n]{1-\eta}}$$

aura le déterminant $-D$ et le minimum $\frac{M}{\sqrt[n]{1-\eta}} > M$.

Donc le minimum de la forme f peut être augmenté par des variations infiniment petites des coefficients qui laissent la valeur du déterminant invariable.

Par conséquent, si une forme est telle que son minimum ne puisse être augmenté de cette manière, il aura au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations qui déterminent complétement la forme.

6. Soit

$$f = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

une forme dont le minimum ne puisse être augmenté par des variations infiniment petites de ses coefficients, en laissant la valeur du déterminant invariable.

Il est facile de démontrer que par ces variations le minimum de f variera et, par conséquent, sera nécessairement *diminué*.

En effet, considérons la forme

$$f + \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k = f + \psi,$$

de même déterminant que f, $\psi = \Sigma \alpha_{ik} x_i x_k$ étant une forme à coefficients infiniment petits, et supposons que le minimum de $(f+\psi)$ soit le même que celui de f. Il ne peut donc être augmenté comme celui de f et la forme

$$f + \psi$$

aura au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations de ce minimum (n° 5.), qui seront évidemment contenues parmi celles du minimum de f. Supposons qu'elles soient

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n. \end{matrix}$$

D'après le n° 5., les équations

$$\Sigma p_i p_k a_{ik} = M, \quad \Sigma q_i q_k a_{ik} = M, \cdots,$$

ainsi que les équations

$$\Sigma p_i p_k (a_{ik} + \alpha_{ik}) = M, \quad \Sigma q_i q_k (a_{ik} + \alpha_{ik}) = M, \cdots$$

admettent une solution déterminée.

Il résulte de là que tous les α_{ik} s'annulent, et la forme $f+\psi$ est la même que f, ce qui est contraire à la supposition.

7. De ce que nous avons dit dans les numéros précédents il résulte les conséquences suivantes:

1°. Une forme dont le minimum ne peut être augmenté, si l'on fait varier infiniment peu ses coefficients, en laissant la valeur du déterminant invariable, est une forme extrême (n° 6.).

2°. Toute forme extrême a au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations de son minimum qui déterminent complétement cette forme, en supposant que son minimum soit donné.

3°. Les formes avec le plus grand minimum, choisies dans l'ensemble de toutes les formes de même déterminant et avec les mêmes variables, sont nécessairement extrêmes.

4°. La détermination précise de la limite des minima se réduit évidemment à la recherche des formes extrêmes avec le plus grand minimum. Par conséquent cette détermination sera accomplie si l'on a composé toutes les formes extrêmes, le déterminant et le nombre des variables étant donnés.

5°. Le rapport d'une forme extrême à son minimum est une forme dont tous les coefficients sont des nombres rationnels.

Cela résulte de ce que, en vertu du n° 5., les coefficients de toute forme extrême sont déterminés par les équations linéaires semblables aux équations (2).

8. Nous allons nous occuper maintenant des déterminants formés avec des nombres qui représentent le minimum de la forme. Nous les nommerons *déterminants caractéristiques*. Un tel déterminant sera, par exemple,

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{vmatrix},$$

les lignes

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{matrix}$$

désignant les représentations du minimum de la forme, comme dans Nr. 5. la table (1); leur nombre est n.

Ces déterminants constituent un élément essentiel dans notre méthode de composer des formes extrêmes; c'est pourquoi nous allons démontrer quelques-unes de leurs propriétés.

Pour toute forme extrême, il existe au moins un déterminant caractéristique qui ne soit pas égal à zéro.

Supposons le contraire et soient, comme dans la table (1),

$$\begin{matrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

toutes les représentations du minimum de f.

Il suit de notre supposition qu'il existe des nombres

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$$

qui ne sont pas zéro tous ensemble et tels qu'on ait

$$\begin{gathered} p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + \cdots + p_n\xi_n = 0, \\ q_1\xi_1 + q_2\xi_2 + \cdots + q_n\xi_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Soit maintenant ε une quantité infiniment petite positive. La forme

$$f' = f - \varepsilon(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n)^2$$

a évidemment le même minimum que f et les mêmes représentations de ce minimum.

Le déterminant de la forme f' est

$$-D + \varepsilon F(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n),$$

$F(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)$ étant la forme adjointe à f.

Ce déterminant sera par conséquent inférieur à D en valeur absolue.

D'où il résulte facilement, comme dans le n° 5., que f n'est pas une forme extrême, et le théorème est démontré.

9. *Pour une forme positive quelconque à n variables, dont le nombre de représentations du minimum n'est pas inférieur à n, les valeurs absolues des déterminants caractéristiques ne surpassent pas une certaine limite, qui ne dépend que du nombre n de variables.*

Pour les formes binaires, ce théorème résultera de la formule

$$(u^2+v^2)(u'^2+v'^2) = (uv'-vu')^2 + (uu'+vv')^2. \tag{1}$$

En effet, soit $f(x, y)$ la forme binaire du déterminant $-D$, représentée par la somme de carrés

$$(ax+by)^2 + (a'x+b'y)^2.$$

En posant, dans la formule (1)

$$\begin{aligned} u &= ap_1 + bp_2, & v &= a'p_1 + b'p_2, \\ u' &= aq_1 + bq_2, & v' &= a'q_1 + b'q_2, \end{aligned}$$

nous aurons

$$f(p_1, p_2) f(q_1, q_2) = (ab'-ba')^2 (p_1q_2 - p_2q_1)^2 + (uu'+vv')^2.$$

En désignant par Δ la quantité

$$p_1q_2 - p_2q_1,$$

il vient

$$f(p_1, p_2) f(q_1, q_2) \geq D\Delta^2.$$

Supposons maintenant que les valeurs

$$f(p_1, p_2), \quad f(q_1, q_2)$$

soient égales au minimum M de F. Il viendra

$$M^2 \geqq D\Delta^2.$$

Or on sait que

$$M \leqq \sqrt{\tfrac{4}{3}D}\,;$$

donc

$$(\Delta) \leqq \sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

(Δ) désignant la valeur absolue de Δ.

En supposant que les nombres p_1, p_2, q_1, q_2 soient des entiers, on aura

$$(\Delta) = 0, \text{ ou } (\Delta) = 1.$$

Or on ne peut pas supposer $\Delta = 0$, car il viendrait

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2},$$

et comme p_1 est un nombre premier à p_2 et q_1 à q_2, on aurait nécessairement

$$p_1 = \pm q_1, \quad p_2 = \pm q_2,$$

et les deux représentations $(p_1 p_2)$ et $(q_1 q_2)$ ne seront point différentes entre elles.

De la même manière pour les formes ternaires dans la formule connue d'Euler

$$\begin{aligned}(p^2+q^2+r^2+s^2)&(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)\\ &= (pp'-qq'+rr'-ss')^2 + (pq'+qp'-rs'-sr')^2\\ &+ (pr'+sq'-qs'-rp')^2 + (ps'+qr'+rq'+sp')^2\end{aligned}$$

supposons

$$\begin{aligned} &p = uu' + vv' + ww', \quad q = vw' - wv',\\ &r = wu' - uw', \qquad\quad\ s = uv' - vu',\\ &r' = u'', \quad q' = v'', \quad p' = w'', \quad s' = 0,\end{aligned}$$

et, en ayant égard à l'identité

$$\begin{aligned}(uu'+vv'+ww')^2 + (vw'-wu')^2 + (wu'-uw')^2 + (uv'-vu')^2&\\ = (u^2+v^2+w^2)(u'^2+v'^2+w'^2)&,\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}(u^2+v^2+w^2)&(u'^2+v'^2+w'^2)(u''^2+v''^2+w''^2)\\ &= [(vw'-wv')u'' + (wu'-uw')v'' + (uv'-vu')w'']^2\\ &\quad + \text{une somme de carrés.}\end{aligned} \tag{2}$$

Soit maintenant $f(x, y, z)$ une forme positive ternaire du déterminant $-D$. Représentons-la sous la forme d'une somme de carrés

$$f(x,y,z) = (ax+by+cz)^2 + (a'x+b'y+c'z)^2 + (a''x+b''y+c''z)^2.$$

Faisons maintenant, dans la formule (2),

$$
\begin{aligned}
u &= ap_1 + bp_2 + cp_3, & v &= a'p_1 + b'p_2 + c'p_3,\\
u' &= aq_1 + bq_2 + cq_3, & v' &= a'q_1 + b'q_2 + c'q_3,\\
u'' &= ar_1 + br_2 + cr_3, & v'' &= a'r_1 + b'r_2 + c'r_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w &= a''p_1 + b''p_2 + c''p_3,\\
w' &= a''q_1 + b''q_2 + c''q_3,\\
w'' &= a''r_1 + b''r_2 + c''r_3.
\end{aligned}
$$

Alors on aura

$$
\begin{aligned}
&f(p_1, p_2, p_3) f(q_1, q_2, q_3) f(r_1, r_2, r_3)\\
&= D \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_2 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}^2 + \text{une somme de carrés.}
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$f(p_1, p_2, p_3) f(q_1, q_2, q_3) f(r_1, r_2, r_3) \geq D\Delta^2,$$

Δ désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$f(p_1, p_2, p_3) = f(q_1, q_2, q_3) = f(r_1, r_2, r_3) = M,$$

M étant le minimum de f.

Il viendra

$$M^3 > D\Delta^2.$$

Or

$$M \leq \sqrt[3]{2D};$$

donc

$$(\Delta) \leq \sqrt{2}.$$

Ainsi

$$(\Delta) = 0 \text{ ou } (\Delta) = 1.$$

10. Voici une démonstration générale de notre théorème:

Soit $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ une forme positive à n variables $x_1, x_2, \cdots x_n$. Faisons la transformation

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p_1 z_1 + q_1 z_2 + \cdots + r_1 z_n,\\
x_2 &= p_2 z_1 + q_2 z_2 + \cdots + r_2 z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= p_n z_1 + q_n z_2 + \cdots + r_n z_n,
\end{aligned}
$$

$z_1, z_2, \cdots z_n$ étant de nouvelles variables.

Soit encore

$$\varphi = \Sigma a_{ik} z_i z_k$$

la forme transformée. On aura

$$a_{11} = f(p_1, p_2, \cdots p_n), \quad a_{22} = f(q_1, q_2, \cdots q_n).$$

Représentons φ par la somme de carrés

$$\varphi = a_{11}\left(z_1 + \frac{a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + \cdots + a_{1n}z_n}{a_{11}}\right)^2 + K(z_2 + \lambda z_3 + \cdots)^2$$
$$+ L(z_3 + \cdots)^2 + \cdots + N z_n^2,$$

où, pour abréger, nous avons désigné par $K, \lambda, L, \cdots N$ les quantités suivantes:

$$K = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}}, \quad \lambda = \frac{a_{23}a_{11} - a_{12}a_{13}}{a_{22}a_{11} - a_{12}^2};$$

$$L = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} : (a_{22}a_{11} - a_{12}^2),$$

$$N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

On a, en premier lieu,

$$a_{11} K \cdot L \cdots N = D\Delta^2,$$

Δ désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

En second lieu, il est évident que

$$K \leq a_{22} = f(q_1, q_2 \cdots q_n), \; \cdots, \; N \leq a_{nn} = f(r_1, r_2 \cdots r_n).$$

Donc

$$f(p_1, p_2, \cdots p_n) f(q_1, q_2, \cdots q_n) \cdots f(r_1, r_2, \cdots r_n) \geq D\Delta^2.$$

Si maintenant nous supposons

$$f(p_1, p_2, \cdots p_n) = f(q_1, q_2, \cdots q_n) = \cdots = M,$$

M étant le minimum de f, il viendra

$$M^n \geq D\Delta^2.$$

Or

$$M < \sqrt[n]{\mu D},$$

μ ne dépendant que de n.

Il résulte de là

$$(\Delta) < \sqrt{\mu}.$$

Donc le théorème est démontré.

On déduit de là les conséquences qui suivent:

1°. Pour les formes binaires, $\mu = \frac{4}{3}$, $(\Delta) < \sqrt{\frac{4}{3}}$; Δ ne pouvant être nul (n° 9.), on aura $(\Delta) = 1$.

2°. Pour les formes ternaires, $\mu = (\frac{4}{3})^3$, $(\Delta) < (\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}}$; par conséquent (Δ) est un des nombres 0, 1.

3°. Pour les formes quaternaires, d'après le théorème de M. Hermite, $\mu = (\frac{4}{3})^6$. Par conséquent $(\Delta) < (\frac{4}{3})^3$. Donc (Δ) ne peut être qu'un des nombres $0, 1, 2$.

Il résulte de notre Mémoire*) que (Δ) ne peut être égal à 2 que pour la forme V_4.

En effet, afin que (Δ) soit égal à 2, il faut qu'on ait $\mu = 4$, et que par conséquent le minimum de la forme soit $\sqrt[4]{4D}$. Or un tel minimum ne peut avoir lieu que pour la forme V_4.

4°. Pour les formes à cinq variables, nous profiterons de la limite $\mu = 9$ donnée dans le Mémoire cité.

D'où il résulte $(\Delta) < 3$.

Remarquant que (Δ) ne peut être égal à 3, car dans ce cas on aurait

$$M = \sqrt[5]{9D},$$

ce qui est impossible (n° 10. du Mémoire), on voit que (Δ) est un des nombres $0, 1, 2$.

11. En nous fondant sur les propositions établies dans les numéros précédents, nous pouvons établir les formes extrêmes directement.

A cet effet, nous allons chercher pour chacune d'elles les représentations de son minimum en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$, qui la déterminent complétement. Nous rangerons ces systèmes de nombres en tables, comme nous avons fait dans le n° 4. pour la forme Z. Soit

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots, & \lambda \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \cdots, & \lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{(\mu-1)}, & \beta^{(\mu-1)}, & \gamma^{(\mu-1)}, & \cdots, & \lambda^{(\mu-1)} \end{array}\right.$$

une table contenant μ systèmes de nombres.

Deux lignes

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \lambda$$
$$\alpha', \beta', \gamma', \cdots, \lambda'$$

sont considérées comme distinctes si les égalités

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \cdots, \lambda' = \lambda,$$

ou ces autres

$$\alpha' = -\alpha, \quad \beta' = -\beta, \cdots, \lambda' = -\lambda$$

n'ont pas lieu toutes ensemble. Dans le cas contraire nous compterons ces deux lignes

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots \lambda$$
$$\alpha', \beta', \gamma', \cdots \lambda'$$

comme une seule.

*) Mathematische Annalen VI. Band, S. 366.

De plus, nous faisons abstraction du système dont tous les nombres sont égaux à zéro, et nous désignons par n le nombre de colonnes dans la table (I).

Soient

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

n variables, et supposons que chaque ligne de la table (I) comprenne leurs valeurs simultanées, de sorte qu'on ait successivement

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \cdots, x_n = \lambda,$$
$$x_1 = \alpha', \quad x_2 = \beta', \cdots, x_n = \lambda',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous exprimerons cela en écrivant la table (I) comme il suit:

$$(\mathrm{I}') \qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline \alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

En remplaçant les variables

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

par les suivantes:

$$y_1, y_2, \cdots, y_n,$$

au moyen des équations

$$x_1 = g_1 y_1 + g_2 y_2 + \cdots + g_n y_n.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = g_1^{(n-1)} y_1 + g_2^{(n-1)} y_2 + \cdots + g_n^{(n-1)} y_n,$$

les nombres $g_i^{(k)}$ étant des entiers et le déterminant $\Sigma \pm g_1 g_2' \cdots g_{n-1}^{(n-1)}$ étant égal à ± 1, nous déduirons de la table (I) une nouvelle table qui se rapporte aux variables

$$y_1, y_2, \cdots, y_n.$$

Soit

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline a & b & \cdots & l \\ a' & b' & \cdots & l' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(\mu-1)} & b^{(\mu-1)} & \cdots & l^{(\mu-1)} \end{array}$$

cette table. Nous dirons qu'elle est équivalente à la table (I).

Remarque I. — Si nous changons l'ordre des colonnes dans une table quelconque ou les signes de tous les nombres d'une même colonne, nous formerons une nouvelle table à elle équivalente.

De plus, nous laissons l'ordre des lignes tout à fait arbitraire; par conséquent on pourra mettre les lignes de la table dans tel ordre que l'on voudra.

Remarque II. — Si l'un des déterminants formés avec n lignes d'une table est égal à ± 1, on peut toujours transformer cette table en une autre table équivalente où se trouveront les lignes suivantes:

$$\begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1. \end{array}$$

En effet, soit

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \cdots & \lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{(n-1)} & \beta^{(n-1)} & \gamma^{(n-1)} & \cdots & \lambda^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ce déterminant.

En faisant la transformation de la table (I) au moyen des formules

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + \alpha' y_2 + \cdots + \alpha^{(n-1)} y_n, \\ x_2 &= \beta y_1 + \beta' y_2 + \cdots + \beta^{(n-1)} y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \lambda y_1 + \lambda' y_2 + \cdots + \lambda^{(n-1)} y_n, \end{aligned}$$

nous aurons la table

$$(2) \qquad \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & b & \cdots & l \\ a' & b' & \cdots & l' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

équivalente à la table (I).

Cette table contient n lignes formée chacune avec l'unité et $n-1$ zéros qui correspondent aux lignes

$$\begin{array}{c} \alpha, \beta, \cdots \lambda \\ \alpha', \beta', \cdots \lambda' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

de la table (I).

Ajoutons encore que tous les nombres $a, b, c, \cdots, a', b', c', \cdots,$ ainsi que les déterminants comme $\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}$, etc., sont égaux aux déterminants formés avec n lignes de la table (2). Par exemple:

$$a = \begin{vmatrix} a & b & c & \cdots & l \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & \cdots & l \\ a' & b' & c' & \cdots & l' \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

12. Passons maintenant à la recherche des formes extrêmes dont les déterminants caractéristiques ne surpassent pas l'unité en valeur absolue. Cette question se réduit à la recherche d'un type auquel peuvent être ramenées toutes les tables

$$(1) \qquad \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \alpha & \beta & \cdots & \lambda \\ \alpha' & \beta' & \cdots & \lambda' \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

pour lesquelles les déterminants formés avec n lignes quelconques sont égaux à zéro ou à ± 1.

Relativement à la table (1) nous allons démontrer le théorème qui suit:

Soit donnée une table (1) *à* $\mu > \frac{n(n+1)}{2}$ *lignes distinctes.*

Supposons que, parmi les déterminants formés avec n de ces lignes, il y en ait au moins un qui soit égal à ± 1 *et que tous les autres ne surpassent ns l'unité en valeur absolue.*

Cela posé, on va voir que la table donnée contient précisément $\frac{n(n+1)}{2}$ *ignes et qu'elle peut être transformée en l'équivalente*

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \cdots & 1 \\ 1, & -1, & 0, & \cdots & 0 \\ 1, & 0, & -1, & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \end{matrix}$$

Cette dernière table contient, en premier lieu, les n lignes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}$$

encore $\frac{n(n-1)}{2}$ *lignes formées chacune de deux unités* $+1$ *et* -1, $n-2$ *zéros.*

Avant de démontrer le théorème général, nous allons indiquer une ropriété de la table (1).

D'après la supposition, au moins un des déterminants formés avec n lignes de la table (1) est égal à ± 1. Donc, d'après le n° 11., elle peut être transformée dans une équivalente

$$(2) \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & b & c & \cdots & l \\ a' & b' & c' & \cdots & l' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Tous les nombres

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & \cdots \\ a' & b' & c' & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ainsi que les déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \text{ etc.,}$$

sont nuls ou ± 1.

Maintenant on voit facilement que le théorème énoncé a lieu pour $n = 2$.

En effet, il existe dans ce cas quatre systèmes différents formés de zéros, de ± 1 et de -1. Ce sont

$$\begin{array}{lcc} 1^\circ & 1 & 0 \\ 2^\circ & 0 & 1 \\ 3^\circ & 1 & -1 \\ 4^\circ & 1 & 1. \end{array}$$

Les systèmes (3) et (4) donnent le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

égal à 2.

Par conséquent ils ne peuvent pas se trouver ensemble dans la table (1). Ainsi la table cherchée pour $n = 2$ ne peut être formée que de deux manières

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1. \end{array}$$

Il est évident que la seconde de ces tables est équivalente à la première et le théorème est démontré pour $n = 2$.

Nous allons démontrer maintenant que la table

$$
(3)\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
b & c & d & & \cdots & l \\
b' & c' & d' & & \cdots & l' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot
\end{array}
$$

résultant de la table (2), si l'on supprime la première ligne et la première colonne, a au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes distinctes.

Soient

$$
\begin{array}{l}
B\ C \cdots L \\
B'\ C' \cdots L'
\end{array}
$$

deux systèmes non différents entre eux, savoir

$$B = \pm B', \quad C = \pm C', \cdots, L = \pm L'.$$

Echangeant alors, s'il est nécessaire, dans les tables (2) et (3) les signes de tous les termes de la ligne où se trouve le système $B', C', \cdots L'$, nous la ferons identique au système $B, C, \cdots, L$.

Ainsi deux lignes de la table (2), dans lesquelles se trouvent les systèmes $B, C, \cdots, L$ et $B', C', \cdots, L'$ seront

$$
\begin{array}{l}
A\ B\ C \cdots L \\
A'\ B\ C \cdots L.
\end{array}
$$

Donc ils ne sont distingués l'un de l'autre que par l'élément A.

Chacun des nombres distincts A et A' est égal à zéro ou à ± 1.

Remarquons maintenant que les nombres A et A' ne peuvent être égaux à l'unité avec des signes différents.

En effet, si tous les nombres $B, C, \cdots L$ étaient égaux à zéro, les systèmes

$$
\begin{array}{l}
A\ B\ C \cdots L \\
A'\ B\ C \cdots L
\end{array}
$$

ne seraient pas distincts, ce qui est contraire à la supposition.

Donc l'un au moins des nombres $B, C, \cdots, L$ est égal à ± 1. Soit, par exemple, $B = \pm 1$.

En supposant A et A' égaux à l'unité avec des signes différents, on aura le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B \end{vmatrix}$ égal à ± 2, ce qui ne peut être.

Ainsi l'un des éléments A et A' est zéro et l'autre l'unité avec un signe déterminé. On peut toujours supposer ce signe positif, car dans le cas contraire on pourrait changer le signe de tous les termes de la ligne à laquelle appartient A.

Nous désignerons l'ensemble de deux systèmes

$$\begin{matrix} A & B & C & \cdots & L \\ A' & B & C & \cdots & L \end{matrix}$$

par une seule ligne

$$(\alpha) \qquad A \; B \; C \cdots L$$

l'élément A ayant deux valeurs 0 et 1.

Les systèmes semblables à (α) seront dits les *systèmes doubles.*

Pour savoir le nombre des systèmes distincts de la table (3), il faut chercher combien il y a des systèmes doubles dans la table (2).

Quant à celui-ci nous aurons la proposition suivante:

Le nombre de systèmes doubles de la table (2) *ne surpasse pas* $n-1$.

Supposons, au contraire, que les systèmes doubles s'y trouvent en nombre au moins égal à n.

Soient

$$(4) \qquad \begin{matrix} A & B & C & \cdots & L \\ A_1 & B_1 & C_1 & \cdots & L_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} & \cdots & L_{n-1} \end{matrix}$$

ces systèmes.

Remarquons que dans la même colonne de cette table ne peuvent se trouver deux unités de signes différents.

En effet, soient, par exemple, B et B_1 de tels éléments. Alors, supposant

$$A = 1, \quad A_1 = 1,$$

nous aurons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

égal à ± 2, ce qui ne peut avoir lieu. Il suit de là que, en changeant, s'il est nécessaire, les signes de tous les termes des colonnes, nous pouvons faire positifs tous les termes de la table (4).

Cela posé, nous allons voir si cette table est possible.

Parmi les systèmes

$$\begin{matrix} B & C & \cdots & L \\ B_1 & C_1 & \cdots & L_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n-1} & C_{n-1} & \cdots & L_{n-1} \end{matrix}$$

il en existe au moins un qui contient deux ou un plus grand nombre d'unités, car le nombre de systèmes distincts formés avec l'unité et $n-2$ zéros est égal à $n-1$.

D'après cela, il est permis de supposer

$$B = 1, \quad C = 1.$$

En outre, il est facile voir que les couples des nombres

$$(B_1, C_1), \quad (B_2, C_2), \cdots, (B_{n-1}\; C_{n-1})$$

peuvent se réduire à ceux-ci: (0, 0), (1, 1), et encore à l'un des deux couples (0, 1) et (1, 0).

En effet, supposons, quant à ces derniers, que parmi les couples (B_1, C_1), (B_2, C_2), $\cdots$, (B_n, C_n) il y ait l'un et l'autre.

Soient, par exemple, $B_1 = 0$, $C_1 = 1$, $B_2 = 1$, $C_2 = 0$. Nous aurons alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

dont les éléments sont pris à la table (4). Si nous faisons $A = 0$, $A_1 = A_2 = 1$, le déterminant sera égal à 2, ce qui est impossible.

Ainsi, parmi les couples (B_1, C_1), (B_2, C_2), $\cdots$, il ne peut se trouver qu'un des couples (0, 1) et (1, 0), par exemple (0, 1).

Maintenant, en retranchant les éléments de la deuxième colonne de ceux de la troisième, nous transformons la table (4) en une nouvelle qui lui est équivalente. Les éléments de cette nouvelle table seront encore égaux à zéro ou à l'unité positive, car, d'après la supposition, les éléments de la troisième colonne ne sont pas inférieurs à ceux de la deuxième.

Dans la nouvelle table, le système $A, B, C, \cdots, L$ sera remplacé par celui-ci: $A, B, C - B, \cdots L$, contenant moins d'unités que le précédent, car $C - B = 0$

Quant aux autres lignes de la nouvelle table qui remplaceront les lignes $A_1, B_1, \cdots, L_1, A_2, B_2, \cdots, L_2$, chacun d'elles contiendra un même nombre d'unités ou ce nombre moins un.

On conçoit maintenant qu'en faisant plusieurs tranformations analogues aux précédentes on réduit toutes les lignes

$$\begin{matrix} B_1 & C & \cdots & L \\ B_1 & C_1 & \cdots & L_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n-1} & C_{n-1} & \cdots & L_{n-1} \end{matrix}$$

aux autres, dont chacune contiendra une unité et $n - 2$ zéros.

D'où l'on voit que la table (4) est impossible, car le nombre de telles lignes distinctes est égal à $n - 1$. Donc le nombre de systèmes doubles ne surpasse pas $n - 1$ ou, en d'autres termes, le nombre de lignes distinctes de la table (3) n'est pas inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$. Maintenant passons à la démonstration de notre proposition.

Supposons qu'elle ait lieu pour le nombre $n - 1$ et faisons voir qu'elle subsiste encore pour le nombre n.

Le théorème ayant lieu, par hypothèse, pour le nombre $n - 1$, on voit que le nombre de systèmes distincts de la table (3) ne surpasse pas $\frac{n(n-1)}{2}$. Mais on vient de voir que ce nombre n'est pas inférieur à

$\frac{n(n-1)}{2}$; par conséquent il est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$. Il en résulte encore que le nombre de systèmes doubles de la table (2) est égal à $(n-1)$. Donc les systèmes dans la table (2) sont en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$.

Nous avons vu que les systèmes doubles peuvent être toujours présentés ainsi:

$$\begin{array}{lccccc} A_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

les nombres $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ étant égaux à zéro ou à l'unité.

Donc étant donnés ces $n-1$ systèmes doubles, ainsi que le système $1, 0, 0, \cdots, 0$, nous ferons connaître qu'il se trouve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres systèmes qui forment avec les systèmes mentionnés plus haut la table que nous cherchons.

Remarquons, en premier lieu, que si, dans le système quelconque

$$a, b, c, \cdots, l,$$

le premier élément a est égal à zéro, deux des éléments $b, c, \cdots, l$ sont égaux à l'unité avec des signes différents et les autres sont nuls.

En effet, si, parmi les éléments

$$b, c, \cdots, l$$

il y en avait au moins trois égaux à l'unité, on en pourrait trouver deux égaux à l'unité avec un même signe. Soient, par exemple, $b = c = \pm 1$. En supposant, dans le déterminant,

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \\ 0 & b & c \end{vmatrix},$$

$A_1 = A_2 = 1$, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & \pm 1 \end{vmatrix} = \mp 2,$$

ce qui est impossible.

Donc l'élément a étant nul, deux des éléments $b, c, \cdots, l$ sont égaux à l'unité avec des signes contraires et les autres sont des zéros.

Supposons, en second lieu, $a = \pm 1$. On peut toujours prendre $a = 1$, en changeant, dans le cas contraire, les signes de tous les termes de la ligne $a, b, c, \cdots, l$.

Alors aucun des nombres $b, c, \cdots, l$ ne sera égal à l'unité négative. En effet, en supposant, par exemple, $b = -1$ et $A_1 = 1$, on aurait le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$$

égal à -2.

Remarquons encore que parmi les nombres $b, c, \cdots, l$, il n'y en a plus de deux égaux à l'unité. Supposant, en effet, qu'il y en ait k qui soient égaux à l'unité, nous aurons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a & b & c & \cdots & l \end{vmatrix}.$$

En supposant

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = 1$$

il est facile de voir que ce déterminant est égal à $\pm(k-1)$, ce qui est encore impossible, k étant supérieur à 2.

Donc les systèmes en nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ qu'il nous reste à chercher ne peuvent appartenir qu'à deux groupes

(I) $$0, b, c, \cdots, l,$$

où les deux nombres parmi $b, c, \cdots, l$ sont égaux à l'unité avec des signes contraires et les autres sont zéros; et

(II) $$1, b, c, \cdots, l,$$

deux des nombres $b, c, \cdots l$ étant égaux à l'unité positive et les autres à zéro.

Maintenant nous allons démontrer que, pour tous les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ systèmes cherchés, on peut prendre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ systèmes du premier groupe.

En effet, on va voir que, si la table contient les systèmes du second groupe, elle peut être transformée en une équivalente de telle manière, que les systèmes du second groupe disparaissent. Nous commençons par un cas particulier $n = 3$. Alors on a les systèmes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

savoir cinq systèmes.

Il nous faut encore chercher un système. Ce dernier système est un des deux suivants:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & -1 & \text{système du } 1^{\text{er}} \text{ groupe} \\ 1 & 1 & 1 & \text{système du } 2^{\text{e}} \text{ groupe.} \end{matrix}$$

Considérons la table

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

ou, ce qui est le même, la table

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1. \end{matrix}$$

En retranchant les éléments de la 3^e^ colonne de ceux de la 1^e^ colonne, on aura la table

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1. \end{matrix}$$

Après le changement de signe de tous les termes de quelques lignes et colonnes, cette table se transformera dans la suivante:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1. \end{matrix}$$

D'où il suit:

Si dans le cas de $n = 3$, la 6e ligne appartient au second groupe, la table peut être transformée dans une équivalente qui ne contient aucun système de ce groupe.

Au moyen de cette transformation, les systèmes

$$\begin{matrix} A_1 & 1 & 0 \\ A_2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

se transforment en eux mêmes.

De plus, dans les 2e et 3e colonnes, rien n'est changé aux signes de quelques termes près.

Pour passer maintenant au cas général, nous supposons que la même propriété subsiste pour un nombre quelconque $n-1$ et nous faisons voir qu'elle aura encore lieu pour un nombre n. Ainsi nous supposons que la table correspondante au nombre $n-1$, dans laquelle existent les systèmes $1, 0, \cdots, 0, A_1, 1, 0, 0, \cdots, A_{n-2}, 0, 0, \cdots, 1$ peut être transformée dans l'équivalente

$$\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
A_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
0 & -1 & +1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1,\ 1
\end{array}$$

et qu'au moyen de cette transformation les systèmes $1, 0, 0, \cdots, 0$; $A_1, 1, 0, 0, 0, \cdots, A_{n-2}, 0, 0, \cdots 1$ se transforment en eux-mêmes et dans les 2^e, 3^e, $\cdots$, $n-1^{\text{ième}}$ colonnes rien n'est changé aux signes de quelques termes près.

Cela posé, nous considérons la table correspondante au nombre n, dans laquelle existent les systèmes

$$\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}$$

et encore $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ systèmes appartenant aux groupes I et II.

En effaçant la dernière colonne et ne considérant que les lignes distinctes, on aura la table correspondante à $n-1$.

Cette table, d'après ce qu'on a admis, peut être transformée dans la suivante:

$$\begin{array}{llllll}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1, & 1.
\end{array}$$

D'après cela, la table qui se rapporte au nombre n peut être écrite comme il suit:

$$\begin{array}{llllll}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
A_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & \alpha_1 \\
0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & \alpha_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \varrho_1 & \cdots & \tau_1 \\
\lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \varrho_2 & \cdots & \tau_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\lambda_{n-2} & \mu_{n-2} & \nu_{n-2} & \varrho_{n-2} & \cdots & \tau_{n-2}.
\end{array}$$

Les systèmes

$$\begin{matrix} 0 & - & 1 & 1 & 0 & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & - & 1 & 0 & 1 & \cdots & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

doivent appartenir au premier groupe et par conséquent on aura

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0.$$

En outre, tous les nombres $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-2}$ sont égaux à $+1$, car le nombre de lignes distinctes ayant zéro en dernière colonne ne peut surpasser $\frac{n(n-1)}{2}$ et nous avons déjà toutes ces lignes.

Il est à remarquer encore que tous les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont nuls, ou tous sont égaux à $+1$ (-1 peut être converti en $+1$).

En effet, soit au contraire le nombre λ égal à zéro dans l'une des lignes et dans l'autre à l'unité; savoir, supposons une des lignes appartenant au premier groupe et l'autre au second. Soient, par exemple,

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = \ \ 1, \quad \nu_1 = 0, \cdots, \tau_1 = 1 \\ &\lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = 0, \quad \nu_2 = 1, \cdots, \tau_2 = 1. \end{aligned}$$

En ajoutant à ces deux systèmes celui-ci:

$$0, \ -1, \ +1, \ \cdots, \ 0,$$

on aura ce déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 & \tau_1 \\ \mu_2 & \nu_2 & \tau_2 \\ -1 & +1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

ce qui est impossible. Donc les nombres $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \cdots, \tau_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \cdots, \tau_2$ ne peuvent être assignés que de deux manières, ce qui nous conduit aux deux tables suivantes:

$$(\gamma) \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ A_1 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots\cdots 1 \\ 0 & -1 & 1 \cdots\cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & -1 & 0 \cdots\cdots 1 \\ 0 & 0 & -1 \cdots\cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \cdots -11 \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad (\delta) \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ A_1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots 1 \\ 0 & -1 & 1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1 & 1 & 0 \cdots 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1 & 0 & 0 \cdot\cdot 11. \end{matrix} \right.$$

On transforme facilement la table (δ) en table (γ) et au moyen de cette transformation les systèmes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ A_1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ A_2 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ A_{n-1} & 0 & 0 \cdots 1 \end{matrix}$$

se transforment en eux-mêmes et dans les 2e, 3e, $n^{\text{ièmes}}$ colonnes, rien ne change aux signes de quelques termes près.

Il est évident encore que tous les déterminants formés avec n lignes de la table (γ) sont égaux à zéro ou à ± 1.

Enfin nous remarquons que, dans la table(γ), les éléments A_1, $A_2, \ldots$, A_{n-1}, au lieu de leurs valeurs 0 et $+1$, peuvent avoir les valeurs 0 et -1; cela revient à changer les signes de tous les termes de la 1re colonne.

Donc le théorème est démontré.

13. On déduit de ce théorème la conséquence suivante:

Toutes les formes extrêmes à n variables dont les déterminants caractéristiques sont égaux à zéro ou à ± 1 sont équivalents à la forme

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\,[x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_1x_2 + \cdots].$$

Nous avons vu, en effet, que les tables correspondantes à telles formes se transforment dans la table qui correspond à U_n.

Pour abréger, nous dirons qu'il n'existe qu'une seule forme extrême U_n, dont les déterminants caractéristiques sont de 0 ou ± 1.

En ayant égard aux limites des déterminants caractéristiques pour les formes binaires et ternaires (no 9.), on voit qu'il existe une seule forme binaire extrême

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2),$$

ainsi qu'une seule forme extrême ternaire

$$\sqrt[3]{2D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Deuxième Chapitre.

14. En passant à la recherche des formes extrêmes à 5 variables, remarquons d'abord qu'en vertu du no 10. leurs déterminants caractéristiques ne surpassent pas deux en valeur absolue.

D'abord il faut démontrer que chacune d'elles en a au moins un égal à ± 1. Cela deviendra évident si nous faisons voir que les formes extrêmes à cinq variables dont tous les déterminants caractéristiques sont égaux à zéro ou à ± 2 sont impossibles.

En effet, supposons que $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est une de ces formes et que la table

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\
\hline
p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5
\end{array}\right.$$

contient toutes les représentations du minimum M de f.

D'après le n° 7., cette table contiendra, au moins $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ lignes.

Comme tous les déterminants caractéristiques de f ne sont pas égaux à zéro (n° 8.), il en existera au moins un égal à ± 2.

Supposons que ce soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \end{vmatrix}$$

et, désignant par

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; z_4, \; z_5$$

les nouvelles variables, faisons la transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 z_1 + q_1 z_2 + \cdots + r_1 z_5, \\ x_2 &= p_2 z_1 + q_2 z_2 + \cdots + r_2 z_5, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_5 &= p_5 z_1 + q_5 z_2 + \cdots + r_5 z_5. \end{aligned}$$

Soit

$$\varphi\,(z_1, \, z_2, \, z_3, \, z_4, \, z_5)$$

la forme f transformée.

En vertu de ce que tous les déterminants caractéristiques de f sont égaux à zéro ou à ± 2, il est évident qu'à toute ligne, comme

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \; \cdots, \; x_5 = s_5$$

de la table (1) correspondent les valeurs de $z_1, z_2, \cdots, z_5$ égales aux nombres entiers. Il est évident de plus que φ étant comme f une forme extrême tous les déterminants caractéristiques de φ sont égaux à zéro ou à ± 1 et que le minimum de φ est égal à M.

En désignant par D le déterminant de f, $4D$ sera celui de φ.

En vertu du n° 13., le minimum M de φ sera égal à la quantité

$$\sqrt[5]{\frac{64\,D}{3}} > \sqrt[5]{9\,D}.$$

Or cela est impossible, car on doit avoir

$$M < \sqrt[5]{9\,D}.$$

Donc la forme telle que f est impossible.

Remarque. — Par le même raisonnement on s'assure que la proposition démontrée dans ce numéro a encore lieu pour les formes quaternaires; savoir que parmi les déterminants caractéristiques des formes extrêmes quaternaires, il en est au moins un qui soit égal à l'unité.

A cet effet, il suffit de savoir que, pour les formes quaternaires

$$M < \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 \sqrt[4]{D}.$$

15. Nous nous servirons dans ce qui suit d'une proposition relative aux formes quaternaires que nous allons maintenant démontrer.

Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ une forme quaternaire qui reçoit la valeur minimum M, lorsqu'une des variables, par exemple x_4, est égale à 2, les autres variables ayant des valeurs convenables.

Supposons de plus que f devienne égal à M pour les trois systèmes de valeurs des variables que voici:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 1, & x_3 = 0, & x_4 = 0, \\ x_1 = 0, & x_2 = 0, & x_3 = 1, & x_4 = 0. \end{cases}$$

En d'autres termes supposons que la table de f contienne les lignes

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
a_1	a_2	a_3	2

a_1, a_2, a_3 étant des entiers. Cela posé, nous allons démontrer que f est l'une des huit formes équivalentes à V_4 qu'on obtient de l'expression

$$M\left[\left(x_1 \pm \frac{x_4}{2}\right)^2 + \left(x_2 \pm \frac{x_4}{2}\right)^2 + \left(x_3 \pm \frac{x_4}{2}\right)^2 + \frac{x_4^2}{4}\right],$$

en combinant les signes $\pm$ de toutes les manières possibles.

Comme le minimum M de f a les trois représentations (1), les coefficients de x_1^2, x_2^2, x_3^2 dans f sont égaux à M; ainsi l'on aura

$$f = Mx_1^2 + Mx_2^2 + Mx_3^2 + \cdots.$$

Représentons f sous la forme d'une somme de carrés:

$$f = M\,[(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)^2 + N\,(x_2 + \delta x_3 + \varepsilon x_4)^2 \\ + P\,(x_3 + \zeta x_4)^2 + Qx_4^2].$$

Remarquons d'abord que le coefficient Q ne peut surpasser $\frac{1}{4}$, car, si l'on avait

$$Q > \tfrac{1}{4},$$

on aurait

$$f(a_1, a_2, a_3, 2) > 4\,QM > M,$$

ce qui est impossible.

Ensuite faisons voir que le coefficient Q ne peut pas être non plus inférieur à $\frac{1}{4}$. En effet, dans le cas contraire, après avoir supposé $x_4 = 1$ et attribué aux variables x_3, x_2, x_1 des valeurs telles, que chacun des carrés $(x_3 + \zeta x_4)^2$, $(x_2 + \delta x_3 + \varepsilon x_4)^2$, $(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)^2$ ne surpasse pas $\frac{1}{4}$, la forme f deviendrait inférieure à M, ce qui ne peut avoir lieu. Donc Q doit être égal à $\frac{1}{4}$.

En outre, on aura

$$N = P = 1.$$

En effet, il est évident d'abord que chacune de ces quantités N et P ne surpasse pas l'unité. D'un autre côté, aucune d'elles ne peut être inférieure à l'unité, car dans ce cas, en prenant $x_4 = 1$ et attribuant aux nombres x_1, x_2, x_3 des valeurs telles que les trois carrés mentionnés ne soient pas supérieurs à $\frac{1}{4}$, on aurait la valeur de f moindre que M. Donc on aura

$$\begin{aligned} f &= Mx_1^2 + Mx_2^2 + Mx_3^2 + \cdots \\ &= M\,[(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma x_4)^2 + (x_2 + \delta x_3 + \varepsilon x_4)^2 \\ &\qquad + (x_3 + \zeta x_4)^2 + \tfrac{1}{4}\, x_4^2]. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients des x_2^2 et x_3^2 dans l'une et l'autre expression de f, et en remarquant que le coefficient de x_4^2 ne peut être moindre que M, il vient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \delta = 0,$$
$$\gamma^2 + \varepsilon^2 + \zeta^2 \geqq \tfrac{3}{4}.$$

Comme les quantités γ, ε, ζ ne surpassent pas $\frac{1}{2}$, en valeur absolue, on doit avoir

$$\gamma = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \zeta = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Le théorème est démontré.

16. En ayant égard aux limitations des déterminants caractéristiques pour les formes quaternaires (n° 10.), ainsi qu'à la proposition du n° 13., on voit qu'il existe seulement deux formes extrêmes quaternaires

$$2\sqrt[4]{\frac{D}{5}}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4),$$

$$\sqrt[4]{4\,D}\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \pm x_1x_4 \pm x_2x_4 \pm x_3x_4).$$

Il en résulte que $\sqrt[4]{4\,D}$ est la limite précise des minima des formes quaternaires.

Nous avons ainsi une nouvelle démonstration de ce théorème.

17. Il suit de ce qui précède que toutes les formes extrêmes à cinq variables se distribuent en deux groupes:

> dans le premier sont contenues les formes dont les déterminants caractéristiques ne surpassent pas l'unité, en valeur absolue; ces formes sont équivalentes à U_5 en vertu du n° 13.; dans le second se trouvent les formes pour chacune des quelles il existe des déterminants caratéristiques égaux à ± 2.

En considérant le dernier groupe de formes nous avons à distinguer deux cas:

1°. Lorsque toutes les valeurs des variables qui donnent le minimum de la forme sont égaux à zéro et à ± 1.

2°. Lorsque parmi ces valeurs se trouvent égales à ± 2.

Le premier de ces cas se réduit toujours au second, en vertu de la proposition que nous allons démontrer.

Soit $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une forme extrême à n variables, et supposons que son minimum est donné par les valeurs 0 et ± 1 de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Supposons de plus que ces déterminants caractéristiques ne surpassent pas deux en valeur absolue et qu'il en existe qui soient égaux à ± 1 et à ± 2.

Cela posé, on trouvera dans la table de f les n lignes

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{vmatrix},$$

qui composent le déterminant égal à ± 2.

Nous allons démontrer que dans cette table on trouvera une certaine ligne qui, avec $n-1$ lignes du déterminant (1), composera un nouveau déterminant égal à ± 1.

Supposons le contraire et, en désignant par

$$x_1', \ x_2', \ \cdots, \ x_n'$$

les nouvelles variables, faisons la transformation

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = m_1 x_1' + q_1 x_2' + \cdots + r_1 x_n', \\ x_2 = m_2 x_1' + q_2 x_2' + \cdots + r_2 x_n', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = m_n x_1' + q_n x_2' + \cdots + r_n x_n'. \end{cases}$$

Désignons par

$$F(x_1', x_2', \cdots, x_n')$$

la forme f transformée.

Il est évident que, en vertu de notre supposition pour toute ligne

$$x_1 = k_1, \quad x_2 = k_2, \ \cdots \ x_n = k_n$$

de la table de f, on obtiendra, par les équations (2), des valeurs entières de $x_1', x_2', \cdots x_n'$ qui sont égaux à zéro et à ± 1.

En désignant maintenant par Δ un déterminant caractéristique de f et par δ son correspondant de la forme F, on aura

$$\Delta = \pm 2\,\delta,$$

Δ et δ étant des entiers.

Or nous avons supposé qu'il y a un certain $\Delta = \pm 1$; par conséquent on obtiendra

$$\delta = \pm \tfrac{1}{2},$$

ce qui est impossible.

On ne peut donc supposer que les $n-1$ lignes quelconques du déterminant (1) composent avec toute ligne de la table de f un déterminant égal à zéro ou à ± 2.

Il existe, par conséquent, dans cette table une certaine ligne

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

qui, avec $n-1$ lignes, comme

$$\begin{array}{c} q_1, q_2, \cdots, q_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_1, r_2, \cdots, r_n \end{array}$$

compose le déterminant

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_1, p_2, \cdots, p_n, \\ q_1, q_2, \cdots, q_n, \\ r_1, r_2, \cdots, r_n, \end{array} \right.$$

égal à ± 1.

Faisons maintenant la transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 y_1 + q_1 y_2 + \cdots + r_1 y_n, \\ x_2 &= p_2 y_1 + q_2 y_2 + \cdots + r_2 y_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= p_n y_1 + q_n y_2 + \cdots + r_n y_n, \end{aligned}$$

et soit

$$\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

la forme f transformée.

Les formes f et φ sont équivalentes, et aux valeurs

$$x_1 = m_1, \quad x_2 = m_2, \cdots, x_n = m_n$$

correspond la valeur $y_1 = \pm 2$.

Dans la table de φ on trouvera par conséquent les n lignes

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right.$$

qui correspondent aux lignes (3) de la table de f et la ligne correspondante à $m_1, m_2, \cdots, m_n$ commencera par le nombre ± 2.

Ainsi la forme f peut être transformée dans une équivalente φ, dont la table contiendra les n lignes (4) et dans les autres lignes on trouvera les nombres égaux à ± 2.

18. Désignons maintenant par f une forme extrême à cinq variables et telle, que parmi les déterminants caractéristiques correspondants à cette forme il y en a au moins un égal à ± 2.

On a vu (n° 17.) que la table correspondante à f peut être transformée dans une autre à elle équivalente et telle, qu'elle contienne les lignes

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1.

En outre, cette table contiendra nécessairement une ligne ayant au moins un terme égal à ± 2. On peut évidemment supposer que ce terme est égal à $+2$ et se trouve dans la 5ᵉ colonne. Donc on aura la ligne

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ 2.$$

Les nombres a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent être supposés positifs et leurs valeurs, comme on sait, ne surpassent pas 2.

Nous remarquons d'abord que deux des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 ne peuvent être nuls. En effet, soit, par exemple,

$$a_1 = a_2 = 0.$$

Cela étant, si l'on pose dans la forme f

$$x_1 = x_2 = 0,$$

on aura la forme ternaire, dont le minimum sera évidemment égal à celui de f. Parmi les valeurs des variables x_3, x_4, x_5, pour lesquelles la forme ternaire prendra son minimum, il y a les suivantes:

x_3	x_4	x_5
1	0	0
0	1	0
a_3	a_4	2.

Ces trois lignes nous donnent le déterminant caractéristique égal à 2, ce qui est impossible par rapport aux formes ternaires (nᵒ 9.).

On voit de la même manière que deux des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 ne peuvent être égaux à 2.

En effet, soient, par exemple,

$$a_1 = a_2 = 2.$$

Posant dans la forme f

$$x_1 = x_5, \quad x_2 = x_5,$$

nous aurons la forme ternaire à variables x_3, x_4, x_5. Le minimum de cette forme est égal au minimum de f; car les coefficients de x_3^2 et x_4^2 sont égaux à ce minimum. Comme dans la table de la forme f nous avons les lignes

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & a_3 & a_4 & 2 \end{array}$$

la forme ternaire aura les représentations suivantes de son minimum:

$$\begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & 2. \end{array}$$

Ces lignes donnent encore un déterminant caractéristique égal à 2, ce qui est impossible.

Remarquons enfin que deux des nombres

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ a_4$$

ne peuvent être égaux, l'un à 2 et l'autre à zéro.

En effet, soient, par exemple,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2.$$

Cela étant, posons, dans la forme f $x_1 = 0$, $x_2 = x_5$. On aura une forme ternaire à variables x_3, x_4, x_5.

Les représentations du minimum de f

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a_3 & a_4 & 2 \end{array}$$

donnent pour le minimum de la forme ternaire les représentations suivantes:

$$\begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_5 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & 2 \end{array}$$

ce qui est impossible.

Il suit, de tout ce que nous avons dit, que toutes les lignes contenant le terme ± 2, comme

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ 2,$$

ne peuvent être que de trois espèces:

1°. Un des nombres a_1, a_2, a_3, a_4 est nul et les trois autres sont des unités. En posant, par exemple $a_1 = 0$, on aura la ligne

$$0, \ 1, \ 1, \ 1, \ 2.$$

2°. Un des nombres a_1, a_2, a_3, a_4, par exemple, a_1 est 2, et les trois autres sont des unités. Ainsi on aura la ligne

$$2, \ 1, \ 1, \ 1, \ 2.$$

3°. Tous les nombres a_1, a_2, a_3, a_4 sont des unités. Alors la table de la forme f contiendra la ligne

$$1, 1, 1, 1, 2.$$

19. Examinons maintenant le cas dans lequel la forme a une représentation

$$0, 1, 1, 1, 2.$$

Nous allons démontrer que les formes extrêmes qui admettent outre cette représentation encore ces trois-ci:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

sont équivalentes à V_5.

On voit que, dans le cas actuel, en supposant dans la forme $x_1=0$, on aura la forme (n° 15.)

$$M[(x_2-\tfrac{1}{2}x_5)^2+(x_3-\tfrac{1}{2}x_5)^2+(x_4-\tfrac{1}{2}x_5)^2+\tfrac{1}{4}x_5^2]$$

M étant le minimum de la forme cherchée à 5 variables. Par conséquent, cette forme peut être écrite comme il suit:

$$(1)\quad M[(x_2-\tfrac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2+(x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\mu x_1)^2+(x_4-\tfrac{1}{2}x_5+\nu x_1)^2 \\ +\tfrac{1}{4}(x_5+\sigma x_1)^2+Kx_1^2].$$

Remarquant, en premier lieu, que tous les coefficients d'une forme extrême se trouvent déterminés complétement au moyen des équations linéaires qui expriment que la forme prend son minimum, les variables étant égales aux nombres donnés, on voit que la forme (1) doit avoir au moins 5 représentations de son minimum servant à déterminer les quantités

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \sigma,\ K.$$

Il est évident que, dans aucune de ces représentations, x_1 ne peut être nul; en second lieu, en ayant égard à ce que le déterminant de la forme (1) doit surpasser $\frac{1}{8}M^5$, on voit que la quantité K surpasse $\frac{1}{8}$. Donc la forme (1) ne peut avoir la valeur minimum qu'en supposant $x_1=\pm 1$, si x_1 est distinct de zéro.

En faisant, s'il est nécessaire, la transformation

$$\begin{aligned} x_5 &= x_5'+px_1', \\ x_2 &= x_2'+qx_1', \\ x_3 &= x_3'+rx_1', \\ x_4 &= x_4'+sx_1', \\ x_1 &= x_1', \end{aligned}$$

p, q, r, s étant des nombres entiers, on peut toujours arriver à la forme dans laquelle les quantités λ, μ, ν, σ ne seront pas supérieures à $\frac{1}{2}$. De plus, toutes ces quantités peuvent être supposées positives. En effet, si σ est négatif, il suffit de changer le signe de x_1 pour avoir, au lieu de σ, $-\sigma$, savoir une quantité positive, et si l'une des quantités

λ, μ, ν, par exemple λ, est négative, il suffit de substituer $-x_2'+x_5$ à x_2 pour transformer le carré $(x_2-\frac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2$ en un autre $(x_2'-\frac{1}{2}x_5-\lambda x_1)^2$, $-\lambda$ étant positif.

Cherchons maintenant quelles valeurs doivent avoir les variables x_2, x_3, x_4, x_5 pour que la forme (1) soit minimum en supposant $x_1=\pm 1$. On peut toujours prendre, bien entendu, $x_1=1$.

Nous avons ici deux cas à distinguer:

1°. x_5 étant un nombre pair ou zéro, les valeurs minima des carrés

$$(x_2-\tfrac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2, \quad (x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\mu x_1)^2, \quad (x_4-\tfrac{1}{2}x_5+\nu x_1)^2$$

sont respectivement égales à λ^2, μ^2, ν^2. Le minimum de la forme, en supposant x_5 donné, sera

$$M\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\tfrac{1}{4}(x_5+\sigma)^2+K\right]. \tag{2}$$

De toutes les valeurs (2) correspondantes aux différentes valeurs de x_5, celle qui correspond à $x_5=0$ est évidemment la moindre. Cette valeur est

$$M\left[\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\tfrac{1}{4}\sigma^2+K\right]. \tag{3}$$

On l'obtient en supposant dans la forme (1)

$$x_2=x_3=x_4=0, \quad x_1=1, \quad x_5=0.$$

Pour les autres valeurs des variables x_2, x_3, x_4, la forme (1) ne peut avoir une valeur égale à (3) que dans le cas où l'un au moins des nombres λ, μ, ν est égal à $\frac{1}{2}$. Si, par exemple, $\lambda=\frac{1}{2}$, on peut supposer $x_2=-1$, $x_3=x_4=0$, $x_5=0$, pour que la forme prenne la valeur (3).

2°. x_5 étant un nombre impair, les valeurs minima des carrés

$$(x_2-\tfrac{1}{2}x_5+\lambda x_1)^2, \quad (x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\mu x_1)^2, \quad (x_4-\tfrac{1}{2}x_5+\nu x_1)^2,$$

sont respectivement $(\frac{1}{2}-\lambda)^2$, $(\frac{1}{2}-\mu)^2$, $(\frac{1}{2}-\nu)^2$, x_2, x_3, x_4 étant, bien entendu, des nombres entiers, et la valeur minimum de la forme (1) lorsque x_5 a la valeur assignée d'avance sera

$$M\left[(\tfrac{1}{2}-\lambda)^2+(\tfrac{1}{2}-\mu)^2+(\tfrac{1}{2}-\nu)^2+\tfrac{1}{4}(x_5+\sigma)^2+K\right]. \tag{4}$$

De toutes les valeurs (4) correspondantes aux différentes valeurs de x_5, celle qui correspondra à $x_5=-1$ sera la moindre. Cette valeur est

$$M\left[(\tfrac{1}{2}-\lambda)^2+(\tfrac{1}{2}-\mu)^2+(\tfrac{1}{2}-\nu)^2+\tfrac{1}{4}(1-\sigma)^2+K\right], \tag{5}$$

et on l'aura, en supposant dans la forme (1)

$$x_2=x_3=x_4=-1, \quad x_5=-1, \quad x_1=1.$$

Pour les autres valeurs des variables x_2, x_3, x_4, la forme (1) ne peut avoir une valeur égale à (5) que dans le cas où l'une au moins des quantités λ, μ, ν est égale à zéro. Si, par exemple, $\lambda=0$, la forme (1) prend la valeur (5) pour $x_5=-1$, $x_2=0$, $x_3=x_4=-1$, $x_1=1$.

Cela posé, M étant le minimum de la forme (1), on aura

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\frac{1}{4}\sigma^2+K\geq 1, \\ (\frac{1}{2}-\lambda)^2+(\frac{1}{2}-\mu)^2+(\frac{1}{2}-\nu)^2+\frac{1}{4}(1-\sigma)^2+K\geqq 1. \end{cases}$$

De plus

$$(7)\quad \tfrac{1}{2}\geqq\lambda\geqq 0,\quad \tfrac{1}{2}\geq\mu\geq 0,\quad \tfrac{1}{2}\geqq\nu\geq 0,$$

comme nous avons dit plus haut.

De ce qui précède il suit que toutes les équations entre les coëfficients λ, μ, ν, σ, K qui résultent des représentations du minimum de la forme (1), pour lesquelles $x_1=1$, équivalent à celles qu'on obtient, en convertissant quelques inégalités (6) et (7) en équations.

Au moins cinq de ces inégalités doivent être converties en équations pour qu'on puisse déterminer λ, μ, ν, σ, K. Il suit de là que les équations

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\frac{1}{4}\sigma^2+K=1, \\ (\frac{1}{2}-\lambda)^2+(\frac{1}{2}-\mu)^2+(\frac{1}{2}-\nu)^2+\frac{1}{4}(1-\sigma)^2+K=1 \end{cases}$$

doivent être satisfaites, car autrement les quantités σ et K ne peuvent être déterminées.

De plus, trois au moins des inégalités (7) doivent être converties en équations. Supposons $\lambda\leq\mu\leq\nu$, ce qui est évidemment permis.

Remarquons maintenant qu'on ne peut faire

$$\lambda=\mu=\nu=0,$$

car il en résulterait $K=0$, $\sigma=2$, ce qui est impossible.

On ne peut faire non plus

$$\lambda=\mu=\nu=\tfrac{1}{2},$$

car il s'ensuivrait $K=0$, $\sigma=-1$.

On voit donc que λ doit être égal à zéro et $\nu=\frac{1}{2}$.

Cela posé, μ ne peut pas être égal à zéro, car, dans le cas contraire, les équations (8) nous donneraient

$$\sigma=1,\quad K=\tfrac{1}{2},$$

à cause de $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=\frac{1}{2}$.

Mais, σ ne surpassant pas $\frac{1}{2}$, cette supposition est impossible.

Donc $\mu=\frac{1}{2}$. Il résulte des équations (8) que $K=\frac{1}{2}$, $\sigma=0$. Ainsi nous aurons la forme extrême

$$M[(x_2-\tfrac{1}{2}x_5)^2+(x_3-\tfrac{1}{2}x_5+\tfrac{1}{2}x_1)^2+(x_4-\tfrac{1}{2}x_5+\tfrac{1}{2}x_1)^2+\tfrac{1}{4}x_5^2+\tfrac{1}{2}x_1^2],$$

équivalente à V_5.

20. Maintenant nous passons au cas où la table de la forme f contient la ligne

$$(1)\quad 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2.$$

En transformant la forme f au moyen de la substitution

$$x_1 = x_1' + x_5',$$
$$x_2 = x_2',$$
$$x_3 = x_3',$$
$$x_4 = x_4',$$
$$x_5 = x_5',$$

on voit que les lignes

0, 1, 0, 0, 0,
0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 0,

et la ligne (1) se transforment respectivement dans les suivantes:

0, 1, 0, 0, 0,
0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 0,
0, 1, 1, 1, 2.

Mais nous avons vu que toutes les formes extrêmes dont la table contient ces quatre lignes sont équivalentes à V_5.

21. Il nous reste à examiner le cas où on a la représentation

1, 1, 1, 1, 2.

Nous avons les 6 lignes suivantes:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(1)	1	0	0	0	0
(2)	0	1	0	0	0
(3)	0	0	1	0	0
(4)	0	0	0	1	0
(5)	0	0	0	0	1
(6)	1	1	1	1	2.

Supposons maintenant que l'une quelconque des autres lignes soit

(B) $\quad x_1 = b_1, \quad x_2 = b_2, \quad x_3 = b_3, \quad x_4 = b_4, \quad x_5 = b_5.$

Il est facile de démontrer qu'aucun de ses termes n'est égal à ± 2. En effet, soit d'abord

$$b_5 = \pm 2.$$

En changeant, s'il est nécessaire, les signes de tous les termes de la ligne (B), on peut faire $b_5 = +2$. Alors aucun des nombres b_1, b_2, b_3, b_4 ne sera ni zéro, ni ± 2, car dans cette supposition on aurait le cas qui a été déjà discuté dans les n^{os} 19. et 20.

Aucun de ces nombres ne sera non plus égal à -1, car dans ce cas nous aurions le déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

qui est impossible (voir le n^{o} 10.).

Il reste à supposer

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = +1;$$

or cela est également impossible, car alors la ligne (B) devient identique avec la ligne (6).

La supposition

$$b_5 = \pm 2$$

est par conséquent à rejeter.

Supposons ensuite que, parmi les nombres

$$b_1, b_2, b_3, b_4$$

on en trouvera un égal à ± 2.

Soit, par exemple,

$$b_4 = \pm 2;$$

comme précédemment, on peut faire

$$b_4 = +2,$$

car il est permis de changer les signes de tous les termes de la ligne (B).

Alors aucun des nombres b_1, b_2, b_3, b_4 ne sera ni zéro, ni ± 2 et, par conséquent, ils sont égaux à l'unité en valeur absolue.

Or on aura dans ce cas le déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & b_5 \end{vmatrix} = -4 + b_5,$$

supérieur à 2 en valeur absolue, ce qui est impossible (n° 10.).

Aucun des termes de la ligne (B) ne peut donc être supposé égal à ± 2.

Nous allons maintenant démontrer que b_5 est égal à ± 1.

En effet, supposons le contraire. Le cas $b_5 = \pm 2$ étant inadmissible, il reste à supposer

$$b_5 = 0.$$

Alors au moins deux des nombres b_1, b_2, b_3, b_4 sont égaux à ± 1, car, si un seul d'entre eux était ± 1 et les autres des zéros, la ligne (B) coinciderait avec une des suivantes:

$$(1), (2), (3), (4).$$

Par conséquent au moins deux des nombres b_1, b_2, b_3, b_4 sont égaux à ± 1.

En changeant, s'il est nécessaire, l'ordre des quatres premières colonnes et les signes de tous les termes de la ligne (B), ce qui ne change pas l'ensemble des lignes

$$(1), (2), (3), (4), (5), (6),$$

on peut faire

$$b_1 = +1.$$

En supposant donc $b_1 = +1$, faisons dans la table de f la transformation

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = -x_2' + b_2 x_1', \quad x_3 = -x_3' + b_3 x_1', \quad x_4 = -x_4' + b_4 x_1',$$
$$x_5 = -x_5';$$

les sept lignes (1), (2), (3), (4), (5), (6), (B) seront transformées respectivement dans les suivantes:

	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'
(1)′	1	b_2	b_3	b_4	0
(2)′	0	-1	0	0	0
(3)′	0	0	-1	0	0
(4)′	0	0	0	-1	0
(5)′	0	0	0	0	-1
(6)′	1	b_2-1	b_3-1	b_4-1	-2
(B)′	1	0	0	0	0.

Comme au moins un des nombres b_2, b_3, b_4 est ± 1 la ligne (6)′ contiendra deux fois le nombre ± 2, ou zéro et -2, et nous aurons le cas déjà discuté. Ainsi il faut poser

$$b_5 = \pm 1.$$

Or on peut faire

$$b_5 = +1,$$

en changeant au besoin les signes de tous les termes de la ligne (B).

Maintenant aucun des nombres b_1, b_2, b_3, b_4 ne sera -1, car, si l'on avait, par exemple,

$$b_2 = -1,$$

on obtiendrait le déterminant caractéristique impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ b_2 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Ainsi, dans la ligne (B), le terme b_5 est $+1$; parmi les autres

$$b_1, \; b_2, \; b_3, \; b_4,$$

quelques-uns sont des zéros et au moins un seul est égal à $+1$. Il est possible aussi que tous les nombres b_1, b_2, b_3, b_4 soient égaux à $+1$.

22. Dans le cas que nous discutons avec les lignes

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(I)	(1)	1	0	0	0	0
	(2)	0	1	0	0	0
	(3)	0	0	1	0	0
	(4)	0	0	0	1	0
	(5)	0	0	0	0	1
	(6)	1	1	1	1	2

on ne peut donc combiner que les suivantes:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{II}) & \left\{\begin{array}{cccccc}
(7) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
(8) & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
(9) & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
(10) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right.\\
(\mathrm{III}) & \left\{\begin{array}{cccccc}
(11) & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
(12) & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
(13) & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
(14) & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
(15) & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
(16) & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right.\\
(\mathrm{IV}) & \left\{\begin{array}{cccccc}
(17) & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
(18) & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
(19) & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
(20) & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right.\\
 & \quad\begin{array}{cccccc}
(21) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.
\end{array}
\end{array}
$$

Des 6 premières lignes nous composons le premier groupe, de quatre (7), (8), (9), (10) le deuxième, de six (11), (12), (13), (14), (15), (16) le troisième, et de quatre (17), (18), (19), (20) le quatrième. La ligne (21) n'entre dans aucun de ces groupes.

En nous proposant maintenant de trouver toutes les formes extrêmes f non équivalentes à V_5 et qui admettent les six représentations de leur minimum contenues dans les lignes du premier groupe, nous avons à résoudre le problème suivant:

Choisir, de toutes les manières possibles, parmi les 19 lignes

$$(7),\ (8),\ (9),\ \cdots,\ (21)$$

au moins neuf telles, que l'ensemble de ces lignes avec les six du premier groupe détermine complétement une forme extrême non équivalente à V_5, en supposant que son minimum M soit donné.

Faisons d'abord quelques remarques qui nous permettront de diminuer le nombre de différentes combinaisons possibles.

Remarque I. — Les quatre lignes du 4^e^ groupe ne peuvent toutes se trouver parmi les lignes cherchées, car elles composent le déterminant caractéristique impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc on ne peut prendre plus de trois lignes du 4^e^ groupe.

Remarque II. — On ne peut prendre non plus les 4 lignes du 2^e^ groupe avec la ligne (21), car on aura, comme précédemment, le déterminant caractéristique impossible

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Remarque III. — Toute combinaison de 3 lignes du 2^e groupe avec la ligne (21) équivaut à l'ensemble de toutes les 4 lignes de ce groupe.

En effet, quelle que soit cette combinaison, elle sera transformée dans l'ensemble de lignes du 2^e groupe par l'une des transformations

$$\begin{aligned}
&(A)\ x_1=x_1', && x_2=-x_2'+x_1', && x_3=-x_3'+x_1', && x_4=-x_4'+x_1', \\
& && && && x_5=-x_5'+2x_1', \\
&(B)\ x_1=-x_1'+x_2', && x_2=x_2', && x_3=-x_3'+x_2', && x_4=-x_4'+x_2', \\
& && && && x_5=-x_5'+2x_2', \\
&(C)\ x_1=-x_1'+x_3', && x_2=-x_2'+x_3', && x_3=x_3', && x_4=-x_4'+x_3', \\
& && && && x_5=-x_5'+2x_3', \\
&(D)\ x_1=-x_1'+x_4', && x_2=-x_2'+x_4', && x_3=-x_3'+x_4', && x_4=x_4', \\
& && && && x_5=-x_5'+2x_4'.
\end{aligned}$$

Par exemple, les lignes (7), (8), (9), (21) seront transformées par la transformation (D), respectivement dans les suivantes:

x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'
-1	0	0	0	-1
0	-1	0	0	-1
0	0	-1	0	-1
0	0	0	1	1.

Or ce sont précisément les 4 lignes du 2^e groupe par rapport aux variables

$$x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4',\ x_5'.$$

Remarquons encore que l'ensemble des groupes (I), (III) et (IV) ne sera changé par aucune des 4 transformations

(A), (B), (C), (D).

Remarque IV. — Si l'on prend toutes les 4 lignes du 2^e groupe pour composer les lignes cherchées, on ne pourra prendre avec elles aucune ligne du 4^e groupe.

En effet la transformation

$$x_1=x_1',\quad x_2=x_2',\quad x_3=x_3',\quad x_4=x_4',\quad x_5=x_1'+x_2'+x_3'+x_4'-x_5'$$

ne changera pas l'ensemble des lignes du 1^{er} et du 2^e groupe, tandis que les lignes (17), (18), (19) et (20) seront transformées respectivement dans les suivantes:

x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'
1	1	1	0	2
1	1	0	1	2
1	0	1	1	2
0	1	1	1	2.

Or chacune de ces lignes contient les termes 0 et 2 et conduira par conséquent au cas du n° (19.).

Par la même raison, et en vertu de la remarque III., on ne peut prendre avec 3 lignes du 2^e groupe et la ligne (21) aucune ligne du 4°.

Remarque V. — Si l'on prend les 4 lignes du 2^e groupe, on doit en prendre au moins 5 du 3^e. En effet, en vertu de la remarque II., la ligne (21) est à rejeter et en vertu de le remarque IV., on ne peut non plus prendre aucune ligne du 4^e groupe.

Donc, pour composer au moins 9 lignes, on est obligé de prendre, avec les 4 lignes (7), (8), (9), (10) au moins 5 du 3^e groupe.

Or il ne faut point prendre plus de 5 lignes de ce groupe, car la forme sera complétement déterminée par les 6 lignes du 1^er groupe, les 4 du 2^e et les 5 quelconques du 3^e.

Il est évident qu'en choisissant ces dernières 5 lignes de toutes les manières possibles, on aura 5 formes équivalentes entre elles qui se réduisent l'une à l'autre par les transpositions de 2 lettres prises dans la suite

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$$

par exemple, par le changeant de x_1 en x_2 et réciproquement.

Il suffira donc de prendre les 5 lignes quelconques des 3^e groupe, par exemple

$$(11),\ (12),\ (13),\ (14),\ (15).$$

Soit

$$f = M(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2) + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_1 x_3 + 2\gamma x_1 x_4 \\ + 2\delta x_1 x_5 + 2\varepsilon x_2 x_3 + 2\zeta x_2 x_4 + 2\eta x_2 x_5 + 2\theta x_3 x_4 + 2 i x_3 x_5 + 2 k x_4 x_5$$

la forme cherchée.

En exprimant que son minimum M a les représentations contenues dans les lignes

$$(6),\ (7),\ (8),\ (9),\ (10),\ (11),\ (12),\ (13),\ (14) \text{ et } (15),$$

on aura les équations

$$\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon+\zeta+\theta+2(\delta+\eta+i+k) = -\frac{7}{2}M,$$

$$\delta = -\frac{M}{2},\quad \eta = -\frac{M}{2};\quad i = -\frac{M}{2},\quad k = -\frac{M}{2},$$

$$\alpha+\delta+\eta = -M,\quad \beta+\delta+i = -M,\quad \gamma+\delta+k = -M,$$

$$\varepsilon+\eta+i = -M,\quad \zeta+\eta+k = -M.$$

On déduit de là

$$\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = \zeta = 0, \quad \delta = \eta = i = k = -\theta = -\frac{M}{2}.$$

On aura alors

$$f = M(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_5 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5 + x_3x_4).$$

Cette forme est équivalente à V_5 et se transforme dans V_5 par la transformation

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = -x_4', \quad x_4 = -x_5', \quad x_5 = x_1' + x_2' + x_3'.$$

De la même manière on obtiendra les formes équivalentes à V_5 si l'on prend 3 lignes du 2^e groupe avec la ligne (21) en vertu de la remarque III.

Ainsi, pour avoir des formes extrêmes non équivalentes à V_5, on ne doit pas prendre plus de 3 lignes de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21).

Remarque VI. — Comme, pour composer les lignes cherchées (au moins 9 en nombre), on ne peut prendre du 4^e groupe que 3 lignes au plus (remarque I.) et de l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21)

aussi au plus 3 lignes (remarque V.), il s'ensuit qu'il faut prendre au moins 3 lignes du 3^e groupe.

Remarque VII. — Si l'on prend 3 lignes du 4^e groupe, par exemple

(17), (18), (19)

on ne doit prendre avec elles que 3 lignes déterminées du 3^e groupe. Pour les trouver il faut, parmi les 4 premières colonnes dans l'ensemble des lignes données du 4^e groupe, remarquer celle qui contient 3 unités.

Dans le 3^e groupe il faut chercher trois lignes telles, que dans leur ensemble la même colonne contienne 3 unités.

Ces 3 lignes du 3^e groupe sont celles qu'on doit prendre avec les 3 lignes données du 4^e.

Par exemple, si l'on donne les lignes

(17)	1	1	1	0	1
(18)	1	1	0	1	1
(19)	1	0	1	1	1

on remarque d'abord que, des 4 premières colonnes, celle qui contient 3 unités est la première.

Dans le 3^e groupe on trouve 3 lignes déterminées

(11)	1	1	0	0	1
(12)	1	0	1	0	1
(13)	1	0	0	1	1

dont l'ensemble contient 3 unités dans la première colonne.

Ainsi, avec les lignes

$$(17),\quad (18),\quad (19)$$

il faut prendre

$$(11),\quad (12),\quad (13).$$

Pour démontrer la proposition énoncée, considérons le cas où l'on donne les lignes (17), (18), (19), car il est évident que les autres cas se réduisent à celui-ci par de simples transpositions des lettres

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4.$$

Or, si nous faisons la transformation

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1' - x_2' - x_3' + x_5',\\
x_2 &= -x_2' - x_3' + x_5',\\
x_3 &= -x_2' + x_5',\\
x_4 &= -x_3' + x_5',\\
x_5 &= -x_2' - x_3' + 2x_5' - x_4',
\end{aligned}$$

les lignes (1), (5), (6), (17), (18), (19) et celles du 3e groupe seront transformées respectivement dans les suivantes:

		x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'	
(1)	dans ···	1	0	0	0	0	
(5)	„ ···	0	0	0	1	0	
(6)	„ ···	0	0	0	0	1	
(17)	„ ···	0	1	0	0	0	
(18)	„ ···	0	0	1	0	0	
(19)	„ ···	1	1	1	1	2	
(11)	„ ···	0	1	1	1	1	IIIe groupe.
(12)	„ ···	1	0	1	0	1	
(13)	„ ···	1	1	0	0	1	
(14)	„ ···	1	1	0	0	0	
(15)	„ ···	1	0	1	0	0	
(16)	„ ···	0	1	1	1	2	

On voit d'abord que les 6 lignes du 1er groupe figureront après la transformation. Ensuite on remarque que la ligne (16) est à rejeter, car, après la transformation elle contiendra les termes 0 et 2 (le cas du n° 19.).

Les lignes (14) et (15) sont également impossibles, car chacune d'elles étant transformée contient le terme 0 dans la même colonne où se trouve le terme 2 de la ligne

$$1\quad 1\quad 1\quad 1\quad 2$$

(voir le n° 21.).

Restent du 3ᵉ groupe comme possibles et obligatoires (remarque VI.) les lignes

$$(11),\quad (12),\quad (13). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Ayant fait ces remarques, nous passons à la recherche des formes non équivalentes à V_5 et qui ont les 6 représentations de leur minimum contenues dans les lignes du 1ᵉʳ groupe. Comme il est nécessaire de prendre 3 lignes du 3ᵉ groupe (remarque VI.), nous distinguerons deux cas:

1°. Lorsqu'on n'en prend que 3 seulement;

2°. Si l'on prend plus de 3 lignes du 3ᵉ groupe.

Dans le premier cas, pour composer les lignes cherchées, il nous en faut choisir encore au moins 6. Or on n'en peut prendre du 4ᵉ groupe plus de 3, ainsi que de l'ensemble

$$(7),\quad (8),\quad (9),\quad (10),\quad (21)$$

(remarque V.). Par conséquent, il faut nécessairement choisir 3 lignes du 4ᵉ groupe et 3 de cet ensemble.

Comme il est indifférent quelle réunion de 3 lignes du 4ᵉ groupe nous choisissons, on peut prendre (17), (18), (19). Avec elles seulement sont compatibles les 3 lignes du 3ᵉ groupe

$$(11),\quad (12),\quad (13)$$

(remarque VII.).

Nous avons encore à assigner 3 lignes de l'ensemble

$$(7),\quad (8),\quad (9),\quad (10),\quad (21).$$

Or, quel que soit notre choix, une des transformations

$$(A),\quad (B),\quad (C),\quad (D)$$

(remarque III.) changera les lignes choisies en 3 lignes du 2ᵉ groupe.

Après cela on prendra, parmi les lignes transformées du 3ᵉ et du 4ᵉ groupe celles qui sont identiques avec les suivantes:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

De cette manière on peut faire abstraction de la ligne (21) et choisir avec les lignes

$$(11),\quad (12),\quad (13),\quad (17),\quad (18),\quad (19)$$

3 lignes du 2ᵉ groupe.

Or ce choix peut être fait de deux manières différentes:

1°. On peut prendre les lignes

$$(8),\quad (9),\quad (10);$$

2°. Ou les lignes

$$(7),\quad (8),\quad (9).$$

Les autres combinaisons se réduisent à ces deux-là.

La réunion

$$(8),\quad (9),\quad (10),\quad (11),\quad (12),\quad (13),\quad (17),\quad (18),\quad (19)$$

détermine (comme dans la remarque V.) la forme

$$Z = M\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 - \tfrac{1}{2}x_1x_3 - \tfrac{1}{2}x_1x_4 - \tfrac{1}{2}x_1x_5 + \tfrac{1}{2}x_2x_3 + \tfrac{1}{2}x_2x_4 + \tfrac{1}{2}x_3x_4 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5),$$

qui est extrême (n° 4.) et non équivalente à V_5.

La réunion

$$(7),\quad (8),\quad (9),\quad (11),\quad (12),\quad (13),\quad (17),\quad (18),\quad (19)$$

donne la forme

$$M\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - x_1x_5 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_1x_4)$$

équivalente à V_5 et qui se transforme dans V_5 par la transformation

$$x_1 = -x_1' - x_5',\quad x_2 = x_2',\quad x_3 = x_1',\quad x_4 = -x_5',\quad x_5 = x_1' + x_2' + x_3'.$$

Cette forme est par conséquent à rejeter.

Ainsi, dans le cas que nous étudions, on obtient une seule forme Z, qui répond à la question.

Considérons maintenant le cas où l'on prend plus de 3 lignes du 3^e groupe.

Comme, de l'ensemble

$$(7),\quad (8),\quad (9),\quad (10),\quad (21)$$

on ne peut choisir plus de 3 lignes, il en faut prendre au moins 6 du 3^e et du 4^e groupe.

Ainsi, avec 4 du 3^e, il faut en prendre au moins 2 du 4^e et, avec 5 du 3^e au moins 1 du 4^e.

Or on peut prendre 4 lignes du 3^e groupe de deux manières différentes:

La première est représentée par la combinaison

(g) $\qquad (11),\quad (12),\quad (13),\quad (14);$

la seconde par la combinaison

(h) $\qquad (11),\quad (12),\quad (15),\quad (16).$

Toutes les autres se réduisent à ces deux.

Si l'on prend 5 lignes du 3^e groupe, on aura la combinaison

(k) $\qquad (11),\quad (12),\quad (13),\quad (14),\quad (15),$

les autres se réduisant à celle-ci.

Les 6 lignes du 3^e groupe donnent, bien entendu, la combinaison

(l) $\qquad (11),\quad (12),\quad (13),\quad (14),\quad (15),\quad (16).$

Il est facile de faire voir maintenant que chacune de ces quatres combinaisons

(g), (h), (k), (l),

prise avec un nombre nécessaire des lignes du 4e groupe, après l'une des transformations

(A), (B), (C), (D)

(remarque III.), contiendra 3 lignes de ce groupe.

Remarquons encore que les transformations

(A), (B), (C), (D)

ne changent pas le premier groupe, ainsi que l'ensemble

(7), (8), (9), (10), (21).

Quant aux lignes du 3e et du 4e groupe, elles sont transformées dans les suivantes:

	(A)					(B)					(C)					(D)				
	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'	x_1'	x_2'	x_3'	x_4'	x_5'
(11) se change en	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
(12) „ „ „	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
(13) „ „ „	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
(14) „ „ „	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
(15) „ „ „	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
(16) „ „ „	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
(17) „ „ „	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
(18) „ „ „	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
(19) „ „ „	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
(20) „ „ „	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1

La combinaison (g) après la transformation (A) contiendra 3 lignes à 4 unités (du 4e groupe).

La combinaison (h) avec une quelconque des lignes

(17), (18), (19), (20)

(et il faut en prendre au moins deux) donnera, après l'une des transformations

(A), (B), (C), (D),

3 lignes à 4 unités.

Les combinaisons (k) et (l) contiendront après la transformation (A) 3 lignes avec ce nombre d'unités. Ainsi on aura toujours 3 lignes du 4e groupe.

Or, avec elles, il est nécessaire de prendre 3 lignes déterminées du 3e groupe et l'on sera conduit au cas précédent. On obtient donc toujours la forme Z comme le résultat de cette recherche.

23. De tout ce que nous avons dit des formes à cinq variables, il suit que, pour le déterminant donné $-D$, il existe 3 formes extrêmes à cinq variables

$$
\begin{aligned}
U_5 &= 2\sqrt[5]{\frac{D}{6}}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5\\
&\qquad +x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5),\\
Z &= \sqrt[5]{\frac{2^9D}{3^4}}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\tfrac{1}{2}x_1x_2-\tfrac{1}{2}x_1x_3-\tfrac{1}{2}x_1x_4-\tfrac{1}{2}x_1x_5\\
&\qquad +\tfrac{1}{2}x_2x_3+\tfrac{1}{2}x_2x_4-x_2x_5+\tfrac{1}{2}x_3x_4-x_3x_5-x_4x_5),\\
V_5 &= \sqrt[5]{2^3D}\,[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3\\
&\qquad +x_2x_4+x_2x_5+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5].
\end{aligned}
$$

Comme V_5 a le minimum $\sqrt[5]{8D}$, plus grand que celui de U_5 et de Z, il suit du n° 7 que la quantité

$$\sqrt[5]{8D}$$

est la limite précise des minima des formes à cinq variables du déterminant $-D$.