

# THÈSE

présentée à

l'Université de Nice-Sophia Antipolis  
UFR Sciences - Département de Mathématiques  
Laboratoire J. A. Dieudonné  
U.R.A. au CNRS N° 168

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Nice-Sophia Antipolis**  
(Spécialité Mathématiques)

**Sur les lambda-opérations**  
et  
**la L-théorie**

par

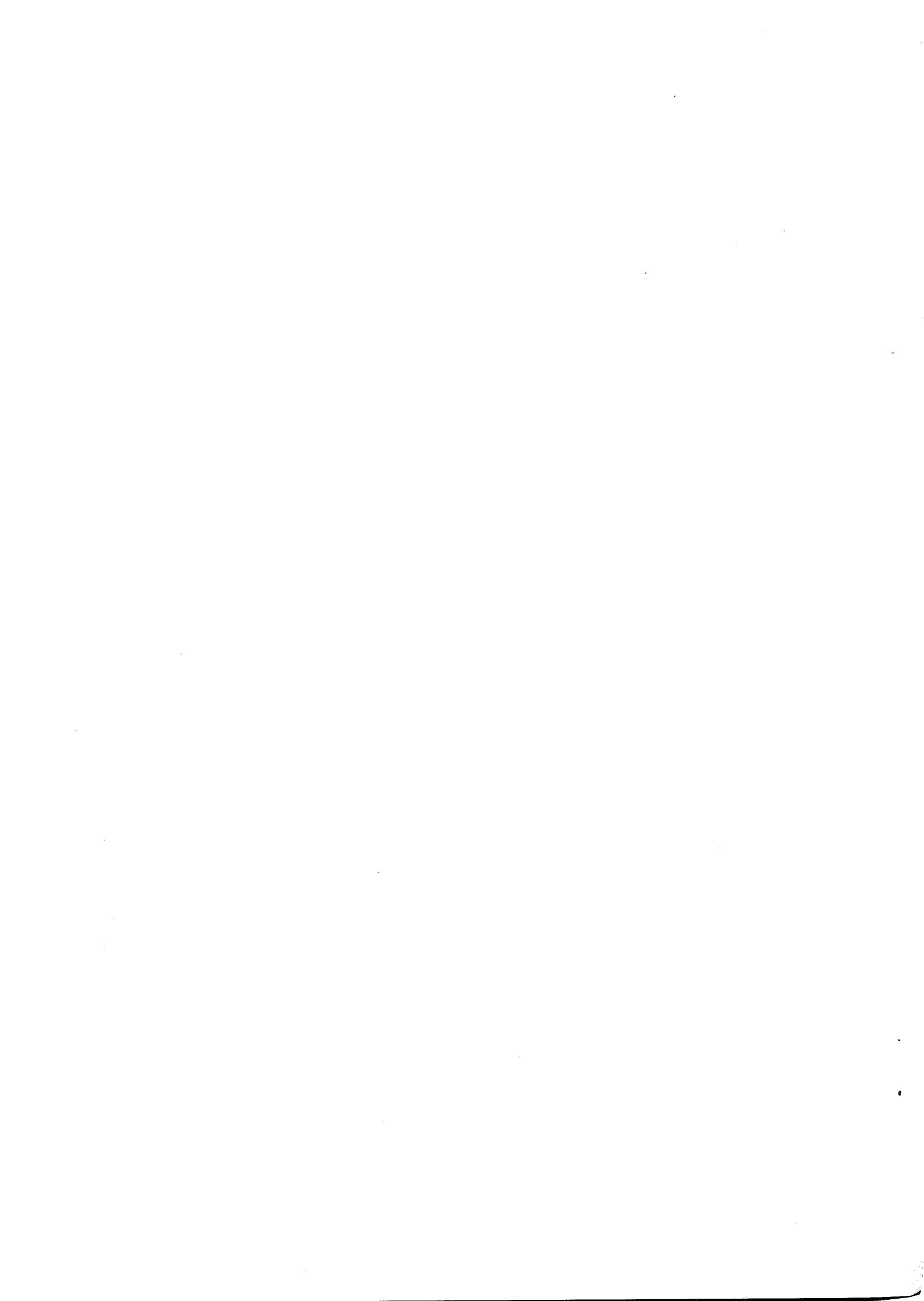
**Mohamed EL HAMDADI**

Thèse soutenue le 25 Juin 1996, en salle de conférences du Laboratoire J. A. Dieudonné (Parc Valrose), devant le jury :

Mr Jean-Louis Cathelineau	Professeur à l'Université de Nice-Sophia Antipolis	<b>Président</b>
Mr Max Karoubi	Professeur à l'Université Paris 7, Jussieu	<b>Rapporteur</b>
Mr Marc Aubry	Chercheur à l'Université de Nice-Sophia Antipolis	
Mr Daniel Guin	Professeur à l'Université de Montpellier	<b>Rapporteur</b>
Mr Frédéric Patras	Chercheur à l'Université de Nice-Sophia Antipolis	



**A mes parents**



## Remerciements

Mon directeur de thèse, Jean Louis Cathelineau, a toujours été disponible pour me guider dans mes recherches. Ses conseils ont été pour moi beaucoup plus qu'un catalyseur du travail que je présente aujourd'hui. En effet, si ce dernier a pu être réalisé, c'est en majeure partie grâce à sa manière de voir les choses et à sa façon de les transmettre aux autres. Il m'a aussi soutenu aux moments difficiles. Je voudrais qu'il accepte mes remerciements les plus sincères.

Les travaux de Max Karoubi m'ont souvent inspiré. Je lui exprime toute ma reconnaissance et ma gratitude d'avoir bien voulu rapporter sur cette thèse.

Monsieur Daniel Guin a bien voulu accepter d'être rapporteur de mon jury de thèse. Je le remercie vivement pour les précieuses remarques qu'il m'a faites.

Je tiens à remercier Marc Aubry et je suis très heureux qu'il ait accepté d'être membre de ce jury.

Frédéric Patras s'est toujours intéressé au travail que j'ai fait. Ses remarques et ses conseils m'ont été très utiles. C'est pour moi un grand plaisir qu'il ait accepté d'être membre de ce jury.

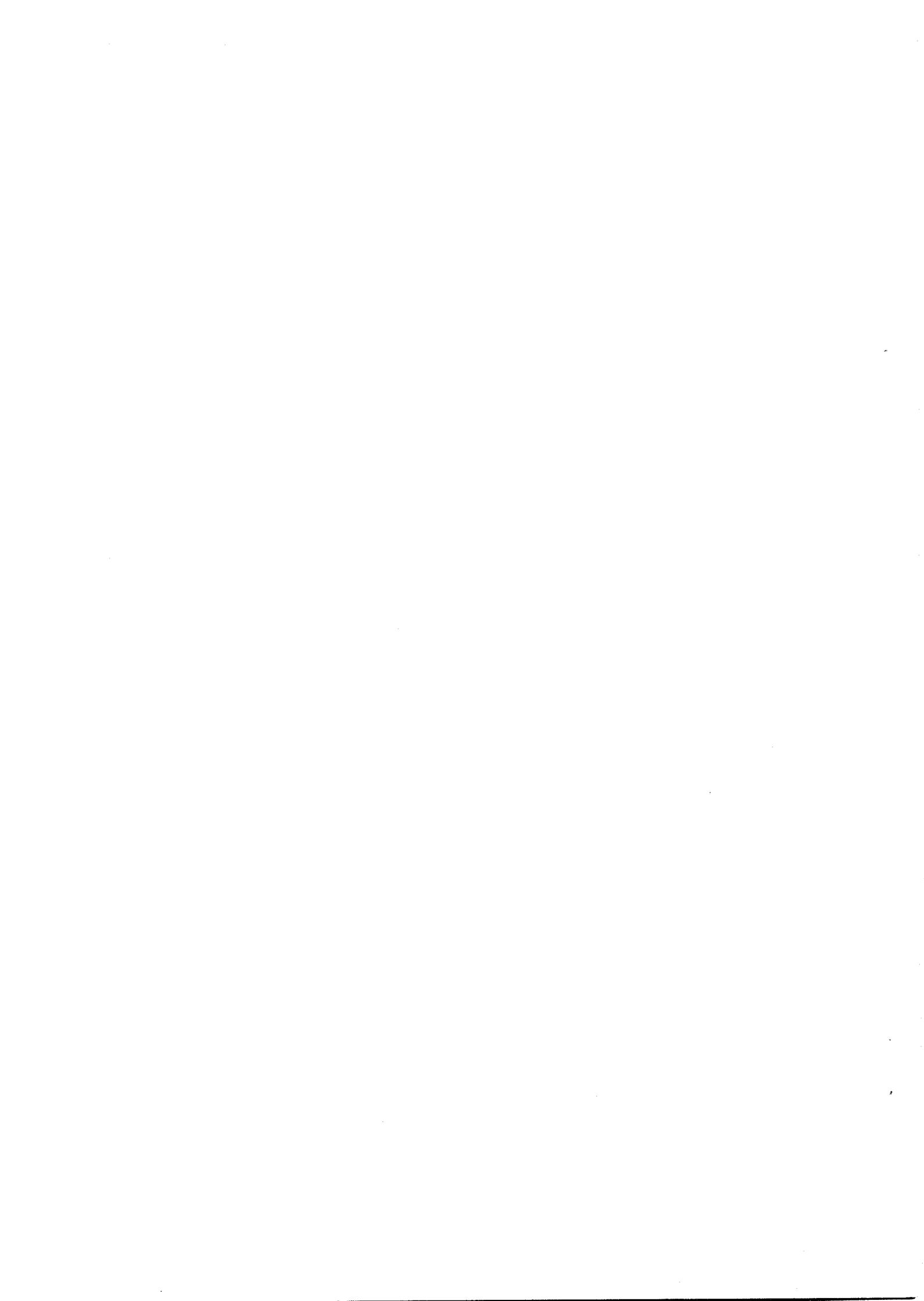
Il m'est difficile d'exprimer en quelques mots ce que je dois à Jean Michel Lemaire pour tout ce qu'il m'a appris en mathématiques et en particulier en topologie algébrique.

Je dois aussi à Zdislaw Wojtkowiak de nombreuses discussions stimulantes.

Je remercie vivement tous ceux avec qui j'ai travaillé ou j'ai discuté : P. Elbaz-Vincent, G. Elencwajg, C. Walter, C. Berger,...

Je tiens à remercier l'ensemble du personnel du Laboratoire J.A.Dieudonné , en particulier A. Borel, J. Lachkar, I. Laurent, H. Laurin, J. Asplanato.

Merci enfin à J. P. Pradère pour son excellent travail de tirage.



# Table des Matières

0.1	Introduction . . . . .	5
<b>1</b>	<b><math>\lambda</math>-opérations en L-théorie</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	L'anneau des représentations $RQ_A(G)$ . . . . .	8
1.3	Structure de pré- $\lambda$ -anneau sur $RQ_A(G)$ . . . . .	10
1.3.1	Puissances extérieures des formes bilinéaires . . . . .	10
1.3.2	Puissances extérieures d'une somme orthogonale . . . . .	11
1.4	Rappels sur les $\lambda$ -anneaux . . . . .	12
1.5	Un morphisme de $L_0(A)$ -algèbre de $RQ_A(G)$ dans $[BG, BO(A)^+]$ . . .	14
1.5.1	La construction $+$ de Quillen . . . . .	14
1.5.2	Structure de $L_0(A)$ -algèbre sur $[BG, BO(A)^+]$ . . . . .	14
1.5.3	Construction d'un morphisme de $RQ_A(G)$ dans $[BG, BO(A)^+]$ .	16
1.6	Construction des applications $\lambda^k$ de $BO(A)^+$ dans $BO(A)^+$ , définies à homotopie faible près. . . . .	18
1.7	Lien avec les $\lambda$ -opérations en K-théorie algébrique . . . . .	21
1.7.1	Foncteur oubli . . . . .	21
1.7.2	Foncteur hyperbolique . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Modèle de Volodin en L-théorie</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.2	Homologie diédrale . . . . .	26
2.2.1	Homologie de Hochschild . . . . .	26
2.2.2	Homologie cyclique . . . . .	26
2.2.3	Cas d'une involution. Module involutif . . . . .	27

2.2.4	Homologie diédrale . . . . .	28
2.3	L-théorie relative . . . . .	29
2.4	Modèle de Volodin en L-théorie . . . . .	30
2.4.1	Modèle de Volodin absolu . . . . .	30
2.4.2	Modèle de Volodin relatif . . . . .	31
2.4.3	Rappels sur la théorie de Malcev . . . . .	35
2.4.4	Analogie de Lie . . . . .	35
2.5	Théorème reliant la L-théorie et l'homologie diédrale . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Homologie <math>S^3</math>-équivariante et homologie quaternionique</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	Homologie quaternionique . . . . .	40
3.2.1	Une résolution périodique du $Q_m$ -module trivial $\mathbb{Z}$ . . . . .	40
3.3	Ensemble cyclique et espace cyclique . . . . .	43
3.3.1	La catégorie $\Delta C$ et sa catégorie opposée $\Delta C^{op}$ . . . . .	43
3.3.2	Ensemble cyclique et espace cyclique . . . . .	46
3.4	Homologie cyclique et homologie $S^1$ -équivariante . . . . .	46
3.5	Interprétation topologique de l'homologie diédrale et de l'homologie quaternionique . . . . .	47
3.5.1	Le groupe de Lie $S^3$ n'est pas un groupe simplicial croisé. . . . .	50
3.6	Un résultat sur l'homologie $S^3$ -équivariante . . . . .	52
	<b>Appendice : Remarques sur l'excision en K-théorie à coefficients</b>	<b>59</b>
A.1	Comparaison d'un résultat de Karoubi et d'un résultat de Charney . . . . .	59
	<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>

## 0.1 Introduction

La L-théorie est l'étude d'invariants liés au groupe orthogonal  ${}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$  d'un anneau involutif  $A$ , où  $\varepsilon$  est dans le centre de  $A$  tel que  $\varepsilon\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}\varepsilon = 1$ . En première approximation, on peut dire que l'on construit à partir du groupe  ${}_{\varepsilon}O(A) = \bigcup_n {}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$  des groupes abéliens  ${}_{\varepsilon}L_i(A)$  qui forment ce que l'on appelle la L-théorie de l'anneau  $A$  (on dit parfois K-théorie hermitienne).

Un grand nombre de questions sur ces groupes ont été résolues (cf. [1], [14], [18], [22]).

Notre travail est essentiellement consacré à la K-théorie hermitienne (cf. [17]). Il est partagé en trois parties indépendantes :

Le premier chapitre présente une construction des Lambda-opérations en K-théorie orthogonale. On constate que les Lambda-opérations qui existent en K-théorie algébrique classique (cf. [16], [23]) ne s'adaptent pas au cas orthogonal car les puissances extérieures de formes hyperboliques ne sont pas, en général, hyperboliques. C'est pour cela qu'on considère une classe plus large de formes bilinéaires symétriques. En utilisant un théorème de prolongements des isométries de Witt, dans le cas des anneaux, on définit des applications  $\lambda^k : BO(A)^+ \rightarrow BO(A)^+$ , définies à homotopie faible près, qui permettent d'avoir une structure de pré- $\lambda$ -anneau sur la K-théorie orthogonale.

Dans le deuxième chapitre, on considère l'analogue hermitien d'un célèbre théorème de Goodwillie (cf. [13]) qui lie, rationnellement, la K-théorie relative d'un idéal nilpotent à l'homologie cyclique relative:

### **Théorème 0.1.1**

*Soit  $A$  un anneau hermitien et  $I$  un idéal de  $A$ , nilpotent et stable par l'involution. Alors, rationnellement, la L-théorie algébrique relative est la même que l'homologie diédrale relative:*

$${}_{\varepsilon}L_i(A, I) \otimes \mathbb{Q} \cong HD_{i-1}(A, I) \otimes \mathbb{Q}.$$

Notre preuve utilise un modèle de Volodin relatif en L-théorie et la relation, donné par la théorie de Malcev, entre  $\mathbb{Q}$ -algèbres de Lie nilpotentes et groupes de Lie uniquement divisibles. Nous adaptons ici le modèle qui a été introduit, dans le cas de la K-théorie algébrique classique, par Ogle et Weibel (cf. [34]). Ce résultat a été démontré par des méthodes différentes indépendamment par Song (cf. [39]) et Lodder (cf. [30]).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la suite exacte de périodicité en

homologie quaternionique:

$$\dots \rightarrow HT_n(A) \rightarrow HQ_n(A) \rightarrow HQ_{n-4}(A) \rightarrow HT_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Une des raisons d'étudier l'homologie quaternionique (resp. diédral) est leurs liens avec l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices orthogonales. Loday, (cf. [24]), montre que l'homologie quaternionique est une homologie  $Pin(2)$ -équivariante. En utilisant ce résultat et le lien de celle-ci avec une homologie  $S^3$ -équivariante, on interprète la suite exacte de périodicité comme une suite exacte de Gysin d'une  $S^3$ -fibration.

# Chapitre 1

## $\lambda$ -opérations en L-théorie

### 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer que la K-théorie orthogonale d'un anneau est munie d'une structure de pré- $\lambda$ -anneau, compatible, par le foncteur oubli, avec celle de la K-théorie algébrique classique.

Le cas de cette dernière a été traité par Kratzer [23]. Pour d'autres approches, voir Hiller [16] et Soulé [41].

Pour un anneau  $A$ , muni d'une involution, considérons la catégorie  $\mathcal{C}_A$  des  $A$ -modules bilinéaires symétriques [37]: on rappelle qu'un objet  $(M, \varphi)$  de  $\mathcal{C}_A$  est un  $A$ -module  $M$  muni d'une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$ , et qu'un morphisme de  $(M, \varphi)$  dans  $(N, \psi)$  est une application  $A$ -linéaire  $f : M \rightarrow N$ , vérifiant  $\psi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$  pour  $x$  et  $y$  dans  $M$ . On note  $\varphi_{p,q}$  la forme bilinéaire diagonale  $\langle \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q \rangle$  sur

$A^{p+q}$  et on considère la sous-catégorie pleine  $Q_A$ , de  $\mathcal{C}_A$ , dont les objets sont les  $(M, \varphi)$  isomorphes à un  $(A^{p+q}, \varphi_{p,q})$  pour un certain couple  $(p, q)$ .

Soit  $G$  un groupe et  $RQ_A(G)$  l'anneau des classes d'isométries de représentations de  $G$  dans des objets de  $Q_A$ . Les puissances extérieures induisent une structure de pré- $\lambda$ -anneau sur  $RQ_A(G)$ .

Comme dans la situation de la K-théorie usuelle (cf. [23]), un point crucial consiste à construire des applications  $\lambda^k$  de  $BO(A)^+$  dans  $BO(A)^+$ , définies à homotopie faible près, qui induisent sur le groupe  $L_n(A)$  ( $n$ -ième groupe d'homotopie de  $BO(A)^+$ ) une structure de pré- $\lambda$ -anneau. Pour avoir une structure de  $\lambda$ -anneau en K-théorie algébrique classique, on utilise (voir [23]) le "splitting principle" qui consiste à se ramener

au cas des modules de rang un. Par contre, on ne sait pas s'il existe un analogue pour la K-théorie orthogonale permettant de se ramener à des modules de rang deux.

Nous remarquons que les formes bilinéaires symétriques sont stables par puissances extérieures, alors que les formes bilinéaires antisymétriques ne le sont pas. C'est la raison pour laquelle nous considérons, dans ce chapitre, seulement la K-théorie orthogonale. Le cas de la K-théorie symplectique pose d'autres problèmes et nous ne l'avons pas étudié.

Dans tout le chapitre, on suppose que 2 est inversible dans l'anneau  $A$ ; cela nous permettra d'utiliser certains résultats, par exemple le théorème de Witt sur le prolongement des isométries, ainsi que l'équivalence entre formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques en caractéristique différente de deux. Ainsi on parlera indifféremment de forme quadratique ou de forme bilinéaire symétrique.

## 1.2 L'anneau des représentations $RQ_A(G)$

Soit  $G$  un groupe et  $Q_A$  la sous-catégorie pleine des  $A$ -modules quadratiques dont les objets sont isomorphes à un  $(A^{p+q}, \varphi_{p,q})$  pour un certain couple  $(p, q)$ .

### Définition 1.2.1

(1) Une représentation  $\rho$  du groupe  $G$  dans un objet  $(M, \varphi)$  de  $Q_A$  est un morphisme de  $G$  dans le groupe des automorphismes de  $(M, \varphi)$ ,  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(M, \varphi)$ .

(2) Soient  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(M, \varphi)$  et  $\mu : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(N, \psi)$  deux représentations du groupe  $G$  dans des objets  $(M, \varphi)$  et  $(N, \psi)$  de  $Q_A$ .

On dira que les deux représentations  $\rho$  et  $\mu$  sont isométriques si il existe une isométrie  $h : (M, \varphi) \rightarrow (N, \psi)$  telle que pour tout  $g$  de  $G$ , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (M, \varphi) & \xrightarrow{\rho(g)} & (M, \varphi) \\ h \downarrow & & h \downarrow \\ (N, \psi) & \xrightarrow{\mu(g)} & (N, \psi) \end{array}$$

est commutatif.

La classe d'isométrie d'une représentation  $\rho$  du groupe  $G$  dans un objet de  $Q_A$  sera notée  $[\rho]$ .

L'ensemble  $E$  des classes d'isométries des représentations de  $G$  dans des objets de  $Q_A$

est muni d'une

**(a) addition:**

Soient  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(M, \varphi)$  et  $\mu : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(N, \psi)$  deux représentations du groupe  $G$  dans des objets de  $Q_A$ . La somme des représentations  $\rho$  et  $\mu$  est la représentation  $G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(M \oplus N, \varphi \perp \psi)$  notée  $\rho \oplus \mu$ . La classe d'isométrie de  $\rho \oplus \mu$  est la somme des classes d'isométries de  $\rho$  et de  $\mu$ .

La classe de la représentation triviale  $e : G \rightarrow \text{Aut}(\{0\}, \varphi)$ , où  $\varphi$  est la forme nulle sur le  $A$ -module  $\{0\}$ , est l'élément neutre pour cette addition.

Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $E \times E$  définie par :  $([\rho], [\mu]) \sim ([\rho'], [\mu'])$  si et seulement si  $[\rho] + [\mu'] = [\rho'] + [\mu]$ .

Le passage au quotient par cette relation d'équivalence donne une structure de groupe sur  $E \times E / \sim$  que l'on note  $RQ_A(G)$  et dit groupe de Grothendieck de la catégorie additive  $Q_A$ .

**(b) produit:**

Rappelons d'abord brièvement ce qu'est le produit tensoriel de deux formes bilinéaires symétriques.

Soient  $(M, \varphi)$  et  $(N, \psi)$  deux objets de  $\mathcal{C}_A$ . L'application,

$$\begin{aligned} M \times N \times M \times N &\longrightarrow A \\ (x, y, x', y') &\mapsto \varphi(x, x') \cdot \psi(y, y'), \end{aligned}$$

est linéaire par rapport à chaque argument et induit une forme bilinéaire symétrique sur le  $A$ -module  $M \otimes N$ , notée  $\varphi \otimes \psi$ . Ce produit est distributif vis à vis de la somme orthogonale.

Soient  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(M, \varphi)$  et  $\mu : G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(N, \psi)$  deux représentations du groupe  $G$  dans des objets de  $Q_A$ .

La classe d'isométrie de la représentation  $G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(M \otimes_A N, \varphi \otimes \psi)$ , sera notée  $[\rho] \cdot [\mu]$ .

L'élément neutre de ce produit est la classe de la représentation

$$G \rightarrow \text{Aut}_{Q_A}(A, \varphi = \langle 1 \rangle).$$

Ce produit est associatif et distributif par rapport à l'addition; donc donne une structure d'anneau sur  $RQ_A(G)$ .

**Morphisme de restriction**

Soit  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupe et  $\rho : G' \rightarrow \text{Aut}(M, \varphi)$  une représentation de  $G'$  dans un objet  $(M, \varphi)$ .

L'application composée  $\rho \circ f : G \rightarrow \text{Aut}(M, \varphi)$  induit un morphisme d'anneaux de  $RQ_A(G')$  dans  $RQ_A(G)$ , dit morphisme de restriction et noté  $\rho^*$ .

$RQ_A(G)$  est donc un foncteur contravariant, en  $G$ , de la catégorie des groupes dans celle des anneaux.

$L_0(A)$  est le groupe de Grothendiek de la catégorie  $\mathcal{C}_A$  (pour un cadre plus général, voir [19] p. 306). Le produit tensoriel, défini précédemment, sur  $\mathcal{C}_A$  fait de  $L_0(A)$  un anneau.

Puisque le produit tensoriel d'une forme hyperbolique  $\langle \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_p \rangle$  par une forme bilinéaire symétrique est une forme hyperbolique (cf. [37] p. 76), on déduit un foncteur  $\mathcal{C}_A \otimes Q_A \rightarrow Q_A$ , qui induit une structure de  $L_0(A)$ -algèbre sur  $RQ_A(G)$ .

## 1.3 Structure de pré- $\lambda$ -anneau sur $RQ_A(G)$

### 1.3.1 Puissances extérieures des formes bilinéaires

Soit  $M$  un  $A$ -module et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $M$ .

Le module  $M$  muni de  $\varphi$  sera noté  $(M, \varphi)$  et dit  $A$ -module bilinéaire.

Le sous  $A$ -module  $L_p$ , du produit tensoriel  $M^{\otimes p}$ , engendré par les éléments décomposables ayant deux facteurs égaux, est aussi engendré, puisque 2 est inversible dans l'anneau  $A$ , par les éléments de la forme

$\{x - \varepsilon(\sigma)\sigma(x) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_p, x \in M^{\otimes p} \text{ et } \varepsilon(\sigma) \text{ est la signature de } \sigma\}$  et est appelé le sous  $A$ -module d'antisymétrisation de  $M^{\otimes p}$ . Le module quotient  $M^{\otimes p}/L_p$  est la puissance extérieure  $p$ -ième du module  $M$ . L'image de  $x_1 \otimes \dots \otimes x_p$  sera noté  $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ .

Définissons l'application de  $M^{2p}$  dans  $A$  qui associe à  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$ , le déterminant de la matrice des  $\varphi(x_i, y_j)$ .

C'est une application multilinéaire par rapport à  $x_i$  et  $y_j$ , alternée vis à vis des  $x_i$  d'un côté et  $y_j$  de l'autre et s'annulant sur le sous  $A$ -module d'antisymétrisation de  $M^{\otimes p}$ , donc passe au quotient et définit une forme bilinéaire sur  $\wedge^p M$  notée  $\wedge^p \varphi$ , on obtient ainsi un  $A$ -module noté  $(\wedge^p M, \wedge^p \varphi)$ , c'est la puissance extérieure du  $A$ -module bilinéaire  $(M, \varphi)$ .  $\wedge^p : (M, \varphi) \mapsto (\wedge^p M, \wedge^p \varphi)$  est un foncteur.

En particulier, si  $\theta : A^n \times A^n \rightarrow A$  une forme bilinéaire, alors sa puissance extérieure  $p$ -ième  $\wedge^p \theta$  est définie par:

$$\wedge^p A^n \times \wedge^p A^n \xrightarrow{\wedge^p \theta} A$$

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_p, y_1 \wedge \dots \wedge y_p) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p \theta(x_{\sigma(i)}, y_{\sigma(i)}) = \det(\theta(x_i, y_j))_{1 \leq i, j \leq p} .$$

#### Proposition 1.3.1

Le foncteur puissance extérieure  $\wedge^p$ , de la catégorie  $\mathcal{C}_A$  dans  $\mathcal{C}_A$ , laisse stable la sous-catégorie  $Q_A$ .

PREUVE :

Soit  $(M, \varphi)$  un objet de  $Q_A$  donc isomorphe à un  $(A^{p+q}, \varphi_{p,q})$  pour un certain couple  $(p, q)$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{p+q})$  la base de  $A^{p+q}$  dans laquelle la matrice diagonale de  $\varphi_{p,q}$  est  $\langle \underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q \rangle$ .

La puissance extérieure  $k$ -ième du module  $A^{p+q}$  est canoniquement identifié au  $A$ -module  $A^{\binom{p+q}{k}}$ .

Soit  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq p+q}$  la base de  $\wedge^k A^{p+q}$ , notée  $\wedge^k \mathcal{B}$ , associée à  $\mathcal{B}$ .

On remarque que  $\wedge^k \varphi_{p,q}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}; e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k})$  qui vaut  $\det(\varphi_{p,q}(e_{i_m}, e_{j_l})_{1 \leq m, l \leq k})$ , est nul dès qu'il existe un  $n$  de l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$  tel que  $e_{j_n}$  est distinct de tous les  $e_{i_l}$ .

On a aussi que  $\wedge^k \varphi_{p,q}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}; e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})$  est le produit  $\prod_{l=1}^{l=k} \varphi_{p,q}(e_{i_l}, e_{i_l})$ , donc est égal à  $(-1)^m$ , où  $m$  est le nombre de vecteurs  $e_{i_l}$  pour lesquels  $\varphi_{p,q}(e_{i_l}, e_{i_l}) = -1$ .

On déduit donc que la puissance extérieure  $k$ -ième de l'objet  $(M, \varphi)$  de  $Q_A$  est un objet  $(N, \psi)$  de  $Q_A$ .

Donc  $Q_A$  est stable par  $\wedge^k$ . ■

### 1.3.2 Puissances extérieures d'une somme orthogonale

#### Proposition 1.3.2

Soient  $(M, \varphi)$  et  $(N, \psi)$  deux  $A$ -modules bilinéaires symétriques.

Alors on a :

$$\wedge^k((M, \varphi) \perp (N, \psi)) \cong \sum_{0 \leq i \leq k} \wedge^i(M, \varphi) \otimes \wedge^{k-i}(N, \psi).$$

PREUVE :

La formule bien connue pour les puissances extérieures de la somme directe de deux  $A$ -modules est encore valable pour la somme orthogonale des deux modules bilinéaires symétriques  $(M, \varphi)$  et  $(N, \psi)$ .

En effet, en tant que module, la puissance extérieure  $k$ -ième  $\wedge^k(M \oplus N)$  est la somme directe des produits tensoriels  $\wedge^i M \otimes \wedge^{k-i} N$  pour  $i$  entier compris entre 0 et  $k$ .

De plus on vérifie que cette décomposition est orthogonale vis à vis de la forme bilinéaire  $\wedge^k(\varphi \perp \psi)$  et que la restriction de cette dernière sur chaque facteur  $\wedge^i M \otimes \wedge^{k-i} N$  est la forme  $\wedge^i \varphi \otimes \wedge^{k-i} \psi$ . ■

#### Remarque :

La proposition précédente reste vraie si on remplace les modules symétriques par des modules antisymétriques.

## Puissance extérieure de représentations

Soit  $\theta$  une représentation d'un groupe  $G$  dans un  $A$ -module  $M$ ,

$$\begin{aligned} \theta : G &\longrightarrow \text{Aut}(M) \\ g &\mapsto \theta(g). \end{aligned}$$

L'application de  $M^k$  dans  $\wedge^k M$  qui, à  $(x_1, \dots, x_k)$ , associe  $\theta(g)(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(g)(x_k)$  se factorise à travers  $\wedge^k M$  pour donner, pour  $g$  dans  $G$  fixé, l'application

$$\begin{aligned} \wedge^k(\theta(g)) : \wedge^k M &\longrightarrow \wedge^k M \\ x_1 \wedge \dots \wedge x_k &\mapsto \theta(g)(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(g)(x_k). \end{aligned}$$

Le groupe des  $\wedge^k(\theta(g))$ , où  $g$  parcourt  $G$ , définit la puissance extérieure  $k$ -ième de la représentation  $\theta$ .

### Lemme 1.3.3

Soient  $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(M, \varphi)$  et  $\mu : G \longrightarrow \text{Aut}(N, \psi)$  deux représentations d'un groupe  $G$  dans des objets de  $\mathcal{Q}_A$ .

Alors on a

$$\wedge^k([\rho] + [\mu]) = \sum_{i=0}^k \wedge^i[\rho] \otimes \wedge^{k-i}[\mu].$$

PREUVE :

La preuve de ce lemme est une conséquence directe de la proposition précédente. ■

## 1.4 Rappels sur les $\lambda$ -anneaux

### Définition 1.4.1 ([23] p. 238-239)

Un pré- $\lambda$ -anneau  $R$  est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations  $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ , vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $\lambda^0(x) = 1$  et  $\lambda^1(x) = x$
- (ii)  $\lambda^k(x + y) = \sum_{i=0}^k \lambda^i(x) \lambda^{k-i}(y)$ .

En introduisant les séries formelles:  $\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x) t^i$  et  $\psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x))$ , on définit une suite d'opérations  $\psi^k : A \longrightarrow A$ ,  $k \geq 0$  (opérations d'Adams) par

$$\psi_{-t}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \psi^i(x) t^i.$$

On vérifie que les  $\psi^k$  sont des endomorphismes de groupes.

Pour  $k > 0$ , la formule  $\psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x))$ , donne

$$\psi^k - \psi^{k-1} \lambda^1 + \dots + (-1)^{k-1} \psi^1 \lambda^{k-1} + (-1)^k \lambda^k = 0,$$

qui peut servir de définition par récurrence des  $\psi^k$ .

**Remarque :**

Si  $x$  est de rang 1, c'est à dire  $\lambda_t(x) = 1 + tx$ , on obtient, par induction,  $\psi^k(x) = x^k$ .

### Définition 1.4.2

Un pré- $\lambda$ -anneau est un  $\lambda$ -anneau si les  $\lambda$ -opérations vérifient les propriétés suivantes,

- (i)  $\lambda_t(1) = 1 + t$ .
- (ii)  $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x), \lambda^1(y), \dots, \lambda^n(y))$
- (iii)  $\lambda^n(\lambda^m(x)) = P_{n,m}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{mn}(x))$ .

où  $P_n$  et  $P_{n,m}$  sont des polynômes universels à coefficients entiers.

### Exemples de $\lambda$ -anneau :

- (1) L'anneau  $\mathbb{Z}$  muni des  $\lambda$ -opérations suivantes:  $\lambda^i(n) = \binom{n}{i}$
- (2) L'anneau des classes de fibrés vectoriels, sur un espace topologique compact  $X$ , muni des opérations  $\lambda^i([\xi]) = [\wedge^i \xi]$ .
- (3) Le  $K_0(R)$  des classes de  $R$ -modules projectifs de type fini et, d'après [23], plus généralement les  $K_n(R)$ .

On définit, pour tout entier  $k$  positif, les opérations  $\lambda^k$  sur  $RQ_A(G)$  par :

$$\begin{aligned} RQ_A(G) &\longrightarrow RQ_A(G) \\ [V] &\longmapsto \lambda^k[V] := [\wedge^k V] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ainsi, il résulte de 1.3 que

### Proposition 1.4.3

Les opérations  $\lambda^k$  définies ci dessus munissent  $RQ_A(G)$  d'une structure de pré- $\lambda$ -anneau.

**Remarque:**

On ne sait pas si ce pré- $\lambda$ -anneau est un  $\lambda$ -anneau.

## 1.5 Un morphisme de $L_0(A)$ -algèbre de $RQ_A(G)$ dans $[BG, BO(A)^+]$

On commence d'abord par rappeler la construction + de Quillen

### 1.5.1 La construction + de Quillen

**Théorème 1.5.1 (Quillen)** ([26]p. 313)

Soit  $X$  un espace connexe pointé tel que le groupe fondamental  $\Pi = \pi_1(X, x_0)$  admet un sous groupe parfait normal  $N$ .

Alors il existe un espace  $X^+$  et une application continue pointée (unique à homotopie près)

$$i : X \longrightarrow X^+,$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(a) L'application  $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X^+, x_0)$  s'identifie à la projection  $\Pi \longrightarrow \Pi/N$ .

(b) Pour tout système de coefficients locaux  $\mathcal{L}$  sur  $X^+$ , l'application  $i$  induit un isomorphisme

$$H_*(X; i^* \mathcal{L}) \xrightarrow{\cong} H_*(X^+; \mathcal{L}).$$

**Remarque :**

L'espace  $X^+$  est obtenu à partir de  $X$  par attachement de cellules de dimension 2 et 3.

Soit  $O(A) := \bigcup_{n \geq 1} O_{n,n}(A)$  le groupe orthogonal infini, où  $O_{n,n}(A)$  est le groupe des isométries du module hyperbolique  $(A^{2n}, \varphi_{n,n})$  (cf. [19] p. 308) et la décomposition  $\varphi_{n+1,n+1} = \langle 1 \rangle \perp \varphi_{n,n} \perp \langle -1 \rangle$  permet d'avoir des inclusions  $O_{n,n}(A) \hookrightarrow O_{n+1,n+1}(A)$ . Le groupe élémentaire  $E(A) = [O(A), O(A)]$  est un sous groupe parfait normal de  $O(A)$  (cf. [1]). Donc, en appliquant la construction + de Quillen à l'espace  $BO(A)$ , on obtient l'espace  $BO(A)^+$  dont les groupes d'homotopies sont, par définition (cf. [17]), les groupes de L-théorie de  $A$  : pour  $n \geq 1$ ,

$$L_n(A) := \pi_n(BO(A)^+).$$

### 1.5.2 Structure de $L_0(A)$ -algèbre sur $[BG, BO(A)^+]$

**Définition 1.5.2** ([40] p. 34-35)

Un  $H$ -espace est un espace  $(X, x_0)$  pointé avec une application continue (multiplication)  $\mu : X \times X \longrightarrow X$  telle que les deux applications  $y \mapsto \mu(y, x_0)$  et  $y \mapsto \mu(x_0, y)$  sont homotopes à l'application identité de  $X$ .

**Exemple:** Tout groupe topologique.

Rappelons la structure de  $H$ -espace sur  $BO(A)^+$  :  
La somme directe dans  $GL(A)$ , définie par (cf. [26]p. 320),

$$(a \oplus a')_{ij} = \begin{cases} a_{kl} & \text{si } i = 2k - 1, j = 2l - 1 \\ a'_{kl} & \text{si } i = 2k, j = 2l \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $a$  et  $a'$  sont dans  $GL(A)$ , induit une somme directe sur le groupe orthogonal  $O(A)$ . Cette somme donne un morphisme de groupe  $O(A) \times O(A) \rightarrow O(A)$ , qui induit une structure de  $H$ -espace sur  $BO(A)^+$ .

Comme le produit tensoriel d'une forme  $\varphi_{p,q}$  par une forme  $\varphi_{p',q'}$  est une forme  $\varphi_{p'',q''}$ , soient  $f$  et  $g$  deux automorphismes respectifs de  $(A^{p+q}, \varphi_{p,q})$  et  $(A^{p'+q'}, \varphi_{p',q'})$ , on a,

$$\begin{aligned} \varphi_{p'',q''}((f \otimes g)(x \otimes y), (f \otimes g)(x' \otimes y')) &= \varphi_{p,q}(f(x), f(x')) \cdot \varphi_{p',q'}(g(y), g(y')) \\ &= \varphi_{p,q}(x, x') \cdot \varphi_{p',q'}(y, y') \\ &= \varphi_{p'',q''}(x \otimes y, x' \otimes y'), \end{aligned}$$

on obtient donc un morphisme  $O_{p,q}(A) \times O_{p',q'}(A) \rightarrow O_{p'',q''}(A)$ .

Soit  $[V]$  un élément de  $L_0(A)$ , on définit l'application  $f_{[V]}$  de  $O_{p,q}(A)$  dans  $O(A)$  par

$$\begin{aligned} f_{[V]} : O_{p,q}(A) &\rightarrow O(A) \\ \alpha &\mapsto id_{[V]} \otimes \alpha. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cette application est compatible avec les inclusions  $O_{p,q}(A) \hookrightarrow O_{p+1,q}(A)$  et  $O_{p,q}(A) \hookrightarrow O_{p,q+1}(A)$ . Donc induit une application notée aussi  $f_{[V]} : O(A) \rightarrow O(A)$ .

L'application  $f_{[V]}$  envoie le groupe élémentaire sur lui-même et par suite induit une application, définie à homotopie près,  $BO(A)^+ \rightarrow BO(A)^+$ .

On en déduit une structure de  $L_0(A)$ -algèbre sur  $[BG, BO(A)^+]$ .

### Définition 1.5.3

(1) On dira que deux morphismes de groupes  $f$  et  $f' : G_1 \rightarrow G_2$  sont conjugués s'ils sont conjugués au but, c'est à dire s'il existe un élément  $h \in G_2$  tel que, pour tout  $g \in G_1$  on ait  $f'(g) = hf(g)h^{-1}$ .

(2) Un sous groupe est dit quasi-parfait si son sous-groupe des commutateurs est parfait.

### Proposition 1.5.4 ([26] p. 317)

Soit  $G$  un groupe quasi-parfait et  $\Gamma$  un groupe quelconque.

Soient  $f$  et  $f'$  deux homomorphismes de  $\Gamma$  dans  $G$  conjugués par un élément  $h$  de  $[G, G]$ . Alors les applications continues  $f^+$  et  $f'^+$  de  $B\Gamma$  dans  $BG^+$  sont homotopes.

**Définition 1.5.5** ([26] p. 333)

Deux applications continues (pointées)  $f$  et  $g : X \rightarrow Y$  sont dites faiblement homotopes si pour tout compact  $K$  de  $X$ , les restrictions  $f|_K$  et  $g|_K$  sont homotopes (en tant qu'applications pointées).

**1.5.3 Construction d'un morphisme de  $RQ_A(G)$  dans  $[BG, BO(A)^+]$**

En interprétant une représentation  $\rho$  de  $G$  dans un objet  $E$  de  $Q_A$  comme un morphisme de  $G$  dans le groupe des isométries de  $E$ , on construit un morphisme de  $RQ_A(G)$  dans  $[BG, BO(A)^+]$  noté

$$\begin{array}{ccc} \tau : RQ_A(G) & \longrightarrow & [BG, BO(A)^+] \\ [\rho] & \longmapsto & \tau(E). \end{array}$$

Construction du morphisme:

On notera dans la suite  $A^{p,q}$  au lieu de  $(A^{p+q}, \varphi_{p,q})$ .

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(E, \varphi)$  une représentation du groupe  $G$  dans un objet  $(E, \varphi)$  de  $Q_A$ . L'objet  $(E, \varphi)$  est isomorphe à un  $A^{p,q}$ . Soit  $h' : (E, \varphi) \rightarrow A^{p',q'}$  un autre isomorphisme, ainsi  $A^{p,q}$  est isomorphe à  $A^{p',q'}$  par  $\psi := h' \circ h^{-1}$ .

On a, pour tout  $g$  de  $G$ , le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (E, \varphi) & \xrightarrow{\rho(g)} & (E, \varphi) \\ \downarrow h' \circ \rho(g) & \searrow & \downarrow h \\ A^{p',q'} & \xleftarrow{h' \circ h^{-1}} & A^{p,q} \end{array}$$

L'action de  $G$  sur  $(E, \varphi)$  donne une application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} : G & \longrightarrow & \text{Isom}(E) \\ g & \longmapsto & \mathcal{R}(g), \end{array}$$

et on obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Isom}(E) & \xrightarrow{\alpha} & O_{p,q}(A) \\
& \nearrow & \downarrow \text{id} & & \downarrow \tau \\
G & & & & \\
& \searrow & \text{Isom}(E) & \xrightarrow{\beta} & O_{p',q'}(A)
\end{array}$$

où  $\alpha$  est l'application qui, à  $f$  de  $\text{Isom}(E)$ , associe  $h \circ f \circ h^{-1}$ ,  $\beta$  est celle qui, à  $f$  de  $\text{Isom}(E)$ , associe  $h' \circ f \circ h'^{-1}$  et  $\tau$  est celle qui, à  $u$  de  $O_{p,q}(A)$ , associe l'élément  $\psi \circ u \circ \psi^{-1}$  de  $O_{p',q'}(A)$ .

Par application du théorème de prolongement des isométries de Witt, dans le cas des anneaux (cf. [22]), on peut prolonger  $\psi$  en une isométrie  $\bar{\psi}$  de  $A^{n,n}$ , où  $n = p+q = p'+q'$ . On obtient donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & O_{p,q}(A) & \longrightarrow & O_{n,n}(A) & \longrightarrow & O(A) \\
& \nearrow & \downarrow \psi(\cdot)\psi^{-1} & & \downarrow \bar{\psi}(\cdot)\bar{\psi}^{-1} & & \downarrow \bar{\psi}(\cdot)\bar{\psi}^{-1} \oplus \text{id} \\
G & & & & & & \\
& \searrow & O_{p',q'}(A) & \longrightarrow & O_{n,n}(A) & \longrightarrow & O(A)
\end{array}$$

On a donc pour tout  $g$  dans  $G$ ,

$$h' \circ \mathcal{R}(g) \circ h'^{-1} = \psi \circ h \circ \mathcal{R}(g) \circ h^{-1} \circ \psi^{-1}. \quad (1.4)$$

Le prolongement  $\bar{\psi}$  de  $\psi$  permet d'affirmer que les applications  $G \longrightarrow O_{p,q} \longrightarrow O_{n,n}(A)$  et  $G \longrightarrow O_{p',q'} \longrightarrow O_{n,n}(A)$  sont conjuguées par l'élément  $\bar{\psi}$  du groupe orthogonal  $O_{n,n}(A)$ .

L'égalité (1.4) vue dans  $O_{2n,2n}(A)$ , peut s'écrire matriciellement sous la forme,

$$\begin{pmatrix} h' \circ \mathcal{R}(g) \circ h'^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi} & 0 \\ 0 & \bar{\psi}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \circ \mathcal{R}(g) \circ h^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{\psi} \end{pmatrix}.$$

Donc, en remplaçant l'application  $\bar{\psi}$ , réalisant la conjugaison, par  $\bar{\psi} \oplus \bar{\psi}^{-1}$ , on peut supposer que  $\bar{\psi}$  est un élément du groupe élémentaire  $E_{2n,2n}(A) \subset O_{2n,2n}(A)$  (voir [1]).

Par suite, d'après la proposition (1.5.4), les applications  $G \longrightarrow O_{p,q}(A) \longrightarrow O_{n,n}(A) \longrightarrow O(A)$  et  $G \longrightarrow O_{p',q'}(A) \longrightarrow O_{n,n}(A) \longrightarrow O(A)$  induisent des applications homotopes de  $BG$  dans  $BO(A)^+$ . La classe d'homotopie de ces applications sera notée  $r(E)$ . Ainsi on définit l'application de  $RQ_A(G)$  dans  $[BG, BO(A)^+]$  sur les générateurs par :

$$\begin{array}{ccc} r : RQ_A(G) & \longrightarrow & [BG, BO(A)^+] \\ [\rho] & \longmapsto & r(E). \end{array}$$

## 1.6 Construction des applications $\lambda^k$ de $BO(A)^+$ dans $BO(A)^+$ , définies à homotopie faible près.

Dans cette section, on adapte, à la K-théorie orthogonale, la construction des  $\lambda$ -opérations en K-théorie (cf. [23]).

### Théorème 1.6.1

*Il existe des applications  $\lambda^k$ , définies à homotopie faible près, de  $BO(A)^+$  dans  $BO(A)^+$ , induisant des  $\lambda$ -opérations sur les groupes de L-théorie.*

PREUVE : (Cette démonstration est inspirée de [23]).

Soit  $G$  le groupe  $O_{n,n}(A)$  et  $[A_{id}^{n,n}]$  la classe de la représentation identité de  $G$  dans l'objet  $(A^{2n}, \varphi_{n,n})$  de  $Q_A$ .

Considérons la représentation dite triviale  $2n.1 : O_{n,n}(A) \longrightarrow O_{n,n}(A)$  qui envoie tout élément  $g$  de  $O_{n,n}(A)$  sur la matrice identité.

La différence, dans  $RQ_A(O_{n,n}(A))$ , des classes d'isométries  $[A_{id}^{n,n}]$  et  $[2n.1]$  que l'on note  $[A_{id}^{n,n}]^\sim := [A_{id}^{n,n}] - [2n.1]$  est compatible avec les inclusions  $i_n$  de  $O_{n,n}(A)$  dans  $O_{n+1,n+1}(A)$ , c'est à dire que le morphisme de restriction  $RQ_A(O_{n+1,n+1}(A)) \longrightarrow RQ_A(O_{n,n}(A))$  envoie la classe  $[A_{id}^{n+1,n+1}]^\sim$  sur  $[A_{id}^{n,n}]^\sim$ .

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} RQ_A(O_{n+1,n+1}(A)) & \xrightarrow{i_n^*} & RQ_A(O_{n,n}(A)) \\ \lambda^k \downarrow & & \lambda^k \downarrow \\ RQ_A(O_{n+1,n+1}(A)) & \xrightarrow{i_n^*} & RQ_A(O_{n,n}(A)), \end{array}$$

Les puissances extérieures des classes de représentations  $[A_{id}^{n,n}]$  et  $[2n.1]$  et la structure de pré- $\lambda$ -anneau nous donnent l'égalité  $\lambda^k i_n^*([A_{id}^{n,n}]^\sim) = i_n^* \lambda^k([A_{id}^{n+1,n+1}]^\sim)$ , c'est à dire la commutativité du diagramme précédent.

Soit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 RQ_A(O_{n+1,n+1}(A)) & \xrightarrow{\tau} & [BO_{n+1,n+1}(A), BO(A)^+] \\
 \downarrow i_n & & \downarrow \tau \\
 RQ_A(O_{n,n}(A)) & \xrightarrow{\tau} & [BO_{n,n}(A), BO(A)^+],
 \end{array}$$

D'après la construction du morphisme  $\tau$  et du fait que le morphisme de restriction envoie  $[A_{id}^{n+1,n+1}]^\sim$  sur  $[A_{id}^{n,n}]^\sim$ , la restriction de  $\tau(\lambda^k[A_{id}^{n+1,n+1}]^\sim)$  à  $BO_{n,n}(A)$  est  $\tau(\lambda^k[A_{id}^{n,n}]^\sim)$ .

Soit donc  $\lambda_{n,n}^k$  une application continue dans la classe d'homotopie  $\tau(\lambda^k[A_{id}^{n,n}]^\sim)$ , alors le triangle suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc}
 BO_{n,n}(A) & \xrightarrow{\lambda_{n,n}^k} & BO(A)^+ \\
 \searrow i_n & \nearrow \lambda_{n+1,n+1}^k & \\
 & & BO_{n+1,n+1}(A)
 \end{array}$$

On a ainsi les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccccccc}
 BO_{1,1}(A) & \longrightarrow & BO_{2,2}(A) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & BO_{n,n}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & \searrow \lambda_{1,1}^k & \downarrow \lambda_{2,2}^k & & \nearrow \lambda_{n,n}^k & & \nearrow & & \\
 & & & & & & & & BO(A)^+ .
 \end{array}$$

La suite des cw-complexes  $BO_{1,1}(A) \subset BO_{2,2}(A) \subset \dots \subset BO_{n,n}(A) \subset \dots$  a pour réunion le cw-complexe  $BO(A)$ .

Un argument de cofibration fermée (cf. [26]p. 333), permet de remplacer les applications  $\lambda_{n,n}^k$  par des applications homotopes de sorte que les triangles du diagramme ci-dessus soient strictement commutatifs. Ce qui donne une application continue, notée  $\lambda^k : BO(A) \rightarrow BO(A)^+$ , telle que pour tout entier  $n$  strictement positif, la restriction de  $\lambda^k$  à  $BO_{n,n}(A)$  est l'application  $\lambda_{n,n}^k$ .

En d'autres termes le triangle

$$\begin{array}{ccc}
 BO_{n,n}(A) & \xrightarrow{\lambda_{n,n}^k} & BO(A)^+ \\
 \searrow & \nearrow \lambda^k & \\
 & & BO(A)
 \end{array}$$

est commutatif.

Le groupe  $\pi_1(BO(A)^+)$  est abélien, donc l'image par  $\pi_1(\lambda^k)$  du sous groupe  $E(A)$ , de  $O(A)$ , dans  $\pi_1(BO(A)^+)$  est le sous-groupe  $\{0\}$ . Ainsi l'application  $\lambda^k : BO(A) \rightarrow BO(A)^+$  se factorise à travers  $BO(A)^+$  :

$$\begin{array}{ccc} BO(A) & \xrightarrow{\lambda^k} & BO(A)^+ \\ & \searrow i & \nearrow \lambda^k \\ & & BO(A)^+. \end{array}$$

Pour tout entier  $n$ , la restriction de  $\lambda^k$  à  $BO_{n,n}(A)^+$  est bien définie. Or pour tout compact  $K$  de  $BO(A)^+$ , il existe un entier  $m$  tel que  $K \subset BO_{m,m}(A)^+$ . Donc  $\lambda^k$  est définie à homotopie faible près. ■

On définit les opérations  $\lambda^k$  sur les groupes de L-théorie comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \lambda^k : L_n(A) = [S^n, BO(A)^+] & \longrightarrow & L_n(A) \\ [f] & \mapsto & [\lambda^k \circ f], \end{array} \quad (1.5)$$

où  $[S^n, BO(A)^+]$  désigne les classes d'homotopies d'applications pointées de  $S^n$  dans  $BO(A)^+$ .

Les propriétés des  $\lambda^k$  induisant la structure de pré- $\lambda$ -anneau sur la L-théorie se déduisent via l'homomorphisme  $r$ , puisque  $RQ_A(G)$  est un pré- $\lambda$ -anneau.

On obtient aussi des opérations  $\lambda^k$  sur  $[BG, BO(A)^+]$  par composition

$$\begin{array}{ccc} \lambda^k : [BG, BO(A)^+] & \longrightarrow & [BG, BO(A)^+] \\ [f] & \mapsto & [\lambda^k \circ f]. \end{array}$$

### Définition 1.6.2

Soit  $K$  un pré- $\lambda$ -anneau. On dira qu'une  $K$ -algèbre  $R$  est une  $K$ -pré- $\lambda$ -algèbre si  $R$  est munie d'une suite d'opérations  $\{\lambda^k\}_{k>0}$  telles que  $K \times R$  muni des lois suivantes est un pré- $\lambda$ -anneau:

$$\begin{aligned} (a, u) + (a', u') &= (a + a', u + u') \\ (a, u) \cdot (a', u') &= (aa', a.u' + a'.u + u.u') \\ \lambda^k(a, u) &= (\lambda^k(a), \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i(a) \cdot \lambda^{k-i}(u)). \end{aligned}$$

Le foncteur  $RQ_A(-)$  et le morphisme  $r$  donnent, pour  $n, m > 0$ , le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} RQ_A(O_{n,n}(A) \times O_{m,m}(A)) & \xrightarrow{u} & RQ_A(O_{n,n}(A)) \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ [B(O_{n,n}(A) \times O_{m,m}(A)), BO(A)^+] & \longrightarrow & [BO_{n,n}(A), BO(A)^+], \end{array}$$

où  $u$  est le morphisme provenant de

$$\begin{aligned} O_{n,n}(A) &\longrightarrow O_{n,n}(A) \times O_{m,m}(A) \\ \alpha &\longmapsto id_{[V]} \otimes \alpha. \end{aligned}$$

Soit  $X$  un espace topologique, puisque la structure de  $L_0(A)$ -algèbre sur  $L(X, A) := [X, BO(A)^+]$  est obtenue par composition, il suffit de montrer que  $L(BO(A)^+, A) = [BO(A)^+, BO(A)^+]$  est une  $L_0(A)$ -pré- $\lambda$ -algèbre. Le morphisme  $r$  induit,

$$\lim_{\leftarrow} RQ_A(O_{n,n}(A)) \rightarrow \lim_{\leftarrow} [BO_{n,n}(A), BO(A)^+] = [BO(A), BO(A)^+] = [BO(A)^+, BO(A)^+].$$

La vérification, par exemple, de la dernière formule de la définition 1.6.2 sur  $L_0(A) \times [BO(A)^+, BO(A)^+]$  se ramène à une vérification sur  $RQ_A(O_{n,n}(A) \times O_{m,m}(A))$ .

### Définition 1.6.3

Un  $H'$ -espace (ou co- $H$ -espace) est un espace  $X$  muni d'une application continue (co-multiplication)  $c : X \longrightarrow X \vee X$  tel que les applications  $p_2 \circ i \circ c$  et  $p_1 \circ i \circ c$  sont homotopes à l'identité, où  $i : X \vee X \longrightarrow X \times X$  est l'inclusion,  $p_1$  et  $p_2$  sont les deux projections et  $X \vee X$  est l'union disjointe de deux copies de  $X$  avec l'identification des points bases ( $X \vee X = X \amalg X/x_0 \sim x_0$ ).

### Lemme 1.6.4

Si  $X$  est un  $H'$ -espace alors la structure multiplicative de  $L(X, A)$  est triviale.

PREUVE :

Elle est identique à celle de ([23] p. 242) en remplaçant l'espace  $BGL(A)^+$  par  $BO(A)^+$ . ■

Remarque:

Quand la structure multiplicative de  $L(X, A)$  est triviale, alors  $\lambda^k : L(X, A) \longrightarrow L(X, A)$  est un morphisme de groupe, puisqu'on obtient  $\lambda^k(u + v) = \lambda^k(u) + \lambda^k(v)$ . C'est le cas de la L-théorie puisque  $X = S^n$  est un  $H'$ -espace comme toute suspension.

## 1.7 Lien avec les $\lambda$ -opérations en K-théorie algébrique

### 1.7.1 Foncteur oublié

Soit  $G$  un groupe et soit  $\mathcal{R}_A(G)$  l'anneau des représentations du groupe  $G$  dans la catégorie  $\mathcal{P}_A$  des  $A$ -modules libres.

Considérons une représentation  $\rho$  de  $G$  dans un objet  $(M, \varphi)$  de  $Q_A$ ,  $\rho : G \longrightarrow Aut_{Q_A}(M, \varphi)$ .

La composée de  $\rho$  avec le morphisme naturel  $Aut_{Q_A}(M, \varphi) \xrightarrow{f} Aut_{P_A}(M)$  est la représentation  $f \circ \rho : G \rightarrow Aut_{P_A}(M)$ .

On obtient donc un morphisme de  $RQ_A(G)$  dans  $\mathcal{R}_A(G)$

$$\begin{array}{ccc} RQ_A(G) & \longrightarrow & \mathcal{R}_A(G) \\ [\rho] & \mapsto & [f \circ \rho] \end{array}$$

Puisque la formule  $\lambda^k(M \oplus N) \cong \sum_{i=0}^{i=k} \lambda^i M \otimes \lambda^{k-i} N$  est vraie dans  $RQ_A(G)$  et dans  $\mathcal{R}_A(G)$ , le morphisme précédent est compatible avec la structure de  $\lambda$ -opération. En d'autres termes, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} RQ_A(G) & \xrightarrow{F} & \mathcal{R}_A(G) \\ \lambda^i \downarrow & & \downarrow \lambda^i \\ RQ_A(G) & \xrightarrow{F} & \mathcal{R}_A(G), \end{array}$$

est commutatif.

L'inclusion de  $O(A)$  dans  $GL(A)$  donne, d'autre part, une application  $BO(A)^+ \rightarrow BGL(A)^+$  et par suite une application

$$\begin{array}{ccc} [BG, BO(A)^+] & \longrightarrow & [BG, BGL(A)^+] \\ [f] & \mapsto & [u \circ f]. \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} L_n(A) & \xrightarrow{F} & K_n(A) \\ \lambda^i \downarrow & & \downarrow \lambda^i \\ L_n(A) & \xrightarrow{F} & K_n(A). \end{array}$$

D'où la

### Proposition 1.7.1

Le foncteur oubli donne un morphisme de  $(L_0, K_0, F)$ -pré- $\lambda$ -algèbre  $L_n(A) \xrightarrow{F} K_n(A)$ .

Par suite, on obtient une structure de pré- $\lambda$ -anneau sur les co-groupes de Witt  $W'_n(A)$ , où  $W'_n(A)$  est le noyau de du morphisme  $L_n(A) \rightarrow K_n(A)$  (cf. [14]).

## 1.7.2 Foncteur hyperbolique

Soit  $G$  un groupe.

Le foncteur hyperbolique qui va de la catégorie  $\mathcal{P}_A$  dans la catégorie  $\mathcal{Q}_A$  et qui associe à tout objet  $A^n$  le module hyperbolique  $(A^{2n}, \varphi_{n,n})$  donne un morphisme de l'anneau des représentations  $R_A(G)$  dans celui  $RQ_A(G)$ .

Plus précisément, on a un morphisme :

$$\begin{aligned} H : \mathcal{P}_A &\longrightarrow \mathcal{Q}_A \\ [M] &\mapsto H(M) := (M \oplus M^*, B_M), \end{aligned}$$

où la forme hyperbolique  $B_M$  est définie par :  $B_M((x, f); (y, g)) = f(y) + g(x)$ .

Soit  $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{P}_A}(M)$  une représentation du groupe  $G$  dans un objet  $M$  de  $\mathcal{P}_A$ .

La composée de  $\rho$  avec le morphisme  $\text{Aut}_{\mathcal{P}_A}(M) \longrightarrow \text{Aut}_{\mathcal{Q}_A}(M \oplus M^*, B_M)$  permet de définir un morphisme de  $\mathcal{R}_A(G)$  dans  $RQ_A(G)$ .

Le problème de la parité des dimensions surgit là aussi, en effet :

En dimension finie, on a un isomorphisme  $(\wedge^i M)^* \cong \wedge^i(M^*)$ .

Ainsi on obtient,  $\wedge^{2k+1}(H(M)) = H\left(\sum_{0 \leq i \leq k} \wedge^i M \otimes \wedge^{2k+1-i} M^*\right)$ .

Donc les puissances extérieures impaires du module  $H(M)$  sont aussi de la forme  $H(N)$  pour certains modules  $N$ .

Quant aux puissances extérieures paires,  $\wedge^{2k}(H(M))$  n'est pas de la forme  $H(N)$ .

En effet,  $\wedge^{2k}(H(M)) = \sum_{i+j=2k} \wedge^i M \otimes \wedge^j M^*$ .

Dans cette somme, le module  $\wedge^k M \otimes \wedge^k M^*$  est auto-dual, et on a,

$$\wedge^{2k}(H(M) = M \oplus M^*) = H\left(\sum_{0 \leq i \leq k-1} \wedge^i M \otimes \wedge^{2k-i} M^*\right) \oplus (\wedge^k M \otimes \wedge^k M^*).$$

Par exemple,

$$\wedge^4(H(M) = M \oplus M^*) = \wedge^4 M \oplus (\wedge^3 M \otimes M^*) \oplus (\wedge^2 M \otimes \wedge^2 M^*) \oplus (M \otimes \wedge^3 M^*) \oplus \wedge^4 M^*.$$

On remarque que, dans cette somme,  $\wedge^2 M \otimes \wedge^2 M^*$  est auto-duale.



# Chapitre 2

## Modèle de Volodin en L-théorie

### 2.1 Introduction

Commençons par rappeler le théorème de Goodwillie dans un cas particulier,

**Théorème 2.1.1** [13]

*Soit  $A$  un anneau et  $I$  un idéal nilpotent de  $A$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$K_n(A, I) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_{n-1}(A, I) \otimes \mathbb{Q},$$

où  $HC_*(A, I)$  est l'homologie cyclique relative de la paire  $(A, I)$  (cf. [29] p. 59).

Dans ce chapitre, on adapte au cas hermitien, la preuve de ce théorème donnée par C. Ogle et Ch. Weibel dans [34]: la K-théorie est remplacée par la L-théorie et l'homologie cyclique par l'homologie diédrale.

Rappelons que ce résultat a été démontré indépendamment par Song [39] et par Lodder [30].

Signalons aussi que, dans la comparaison L-théorie et homologie diédral, Gurrola [15], en s'inspirant des travaux de C. Kassel dans le cadre des théories bivariantes, introduit des groupes de L-théorie bivariante, une théorie de cohomologie quaternionique bivariante et montre l'existence d'un caractère de Chern les reliant.

Les deux clés qu'on va utiliser dans la démonstration de ce théorème sont le modèle de Volodin relatif en L-théorie et la relation, donnée par la théorie de Malcev, entre  $\mathbb{Q}$ -algèbres de Lie nilpotentes et groupes nilpotents univariants divisibles.

## 2.2 Homologie diédrale

Rappelons d'abord l'homologie de Hochschild ainsi que l'homologie cyclique :

### 2.2.1 Homologie de Hochschild

Soit  $k$  un anneau commutatif unitaire et  $A$  une  $k$ -algèbre.

Un bimodule sur  $A$  est un  $k$ -module  $M$  sur lequel  $A$  opère à gauche et à droite de sorte que :

$$(am)a' = a(ma') \text{ pour tout } a, a' \in A \text{ et } m \in M.$$

**Définition 2.2.1** (cf. [29])

Soient  $A$  une  $k$ -algèbre associative unitaire et  $P$  un  $A$ -bimodule.

L'homologie de Hochschild de  $A$  à coefficients dans  $P$  est donnée par l'homologie du complexe suivant:

$$\dots \rightarrow C_n(A, P) \xrightarrow{b_n} C_{n-1}(A, P) \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1(A, P) \longrightarrow C_0(A, P) \rightarrow 0.$$

Où

$$C_n(A, P) = P \otimes A^{\otimes n}, \quad n \geq 1 \text{ et } C_0(A, P) = P$$

et

$$\begin{aligned} C_n(A, P) &\xrightarrow{b_n} C_{n-1}(A, P) \\ (p, a_1, \dots, a_n) &\longmapsto (pa_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (p, a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &\quad + (-1)^n (a_n p, a_1, \dots, a_{n-1}). \end{aligned}$$

On notera  $H_*(A, P)$  l'homologie de ce complexe.

Si  $P = A$ , on pose  $HH_*(A) = H_*(A, A)$  et on l'appelle l'homologie de Hochschild de  $A$ .

### 2.2.2 Homologie cyclique

L'homologie cyclique est une variation de l'homologie de Hochschild utilisant l'action du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  sur  $C_n(A, A)$ .

Rappelons brièvement, quand  $k$  est de caractéristique nulle (cf. [25]), la définition pour une  $k$ -algèbre associative unitaire  $A$ .

Le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  opère sur  $C_n(A, A)$  par:

$$t(a_0, \dots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Où  $t$  est un générateur de  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ .

Cette action est compatible avec la différentielle  $b$ , ( $bt = tb$ ), elle permet donc de

considérer le complexe quotient des coinvariants  $(C_*(A, A)/(1-t), b)$  c'est à dire  $(A^{\otimes(n+1)}/(1-t), b)$ .

L'homologie cyclique de A est :

$$HC_*(A) = H_*(A^{\otimes(n+1)}/(1-t), b).$$

### 2.2.3 Cas d'une involution. Module involutif

#### Définition 2.2.2

Soient  $A$  une  $k$ -algèbre associative unitaire et  $P$  un  $A$ -bimodule. On dira que  $P$  est un  $A$ -bimodule involutif si:

- (i)  $A$  est munie d'une involution  $(a \mapsto \bar{a})$  qui est un anti-automorphisme d'algèbre unitaire ( $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ ).
- (ii)  $P$  est muni d'une involution  $(p \mapsto \bar{p})$ .
- (iii) Pour tout  $a$  dans  $A$  et pour tout  $p$  dans  $P$ , on a:  $\overline{pa} = \bar{a}\bar{p}$  (ce qui est équivalent à  $\overline{ap} = \bar{p}\bar{a}$ ).

#### Exemple 1:

Une algèbre  $A$  munie d'une involution vérifiant (i) est un  $A$ -bimodule involutif.

#### Exemple 2:

Si  $A$  est une algèbre commutative et  $P$  un  $A$ -bimodule symétrique (i.e  $[A, P] = 0$ ), alors  $P$  est un  $A$ -bimodule involutif pour les involutions triviales.

Soit  $P$  un  $A$ -bimodule involutif. On munit le complexe  $(C_*(A, P), b)$  d'une involution  $u$  par:

$$u(p, a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n(n+1)/2}(\bar{p}, \bar{a}_n, \dots, \bar{a}_1).$$

On a le lemme suivant dû à Loday (cf. [24]) lorsque  $P = A$ .

#### Lemme 2.2.3

L'involution  $u$  commute avec la différentielle du complexe  $(C_*(A, A), b)$ .

PREUVE :

Voir [24] p. 121. ■

#### Conséquences:

Puisque 2 est inversible et la caractéristique de  $k$  est nulle,  $(C_*(A, P), b)$  se décompose en une somme de deux complexes  $(C_*^+(A, P), b)$  et  $(C_*^-(A, P), b)$  où

$$C_*^+(A, P), b) = \{x \in C_*(A, P) | u(x) = x\}$$

$$C_*^-(A, P, b) = \{x \in C_*(A, P) | u(x) = -x\}$$

Les homologies correspondantes sont respectivement notées  $H_*(A, P)^+$  et  $H_*(A, P)^-$ . Elles sont respectivement appelées partie positive et partie négative de l'homologie de Hochschild de  $A$  à coefficients dans  $P$ .

Comme le corps  $k$  est de caractéristique nulle, on a un isomorphisme canonique entre le complexe des coinvariants et celui des invariants.

Il en résulte que les groupes  $H_*(A, P)^+$  et  $H_*(A, P)^-$  sont également donnés par  $(C_*(A, P)/(1 - u), b)$  et  $(C_*(A, P)/(1 + u), b)$  respectivement.

## 2.2.4 Homologie diédrale

L'homologie diédrale est une notion analogue à celle de l'homologie cyclique où le groupe cyclique est remplacé par le groupe diédral, elle est due à Loday (cf. [24]). On suppose que l'algèbre  $A$  est munie d'une involution qui est un anti-automorphisme d'algèbre unitaire.

### Définition 2.2.4

Le groupe diédral  $D_n$  d'ordre  $2n$ , est le groupe engendré par deux générateurs  $t$  et  $u$  avec les relations:

$$t^n = u^2 = 1 \quad ; \quad utu^{-1} = t^{-1}$$

C'est le groupe des rotations et des symétries du plan qui conservent un polygone régulier à  $n$  sommets. Il s'identifie au sous-groupe de  $S_n$  engendré par la permutation circulaire  $t = (1 \ 2 \dots \ n)$  et par  $u = (2 \ n)(3 \ (n-1)) \dots$  (c'est la composée des transpositions  $(k \ l)$  où  $k + l = n + 2$  et  $k, l \in \{2, 3, \dots, n\}$ ).

$D_{n+1}$  opère sur  $A^{\otimes(n+1)}$  par:

$$\begin{cases} t(a_0, \dots, a_n) = (-1)^n(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}) \\ u(a_0, \dots, a_n) = (-1)^{n(n+1)/2}(\bar{a}_0, \bar{a}_n, \dots, \bar{a}_1) \end{cases}$$

L'homologie diédrale de  $A$  est définie comme l'homologie du complexe  $(C_*^{t,u}(A), b)$  où

$$C_n^{t,u}(A) = A^{\otimes(n+1)} / (1 - t, 1 + u)$$

et

$$b : C_{n+1}^{t,u}(A) \rightarrow C_n^{t,u}(A)$$

$$(a_0, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i(a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + (-1)^n(a_n a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

On note cette homologie par  $HD_*(A)$ .

**Remarque:**

On aurait pu définir l'homologie diédrale, en procédant comme au paragraphe précédent, en définissant l'involution  $u$  sur le complexe calculant l'homologie cyclique et obtenir  $HD_*(A)$  comme la partie négative de  $HC_*(A)$  par rapport à l'involution  $u$  (voir [24]).

**Exemple:**

Si  $A$  est une algèbre lisse, Loday [24] a calculé l'homologie diédrale de  $A$  en termes de cohomologie de De Rham et de formes différentielles. Elle est donnée par:

$$\begin{cases} HD_{2n}(A) = H_{DR}^{2n-2}(A) \oplus H_{DR}^{2n-6}(A) \oplus \dots \\ HD_{2n+1}(A) = \Omega_A^{2n+1}/d\Omega_A^{2n} \oplus H_{DR}^{2n-3}(A) \oplus H_{DR}^{2n-7}(A) \oplus \dots \end{cases}$$

### 2.3 L-théorie relative

Soit  $A$  un anneau muni d'une involution ( $\overline{ab} = \overline{b} \overline{a}$ ),  $I$  un idéal stable par l'involution et  $\varepsilon$  un élément du centre de  $A$  tel que  $\varepsilon \overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon} \varepsilon = 1$ . Rappelons que le groupe orthogonal  $O_{n,n}(A)$  est formé des isométries du module  $\varepsilon$ -quadratique

$(A^n \oplus A^n, X_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix})$ . Par définition, le groupe orthogonal infini est la limite inductive des  $O_{n,n}(A)$  (cf. [19]).

La surjection  $A \rightarrow A/I$  induit un homomorphisme de groupes  ${}_\varepsilon O(A) \rightarrow {}_\varepsilon O(A/I)$  dont on note l'image par  ${}_\varepsilon \overline{O}(A/I)$ .

La fibre homotopique de l'application induite  $B {}_\varepsilon O(A)^+ \rightarrow B {}_\varepsilon \overline{O}(A/I)^+$  est notée  ${}_\varepsilon F(A, I)$ .

On définit les groupes de  $L$ -théorie relative de la paire  $(A, I)$  par :

$${}_\varepsilon L_n(A, I) := \pi_n({}_\varepsilon F(A, I)) \quad \text{pour } n \geq 1$$

Ces groupes s'insèrent dans une suite exacte (longue suite exacte d'homotopie d'une fibration homotopique)

$$\dots \rightarrow {}_\varepsilon L_n(A, I) \rightarrow {}_\varepsilon L_n(A) \rightarrow {}_\varepsilon L_n(A/I) \rightarrow {}_\varepsilon L_{n-1}(A, I) \rightarrow \dots$$

Pour  ${}_\varepsilon L_0(A)$ , voir la définition dans le chapitre précédent ou (cf. [19]).

## 2.4 Modèle de Volodin en L-théorie

### 2.4.1 Modèle de Volodin absolu

**Définition 2.4.1** ([42]p. 13-14)

Soit  $G$  un groupe et  $\{G_k\}_k$  une famille de sous groupes.

(1) On note  $V(G, \{G_k\}_k)$  l'ensemble simplicial dont les sommets sont les éléments de  $G$  et  $g_0, \dots, g_p$  ( $g_i \neq g_j$  pour  $i \neq j$ ) forment un  $p$ -simplexe si et seulement si tous les  $g_i \cdot g_j^{-1}$  appartiennent à un même  $G_k$  pour un certain  $k$ .

$G$  opère sur  $V(G, \{G_k\}_k)$  par action diagonale:  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$ .

Soit  $W(G, \{G_k\}_k)$  la réalisation géométrique de  $V(G, \{G_k\}_k)$ .

(2) On définit le modèle de Volodin  $X(\{G_k\}_k)$  par :

$$X(\{G_k\}_k) = W(G, \{G_k\}_k)/G = \bigcup_k BG_k \subset BG.$$

On définit les sous groupes triangulaires, qu'on note  ${}_\epsilon T_{n,n}^\sigma(A)$ , du groupe orthogonal  ${}_\epsilon O_{n,n}(A)$  comme suit :

Soit  $\sigma$  un ordre de  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\} := \underline{2n}$

$${}_\epsilon T_{n,n}^\sigma(A) := T_{2n}^\sigma(A) \cap {}_\epsilon O_{n,n}(A),$$

Où

$$T_{2n}^\sigma(A) = \left\{ (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n} \in GL_{2n}(A) \mid \alpha_{i,i} = 1 \text{ et } \alpha_{i,j} = 0 \text{ si } i \not\prec_\sigma j \right\}$$

représentent les sous-groupes triangulaires, relatif à l'ordre  $\sigma$ , du groupe linéaire.

Dans le cas où l'ordre  $\sigma$  est l'ordre classique  $1 < 2 < \dots < 2n$ ,  $T_{2n}^\sigma(A)$  représentent les matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

**Définition 2.4.2**

La L-théorie de Volodin est définie par :

$${}_\epsilon L_i^V(A) = \pi_{i-1}(\varinjlim |V({}_\epsilon O_{n,n}(A), \{{}_\epsilon T_{n,n}^\sigma\}_\sigma)|) = \varinjlim \pi_{i-1}(|V({}_\epsilon O_{n,n}(A), \{{}_\epsilon T_{n,n}^\sigma\}_\sigma)|)$$

où

$$|V({}_\epsilon O_{n,n}(A), \{{}_\epsilon T_{n,n}^\sigma\}_\sigma)| := \text{réalisation géométrique de } V({}_\epsilon O_{n,n}(A), \{{}_\epsilon T_{n,n}^\sigma\}_\sigma).$$

On note

$${}_{\varepsilon}X_{n,n}(A) = \bigcup_{\sigma} B({}_{\varepsilon}T_{n,n}^{\sigma}(A))$$

et

$${}_{\varepsilon}X(A) = \varinjlim {}_{\varepsilon}X_{n,n}(A).$$

Song [38] a démontré que  ${}_{\varepsilon}X(A)$  est caractérisé (à équivalence d'homotopie près) par :

- (a) Il a le type d'homotopie d'un cw-complexe.
  - (b) Il est connexe et son groupe fondamental est  ${}_{\varepsilon}St(A)$ .
  - (c) C'est un espace simple en dimension supérieure à 2, i.e.,  $\pi_1({}_{\varepsilon}X(A))$  opère trivialement sur  $\pi_i({}_{\varepsilon}X(A))$  pour  $i \geq 2$ .
  - (d) Il est acyclique,
- et de plus,

$${}_{\varepsilon}X(A) \longrightarrow B_{\varepsilon}O(A) \longrightarrow B_{\varepsilon}O(A)^+$$

est une fibration homotopique.

Ce qui donne, par la suite exacte d'homotopie de fibration, que la L-théorie de Karoubi est équivalente à la L-théorie de Volodin :

$${}_{\varepsilon}L_n^V(A) := \pi_{n-1}({}_{\varepsilon}X(A)) \cong \pi_n(B_{\varepsilon}O(A)^+) = {}_{\varepsilon}L_n(A) \text{ pour } n > 1.$$

## 2.4.2 Modèle de Volodin relatif

On adapte au cas  $\varepsilon$ -hermitien le modèle relatif de Ogle et Weibel (cf [34]). Soit  $I$  un idéal de  $A$  stable par l'involution, on définit les groupes triangulaires relatifs hermitiens par:

$${}_{\varepsilon}T_{n,n}^{\sigma}(A, I) := T_{2n}(A, I) \cap {}_{\varepsilon}O_{n,n}(A)$$

Où

$$T_{2n}(A, I) = \left\{ I_{2n} + (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 2n} \in GL_{2n}(A) \mid \alpha_{i,j} \in I \text{ pour } i \neq j \right\},$$

où  $I_{2n}$  est la matrice identité en dimension  $2n$ .

Pour  $n$  fixé, on définit:

$${}_{\varepsilon}X_{n,n}(A, I) := \bigcup_{\sigma} B({}_{\varepsilon}T_{n,n}^{\sigma}(A, I)).$$

Soit

$$\begin{aligned} {}_{\varepsilon}T^{\sigma}(A, I) &= \varinjlim {}_{\varepsilon}T_{n,n}^{\sigma}(A, I) \\ {}_{\varepsilon}X(A, I) &:= \bigcup_{\sigma} B({}_{\varepsilon}T^{\sigma}(A, I)) \end{aligned}$$

**Lemme 2.4.3**

*Le diagramme suivant est cartésien à homotopie près.*

$$\begin{array}{ccc} \epsilon X(A, I) & \longrightarrow & B_\epsilon O(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \epsilon X(A/I) & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I) \end{array}$$

PREUVE :

Un  $n$ -simplexe  $(g_0, g_1, \dots, g_n)$  dans  $B_\epsilon O(A)$  s'envoie dans un  $B_\epsilon T^\sigma(A/I) \subset B_\epsilon \overline{O}(A/I)$ , pour un certain ordre  $\sigma$  si et seulement si, pour tout  $i$ ,  $g_i \in \epsilon T^\sigma(A, I)$ .

Donc le simplexe  $(g_0, g_1, \dots, g_n)$  est dans  $B_\epsilon T^\sigma(A, I)$ .

et par suite ce simplexe est dans  $\epsilon X(A, I)$ . ■

**Lemme 2.4.4**

$$\epsilon X(A, I) \longrightarrow B_\epsilon O(A) \longrightarrow B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$$

*est une fibration homotopique.*

PREUVE :

Maintenant considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \epsilon X(A, I) & \longrightarrow & B_\epsilon O(A) & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \epsilon X(A/I) & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I) & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+ \end{array}$$

le carré de gauche est cartésien à homotopie près (lemme 2.4.3) .

La fibre homotopique de  $\epsilon X(A/I) \longrightarrow B_\epsilon \overline{O}(A/I)$  est l'espace,  $\Omega B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$ , des lacets de  $B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$ .

Donc la fibre homotopique de l'application  $\epsilon X(A, I) \longrightarrow B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$  est l'espace  $\Omega B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$  .

Par suite  $\epsilon X(A, I) \longrightarrow B_\epsilon O(A) \longrightarrow B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$  est une fibration homotopique. ■

**Lemme 2.4.5**

$$\epsilon X(A) \longrightarrow \epsilon X(A, I) \longrightarrow \epsilon F(A, I)$$

*est une fibration homotopique.*

PREUVE :

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 {}_\epsilon X(A) & \longrightarrow & {}_\epsilon X(A, I) & \longrightarrow & {}_\epsilon F(A, I) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 {}_\epsilon X(A) & \longrightarrow & B_\epsilon O(A) & \longrightarrow & B_\epsilon O(R)^+ \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 * & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+ & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+
 \end{array}$$

la verticale du milieu est une fibration homotopique (lemme 2.4.4), celle de droite aussi (par définition de  ${}_\epsilon F(A, I)$ ).

Donc  ${}_\epsilon X(A, I) \rightarrow B_\epsilon O(A)$  et  ${}_\epsilon F(A, I) \rightarrow B_\epsilon O(A)^+$ , ont la même fibre homotopique qui est l'espace des lacets  $\Omega B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$ .

Par suite le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 {}_\epsilon X(A, I) & \longrightarrow & {}_\epsilon F(A, I) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B_\epsilon O(A) & \longrightarrow & B_\epsilon O(A)^+
 \end{array}$$

est cartésien à homotopie près.

donc  ${}_\epsilon X(A, I) \rightarrow {}_\epsilon F(A, I)$  a la même fibre homotopique,  ${}_\epsilon X(A)$ , que  $B_\epsilon O(A) \rightarrow B_\epsilon O(A)^+$ .

d'où:

$${}_\epsilon X(A) \longrightarrow {}_\epsilon X(A, I) \longrightarrow {}_\epsilon F(A, I)$$

est une fibration homotopique. ■

**Lemme 2.4.6**

$${}_\epsilon X(A, I) \longrightarrow {}_\epsilon F(A, I)$$

*induit un isomorphisme en homologie.*

PREUVE :

Considérons le diagramme de fibrations homotopiques :

$$\begin{array}{ccccc}
 {}_\epsilon X(A, I) & \longrightarrow & B_\epsilon O(A) & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+ \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 {}_\epsilon F(A, I) & \longrightarrow & B_\epsilon O(A)^+ & \longrightarrow & B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+,
 \end{array}$$

On a :  $B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+$  est un  $H$ -espace, donc  $\pi_1(B_\epsilon \overline{O}(A/I)^+)$  opère trivialement sur l'homologie de  ${}_\epsilon X(A, I)$  et sur l'homologie de  ${}_\epsilon F(A, I)$ .

Par la propriété fondamentale de la construction plus :  $H_*(B {}_\epsilon O(A)) \cong H_*(B {}_\epsilon O(A)^+)$ . Ainsi le théorème de comparaison des suites spectrales de Zeeman (cf. [42]) permet de conclure. ■

**Lemme 2.4.7**

*L'image de  ${}_\epsilon St(A) = \pi_1({}_\epsilon X(A)) \longrightarrow \pi_1({}_\epsilon X(A, I))$  est un sous groupe parfait normal. La construction plus de Quillen relative à ce sous-groupe donne une équivalence d'homotopie  ${}_\epsilon X(A, I)^+ \longrightarrow {}_\epsilon F(A, I)$ .*

PREUVE :

Par la suite exacte d'homotopie de la fibration:

$${}_\epsilon X(A) \longrightarrow {}_\epsilon X(A, I) \longrightarrow {}_\epsilon F(A, I),$$

on a la suite exacte:

$${}_\epsilon St(A) = \pi_1({}_\epsilon X(A)) \xrightarrow{\varphi} \pi_1({}_\epsilon X(A, I)) \xrightarrow{\psi} \pi_1({}_\epsilon F(A, I)) \longrightarrow \pi_0({}_\epsilon X(A)) = 0.$$

Comme  ${}_\epsilon St(A)$  est un groupe parfait, son image dans  $\pi_1({}_\epsilon X(A, I))$  est un groupe parfait et normal ( $\cong \ker(\psi)$ ).

On a donc ,

$$\pi_1({}_\epsilon X(A, I)^+) := \pi_1({}_\epsilon X(A, I)) / \text{Im}(\varphi) \cong \pi_1({}_\epsilon X(A, I)) / \ker(\psi) \cong \text{Im}(\psi).$$

Donc

$$\pi_1({}_\epsilon X(A, I)^+) \cong \pi_1({}_\epsilon F(A, I)),$$

or

$$H_*({}_\epsilon X(A, I)^+) \cong H_*({}_\epsilon F(A, I)),$$

d'où par le théorème de J.H.C.Whitehead,

$$\pi_*({}_\epsilon X(A, I)^+) \cong \pi_*({}_\epsilon F(A, I))$$

et par suite, on a une équivalence d'homotopie entre cw-complexes

$${}_\epsilon X(A, I)^+ \longrightarrow {}_\epsilon F(A, I).$$

■

### 2.4.3 Rappels sur la théorie de Malcev

#### Définition 2.4.8

Une algèbre nilpotente est une algèbre  $A$  (sans unité) telle que  $A^n = 0$  pour un certain entier positif  $n$ .

On note (cf. [36])  $G_m(A)$  le groupe multiplicatif  $1 + A = \{1 + x \mid x \in A\}$  et  $G_a(A)$  l'algèbre de Lie  $A$  munie du crochet  $[x, y] = xy - yx$  (Quillen définit ceci pour une large classe d'algèbres: les algèbres complètes augmentées).

Rappelons que pour tout groupe nilpotent  $G$ , il existe (cf.[36]) un groupe nilpotent uniquement divisible, noté  $\hat{G}$ , appelé la completion de Malcev de  $G$  et il existe une application canonique  $j : G \rightarrow \hat{G}$ , caractérisée par les propriétés suivantes :

- (a) le noyau de  $j$  est égal au sous groupe de torsion de  $G$ .
- (b) Si  $x$  est dans  $\hat{G}$ , alors  $x^n$  est dans l'image de  $j$  pour un certain  $n$  non nul.

Soit  $A$  une  $\mathbb{Q}$ -algèbre nilpotente et  $U(A)$  son algèbre enveloppante universelle. Soit  $J$  l'idéal d'augmentation de  $U(A)$ , on note  $U(A)^\wedge = \varprojlim_n U(A)/J^n$  la completion de  $U(A)$  pour la topologie  $J$ -adique.

L'application exponentielle

$$\exp : J^\wedge \rightarrow 1 + J^\wedge$$

est convergente dans la topologie  $J$ -adique.

Cette application est bijective et l'inverse est donné par la série logarithme.

On a  $e^x e^y = e^{x+y}$  si  $[x, y] = 0$

Par définition le groupe nilpotent associé à  $A$  est  $N := \exp(A) \subset (1 + J^\wedge)^\times$ .

On a d'après [36], une correspondance biunivoque entre algèbres de Lie nilpotentes sur  $\mathbb{Q}$  et les groupes nilpotents uniquement divisibles.

$$\begin{array}{ccc} \text{Algèbre de Lie nilpotente sur } \mathbb{Q} & \longrightarrow & \text{Groupe nilpotent uniquement divisible.} \\ \eta & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

### 2.4.4 Analogie de Lie

Soit  ${}_\epsilon t_{n,n}^\sigma(A, I)$  l'algèbre de Lie :  ${}_\epsilon t_{n,n}^\sigma(A, I) = t_{2n}^\sigma(A, I) \cap {}_\epsilon o_{n,n}(A)$  où  ${}_\epsilon o_{n,n}(A)$  est l'algèbre de Lie du groupe orthogonal  ${}_\epsilon O_{n,n}(A)$ ,

$${}_\epsilon o_{n,n}(A) = \{g \in gl_{2n}(A) \mid {}^t g X_{n,n} + X_{n,n} g = 0\}.$$

Le crochet de Lie est  $[x, y] = xy - yx$ . On définit

$${}_\epsilon t^\sigma(A, I) = \varinjlim {}_\epsilon t_{n,n}^\sigma(A, I).$$

Quand  $I$  est un idéal nilpotent de  $A$ ,  ${}_{\varepsilon}t^{\sigma}(A, I)$  est une algèbre de Lie nilpotente. On suppose que  $A$  est  $\mathbb{Q}$ -algèbre muni d'une involution  $a \mapsto \bar{a}$ . La théorie de Malcev donne le groupe nilpotent uniquement divisible associé à  ${}_{\varepsilon}t^{\sigma}(A, I)$  qui est  ${}_{\varepsilon}T^{\sigma}(A, I)$ . D'après [35], l'homologie, rationnelle, de l'algèbre de Lie  ${}_{\varepsilon}t^{\sigma}(A, I)$  est isomorphe à celle du groupe  ${}_{\varepsilon}T^{\sigma}(A, I)$ :

$$H_{*}({}_{\varepsilon}t^{\sigma}(A, I); \mathbb{Q}) \cong H_{*}({}_{\varepsilon}T^{\sigma}(A, I); \mathbb{Q}).$$

Nous avons aussi,

$${}_{\varepsilon}X(A, I) = \bigcup_{\sigma} B_{\varepsilon}T^{\sigma}(A, I)$$

et

$${}_{\varepsilon}x(A, I) = \bigcup_{\sigma} {}_{\varepsilon}t^{\sigma}(A, I).$$

Donc

$$H_{*}({}_{\varepsilon}X(A, I); \mathbb{Q}) \cong H_{*}({}_{\varepsilon}x(A, I); \mathbb{Q}).$$

En utilisant la théorie des invariants, Loday et Procesi [28] démontrent que la partie primitive de l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices orthogonales sur une algèbre  $A$  est l'homologie diédrale de  $A$ . Donc la partie primitive de  $H_{*}({}_{\varepsilon}x(A, I); \mathbb{Q})$  est  $HD_{i-1}(A, I) \otimes \mathbb{Q}$

## 2.5 Théorème reliant la L-théorie et l'homologie diédrale

On peut donc énoncer le résultat principal de ce chapitre

### **Théorème 2.5.1**

*Soit  $A$  un anneau unitaire hermitien et  $I$  un idéal, de  $A$ , nilpotent et stable par l'involution.*

*Alors, rationnellement, la L-théorie algébrique relative est la même que l'homologie diédrale relative:*

$${}_{\varepsilon}L_i(A, I) \otimes \mathbb{Q} \cong HD_{i-1}(A, I) \otimes \mathbb{Q}.$$

PREUVE :

D'après ce qui précède, on peut écrire,

$$\begin{aligned} {}_{\epsilon}L_i(A, I) \otimes \mathbb{Q} &:= \pi_i({}_{\epsilon}F(A, I)) \otimes \mathbb{Q} \\ &\cong \text{Prim } H_*({}_{\epsilon}F(A, I)) \otimes \mathbb{Q} \quad (\text{Milnor} - \text{Moore [32]}) \\ &\cong \text{Prim } H_*({}_{\epsilon}X(A, I)) \otimes \mathbb{Q} \quad ({}_{\epsilon}F(A, I) \cong_{\epsilon} X(A, I)^+) \\ &\cong \text{Prim } H_*({}_{\epsilon}x(A, I), \mathbb{Q}) \quad (\text{P.F.Pickel [35]}) \\ &\cong HD_{i-1}(A, I) \otimes \mathbb{Q} \quad (\text{Loday} - \text{Procesi [28]}) \end{aligned}$$

■



## Chapitre 3

# Homologie $S^3$ -équivariante et homologie quaternionique

### 3.1 Introduction

Voici quelques façons de construire des modèles simpliciaux du cercle  $S^1$ . La plus simple est de prendre seulement deux cellules non-dégénérées: une en dimension zéro et une en dimension un:  $S^1 = * \cup_f e^1$  où  $f : S^0 \rightarrow *$  est la fonction d'attachement. Un autre modèle consiste à prendre le nerf,  $\mathcal{N}_*\mathbb{Z}$ , du groupe  $\mathbb{Z}$  (vu comme catégorie). Sa réalisation géométrique a plusieurs cellules. C'est ce modèle qui tient compte de la structure du groupe  $S^1 \cong B\mathbb{Z} = |\mathcal{N}_*\mathbb{Z}|$  puisque  $\mathcal{N}_*\mathbb{Z}$  est un groupe simplicial. C'est aussi ce modèle qui donne naissance aux espaces cycliques et à une bonne version simpliciale des  $S^1$ -espaces. En utilisant ce dernier modèle de  $S^1$  et la notion de foncteurs dérivés, introduite par A. Connes pour donner une reformulation de l'homologie cyclique, Loday (cf. [29]) démontre un théorème affirmant que l'homologie cyclique d'une  $k$ -algèbre simpliciale (voir plus loin la définition 3.2.2)  $k[X_*]$  est isomorphe à l'homologie  $S^1$ -équivariante du réalisé  $|X_*|$ , où  $X_*$  est un ensemble simplicial cyclique:

$$HC_n(k[X_*]) \cong H_n^{S^1}(|X_*|, k).$$

Il montre aussi, (cf. [24]), que l'homologie quaternionique est une homologie  $Pin(2)$ -équivariante. En utilisant ce résultat et le lien entre l'homologie  $Pin(2)$ -équivariante et l'homologie  $S^3$ -équivariante, nous démontrons que, pour un  $S^3$ -espace, ces deux homologies coïncident, quand 2 est inversible, et nous obtenons la suite exacte de périodicité en homologie quaternionique comme une suite exacte de Gysin d'une  $S^3$ -fibration.

Nous obtenons aussi les groupes d'obstructions à l'isomorphisme entre ces deux homologies.

## 3.2 Homologie quaternionique

Commençons par quelques rappels (cf. [24]) :

Soit  $Q_m$  le groupe engendré par deux éléments  $x$  et  $y$  soumis aux relations:

$x^m = y^2$  et  $yx y = x^{-1}$ . C'est le groupe des quaternions généralisés. Il est d'ordre  $4m$  car il s'identifie au sous-groupe des quaternions engendré par  $e^{i\pi/m}$  et  $j$  ( $j^2 = -1$ ). Son quotient par le centre (isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) est le groupe diédral

$$D_m = \langle x, y \mid x^m = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle .$$

Ce dernier contient le sous groupe normal cyclique d'ordre  $m$

$$C_m = \langle x \mid x^m = 1 \rangle .$$

Rappelons que l'homologie quaternionique (resp. diédrale) est liée à l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices orthogonales (cf. [28]), comme l'homologie cyclique est liée à l'homologie de l'algèbre de Lie des matrices (cf. [25]).

L'un des théorèmes importants sur l'homologie quaternionique est la suite exacte de périodicité [24],

$$\dots \rightarrow HT_n(A) \rightarrow HQ_n(A) \rightarrow HQ_{n-4}(A) \rightarrow HT_{n-1}(A) \rightarrow \dots,$$

où la théorie  $HT_*$  peut se calculer à partir de l'homologie de Hochschild.

Cette suite exacte s'obtient à partir de l'action de  $Q_m$  sur  $A^{\otimes m}$  et de l'existence d'une résolution particulière périodique de période 4 du  $Q_m$ -module trivial  $\mathbb{Z}$ . Notons que le  $D_m$ -module trivial  $\mathbb{Z}$  n'admet pas de résolution périodique, quand  $m$  est pair.

### 3.2.1 Une résolution périodique du $Q_m$ -module trivial $\mathbb{Z}$

**Théorème 3.2.1** (cf. [24] p. 145)

Le  $Q_m$ -module trivial  $\mathbb{Z}$  admet la résolution libre périodique (de période 4) de modules à gauche

$$\dots \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[Q_m] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[Q_m] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}[Q_m]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}[Q_m]^2 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}[Q_m] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}.$$

où  $\varepsilon$  est l'augmentation,

$$\alpha = (1-x \ 1-y), \beta = \begin{pmatrix} L & 1+yx \\ -(1+y) & x-1 \end{pmatrix}, \text{ avec } L = 1+x+\dots+x^{m-1}, N = \sum_{g \in Q_m} g,$$

$$\text{et } \gamma = \begin{pmatrix} 1-x & \\ yx-1 & \end{pmatrix}.$$

PREUVE :  
Voir [24] ■

Rappelons la définition de  $k$ -module simplicial cyclique :

**Définition 3.2.2** (cf. [29])

Un  $k$ -module simplicial cyclique est un objet simplicial,  $M_*$ , dans la catégorie des  $k$ -modules, tel que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $M_n$  est muni d'une action du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  vérifiant :

$$\begin{cases} t_n^{n+1} = id \\ d_i t_n = -t_{n-1} d_{i-1} \text{ et } s_i t_n = -t_{n+1} s_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ d_0 t_n = (-1)^n d_n \text{ et } s_0 t_n = (-1)^n t_{n+1}^2 s_n \end{cases}$$

où  $d_i : M_n \rightarrow M_{n-1}$ ,  $i = 0, \dots, n$  (faces),  $s_j : M_n \rightarrow M_{n+1}$ ,  $j = 0, \dots, n$  (dégénérescences) et  $t_n$  est un générateur de  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$  (c'est l'image de 1 par le morphisme  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ ).

**Exemple:**

L'exemple fondamental est celui donné par Connes (cf. [10]) lui permettant de donner une interprétation de l'homologie cyclique en termes de foncteurs dérivés (voir plus loin la section 3.3).

Loday fait de même pour l'homologie quaternionique en introduisant une notion de module simplicial quaternionique (cf. [24]) :

**Définition 3.2.3**

Un module simplicial quaternionique (resp. diédral) est un module simplicial  $M_*$  muni, pour tout entier positif, d'une action à gauche de  $Q_{n+1}$  (resp.  $D_{n+1}$ ) sur  $M_n$  telle que:

$$\begin{aligned} d_i x &= -x d_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ s_i x &= -x s_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ d_i y &= (-1)^n y d_{n-i} \text{ pour } 0 \leq i \leq n \\ s_i y &= (-1)^{n+1} x s_{n-i} \text{ pour } 0 \leq i \leq n \end{aligned}$$

pour  $d_i : M_n \rightarrow M_{n-1}$  et  $s_i : M_n \rightarrow M_{n+1}$ .

**Lemme 3.2.4**

Posons  $b = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ ,  $b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i$ ,  $L = \sum_{i=0}^n x^i$  et  $N = \sum_{g \in Q_{n+1}} g$ ,  
pour  $d_i : M_n \rightarrow M_{n-1}$  et  $x \in Q_{n+1}$ .  
On a les relations:

- (a)  $b(1-x) = (1-x)b'$ ,
- (b)  $by = yb$ ,
- (c)  $b'yx = yxb'$ ,
- (d)  $b'L = Lb$ ,
- (e)  $b'N = Nb$ .

PREUVE : [24] ■

Considérons le diagramme  $\mathcal{C}(M)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{N} & M_n & \xrightarrow{\gamma} & M_n \oplus M_n & \xrightarrow{\beta} & M_n \oplus M_n & \xrightarrow{\alpha} & M_n \\
 & \downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} & & \downarrow -\begin{pmatrix} b' & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} & & \downarrow b \\
 \dots \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & M_{n-1} & \longrightarrow & M_{n-1} \oplus M_{n-1} & \longrightarrow & M_{n-1} \oplus M_{n-1} & \longrightarrow & M_{n-1} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Où la  $n$ -ième ligne est obtenue en tensorisant  $M_n$  par la résolution du  $Q_{n+1}$ -module trivial  $\mathbb{Z}$  décrite dans le théorème 3.2.1.

$$\text{Soit } \alpha = (1-x \ 1-y), \quad \beta = \begin{pmatrix} L & 1+yx \\ -(1+y) & x-1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1-x & \\ yx-1 & \end{pmatrix}, \quad b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i \text{ et } b = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i.$$

**Lemme 3.2.5** (cf. [24])

$\mathcal{C}(M)$  est un bicomplexe de  $k$ -modules.

PREUVE :

vérifions l'anticommutativité des quatre carrés ci-dessus :

Pour celui de droite,

$$b(1-x \ yx-1) = (1-x \ yx-1) \begin{pmatrix} b' & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};$$

ceci résulte de (a) et (b).

Pour le second,

$$\begin{pmatrix} b' & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 1+yx \\ -(1+y) & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 1+yx \\ -(1+y) & x-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix};$$

ceci résulte de (a),(b),(c) et (d).  
 Pour le troisième,

$$(1-x \quad yx-1) b' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} (1-x \quad yx-1);$$

ceci résulte de (a) et (c).  
 Pour le dernier:  $b'N=Nb$ ; c'est (e). ■

**Définition 3.2.6**

*Soit  $M_*$  un module simplicial quaternionique.  
 L'homologie quaternionique de  $M_*$  est  $HQ_n(M_*) := H_n(\text{Tot}(C(M)))$ .  
 En particulier, si  $M_n = A^{n+1}$ , on note cette homologie par  $HQ_n(A)$ .*

La première suite spectrale associée au bicomplexe donne la

**Proposition 3.2.7**

*Il existe une suite spectrale du premier quadrant*

$$E_{p,q}^1 = H_p(Q_{q+1}, M_q) \Rightarrow HQ_{p+q}(M_*),$$

*où la différentielle  $d^1$  est induite par  $b$ .*

**Corollaire 3.2.8**

*Si  $k \subset \mathbb{Q}$ , l'homologie quaternionique de la  $k$ -algèbre  $A$  est donnée par*

$$HQ_n(A) = H_n(A^{*+1}/(1-x, 1-y), b).$$

### 3.3 Ensemble cyclique et espace cyclique

Les rappels ainsi que les résultats (bien connus) de cette section se trouvent dans [29].

#### 3.3.1 La catégorie $\Delta C$ et sa catégorie opposée $\Delta C^{op}$

Rappelons que la catégorie simpliciale  $\Delta$  est la catégorie dont les objets sont les ensembles ordonnés  $[n] = \{0 < 1 < \dots < n\}$  et les morphismes sont les applications croissantes.

La catégorie cyclique d'A.Connes  $\Delta C$  est obtenue à partir de la catégorie  $\Delta$  et des groupes cycliques :

en fait, elle a les mêmes objets que  $\Delta$ , et tout morphisme de  $\Delta C$  s'écrit, de manière unique, comme composé de morphisme de  $\Delta$  et d'un élément d'un groupe cyclique fini. Plus précisément, on a la

**Définition 3.3.1 :**

La catégorie cyclique  $\Delta C$  a pour objets les  $[n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et les morphismes engendrés par les faces  $\delta_i : [n-1] \rightarrow [n]$ ,  $0 \leq i \leq n$ , dégénérescences  $\sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$ ,  $0 \leq i \leq n$ , et les opérateurs cycliques  $\tau_n : [n] \rightarrow [n]$  vérifiant, en plus des formules classiques définissant  $\Delta$ , les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\tau_n \delta_i &= \delta_{i-1} \tau_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ \tau_n \delta_0 &= \delta_n \\ \tau_n \sigma_i &= \sigma_{i-1} \tau_{n+1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ \tau_n \sigma_0 &= \sigma_n \tau_{n+1}^2 \\ \tau_n^{n+1} &= id.\end{aligned}$$

**Remarques:**

(a) La relation  $\tau_n \delta_0 = \delta_n$  est une conséquence des autres relations puisque  $\delta_n = \tau_n^{n+1} \delta_n = \tau_n^n \delta_{n-1} \delta_n = \dots = \tau_n \delta_0 \tau_n^n = \tau_n \delta_0$ .

De même  $\tau_n \sigma_0 = \sigma_n \tau_{n+1}^2$  est une conséquence des autres relations.

(b) La catégorie  $\Delta C$  est isomorphe à sa catégorie opposée (chose fautive pour la catégorie  $\Delta$ , voir la proposition 3.3.6).

**Théorème 3.3.2 [29]**

La catégorie  $\Delta C$  contient la catégorie  $\Delta$  comme sous-catégorie et on a:

(1) Le groupe des automorphismes de  $[n]$  dans  $\Delta C$  est cyclique d'ordre  $n+1$ .

(2) Tout morphisme de  $[n]$  vers  $[m]$  dans  $\Delta C$  peut s'écrire de manière unique comme composé  $\Phi \circ g$  avec  $\Phi \in \text{Hom}_\Delta([n], [m])$  et  $g \in \text{Aut}_{\Delta C} = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ .

PREUVE : [29] ■

**Définition 3.3.3**

Un espace cyclique est un foncteur de la catégorie  $\Delta C$  dans la catégorie des espaces.

On a le

**Théorème 3.3.4 [10]**

L'espace classifiant  $B\Delta C$  de la petite catégorie  $\Delta C$  est égal au classifiant  $BS^1 = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$  du cercle  $S^1$ .

PREUVE : [10]

Comme l'ensemble  $\text{Hom}_{\Delta C}([n], [m])$  n'est jamais vide (il y a toujours, au moins, une face ou une dégénérescence entre  $[n]$  et  $[m]$ ), l'espace classifiant  $B\Delta C$  est connexe par arc.

Comme  $\text{Hom}_{\Delta C}([0], [0]) = \text{id}_{[0]}$  est réduit à un élément, tout foncteur de  $\Delta C$  dans la catégorie des ensembles avec pour flèches les bijections, est triviale, (c'est à dire que tout lacet dans  $B\Delta C$  est homotopiquement trivial), ainsi  $B\Delta C$  est simplement connexe.

Or l'anneau de cohomologie  $H^*(B\Delta C; \mathbb{Z})$  est égal à  $\mathbb{Z}[\sigma]$ ,  $\sigma \in H^2(B\Delta C; \mathbb{Z})$ . De même l'homologie de  $B\Delta C$  est sans torsion et la dualité canonique fait de  $H^n(B\Delta C; \mathbb{Z})$  le groupe  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n, \mathbb{Z})$ .

Il en résulte que, si  $f$  est l'application continue de  $B\Delta C$  dans l'espace  $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  qui correspond à  $\sigma \in H^2(B\Delta C, \mathbb{Z})$ , l'application  $f_* : H_n(B\Delta C, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme pour tout entier  $n$  positif.

Ainsi le théorème de Whitehead montre que  $\pi_n(B\Delta C) \cong \pi_n(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$  et donc  $B\Delta C$  est un  $K(\mathbb{Z}, 2)$  et est homotopiquement équivalent à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty = BS^1$ . ■

### Définition 3.3.5

(a) Les objets de  $\Delta C^{\text{op}}$  sont les mêmes que ceux de  $\Delta C$ , donc de  $\Delta$ .

(b) Les morphismes sont engendrés par les faces  $d_i : [n] \rightarrow [n-1]$ ,  $0 \leq i \leq n$ , dégénérescences  $s_j : [n] \rightarrow [n+1]$ ,  $0 \leq j \leq n$ , et les opérateurs cycliques  $\tau_n : [n] \rightarrow [n]$  soumis, en plus des relations donnant  $\Delta$ , à celles suivantes suivantes:

$$\begin{aligned} d_i t_n &= t_{n-1} d_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } d_0 t_n = d_n \\ s_i t_n &= t_{n+1} s_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } s_0 t_n = t_{n+1}^2 s_n \\ t_n^{n+1} &= \text{id}. \end{aligned}$$

### Proposition 3.3.6

(1) On a une nouvelle dégénérescence  $\sigma_{n+1} : [n+1] \rightarrow [n]$  dans  $\Delta C$ ,

$\sigma_{n+1} := \sigma_0 \tau_{n+1}^{-1}$ , ainsi la catégorie  $\Delta C^{\text{op}}$  est isomorphe à sa catégorie opposée  $\Delta C$  par:

$$\begin{aligned} \Delta C^{\text{op}} &\longrightarrow \Delta C \\ [n] &\longmapsto [n] \\ d_i &\longmapsto \sigma_i \\ s_i &\longmapsto \delta_{i+1} \\ t_n &\longmapsto \tau_n^{-1} \end{aligned}$$

(2) On a une inclusion de catégories

$$\Delta^{\text{op}} \longrightarrow \Delta C^{\text{op}} \cong \Delta C.$$

PREUVE :

On envoie la catégorie  $\Delta C^{\text{op}}$  dans  $\Delta C$  par le foncteur suivant:

l'objet  $[n]$  est envoyé sur  $[n]$ , la face  $d_i$  sur  $\sigma_i : [n-1] \rightarrow [n]$  pour  $i = 0, 1, \dots, n+1$ , (et ceci grâce à la nouvelle dégénérescence  $\sigma_{n+1}$ ).

La dégénérescence  $s_i$  est envoyée sur  $\delta_{i+1} : [n-1] \rightarrow [n]$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ . (ici  $\delta_0$  n'est pas utilisé).

L'opérateur  $t_n$  s'envoie sur  $\tau_n^{-1} : [n] \rightarrow [n]$ .

Par exemple, la relation  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$  pour  $i \leq j$  devient  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_{j-1} \sigma_i$  pour  $i \leq j$  qu'on peut écrire  $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$ .

Si  $i = j$  alors la relation  $d_i d_n = d_{n-1} d_i$  devient  $\sigma_i \sigma_n = \sigma_{n-1} \sigma_i$  i.e.  $\sigma_i \sigma_0 \tau_n^{-1} = \sigma_0 \tau_{n-1}^{-1} \sigma_i$ , puisque  $\sigma_i \sigma_0 = \sigma_0 \sigma_{i+1} = \sigma_0 \tau_{n-1}^{-1} \sigma_i \tau_n$ .

on obtient donc toutes les relations définissant  $\Delta C$  à partir de celles de  $\Delta C^{\text{op}}$ . ■

### 3.3.2 Ensemble cyclique et espace cyclique

Par définition, un objet cyclique dans la catégorie  $\mathcal{C}$  est un foncteur  $X : \Delta C^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ . Comme d'habitude, l'image par  $X$  d'un morphisme  $f$  est noté  $f_*$ .

On considère, parfois,  $X$  comme un foncteur contravariant de  $\Delta C$  dans  $\mathcal{C}$ ; dans ce cas, l'image par  $X$  d'un morphisme  $\Phi$  de  $\Delta C$  est noté  $\Phi^*$ .

Un ensemble cyclique est un ensemble simplicial  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  tel que pour tout  $n$ ,  $X_n$  est muni d'une action du groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , compatible avec la structure simpliciale, plus précisément, on a la

#### Définition 3.3.7

*Un ensemble cyclique est un foncteur  $X : \Delta C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ , de la catégorie  $\Delta C^{\text{op}}$  dans la catégorie des ensembles.*

*C'est donc la donnée d'une collection d'ensembles  $X_n$ ,  $n \geq 0$  avec faces*

*$d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , dégénérescences  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , et des opérateurs  $t_n : X_n \rightarrow X_n$  vérifiant les relations donnant  $\Delta$  et les analogues à celles données dans la définition (3.3.1).*

## 3.4 Homologie cyclique et homologie $S^1$ -équivariante

Soit  $Z$  un espace topologique muni d'une action du groupe topologique  $S^1$ .

Soit  $\mathcal{E}S^1$  la catégorie dont les objets sont les éléments de  $S^1$  et tel qu'il n'existe qu'un et un seul morphisme entre deux objets.

Soit  $\mathcal{N}\mathcal{E}S^1$  le nerf de cette catégorie et  $ES^1$  l'espace classifiant.

$ES^1$  est évidemment contractile (il y a un objet initial dans la catégorie  $\mathcal{E}S^1$ ).

$S^1$  opère librement sur  $\mathcal{E}S^1$  et donc sur  $ES^1$ .

Le quotient par cette action est précisément  $BS^1$ .

On a la fibration homotopique  $S^1 \rightarrow ES^1 \rightarrow BS^1$ , en particulier,  $BS^1$  est un  $K(\mathbb{Z}; 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$ .

Plus précisément, l'espace de Borel  $ES^1 \times_{S^1} Z$  est l'espace quotient de l'espace produit

$ES^1 \times Z$  par la relation d'équivalence:  $(g.x, g.z) \sim (x, z)$   
ou  $(x, g.z) \sim (g^{-1}.x, z)$  pour tout  $x \in ES^1$ , tout  $z \in Z$  et tout  $g \in S^1$ .  
Par définition, l'homologie  $S^1$ -équivariante du  $S^1$ -espace  $Z$  est:

$$H_*^{S^1}(Z, k) := H_*^{sing}(ES^1 \times_{S^1} Z, k).$$

Soit  $X$  un ensemble simplicial cyclique. Sa réalisation géométrique  $|X|$  est un  $S^1$ -espace (cf. [29] theorem 7.1.4. p. 225).

On appelle réalisation géométrique cyclique de  $X$ , l'espace de Borel, noté  $|X|^{cy}$ ,  
 $|X|^{cy} := ES^1 \times_{S^1} |X|$ .

Notons que si  $X$  est l'ensemble simplicial cyclique trivial  $*$ , alors  $|*|^{cy} = ES^1 \times_{S^1} |*| = BS^1$ .

L'homologie cyclique de  $k[X_*]$ , pour un ensemble simplicial cyclique  $X_*$  est liée à l'homologie  $S^1$ -équivariante du  $S^1$ -espace  $|X_*|$ .

Plus précisément, on a le

### **Théorème 3.4.1** [29]

Soit  $X$  un ensemble simplicial cyclique et  $k[X]$  son module cyclique associé.

(1) On a un isomorphisme canonique:

$$HC_*(k[X]) \cong H_*(|X|^{cy}, k) =: H_*^{S^1}(|X|, k).$$

(2) Par cette identification, et l'isomorphisme  $H_*(k[X]) \cong H_*(|X|, k)$ , la suite exacte de Gysin de la fibration homotopique  $S^1 \rightarrow |X| \rightarrow |X|^{cy}$  coïncide avec la suite exacte d'A. Connes :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_n(k[X]) & \longrightarrow & HC_n(k[X]) & \longrightarrow & HC_{n-2}(k[X]) & \longrightarrow & H_{n-1}(k[X]) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \dots \rightarrow H_n(|X|, k) & \longrightarrow & H_n(|X|^{cy}, k) & \longrightarrow & H_{n-2}(|X|^{cy}, k) & \longrightarrow & H_{n-1}(|X|, k) \rightarrow \dots \end{array}$$

PREUVE : Voir [29] ■

## **3.5 Interprétation topologique de l'homologie diédrale et de l'homologie quaternionique**

Rappelons la

### Définition 3.5.1

Un ensemble quaternionique est la donnée d'un ensemble simplicial  $X_*$  et, pour tout entier  $n$  positif, d'une action de  $Q_{n+1}$  sur  $X_n$  vérifiant les identités suivantes :

$$\begin{aligned} d_i x &= x d_{i-1}, & s_i x &= x s_{i-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n, \\ d_i y &= y d_{i-1}, & s_i y &= y s_{i-1} \text{ pour } 0 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $x$  et  $y$  sont les générateurs de  $Q_{n+1}$ .

### Remarque

On définit la notion d'ensemble diédral de façon analogue en changeant  $Q_{n+1}$  par  $D_{n+1}$ .

### Exemple

Soit  $G$  un groupe. Considérons l'ensemble simplicial  $G_*$  où  $G_n = \underbrace{G \times \dots \times G}_{(n+1)}$

avec

$$\begin{aligned} d_i(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n) \\ s_i(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, g_{i-1}, 1, g_i, \dots, g_n). \end{aligned}$$

On munit  $G_*$  d'une structure cyclique par:

$$x(g_0, \dots, g_n) = (g_n, g_0, \dots, g_{n-1})$$

puis d'une structure diédrale par:

$$y(g_0, \dots, g_n) = (g_0^{-1}, g_n^{-1}, \dots, g_1^{-1})$$

on obtient une structure canonique de module diédral sur  $k[G_*]$ .

De même qu'un ensemble simplicial peut être décrit comme un foncteur contravariant de la catégorie  $\Delta$  dans celle des ensembles, un ensemble quaternionique (resp. diédral) peut être décrit comme un foncteur contravariant d'une catégorie  $\Delta Q$  (resp.  $\Delta D$ ) dans la catégorie  $Ens$  des ensembles.

### La catégorie $\Delta Q^{\text{op}}$

Ses objets sont les mêmes que ceux de  $\Delta^{\text{op}}$ , c'est à dire les  $[n]$  pour  $n \geq 0$ .

On définit les morphismes par générateurs et relations:

(i) Les générateurs sont ceux de  $\Delta^{\text{op}}$  et de  $Q_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} d_i : [n] &\rightarrow [n-1] & \text{et } s_i : [n] &\rightarrow [n+1] & \text{pour } 0 \leq i \leq n. \\ x : [n] &\rightarrow [n] & \text{et } y : [n] &\rightarrow [n] & \text{pour } x, y \in Q_{n+1} \end{aligned}$$

Les relations sont:

- (i) celles de  $\Delta$
- (ii) celles de  $Q_{n+1}$
- (iii) les relations (3.1) de définition d'un ensemble quaternionique.

**Proposition 3.5.2** (cf. [24])

Le classifiant de la catégorie  $\Delta Q$  (resp.  $\Delta D$ ) est homéomorphe au classifiant du groupe topologique  $|Q_*| = Pin(2) := N_{S^3}(S^1)$  (resp.  $O(2)$ ).

Rappelons que les extensions

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Q_n \longrightarrow D_n \longrightarrow 1$$

donnent naissance à la fibration suivante

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Pin(2) \longrightarrow O(2).$$

Plus précisément, on a un morphisme surjectif de groupe topologique  $Pin(2) \longrightarrow O(2)$  dont le noyau est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Théorème 3.5.3** [29]

Soit  $k$  un anneau et  $X$  un ensemble quaternionique ou diédral, alors, on a des isomorphismes:

$$\begin{aligned} HQ_n(k[X]) &\cong H_n^{Pin(2)}(|X|, k) \\ HD_n(k[X]) &\cong H_n^{O(2)}(|X|, k), \end{aligned}$$

où  $Pin(2) = N_{S^3}(S^1) = \{x \in S^3 \mid xS^1x^{-1} = S^1\}$  est le sous-groupe de  $S^3$  engendré par  $e^{i\theta}$  et  $j$  ( $j^2 = -1$  et  $je^{i\theta}j^{-1} = e^{-i\theta}$ ).

Pour  $S^3$ , les choses se passent différemment:

$S^3$  ne peut être réalisé géométriquement comme un groupe simplicial, puisqu'il n'est pas nilpotent (voir le lemme 3.5.5).

En ce qui nous concerne, on veut retrouver la suite exacte de périodicité en homologie quaternionique par des méthodes topologiques en utilisant la suite exacte de Gysin d'une  $S^3$ -fibration. D'où la

**Question :**

Quel est le lien, pour un  $S^3$ -espace  $Z$ , entre l'homologie  $S^3$ -équivariante  $H^{S^3}(Z)$  et l'homologie  $Pin(2)$ -équivariante  $H^{Pin(2)}(Z)$ ?

La notion de groupe simplicial croisé provient de la question naturelle : existe-t-il des familles de groupes qui ont les mêmes types de relations avec  $\Delta$  que les groupes cycliques?

Cette notion généralise celle de catégorie cyclique d'A. Connes.

**Définition 3.5.4** (cf. [12] p. 59)

Un groupe simplicial croisé est une famille de groupes  $\{G_n\}_{n \geq 0}$  telle que, il existe une catégorie  $\Delta G$  d'objets  $[n]$ ,  $n \geq 0$ , contenant la catégorie  $\Delta$  comme sous-catégorie et telle que:

(1) Le groupe d'automorphismes de  $[n]$  dans  $\Delta G$  soit le groupe  $G_n^{\text{op}}$  (groupe opposé de  $G_n$ ).

(2) Tout morphisme de  $[n]$  dans  $[m]$  dans  $\Delta G$  peut s'écrire de façon unique, comme la composé  $\Phi \circ g$  où  $\Phi \in \text{Hom}_{\Delta}([n], [m])$  et  $g \in \text{Aut}_{\Delta G}([n]) = G_n^{\text{op}}$ .

**Exemples**

(1) La famille des groupes cycliques  $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}_{n \geq 0}$ .

(2) La famille des groupes diédraux  $\{D_m\}_{m \geq 0}$ .

(3) La famille des groupes quaternioniques  $\{Q_m\}_{m \geq 0}$ .

Remarquons, qu'en général,  $G$  n'est pas un groupe simplicial (pour  $G_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , il n'existe pas de morphisme non trivial de groupe entre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ ).

**Question:**

Existe-t-il un groupe simplicial croisé dont la réalisation géométrique est le groupe de Lie  $S^3$  ?

La réponse à cette question est donnée dans la sous-section suivante :

### 3.5.1 Le groupe de Lie $S^3$ n'est pas un groupe simplicial croisé.

**Lemme 3.5.5**

Le groupe  $S^3$  n'est pas nilpotent.

PREUVE :

Sinon, il existe  $q$  sous-groupes distingués  $H_1, H_2, \dots, H_q$  de  $S^3$  tel que l'on ait:  $S^3 = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_q = \{1\}$  et pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ , on a  $H_k/H_{k+1} \subset \text{centr}(S^3/H_{k+1})$ .

Donc  $H_{q-1} \subset \text{centr}(S^3) = \{\pm 1\}$ .

On peut supposer que l'inclusion  $H_q \subset H_{q-1}$  est stricte, ce qui donne  $H_{q-1} = \{\pm 1\}$ . de même  $H_{q-2}/H_{q-1} \subset \text{centr}(S^3/\{\pm 1\}) = \{1\}$  car  $S^3/\{\pm 1\}$  est simple, ce qui implique que  $H_{q-2} = H_{q-1}$  donc la suite se réduit à :  $S^3 = H_0 \supset H_1 = \{\pm 1\} \supset H_2 =$

$\{1\}$  et donc on aurait  $O^+(3, \mathbb{R}) = S^3/\{\pm 1\} = H_0/H_1 \subset \text{centr}(S^3/H_1) = \{1\}$  ce qui est absurde ■

**Lemme 3.5.6**

*Il n'existe pas de groupe simplicial croisé  $\{X_*\}$  tel que la réalisation géométrique  $|X_*|$  soit le groupe de Lie  $S^3$ .*

PREUVE :

D'après le théorème 5.15 de [12], si  $X_*$  est un groupe simplicial croisé tel que sa réalisation géométrique est  $|X_*| = S^3$  comme groupe de Lie, alors la composante connexe (par arc) de l'identité de  $S^3$  c'est à dire  $S^3_{(0)} = S^3$  est nilpotente, Or  $S^3$  n'est pas nilpotent (lemme 3.5.5). ■

**Théorème 3.5.7 ([45]p. 85)**

- (1) *Tout sous groupe de  $SO(3)$  est soit cyclique, soit diédral, soit un groupe polyédral (l'un des trois groupes: Tetraédral, Octaédral ou Icosaédral).*
- (2) *Si deux sous groupes finis de  $SO(3)$  sont isomorphes, alors ils sont conjugués dans  $SO(3)$ .*

Soit  $\mathbb{H}$  l'algèbre des quaternions réels : c'est un espace vectoriel réel de dimension 4 et de base  $\{1, i, j, k\}$ .

Considérons  $\mathbb{R}^3$  comme sous espace des quaternions imaginaires purs, avec la base  $\{i, j, k\}$ .

En identifiant  $S^3$  à l'ensemble des quaternions de norme 1, on obtient une application  $\pi : S^3 \rightarrow SO(3)$  définie par  $(\pi(q))(q') = qq'q^{-1}$ .

$\pi$  est un homomorphisme surjectif de  $\mathbb{H}$  dans  $SO(3)$ . C'est un revêtement différentiable de  $SO(3)$  par  $S^3$  :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow S^3 \xrightarrow{\pi} SO(3).$$

En fait, on a un isomorphisme de groupe  $S^3/\{1, -1\} \cong SO(3)$ .

On définit les groupes polyédraux binaires par :

$$\begin{aligned} T^* &= \pi^{-1}(T) \\ O^* &= \pi^{-1}(O) \\ I^* &= \pi^{-1}(I). \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Théorème 3.5.8 ([45]p. 88)**

- (a) *Tout sous groupe fini de  $S^3$  est soit cyclique, soit quaternionique, soit un groupe polyédral binaire (l'un des trois groupes:  $T^*$ ,  $I^*$  et  $O^*$ ).*
- (b) *Si deux sous groupes finis de  $S^3$  sont isomorphes, alors ils sont conjugués dans  $S^3$ .*

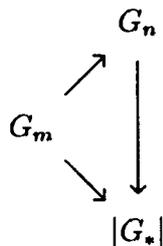
(c) Un sous groupe fini de  $S^3$  est contenu dans un sous corps complexe de  $\mathbb{H}$ , si et seulement si il est cyclique, contenu dans un sous corps réel de  $\mathbb{H}$ , si et seulement si il est cyclique d'ordre 1 ou 2.

PREUVE :  
voir [45] page 88. ■

**Proposition 3.5.9** (cf. [12])

(1) Si  $G_*$  est un groupe simplicial croisé, alors il existe, pour tout  $n$ , une inclusion de  $G_n$  dans  $|G_*|$  comme sous groupe discret.

(2) Si  $m+1$  divise  $n+1$ , alors il existe une dégénérescence  $\eta : [n] \rightarrow [m]$  dans  $\Delta$  tel que  $\eta$  induit une inclusion de groupes  $G_m \subset G_n$  et tel que le diagramme suivant commute:



3)  $\cup_n G_n$  est un sous groupe dense de  $G$ .

PREUVE : voir [12] ■

Une autre façon de voir que  $S^3$  n'est pas un groupe simplicial croisé utilise ses sous groupes discrets:

En effet, si le groupe topologique  $S^3$  était un groupe simplicial croisé:  $S^3 = |G_*|$  alors on aurait des inclusions de sous-groupes discrets  $G_n \subset S^3$ . Or les sous-groupes discrets donc fini (puisque un discret dans un compact est fini) de  $S^3$  sont, à conjugaison près, la famille des sous-groupes cycliques ( $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}_n$ ), celle des sous-groupes quaternioniques ( $\{Q_m\}_m$ ), le groupe Tétrahédral binaire  $T^*$ , le groupe Octaédral binaire  $O^*$  et le groupe Icosaédral binaire  $I^*$ .

Or la réalisation géométrique de ces groupes simpliciaux donne (cf. [29]) respectivement le cercle  $S^1$ , le groupe orthogonal  $Pin(2)$ , le groupe tétraédral  $T^*$ , le groupe octaédral  $O^*$  et le groupe icosaédral  $I^*$  et donc ne peut donner  $S^3$ .

## 3.6 Un résultat sur l'homologie $S^3$ -équivariante

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

**Théorème 3.6.1**

Soit  $Z$  un  $S^3$ -espace connexe.

(i) on a une suite exacte longue suivante :

$$\dots \rightarrow H_{n-1}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n^{Pin(2)}(Z) \longrightarrow H_n^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-2}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \dots$$

(ii) Les obstructions aux isomorphismes  $H_*^{Pin(2)}(Z) \cong H_*^{S^3}(Z)$  sont les groupes  $H_*^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

(iii) Pour une  $k$ -algèbre  $A$ , en supposant que 2 est inversible dans  $k$ , la réalisation géométrique du  $k$ -module simplicial quaternionique associé à  $A$  permet d'obtenir la suite exacte de périodicité en homologie quaternionique,

$$\dots \longrightarrow HT_n(A) \longrightarrow HQ_n(A) \longrightarrow HQ_{n-4}(A) \longrightarrow HT_{n-1}(A) \longrightarrow \dots,$$

comme suite exacte de Gysin d'une  $S^3$ -fibration.

PREUVE :

Soit  $Z$  un  $S^3$ -espace,  $Z$  est donc muni de l'action induite de  $Pin(2)$  où  $Pin(2) := N_{S^3}(S^1)$  (le normalisateur du tore maximal dans  $S^3$ ).

On a les deux fibrations homotopiques :

$$\begin{array}{ccccc} Pin(2) & \longrightarrow & EPin(2) \times Z & \longrightarrow & EPin(2) \times_{Pin(2)} Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \longrightarrow & ES^3 \times Z & \longrightarrow & ES^3 \times_{S^3} Z \end{array}$$

où  $EG \times_G Z$  est l'espace de Borel associé au  $G$ -espace  $Z$ , autrement dit:

$$EG \times_G Z := (EG \times Z) / \sim$$

et où " $\sim$ " désigne la relation d'équivalence suivante:  $(gx, z) \sim (x, g^{-1}z)$  pour tout  $x \in EG$ ,  $z \in Z$  et  $g \in G$ .

$EG$  est un espace contractile, donc  $EG \times Z$  est homotopiquement équivalent à  $Z$ .

L'inclusion  $Pin(2) \rightarrow S^3$  induit une application

$$EPin(2) \times_{Pin(2)} Z \longrightarrow ES^3 \times_{S^3} Z,$$

dont la fibre homotopique est  $S^3/Pin(2)$ .

On sait que  $Pin(2)/S^1$  est un groupe à deux éléments (donc isomorphe à  $\{\pm 1\}$ ).

En considérant  $S^2$  comme sous-espace de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  et  $S^3$  comme le groupe des quaternions de norme 1 ( $z + jz'$  tel que  $|z|^2 + |z'|^2 = 1$ ), on définit l'application de  $S^3$  dans  $S^2$  par :

$$\begin{aligned} f : S^3 &\longrightarrow S^2 \\ z + jz' &\longmapsto (2zz', |z|^2 - |z'|^2). \end{aligned}$$

On a,

$$e^{i\theta} \cdot (z + jz') = e^{i\theta} z + e^{i\theta} jz' = e^{i\theta} z + j e^{-i\theta} z',$$

ce qui donne  $f(e^{i\theta} \cdot (z + jz')) = (2e^{i\theta} z e^{-i\theta} z', |e^{i\theta} z|^2 - |e^{-i\theta} z'|^2) = f(z + jz')$ .

Donc l'application  $f$  est  $S^1$ -équivariante ( $S^2$  est considéré comme  $S^1$ -espace trivial).

Elle induit donc une application  $\tilde{f} : S^3/S^1 \rightarrow S^2$ .

L'action de  $Pin(2)$  sur  $S^3$  est donnée par l'action de  $e^{i\theta}$  ci-dessus et par l'action de  $j$  :

$$j \cdot (z + jz') = -z' + jz.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(j \cdot (z + jz')) &= f(-z' + jz) \\ &= (-2z'z, |z'|^2 - |z|^2) \\ &= (-2zz', -(|z|^2 - |z'|^2)) \\ &= -(2zz', |z|^2 - |z'|^2) \\ &= -f(z + jz'). \end{aligned}$$

Par suite, l'action de  $Pin(2)$  sur  $S^3$  induit sur  $S^2$  l'application

$$\begin{aligned} S^2 &\longrightarrow S^2 \\ x &\longmapsto -x, \end{aligned}$$

c'est à dire l'action de  $Pin(2)/S^1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $S^2$ . On obtient, puisque  $S^3/S^1 \cong S^2$ , que  $S^3/Pin(2) \cong (S^3/S^1)/(Pin(2)/S^1) \cong S^2/\{\pm 1\} \cong \mathbb{RP}(2)$ , d'où la fibration suivante :

$$\mathbb{RP}(2) \longrightarrow EPin(2) \times_{Pin(2)} Z \longrightarrow ES^3 \times_{S^3} Z.$$

Pour avoir le résultat, on va étudier, en détail, la suite spectrale associée à cette fibration.

Puisque  $\mathbb{RP}(2)$  n'a de l'homologie entière qu'en degré zéro ( $H_0(\mathbb{RP}(2)) = \mathbb{Z}$ ) et en degré un ( $H_1(\mathbb{RP}(2)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) (cf. [40]), on va déduire le lien entre  $H^{Pin(2)}(Z)$  et  $H^{S^3}(Z)$  de l'étude de la suite spectrale de la fibration suivante:

$$\mathbb{RP}(2) \longrightarrow EPin(2) \times_{Pin(2)} Z \longrightarrow ES^3 \times_{S^3} Z.$$

On a une suite spectrale du premier quadrant qui dégénère en degrés deux :

$$E_{p,q}^2 = H_p(ES^3 \times_{S^3} Z; H_q(\mathbb{RP}(2))) \Rightarrow H_{p+q}(EPin(2) \times_{Pin(2)} Z).$$

En particulier :

$$E_{p,0}^2 = H_p(ES^3 \times_{S^3} Z) = H_p^{S^3}(Z)$$

et

$$E_{p,1}^2 = H_p(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

(c'est l'homologie équivariante à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).

$$E_{p,q}^2 = 0 \quad \text{si } q \neq 0 \quad \text{et } q \neq 1.$$

On a :

$$E_{p+2,-1}^2 = 0 \longrightarrow E_{p,0}^2 \longrightarrow E_{p-2,1}^2,$$

c'est à dire :

$$0 \longrightarrow H_p^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{p-2}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Donc

$$E_{p+3,-2}^3 = 0 \longrightarrow E_{p,0}^3 \longrightarrow E_{p-3,2}^3 = 0,$$

et par suite

$$E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^3 = \ker(H_p^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{p-2}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$$

On a la filtration de  $H_n^{Pin(2)}(Z)$  :

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n H_n^{Pin(2)}(Z) = H_n^{Pin(2)}(Z).$$

Regardons les quotients successifs, on a :

$$H_n^{Pin(2)}(Z)/F_{n-1} = E_{n,0}^\infty = \ker(H_n^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-2}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})),$$

$$F_{n-1}/F_{n-2} = E_{n-1,1}^\infty \text{ et } F_{n-2} = F_{n-3} = \dots = F_0 = 0 \text{ car } E_{p,q}^\infty = 0 \text{ dès que } q \geq 2.$$

Donc on a une suite exacte,

$$0 \longrightarrow E_{n-1,1}^\infty \longrightarrow H_n^{Pin(2)}(Z) \longrightarrow E_{n,0}^\infty \longrightarrow 0$$

Pour  $E_{n-1,1}^\infty$ , On a :

$$E_{n+2,0}^2 \longrightarrow E_{n,1}^2 \longrightarrow E_{n-2,2}^2 = 0$$

c'est à dire

$$H_{n+2}^{S^3}(Z) \longrightarrow H_n(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

donc

$$E_{n,1}^3 = \frac{H_n(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}{\text{Im}(H_{n+2}^{S^3}(Z) \longrightarrow H_n(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))}.$$

on a

$$E_{n+3,-1}^3 = 0 \longrightarrow E_{n,1}^3 \longrightarrow E_{n-3,3}^3 = 0,$$

et par suite

$$E_{n,1}^\infty = E_{n,1}^3 = \frac{H_n(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}{\text{Im}(H_{n+2}^{S^3}(Z) \longrightarrow H_n(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))}.$$

Alors la filtration de  $H_n^{\text{Pin}(2)}(Z)$  devient:

$$0 \subset F_{n-1} = \frac{H_{n-1}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}{\text{Im}(H_{n+1}^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-1}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))} \subset F_n = H_n^{\text{Pin}(2)}(Z),$$

et le quotient

$$F_n/F_{n-1} = H_n^{\text{Pin}(2)}/F_{n-1} \cong \ker(H_n^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-2}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$$

Soit

$$H_{n-1}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_n^{\text{Pin}(2)}(Z),$$

l'application composée

$$H_{n-1}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \frac{H_{n-1}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}{\text{Im}(H_{n+1}^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-1}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))} \xrightarrow{\bar{\beta}} H_n^{\text{Pin}(2)}(Z),$$

et soit

$$H_n^{\text{Pin}(2)}(Z) \xrightarrow{\alpha} H_n^{S^3}(Z),$$

l'application composée

$$H_n^{\text{Pin}(2)}(Z) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \ker(H_n^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-2}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \xrightarrow{id} H_n^{S^3}(Z).$$

Alors la suite suivante :

$$H_{n+1}^{S^3}(Z) \xrightarrow{\varphi} H_{n-1}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H_n^{\text{Pin}(2)}(Z) \xrightarrow{\alpha} H_n^{S^3}(Z) \xrightarrow{\psi} H_{n-2}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

est exacte, puisque:

$$\ker(\psi) = \text{Im}(\bar{\alpha}) = \text{im}(\alpha), \quad \ker(\alpha) = \ker(\bar{\alpha}) = \text{Im}(\bar{\beta}) = \text{Im}(\beta) \text{ et}$$

$$\ker(\beta) = \text{Im}(\varphi).$$

On obtient donc la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \frac{H_{n-1}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}{\text{Im}(H_{n+1}^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-1}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))} \longrightarrow H_n^{\text{Pin}(2)}(Z) \longrightarrow \\ \longrightarrow \ker(H_n^{S^3}(Z) \longrightarrow H_{n-2}(ES^3 \times_{S^3} Z; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \longrightarrow 0.$$

■

**Conséquence:**

On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing}}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & HT_n & \longrightarrow & H_n^{\text{sing}}(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow & H_{n-2}^{\text{sing}}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-1}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & H_n^{\text{Pin}(2)}(Z) \longrightarrow & H_n^{S^3}(Z) \longrightarrow & H_{n-2}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-5}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & H_{n-4}^{\text{Pin}(2)}(Z) \longrightarrow & H_{n-4}^{S^3}(Z) \longrightarrow & H_{n-6}^{S^3}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\cdots \longrightarrow & H_{n-2}^{\text{sing}}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & HT_{n-1} & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing}}(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow & H_{n-3}^{\text{sing}}(Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow & \cdots \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots & \downarrow & \vdots
\end{array}$$

# Appendice : Remarques sur l'excision en K-théorie à coefficients

Dans l'appendice de [21], Karoubi donne une hypothèse homologique sur un pseudo-anneau  $I$  pour que l'on ait excision. Charney (cf. [9]) donne une autre hypothèse. Ici, nous donnons un exemple d'un pseudo-anneau  $I$  vérifiant l'hypothèse de [21] sans vérifier celle de [9], montrant ainsi que la classe de pseudo-anneau considérée dans [21] est plus large que celle considérée dans [9].

Pour une référence sur l'excision, voir Suslin and Wodzicki [42].

## A.1 Comparaison d'un résultat de Karoubi et d'un résultat de Charney

Rappelons le résultat de [21],

**Théorème A.1.1** ([21] appendice)

*Si l'homologie réduite de  $I$  (considéré comme un groupe abélien opérant trivialement sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ),  $\tilde{H}_i(I, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est nulle, alors  $I$  est excisif en K-théorie algébrique à coefficients dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .*

Signalons aussi celui de [9],

**Théorème A.1.2** (cf.[9])

*Soit  $I$  un pseudo-anneau et  $M$  une partie multiplicative de  $\mathbb{Z}$  telle que:*

*$I \otimes M^{-1}\mathbb{Z} = 0$  ou  $I \otimes M^{-1}\mathbb{Z}$  possède une unité.*

*Alors  $I$  est un idéal  $M$ -excisif et  $H_*(F_I, M^{-1}\mathbb{Z}) \cong H_*(GL(I), M^{-1}\mathbb{Z})$ , où  $F_I$  désigne la fibre de l'application  $B(GL(I) \rtimes \Sigma)^+ \rightarrow B\Sigma^+$*

Comme application, soit  $n$  un entier positif. Charney considère la partie multiplicative  $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid \text{pgcd}(m, n) = 1\}$  et note  $M^{-1}\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}_{(n)}$ . Elle obtient le

### **Théorème A.1.3 [9]**

Si  $I \otimes \mathbb{Z}_{(n)} = 0$  ou  $I \otimes \mathbb{Z}_{(n)}$  contient l'unité, alors  $I$  est excisif en  $K$ -théorie algébrique à coefficients dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### **Commentaires :**

Le lien entre le résultat de Karoubi et celui de Charney est le suivant :

L'hypothèse de Charney  $I \otimes \mathbb{Z}_{(n)} = 0$ , pour  $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid \text{pgcd}(m, n) = 1\}$ , est équivalente au fait suivant:

pour tout élément  $x$  de  $I$ , il existe  $q \in \mathbb{Z}$ , premier avec  $n$ , tel que  $qx = 0$ .

### **Lemme A.1.4**

Soit  $G$  un groupe et  $n$  un entier positif non nul.

Si l'homologie réduite  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est nulle alors, il en est de même pour  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n^s\mathbb{Z})$  pour tout entier  $s$ .

PREUVE :

On va démontrer le résultat par récurrence sur l'entier  $s$  : supposons que pour tout  $i < s$ ,  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n^i\mathbb{Z}) = 0$  et montrons que  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n^s\mathbb{Z}) = 0$ .

La suite exacte  $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\times n^{s-1}} \mathbb{Z}/n^s\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n^{s-1}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$  donne une suite exacte longue en homologie,

$$\cdots \rightarrow H_m(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H_m(G, \mathbb{Z}/n^s\mathbb{Z}) \rightarrow H_m(G, \mathbb{Z}/n^{s-1}\mathbb{Z}) \rightarrow H_{m-1}(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

L'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n^s\mathbb{Z}) = 0$ . Donc si  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est nul alors  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n^s\mathbb{Z})$  l'est aussi pour tout entier  $s$  positif. ■

### **Proposition A.1.5**

Soit  $n$  un entier strictement positif fixé. Si  $G$  est un groupe abélien tel que, pour tout  $x \in G$ , il existe un entier  $q$  premier avec  $n$  vérifiant  $qx = 0$ . Alors,  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ .

PREUVE :

Puisque tout groupe abélien est limite inductive de groupes abéliens de type fini, et sachant que la limite inductive permute avec l'homologie, on peut supposer que le groupe  $G$  est de type fini.

Soient  $x_1, \dots, x_m$  des éléments qui engendrent  $G$  tel que, pour tout  $i$ , il existe  $q_i$  vérifiant  $q_i x_i = 0$ , et soit  $q = \prod_{i=1}^m q_i$  (premier avec  $n$ ). On a, pour tout  $i$  tel que,  $1 \leq i \leq m$ ,  $q x_i = 0$ . Donc  $G$  est de  $q$ -torsion.

Soit  $n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$  la décomposition de  $n$  en produit de nombres premiers. On a  $H_*(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^k H_*(G, \mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z})$ . Remarquons que  $q$  est différent de tous les  $p_i$ ,

donc la  $p_i$ -torsion de  $G$  est nulle car elle est aussi de  $q$ -torsion. Puisque  $p_i$  est premier,  $\tilde{H}_*(G, \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})$  est nulle (d'après [4] p. 126) et le lemme précédent permet de conclure. ■

D'après cette proposition l'hypothèse de Charney entraîne celle de Karoubi à savoir  $\tilde{H}_i(I, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ . Alors que, comme nous allons le voir, la réciproque est fautive.

### Exemple d'un pseudoanneau ne vérifiant pas l'hypothèse de Charney

Considérons un nombre premier  $p$  ne divisant pas  $n$ , et soit  $I$  la limite inductive du système  $\frac{1}{n}p\mathbb{Z} \subsetneq \frac{1}{n^2}p\mathbb{Z} \subsetneq \frac{1}{n^3}p\mathbb{Z} \subsetneq \dots$

$$I = \bigcup_i \frac{1}{n^i}p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

- (a) Le nombre premier  $p$  ne divise pas  $n$  donc  $I$  ne contient pas d'unité et par suite c'est un pseudoanneau.
- (b) Le pseudo-anneau  $I$  (vu comme groupe abélien) n'est pas de torsion, donc ne vérifie pas l'hypothèse de Charney.
- (c) Par construction, l'application  $I \xrightarrow{\times n} I$  est surjective, donc le groupe abélien  $I$  est  $n$ -divisible.

La formule des coefficients universels donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_1(I) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow H_1(I, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_0(I), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

comme  $H_0(I) = \mathbb{Z}$  et  $H_1(I) = I$ , on obtient que  $H_1(I, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est nul, puisque  $I$  est  $n$ -divisible.

Le groupe  $p\mathbb{Z}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  en tant que groupe abélien et ce dernier n'a pas d'homologie en degré supérieur ou égal à deux. Donc, le pseudo-anneau  $I$ , comme limite inductive de copies de  $\mathbb{Z}$  vérifie  $H_k(I, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ , pour  $k > 1$ .



# Bibliographie

- [1] A. Bak. *K-theory of forms*. Annals of Math. Studies, Princ. Univ. Press 1980.
- [2] H. Bass. *Algebraic K-theory*. Benjamin, 1968.
- [3] A. Borel. *Topics in the Homology Theory of fibre Bundles*. Springer Lecture Notes 36, 1967.
- [4] K.S. Brown. *Cohomology of groups*. Graduate Text in Mathematics 87, Springer Verlag.
- [5] A. K. Bousfield and D. M. Kan. *Homotopy Limits, Completions, and Localisations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [6] D. Burghelea and Z. Fiedorowicz. *Hermitian Algebraic K-theory of Simplicial Rings and Topological Spaces*. J. Math. Pures et Appl. 64, 1985, 175-235.
- [7] D. Burghelea and Z. Fiedorowicz. *Hermitian Algebraic K-theory of Topological Spaces*. Springer Lecture Notes 1046, 32-46.
- [8] J.L. Cathelineau. *Lambda-structures in Algebraic K-theory and Cyclic Homology*. K-theory 4, 591-606, 1991.
- [9] R.M. Charney. *A note on excision in K-theory*. Springer Lecture Notes 1046, Algebraic K-theory, Number theory, Geometry and Analysis, 47-54.
- [10] A. Connes. *Cohomologie Cyclique et foncteur  $Ext^n$* . C. R. Acad. Sc. Paris, t 269 953-958, 27 Juin 1983.
- [11] W.G. Dwyer, H.R. Miller and C.W. Wilkerson . *The Homotopic Uniqueness of  $BS^3$* . Algebraic topology, Barcelona, 1986, 90-105, L.N.M, 1298, Springer.
- [12] Z. Fiedorowicz and J.L. Loday. *Crossed Simplicial Groups and Their Associated Homology*. Transactions of The American Mathematical Society, Vol326, 1, 57-87, July1991.

- [13] T.G. Goodwillie. *Relative Algebraic K-theory and Cyclic Homology*. Annals of Math. 124, 347-402, 1986.
- [14] D. Guin. *K-théorie algébrique et invariants des formes quadratiques*. Bull. Soc. Math. France Mém. 59, 69-94, 1979.
- [15] P. Gurrola. *Cohomologie quaternionique bivariante et caractère de Chern hermitien* Thèse de doctorat de l'université de Montpellier 2 (1992).
- [16] H. Hiller.  *$\lambda$ -rings and algebraic K-theory*. J. Pure Appl. Algebra 20 (1981), 241-266.
- [17] M. Karoubi. *Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal*. Annals of Math. 112, 207-257, 1980.
- [18] M. Karoubi. *Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne*. Annals of Math. 112, 259-282, 1980.
- [19] M. Karoubi. *Périodicité de la K-théorie hermitienne*. Springer Lecture note 343, 301-411, 1973.
- [20] M. Karoubi. *Some problems and conjectures in algebraic K-theory*. Springer Lecture note 343, 52-56, 1973.
- [21] M. Karoubi. *Homologie des groupes discrets associés à des algèbres d'opérateurs (Appendice 1)*. J. Operator theory 15, 152-159, 1986.
- [22] M. A. Knus. *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 294. Springer-Verlag, 1991.
- [23] Ch. Kratzer. *Lambda-structures en K-théorie algébrique*. Comment. Math. Helv. 55, 233-254, 1980.
- [24] J.L. Loday. *Homologie diédrale et quaternionique*. Advances in Mathematics 66, 119-148, 1987.
- [25] J.L. Loday and D. Quillen. *Cyclic homology and the Lie algebra of matrices*. Com. Math. Helv. 59, 565-591, 1984.
- [26] J.L. Loday. *K-théorie algébrique et représentations de groupes*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. série 4, t.9, 309-377, 1976.
- [27] J.L. Loday. *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math. 96, 205-230, 1989.

- [28] J.L. Loday and C. Procesi. *Homology of symplectic and orthogonal algebras*. Adv. in Math. 69, 93-108, 1988.
- [29] J.L. Loday. *Cyclic Homology*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 301. Springer-Verlag, 1992.
- [30] J. M. Lodder. *Dihedral Homology and Hermitian K-Theory*. K-theory 10, 175-196, 1996.
- [31] J. Milnor. *Introduction to algebraic K-theory* Annals of Math. Studies Princeton, vol. 72, 1971.
- [32] J. Milnor and J. C. Moore . *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. 81 (1965), 211-264.
- [33] J. Neisendorfer. *Primary Homotopy Theory*. Memoirs of the American Mathematical Society, May 1980, Volume 25, Number 232.
- [34] C. Ogle and Ch. Weibel. *Relative K-theory and Cyclic Homology*, preprint, Rutgers Univ. (1986).
- [35] P.F. Pickel. *Rational Cohomology of nilpotent groups and Lie algebras*. Comm. in Algebra, 6, 409-419, 1978.
- [36] D. Quillen. *Rational Homotopy Theory*. Ann. of Math. 90, 205-295, 1969.
- [37] P. Revoy. *Opérations sur les modules bilinéaires*. L'Ens. Math., t. XXVI, fasc. 1-2, 67-90, 1978.
- [38] Y.J. Song. *Volodin's Model in hermitian K-Theory*. K-theory 5, 490-502, 1992.
- [39] Y.J. Song. *Relative Hermitian K-theory and Dihedral Homology*. K-theory 5, 503-529, 1992.
- [40] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics, 1966.
- [41] C. Soulé. *Opérations en K-théorie algébrique*. Can. J. Math. vol. XXXVII, N 3 (1985), 488-550.
- [42] A. A. Suslin and M. Wodzicki. *Excision in algebraic K-theory* Ann. of Math. 136 (1992), 51-122.
- [43] R. G. Swan. *A splitting principle in Algebraic K-theory*. Proc. Symp. in Pure Math. 21 (1971), 155-159.

- [44] J. B. Wagoner. *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory*. Topology 11, 1972, 349-370.
- [45] J.A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. McGraw-Hill series in higher mathematics, 1967.

# Résumé

Dans la première partie, on définit, pour tout anneau involutif  $A$ , une structure de pré- $\lambda$ -anneau sur la  $K$ -théorie orthogonale de  $A$  en utilisant un théorème de prolongement des isométries de Witt dans le cas des anneaux.

On montre que le morphisme  $L_n(A) \rightarrow K_n(A)$ , induit par le foncteur oubli, est un morphisme de pré- $\lambda$ -anneau.

La deuxième partie est consacrée à un analogue d'un théorème de Goodwillie qui relie la  $K$ -théorie algébrique et l'homologie cyclique. En utilisant un modèle de Volodin relatif et la relation, donnée par la théorie de Malcev, entre  $\mathbb{Q}$ -algèbres de Lie nilpotentes et groupes de Lie uniquement divisibles, on montre que, rationnellement, la  $L$ -théorie relative est la même que l'homologie diédrale relative.

Dans la troisième partie, on montre qu'il n'existe pas de groupe simplicial croisé ayant pour réalisation géométrique le groupe  $S^3$ . On construit une longue suite exacte reliant l'homologie  $S^3$ -équivariante et l'homologie  $Pin(2)$ -équivariante d'un  $S^3$ -espace connexe, on déduit l'obstruction à ce que ces deux homologies coïncident et on interprète la suite exacte de périodicité en homologie quaternionique comme la suite exacte de Gysin d'une  $S^3$ -fibration.

**Mots clés :**  $\lambda$ -opérations,  $L$ -théorie, Homologie quaternionique, Homologie équivariante.

# Abstract

In the first part we define for all rings  $A$  with involution a  $\lambda$ -ring structure on the orthogonal  $K$ -theory of  $A$  by using a theorem of Witt of extension of isometries.

We prove that the morphism  $L_n(A) \rightarrow K_n(A)$  induced by the forgetful functor is a morphism of  $\lambda$ -rings.

The second part is devoted to an analogue of a theorem of Goodwillie relating algebraic  $K$ -theory to cyclic homology. By using a Volodin relative model in  $L$ -theory and the relationship given by Malcev theory between nilpotent Lie algebras over  $\mathbb{Q}$  and uniquely divisible groups, we prove that rationally relative  $L$ -theory is the same as relative dihedral homology.

In the third part we show that there is no crossed simplicial group with geometric realization  $S^3$ . We construct a long exact sequence connecting  $S^3$ -equivariant homology of an  $S^3$ -space with its  $Pin(2)$ -equivariant homology, we deduce the obstruction to the equality of the two homologies and we interpret the periodicity exact sequence in quaternionic homology as the Gysin exact sequence of an  $S^3$ -fibration.

**Key words :**  $\lambda$ -operations,  $L$ -theory, Quaternionic homology, Equivariant homology.

