

Die Homologie isolierter Singularitäten

Klaus Lamotke

Die vorliegende Arbeit ist die revidierte Fassung von zwei Manuskripten des Verfassers aus dem Jahre 1970 (Die Störung einer isolierten Hyperflächen-singularität, Syracuse University, und Isolated Critical Points and Monodromy, Liverpool Singularities Symposium), die bisher nur in vervielfältigter Form existierten und seitdem in mehreren Arbeiten über isolierte Singularitäten benutzt wurden. Die im folgenden dargestellten Ergebnisse wurden teilweise unabhängig auch von anderen Autoren gefunden, ohne daß jedoch eine zusammenhängende Darstellung veröffentlicht wurde. Im Grunde genommen gehen Spezialfälle dieser Ergebnisse auf Lefschetz (1924) [15] und Picard (1897) [22] zurück.

§ 1. Überblick

Es wird ein holomorpher Funktionskeim $f: (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ betrachtet, der 0 als isolierte kritische Stelle hat. Wenn man $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ hinreichend klein wählt, bestimmt ein positiver Umlauf längs der Kreislinie $|t| = \delta$ in $\mathbb{C}$ einen Diffeomorphismus $h: F \approx F$, wobei $F = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}: f(z) = \delta \text{ und } |z| \leq \varepsilon\}$ eine durch $|z| \leq \varepsilon$ abgeschnittene reguläre Faser von f in der Nähe der kritischen Stelle ist. Man nennt h die Monodromie. Man kann es so einrichten, daß h den Rand ∂F identisch abbildet, und nur solche Monodromien werden im folgenden zugelassen.

Jeder stetigen Selbstabbildung h eines topologischen Raumes X , die einen Teilraum A identisch abbildet, wird ein sogenannter Variationshomomorphismus $\text{var}: H_q(X, A) \rightarrow H_q(X)$ der ganzzahligen singulären Homologie zugeordnet, so daß $h_* - \text{id}: H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow H_q(X)$ ist. Hier ist id die Identität, der erste Pfeil ist durch die Einbettung $(X, \emptyset) \subset (X, A)$ induziert, und der zweite Pfeil ist die Variation. Insbesondere ist also für die Monodromie $h: F \approx F$ die Variation $H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F)$ definiert. Unter anderem wird gezeigt, daß diese Variation in allen Dimensionen $q \neq 0, \neq \dim F$ ein Isomorphismus ist, sogar dann, wenn f nicht holomorph sondern lediglich reell analytisch ist. Wenn man diese Ergebnisse auf nicht entartete, d.h. quadratische Singularitäten anwendet, erhält man die Picard-Lefschetzschen Formeln.

Schließlich wird ein Funktionskeim f betrachtet, der eine beliebige isolierte, möglicherweise entartete kritische Stelle hat. Man kann dann durch Störung von f eine neue Funktion f' gewinnen, die lauter nicht entartete kritische Stellen hat, während die zu f' gehörige Monodromie $h': F' \approx F'$ zur alten Monodromie von f isomorph ist. (Der positive Umlauf längs $|t| = \delta$ umkreist jetzt mehrere kritische Werte von f' .) Die Picard-Lefschetzschen Formeln für die einzelnen kritischen Stellen von f' zusammen mit der Tatsache, daß die Variation von h ein Isomorphismus ist, ergeben dann die Hauptergebnisse 6.1 der vorliegenden

Arbeit, unter anderem: $H_q(F)=0$ für alle $q \neq 0, \neq n$. (Das hatte Milnor [19] mittels Morsetheorie bewiesen.) Die den einzelnen kritischen Stellen von f' zugeordneten „verschwindenden“ Homologieklassen bilden eine Basis von $H_n(F)$. Die Variation in der Dimension n wird durch eine Dreiecksmatrix beschrieben, aus der man in einfacher Weise die Schnittmatrix von F und die Matrix von $h_*: H_n(F) \approx H_n(F)$ berechnen kann.

§ 2. Die Monodromie

2.1. Es sei $f: X \rightarrow V$ eine eigentliche C^∞ -Abbildung zwischen der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit dem Rand ∂X und der konvexen, offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^q$. Die Beschränkung $f|_{\partial X}$ habe überall den maximalen Rang q . Es sei $K \subset X$ die Menge der kritischen Stellen von f , an denen f einen Rang $< q$ hat, und es sei $\Delta = f(K) \subset V$ die kritische Menge.

In $V \setminus \Delta$ sei ein Basispunkt $*$ fest gewählt. Die kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit $F = f^{-1}(*)$ mit dem Rand $\partial F = F \cap \partial X$ heißt typische reguläre Faser.

2.2. Bei den folgenden Aussagen handelt es sich um Varianten des Ehresmannschen Faserungssatzes [6] (einen neueren Beweis findet man in [25]), der in der vorliegenden Situation besagt, daß $f|_{\dots}: X \setminus f^{-1}(\Delta) \rightarrow V \setminus \Delta$ eine lokal triviale Faserung ist, deren Beschränkung auf $\partial X \setminus f^{-1}(\Delta)$ sogar trivial ist.

Es gibt eine Trivialisierung, d.h. einen Diffeomorphismus

$$(2.2.1) \quad \tau: \partial X \approx \partial F \times V, \quad \tau(x) = (\tau_1(x), f(x)), \quad \text{mit } \tau_1(y) = y \quad \text{falls } y \in F, \\ x \in \partial X, \quad \tau_1(x) \in \partial F, \quad f(x) \in V.$$

Auf $X \setminus K$ gibt es einen integrierbaren Zusammenhang für f , der auf ∂X mit dem durch τ bestimmten Zusammenhang übereinstimmt. Durch Integration eines solchen Zusammenhangs erhält man zu jedem stückweise C^∞ Weg ω in $V \setminus \Delta$ von a nach b einen Diffeomorphismus $h_\omega: F_a \approx F_b$ mit der Eigenschaft

$$(2.2.2) \quad \tau_1 h_\omega(y) = \tau_1(y) \quad \text{für alle } y \in \partial F_a.$$

(Die Integration des Zusammenhangs längs ω ergibt die Isotopie $\beta_\omega: F_a \times I \rightarrow X$ mit $\beta_\omega(x, 0) = x$, $f\beta_\omega(x, \varphi) = \omega(\varphi)$ und $\tau_1(y) = \tau_1\beta(y, \varphi)$ für alle $x \in F_a$, $y \in \partial F_a$ und $\varphi \in I = [0, 1]$. Man definiert dann $h_\omega(x) = \beta(x, 1)$.)

(2.2.3) Wenn sich die Wege ω und ω' hintereinander durchlaufen lassen ($\omega' \omega$ bedeutet: erst ω dann ω'), ist $h_{\omega' \omega} = h_{\omega'} h_\omega$.

(2.2.4) Wenn die Wege ω und ω' bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt homotop sind, sind h_ω und $h_{\omega'}$ homotop, wobei die Homotopie auf ∂F_a stationär ist.

(Eine Homotopie $H: Y \times I \rightarrow Z$ heißt auf $A \subset Y$ stationär, wenn $H(a, t) = H(a, 0)$ für alle $a \in A$ und $t \in I$ gilt.)

(2.2.5) Wenn ω ein geschlossener Weg von $*$ nach $*$ ist, nennt man $h_\omega: F \approx F$ eine *zulässige Monodromie* längs ω . Wegen (2.2.2) ist dann $h_\omega|_{\partial F} = \text{id}$. Bis auf eine Homotopie, die auf ∂F stationär ist, hängt h_ω in diesem Falle nicht von der Wahl der Trivialisierung und des damit verträglichen Zusammenhangs ab.

2.3. Die isolierten Singularitäten ordnen sich der in 2.1 beschriebenen Situation folgendermaßen unter: Es sei U eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^{m+2}$ und $f = f_1 + if_2: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine reell-analytische Funktion mit $f(0) = 0$. Es sei 0 die einzige kritische Stelle von f .

Wenn man den Radius $\varepsilon > 0$ der Vollkugel $B = \{x \in \mathbb{R}^{m+2} : |x| \leq \varepsilon\}$ hinreichend klein wählt, schneidet die singuläre Faser $f^{-1}(0)$ den Rand ∂B transversal, s. Milnor [19], S. 17. Daher schneiden alle Fasern $f^{-1}(t)$, $|t| < \eta$, den Rand ∂B ebenfalls transversal, vorausgesetzt, daß $\eta > 0$ klein genug ist. Wenn man nun $V = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \eta\}$ und $X = f^{-1}(V) \cap B$ mit $\partial X = f^{-1}(V) \cap \partial B$ wählt, sind die Voraussetzungen von 2.1 erfüllt. Es ist $K = \{0\} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ und $\Delta = \{0\} \subset \mathbb{C}$. Als Basispunkt nimmt man ein reelles $\delta \in \mathbb{C}$ mit $0 < \delta < \eta$.

Es genügt, den Weg $\omega(\varphi) = \delta e^{2\pi i \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 1$, und eine zulässige Monodromie $h = h_\omega: F = f^{-1}(\delta) \cap B \approx F$ längs dieses Weges zu betrachten.

2.4. In dieser Situation sind für 3.4 folgende Konstruktion und ihr Ergebnis wichtig: In $F \times [0, 1]$ identifiziert man die Enden $F \times 0$ und $F \times 1$ mittels h , also $(x, 0)$ mit $(h(x), 1)$ für alle $x \in F$. So entsteht eine Mannigfaltigkeit E , deren Rand ∂E in kanonischer Weise zu $\partial F \times S^1$ diffeomorph ist, weil $h|_{\partial F} = \text{id}$ ist. Mit D wird die abgeschlossene Kreisscheibe mit $\partial D = S^1$ bezeichnet.

Satz (Milnor). *Wenn man E und $\partial F \times D$ längs ihrer Ränder mittels des kanonischen Diffeomorphismus identifiziert, erhält man eine zur $(m+1)$ -Sphäre diffeomorphe Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Die über ω liegende Isotopie $\beta: F \times I \rightarrow X$ bestimmt einen Diffeomorphismus $E \approx f^{-1}(\partial D) \cap B$, wobei $D = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \delta\}$ ist. Außerdem hat man die Trivialisierung $\tau^{-1}: \partial F \times D \approx f^{-1}(D) \cap \partial B$. Da sich β und τ miteinander vertragen, entspricht dem kanonischen Diffeomorphismus die identische Abbildung von $f^{-1}(\partial D) \cap \partial B$. Daher folgt die Behauptung aus Milnors Ergebnis, [19] S. 99.

§ 3. Die Variation

Im folgenden wird die singuläre Homologietheorie mit ganzzahligen Koeffizienten benutzt. Alle Überlegungen lassen sich direkt auf Koeffizienten in einem beliebigen nullteilerfreien Hauptidealring übertragen.

3.1. Es sei $F' \subset F$ ein Paar topologischer Räume und es sei $h: F \rightarrow F$ eine stetige Abbildung mit $h|_{F'} = \text{id}$. Man definiert die Variation von h für alle Dimensionen q durch

$$(3.1.1) \quad \text{var}: H_q(F, F') \rightarrow H_q(F), \quad klx \rightarrow kl(h(x) - x).$$

Hier ist ein x ein q -Zykel von (F, F') , klx seine Homologieklassse, $h(x) - x$ ein absoluter q -Zykel von F , dessen Homologieklassse nur von klx abhängt. Die Variation ist ein Homomorphismus. Wenn mehrere Abbildungen h auftreten, wird der Deutlichkeit wegen var_h geschrieben. Folgende Eigenschaften folgen sofort aus der Definition:

Für die Einbettung $j: (F, \emptyset) \rightarrow (F, F')$ gilt

$$(3.1.2) \quad j_* \text{var} = h_* - \text{id} \quad \text{und} \quad \text{var } j_* = h_* - \text{id}.$$

Natürlichkeit. Für h wie oben, $g: G \rightarrow G$ mit $g|_{G'} = \text{id}$ und $\Phi: (F, F') \rightarrow (G, G')$ mit $g\Phi = \Phi h$ gilt

$$(3.1.3) \quad \Phi_* \text{var}_h = \text{var}_g \Phi_*.$$

Verknüpfung. Für zwei Abbildungen $h, g: F \rightarrow F$ mit $h|_{F'} = g|_{F'} = \text{id}$ ist

$$(3.1.4) \quad \text{var}_{gh} = \text{var}_g + \text{var}_h + \text{var}_g j_* \text{var}_h.$$

(3.1.5) *Homotopie.* Wenn $h, g: F \rightarrow F$ homotop sind, wobei die Homotopie auf F' stationär ist, ist $\text{var}_h = \text{var}_g$.

Zum Beweis von (3.1.5) benutzt man, daß die Homotopie zwischen g und h eine Kettenhomotopie $D: C_q(F) \rightarrow C_{q+1}(F)$, $g - h = D\partial + \partial D$, induziert, die $D(a) = 0$ für alle $a \in C_q(F')$ erfüllt.

3.2. Dieser Abschnitt handelt von dem Zusammenhang zwischen der Variation und dem Schnittprodukt. Dazu wird vorausgesetzt, daß F eine m -dimensionale kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit dem Rand $F' = \partial F$ ist. Wenn $a \in H_q(F)$ eine absolute bzw. $\in H_q(F, \partial F)$ eine relative Homologiekategorie ist, wird die dazu Poincaré-duale Kohomologiekategorie mit $a' \in H^{m-q}(F, \partial F)$ bzw. $\in H^{m-q}(F)$ bezeichnet, also $a' \cap [F] = a$, wobei $[F] \in H_m(F, \partial F)$ die Orientierungskategorie ist. Das *Schnittprodukt* der Homologiekategorien a und b ist dann

$$(3.2.1) \quad a \cdot b = (a' \cup b') \cap [F] = a' \cap b,$$

und zwar wird $a \cdot b$ als absolute Kategorie aufgefaßt, wenn wenigstens ein Faktor absolut ist, sonst als relative Kategorie. Für die Einbettung $j: (F, \emptyset) \rightarrow (F, \partial F)$ gilt daher $j_*(a) \cdot b = a \cdot b$ falls b absolut und $j_*(a) \cdot b = j_*(a \cdot b)$ falls b relativ ist.

Falls $\dim a + \dim b = m = \dim F$ ist und a oder b absolut ist, ist also $a \cdot b \in H_0(F)$. Sei $\varepsilon: H_0(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ die Augmentation. Als *Schnittzahl* definiert man in diesem Falle

$$(3.2.2) \quad \langle a, b \rangle = \varepsilon(a \cdot b).$$

Satz. Es sei ein Homöomorphismus $h: F \rightarrow F$ mit $h|_{\partial F} = \text{id}$ gegeben. Für seine Variation $\text{var}: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F)$ gelten:

$$(3.2.3) \quad (\text{var } a) \cdot (\text{var } b) = \text{var}(a \cdot b) - a \cdot (\text{var } b) - (\text{var } a) \cdot b,$$

$$(3.2.4) \quad (\text{var } a) \cdot h_*(b) = \text{var}(a \cdot b) - a \cdot (\text{var } b),$$

insbesondere

$$(3.2.5) \quad \langle \text{var } a, \text{var } b \rangle = -\langle a, \text{var } b \rangle + (-1)^{q(m-1)+1} \langle b, \text{var } a \rangle,$$

$$(3.2.6) \quad \langle h_*(b), \text{var } a \rangle = (-1)^{q(m-1)+1} \langle a, \text{var } b \rangle,$$

$a \in H_q(F, \partial F)$, $b \in H_r(F, \partial F)$ insbesondere $r = m - q$ bei den $\langle -, - \rangle$ -Formeln.

Beweis. Wegen $(\text{var } a) \cdot (\text{var } b) = (\text{var } a) \cdot j_* \text{var } b$ und $j_* \text{var} = h_* - \text{id}$ (3.1.2) sind (3.2.3 + 4) äquivalent. Da $\varepsilon \circ \text{var} = 0$ ist, folgen (3.2.5 + 6) aus (3.2.3 + 4). Daher muß nur (3.2.4) bewiesen werden. Wenn das Schnittprodukt auch für singuläre Ketten α und β definiert wäre, würde (3.2.4) sofort aus der Definition vor var und $h(\alpha \cdot \beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$ folgen. (Die induzierte Kettenabbildung wird mit demselben Buchstaben wie die zugrundeliegende stetige Abbildung bezeichnet.)

Genauer schließt man so: Sei α' ein repräsentierender Kozykel der zu a dualen Kohomologiekategorie α' . Dann ist $\omega' = \alpha' h^{-1} - \alpha'$ ein Kozykel von $(F, \partial F)$, d.h. $\omega' \partial = 0$ und $\omega' = 0$ auf ∂F . Es gilt $(\text{var } a)' = kl\omega'$, d.h.

$$(3.2.7) \quad kl\omega' \cap [F] = \text{var } a.$$

Wenn man dies unterstellt, ergibt sich (3.2.4) wie folgt: Sei β ein repräsentierender Zykel für b . Die linke Seite von (3.2.4) ist die Klasse des absoluten Zyklus

$$(\alpha' h^{-1} - \alpha') \cap h(\beta) = (\alpha' h^{-1}) \cap h(\beta) - \alpha' \cap h(\beta) = h(\alpha' \cap \beta) - \alpha' \cap h(\beta).$$

Hier wurde benutzt, daß das Cappedprodukt auch für (Ko-)Ketten definiert werden kann und sich in üblicher Weise mit Kettenabbildungen verträgt. Entsprechend ist die rechte Seite von (3.2.4) die Homologiekategorie von

$$h(\alpha' \cap \beta) - \alpha' \cap \beta - \alpha' \cap h(\beta) + \alpha' \cap \beta = h(\alpha' \cap \beta) - \alpha' \cap h(\beta)$$

woraus die Gl. (3.2.4) folgt. Es bleibt (3.2.7) zu beweisen: Dazu sei φ ein repräsentierender Zykel für $[F]$. Dann wird a durch $\alpha' \cap \varphi$ und $\text{var } a$ durch $h(\alpha' \cap \varphi) - \alpha' \cap \varphi$ repräsentiert. Die linke Seite von (3.2.7) wird also durch $(\alpha' h^{-1} - \alpha') \cap \varphi$ und die rechte durch $h(\alpha' \cap \varphi) - \alpha' \cap \varphi$ repräsentiert. Die Differenz dieser Zykel ist $(\alpha' h^{-1}) \cap (h(\varphi) - \varphi)$, und es genügt nachzuweisen, daß dies ein Rand ist, in der Tat: $(\alpha' h^{-1}) \cap (h(\varphi) - \varphi)$ repräsentiert die absolute Kategorie $h(a) \cdot \text{var } [F]$. Sie ist Null, weil $\text{var } [F] = 0$ ist.

3.3. Dieser Abschnitt wurde durch das in 2.4 zitierte Milnorsche Ergebnis angeregt. Es sei F eine m -dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit, bei der alle Zusammenhangskomponenten berandet sind. Ferner sei $h: F \approx F$ ein Homöomorphismus mit $h|_{\partial F} = \text{id}$. In $F \times I$ identifiziert man $F \times 0$ mit $F \times 1$ mittels h , also $(x, 0) \sim (h(x), 1)$ für alle $x \in F$. Der Identifikationsraum E ist dann der Totalraum einer Faserung über der Kreislinie S^1 , deren Projektion $E \rightarrow S^1$ durch $F \times I \rightarrow I$, $(x, \varphi) \rightarrow \varphi$, induziert ist. Da $h|_{\partial F} = \text{id}$ ist, hat man einen kanonischen Homöomorphismus $r: \partial F \times S^1 \approx \partial E$. Man heftet E und $T = \partial F \times D^2$ (D^2 ist die abgeschlossene 2-dim. Kreisscheibe mit $\partial D^2 = S^1$) längs ihrer Ränder mittels r aneinander und erhält so eine geschlossene $(m+1)$ -dim. Mannigfaltigkeit $\Sigma = E \cup_r T$.

Satz. Genau dann, wenn F zusammenhängend und orientierbar ist und die Variation von h für alle $0 < q < m$ ein Isomorphismus $\text{var}: H_q(F, \partial F) \approx H_q(F)$ ist, ist Σ eine Homologiesphäre.

Beweis. Die Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung $\Sigma = E \cup T$ mit $E \cap T = \partial F \times S^1$ lautet

$$(3.3.1) \quad \dots \rightarrow \cdot \xrightarrow{k_q} \cdot \rightarrow H_q(\Sigma) \rightarrow \cdot \xrightarrow{k_{q-1}} \cdot \rightarrow H_{q-1}(\Sigma) \rightarrow \dots,$$

wobei $k_q: H_q(\partial F \times S^1) \rightarrow H_q(E) \oplus H_q(T)$ durch die beiden Einbettungen induziert ist. Offenbar ist $H_q(T) \approx H_q(\partial F)$ und nach der Künnethschen Formel $H_q(\partial F \times S^1) \approx H_{q-1}(\partial F) \oplus H_q(\partial F)$. Wenn man entsprechend ersetzt, kann man in (3.3.1) k_q als den Homomorphismus

$$(3.3.2) \quad k_q: H_{q-1}(\partial F) \oplus H_q(\partial F) \rightarrow H_q(E) \oplus H_q(\partial F), \quad (a, b) \rightarrow (\gamma_q(a) + g_*(b), -b)$$

auffassen, bei dem $g: \partial F \approx \partial F \times \text{Basispunkt} \subset \partial F \times S^1 \xrightarrow{r} \partial E \subset E$ die Einbettung ist und γ_q folgendermaßen definiert wird:

$$(3.3.3) \quad \gamma_q: H_{q-1}(\partial F) \xrightarrow{- \times s} H_q(\partial F \times S^1) \xrightarrow{r_*} H_q(\partial E) \xrightarrow{e_*} H_q(E)$$

$s = [S^1] \in H_1(S^1)$ die Orientierungsklasse.

Diese γ_q kommen zusammen mit den $\text{var}_q: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F)$ in den Spalten des Diagramms (3.3.4) vor, dessen Zeilen die exakte Homologiesequenz des Paares $(F, \partial F)$ und die Wangsche exakte Sequenz der Faserung $E \rightarrow S^1$ sind:

$$(3.3.4) \quad \begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(\partial F) & \longrightarrow & H_q(F) & \longrightarrow & H_q(F, \partial F) \longrightarrow H_{q-1}(\partial F) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \gamma_{q+1} & \text{I} & \downarrow \text{id} & \text{II} & \downarrow \text{var}_q \text{ III} \downarrow \gamma_q \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(E) & \xrightarrow{\Delta} & H_q(F) & \xrightarrow{h_* - \text{id}} & H_q(F) \xrightarrow{i_*} H_q(E) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Die Kommutativität des Teildagramms I ergibt sich, wenn man die Definition (3.3.3) mit der Definition von Δ , s. z.B. bei Milnor [19], S. 67, vergleicht:

$$\Delta: H_{q+1}(E) \longrightarrow H_q(E, F) \xleftarrow{\Phi} H_{q+1}(F \times (I, \dot{I})) \xleftarrow{- \times c} H_q(F);$$

hier ist $I = [0, 1]$, $\dot{I} = \{0, 1\}$; die Einbettung $i: F \subset E$ ist durch $F \subset F \times I$, $x \rightarrow (x, 0)$ induziert, und Φ ist durch die kanonische Abbildung $p: F \times I \rightarrow F$ induziert; schließlich ist $c = [I] \in H_1(I, \dot{I})$ die Orientierungsklasse.

Das Teildigramm II ist wegen (3.1.2) kommutativ und die Kommutativität von III bis aufs Vorzeichen beweist man folgendermaßen: Es wird ein Kreuzprodukt $\times$ für singuläre Ketten mit den üblichen Eigenschaften benutzt. Sei τ ein repräsentierender relativer Zykel für c . Man definiert die Kettenhomotopie $D: C_q(F) \rightarrow C_{q+1}(E)$, $Dx = p(x \times \tau)$. Dann ist

$$(3.3.5) \quad i(h(x) - x) = (-1)^q (\partial D x - D \partial x).$$

Wenn nun x ein Zykel von $(F, \partial F)$ ist, ist ∂x ein absoluter $(q-1)$ -Zykel von ∂F . Die Beschränkung von p auf $\partial F \times I$ kann man aber als $\partial F \times I \xrightarrow{\text{id} \times \pi} \partial F \times S^1 \xrightarrow{r} \partial E \subset E$ schreiben, wobei $\pi: I \rightarrow S^1$ Anfangs- und Endpunkt identifiziert, also $kl\pi(\tau) = s$ und $D\partial x = er(\partial x \times \pi(\tau))$. Wenn man dies in (3.3.5) einsetzt und zu den absoluten Homologieklassen übergeht, folgt

$$i_* \text{var}(klx) = (-1)^{q+1} e_* r_* (\partial_*(klx) \times s) = (-1)^{q+1} \gamma_q \partial_*(klx),$$

d.h. die Kommutativität von III bis aufs Vorzeichen.

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich die Behauptung des Satzes folgendermaßen: Sei Σ eine Homologiesphäre. Aus dem Ende der Sequenz (3.3.1) bei $q=0$ folgt, daß E zusammenhängend ist. Weil alle Zusammenhangskomponenten von F berandet sind, ist $H_0(F, \partial F) = 0$. Daher folgt aus dem Ende des Diagramms (3.3.4) bei $q=0$, daß mit E auch F zusammenhängend ist. Da $H_q(\Sigma) = 0$ für alle $0 < q \leq m$ und $q > m+1$ ist und $H_{m+1}(\Sigma) \approx \mathbb{Z}$ ist, folgt aus (3.3.1) weiter: Alle k_q , $0 < q < m$, sind Isomorphismen und k_m ist ein Epimorphismus mit Kern $k_m \approx \mathbb{Z}$. Wegen (3.3.2) gilt dasselbe für γ_q . Wenn man nun auf (3.3.4) das Fünferlemma anwendet, folgt, daß alle var_q für $0 < q < m$ Isomorphismen sind und $H_m(F, \partial F) \approx \mathbb{Z}$ ist. Da F zusammenhängend ist, bedeutet letzteres, daß F orientierbar ist. Alle diese

Schlüsse lassen sich umkehren und ergeben dann die andere Richtung der Behauptung.

3.4. Folgerung. Bei einer isolierten Singularität $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ wie in 2.3 gilt für die dort beschriebene Monodromie $h: F \approx F$: Wenn F keine randlosen Zusammenhangskomponenten hat, ist F zusammenhängend (und orientierbar) und die Variation von h ist für alle $0 < q < m$ ein Isomorphismus $\text{var}: H_q(F, \partial F) \approx H_q(F)$. (In den Dimensionen 0 und m ist die Variation offenbar gleich Null.)

3.5. Ein Beispiel. Die quadratische Singularität

$$(3.5.1) \quad f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z_0^2 + \dots + z_n^2$$

ist das einfachste Beispiel einer isolierten holomorphen Singularität. Im Sinne von 2.3 kann man $\varepsilon > 0$ ganz beliebig und dazu δ , so daß $0 < \delta < \varepsilon^2$ ist, wählen. Die typische reguläre Faser

$$(3.5.2) \quad F = f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}: z_0 \bar{z}_0 + \dots + z_n \bar{z}_n \leq \varepsilon^2 \text{ und } z_0^2 + \dots + z_n^2 = \delta\}$$

besitzt die reelle Sphäre $S^n = \{z \in F: \text{Im } z_j = 0 \text{ für alle } j\}$ vom Radius $\sqrt{\delta}$ als Deformationsretrakt. Daher ist

$$(3.5.3) \quad H_q(F) = 0 \text{ für alle } 0 \neq q \neq n \text{ und } H_0(F) \approx H_n(F) \approx \mathbb{Z}.$$

Wegen der Poincaréschen Dualität folgt dann für die relative Homologie

$$(3.5.4) \quad H_q(F, \partial F) = 0 \text{ für alle } n \neq q \neq 2n \text{ und } H_n(F, \partial F) \approx H_{2n}(F, \partial F) = \mathbb{Z}.$$

Da das Innere $\overset{\circ}{F} = F \setminus \partial F$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, ist F in kanonischer Weise orientiert und somit das Schnittprodukt eindeutig festgelegt. Vermöge der Schnittform $\langle -, - \rangle$ (3.2.2) sind $H_n(F, \partial F)$ und $H_n(F)$ zueinander dual. Man wählt eine Orientierung der reellen Sphäre $S^n \subset F$ und damit ein erzeugendes Element $s \in H_n(F)$. Dazu wählt man das erzeugende Element c von $H_n(F, \partial F)$ so, daß

$$(3.5.5) \quad \langle c, s \rangle = 1$$

ist.

Man nennt S^n verschwindenden Zykel, Lefschetz [15], da diese Sphäre S^n vom Radius $\sqrt{\delta}$ zu einem Punkt wird, wenn man die reguläre Faser $F = f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$ mit $\delta \rightarrow 0$ in die singuläre Faser $f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$ übergehen läßt. Entsprechend heißt s verschwindende Homologieklass.

Gemäß 2.3 gehört zu f eine zulässige Monodromie $h: F \approx F$ mit $h|_{\partial F} = \text{id}$ und dazu eine Variation $\text{var}: H_n(F, \partial F) \rightarrow H_n(F)$. Es sei $j: (F, \emptyset) \subset (F, \partial F)$ die Einbettung. Dann gilt:

$$(3.5.6) \quad \text{var } c = \alpha_n s, \quad \alpha_n = \pm 1,$$

$$(3.5.7) \quad \langle s, s \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade,} \\ -2\alpha_n, & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$(3.5.8) \quad j_* s = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade,} \\ -2\alpha_n c, & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$(3.5.9) \quad h_* s = (-1)^{n+1} s.$$

Beweis. Da var ein Isomorphismus ist, s. 3.4, folgt (3.5.6). Wenn man (3.2.5) auf $a=b=c$ anwendet, folgt (3.5.7). Daraus ergibt sich (3.5.8), da $\langle s, s \rangle = \langle j_* s, s \rangle$ ist. Schließlich kann man $h_* = \text{id} + \text{var } j_*$ (3.1.2) aus (3.5.6+8) berechnen, um (3.5.9) zu erhalten.

§ 4. Die quadratische Singularität

Die Ergebnisse (3.5.4–7) sind für die folgenden §§ 5 und 6 von grundlegender Bedeutung. Daher wird in diesem § 4 (3.5.4) erneut hergeleitet, und zwar so, daß der genaue Wert des Vorzeichens α_n ebenfalls herauskommt. Für diese weitgehend geometrische Herleitung werden im wesentlichen nur die Definitionen der Monodromie und der Variation, nicht aber der Isomorphiesatz in 3.3 benutzt. Für die quadratische Singularität (wie auch für viele andere) kann man leicht eine unzulässige Monodromie explizit angeben. Aus diesem Grunde wird in den beiden ersten Abschnitten gezeigt, wie man generell aus einer unzulässigen Monodromie die Variation einer zulässigen Monodromie berechnen kann.

4.1. Es wird an die in 2.1 beschriebene Situation angeknüpft. Wie dort seien eine Trivialisierung $\tau = (\tau_1, f)$ und ein damit verträglicher Zusammenhang fest gewählt. Es sei ω ein Weg in $V \setminus \Delta$ von $*$ nach $*$. Es sei irgendeine Homotopie

$$(4.1.1) \quad \beta': (F, \partial F) \times I \rightarrow (X, \partial X) \quad \text{mit } f\beta'(x, \varphi) = \omega(\varphi) \text{ und } \beta'(x, 0) = x, \\ x \in F, \varphi \in I,$$

gegeben. Dann nennt man

$$(4.1.2) \quad h'_\omega: F \rightarrow F, \quad h'_\omega(x) = \beta'(x, 1)$$

eine (im allgemeinen unzulässige) Monodromie längs ω . Man definiert die Unverträglichkeitshomotopie

$$(4.1.3) \quad \gamma: \partial F \times I \rightarrow \partial F, \quad \gamma(y, \varphi) = \tau_1 \beta'(y, \varphi).$$

Indem man die Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft der Faserung $f: X \rightarrow V \setminus \Delta$ ausnutzt, findet man eine Homotopie $\Gamma: F \times I \rightarrow F$ von der zulässigen Monodromie h_ω nach h'_ω , so daß $\Gamma = \gamma$ auf $\partial F \times I$ ist.

4.2. Sei $F' \subset F$ ein Paar topologischer Räume, seien $g, h: (F, F') \rightarrow (F, F')$ zwei stetige Abbildungen mit $h|_{F'} = \text{id}$ aber möglicherweise $g|_{F'} \neq \text{id}$. Es sei eine Homotopie $\Gamma: (F, F') \times I \rightarrow (F, F')$ von h nach g gegeben. Dann kann man die Variation $\text{var}_h: H_q(F, F') \rightarrow H_q(F)$ folgendermaßen mittels g und $\gamma = \Gamma|_{F' \times I}$ beschreiben: Sei τ die durch id_I bestimmte 1-Kette auf I , sei $i: F' \subset F$ die Einbettung und sei $\times$ ein Kreuzprodukt für singuläre Ketten. Für jeden q -Zykel x von (F, F') ist dann

$$(4.2.1) \quad \text{var}_h(klx) = kl(g(x) - x + (-1)^q i\gamma(\partial x \times \tau)).$$

Das folgt leicht, indem man $\partial \Gamma(x \times \tau)$ ausrechnet.

4.3. Nun wird wie in 3.5 die quadratische Singularität

$$(4.3.1) \quad f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z_0^2 + \dots + z_n^2$$

betrachtet. Es sei $z_v = x_v + iy_v$ die Zerlegung der Koordinaten in Real- und Imaginärteil. Man schreibt $z = x + iy$ mit $x = (x_0, \dots, x_n)$ und $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, so daß $f(x + iy) = |x|^2 - |y|^2 + i(xy)$ ist. Hier ist $xy = \sum_v x_v y_v$ das übliche innere Produkt in $\mathbb{R}^{n+1}$ und $|x| = \sqrt{x \cdot x}$. Ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und dazu ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon^2$ seien fest gewählt. Die typische Faser (3.5.2) lautet dann

$$(4.3.2) \quad F = \{x + iy: x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon^2, |x|^2 - |y|^2 = \delta, xy = 0\}.$$

Durch die Transformation

$$(4.3.3) \quad u + iv = \frac{x}{|x|} + i \sqrt{\frac{2}{\varepsilon^2 - \delta}} y$$

mit der Umkehrung

$$(4.3.4) \quad x + iy = \sqrt{\frac{|v|^2}{2}(\varepsilon^2 - \delta) + \delta} u + i \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - \delta}{2}} v$$

wird F diffeomorph auf

$$(4.3.5) \quad Q = \{u + iv: u, v \in \mathbb{R}^{n+1}, |u| = 1, |v| \leq 1, uv = 0\}$$

abgebildet. Man kann Q als Totalraum des Bündels aller Tangentialvektoren der Länge ≤ 1 an die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen. Durch $v = 0$ wird in Q der Nullschnitt $S \subset Q$ bestimmt. Eine Orientierung dieser n -Sphäre S bestimmt ein erzeugendes Element $[S] \in H_n(Q) \approx \mathbb{Z}$. Der Tangentialraum an die Sphäre im Punkte $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ist

$$C = \{e_0 + iv: |v| \leq 1, v_0 = 0\} \subset Q.$$

Wenn man C orientiert hat, ist dadurch ein erzeugendes Element $[C] \in H_n(Q, \partial Q) \approx \mathbb{Z}$ bestimmt.

Nachdem man F gemäß (4.3.3 + 4) mit Q identifiziert hat, geht es also darum, $\text{var}[C]$ auszurechnen. Das soll mittels (4.2.1) geschehen. Dazu braucht man eine Trivialisierung $\tau = (\tau_1, f): \partial X \approx \partial Q \times \dot{D}_\eta$, wobei $\dot{D}_\eta = \{t \in \mathbb{C}: |t| < \eta\}$ mit $\delta < \eta < \varepsilon^2$ und $\partial X = \{x + iy: x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon^2, |f(x + iy)| < \eta\}$ ist. Um τ_1 anzugeben, stellt man für $x + iy \in \partial X$ das Bild $f(x + iy) = \rho e^{2\pi i \varphi}$, $0 \leq \rho < \eta$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, in Polarkoordinaten dar. Für $x' + iy' = e^{-\pi i \varphi}(x + iy)$ ist dann $f(x' + iy') = \rho$. Die erste Komponente der Trivialisierung lautet nunmehr $\tau_1: \partial X \rightarrow \partial Q$,

$$\tau_1(x + iy) = e^{\pi i \varphi} \left(\frac{x'}{|x'|} + i \frac{y'}{|y'|} \right).$$

Man beachte, daß diese Definition sinnvoll ist, obwohl φ nicht eindeutig bestimmt ist.

Als Homotopie $\beta': F \times I \rightarrow X = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}: |z| \leq \varepsilon \text{ und } |f(z)| < \eta\}$, s. (4.1.1), nimmt man $\beta'(z, \varphi) = e^{\pi i \varphi} z$. Wenn man F und Q gemäß (4.3.3 + 4) identifiziert, lautet die Unverträglichkeitshomotopie (4.1.3)

$$\gamma: \partial Q \times I \rightarrow \partial Q, \quad \gamma(u + iv, \varphi) = e^{\pi i \varphi}(u + iv).$$

Geometrisch bedeutet dies: Während φ von 0 bis 1 läuft, wird der Punkt $u \in S$ längs des Großkreises durch u in der Richtung des Tangentialvektors $-v$ ver-

schoben, so daß bei $\varphi=1$ der Antipodenpunkt $-u$ erreicht wird. Gleichzeitig wird v längs dieses Großkreises parallel verschoben und erreicht $-v$ bei $\varphi=1$.

Es sei $\pi: Q \rightarrow S$, $\pi(u+iv)=u$. Da π und die Einbettung $S \subset Q$ bis auf Homotopie zueinander invers sind, genügt es $\pi_* \text{var}[C]$ statt $\text{var}[C]$ auszurechnen. Dafür erhält man nach (4.2.1)

$$\pi_* \text{var}[C] = kl(\pi g(C) - \pi(C) + (-1)^n \pi \gamma(\partial C \times I)),$$

wobei $g: Q \rightarrow Q$, $g(u+iv) = -(u+iv)$, die durch β' bestimmte, unzulässige Monodromie ist. Da $\pi(C) = e_0$ und $\pi g(C) = -e_0$ zu Punkten entartet sind, ist $\pi_* \text{var}[C] = (-1)^n (\pi \gamma)_* [\partial C \times I]$, also

$$(4.3.6) \quad \text{var}[C] = (-1)^n \text{grad}(\pi \gamma)[S],$$

wobei $\text{grad}(\pi \gamma)$ der Abbildungsgrad von $\pi \gamma: \partial C \times I \rightarrow S$ ist. Da das Innere $\partial C \times I$ diffeomorph auf $S \setminus \{e_0, -e_0\}$ abgebildet wird, ist $\text{grad}(\pi \gamma) = \pm 1$ und damit hat man (3.5.4) erneut bewiesen.

Um das Vorzeichen α_n zu bestimmen, werden für S und C Orientierungen festgelegt: Man orientiert S als Rand der Einheitsvollkugel im $\mathbb{R}^{n+1}$, wobei $\mathbb{R}^{n+1}$ seine kanonische Orientierung trägt. Man orientiert C durch die Koordinaten $(v_1, \dots, v_n)$; die Reihenfolge ist wichtig. Im einzigen Schnittpunkt $e_0 + i0$ von C und S sind dann $(v_1, \dots, v_n)$ ein positiv orientiertes Koordinatensystem von C und $(u_1, \dots, u_n)$ ein solches von S . Zusammen ergeben sie das Koordinatensystem $(v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n)$ von Q . Die Schnittzahl $\langle [C], [S] \rangle$ ist $+1$ oder -1 , je nachdem, ob dieses Koordinatensystem von Q positiv oder negativ orientiert ist. Als Orientierung von Q wird dabei die „komplexe“ Orientierung von F , durch (4.3.3) nach Q übertragen, genommen. Das oben genannte Koordinatensystem wäre in diesem Sinne positiv orientiert, wenn die Koordinaten in der Reihenfolge $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)$ aufträten. Die Schnittzahl ist also das Vorzeichen der entsprechenden Koordinatenpermutation

$$(4.3.7) \quad \langle [C], [S] \rangle = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Für ∂C wird die von C her induzierte Orientierung genommen und für $\partial C \times I$ die durch die Reihenfolge $\partial C, I$ bestimmte Orientierung, wobei I die kanonische Orientierung trägt. In der Umgebung des Punktes $(e_0 + i e_1, \frac{1}{2})$ ist dann $(v_2, \dots, v_n, \varphi)$ ein positiv orientiertes Koordinatensystem von $\partial C \times I$. Es ist $\pi \gamma(e_0 + i e_1, \frac{1}{2}) = -e_1$. Als positiv orientiertes Koordinatensystem von S in der Umgebung dieses Punktes kann man $(u_0, u_2, \dots, u_n)$ nehmen. Die Funktionaldeterminante von $\pi \gamma$ bezüglich dieser Koordinatensysteme ist negativ und daher ist $\text{grad}(\pi \gamma) = -1$, also wegen (4.3.6) $\text{var}[C] = -(-1)^n [S]$. Wenn man nun nach 3.5 zurückkehrt und $s = [S]$ nimmt, muß man, um (3.5.5) zu erfüllen, $c = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} [C]$ nehmen, s. (4.3.7). Also ist

$$(4.3.8) \quad \text{var } c = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} s, \quad \text{d.h. } \alpha_n = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ in (3.5.6-8).}$$

§ 5. Die Picard-Lefschetzschen Formeln

5.1. Die Picard-Lefschetzschen Formeln sind die Folgerungen aus (3.5.6+7) für eine holomorphe Function $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$, die nur nicht entartete kritische Stellen

hat. Hier ist Y eine komplexe $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, und ein Punkt $a \in Y$ heißt nicht entartete kritische Stelle von f , wenn das Differential $df=0$ in a ist und die Hessesche Form Hf in a den maximalen Rang $n+1$ hat. (Bezüglich irgendwelcher holomorpher Koordinaten $(z_0, \dots, z_n)$ von Y in der Umgebung von a wird Hf durch die Matrix der zweiten Ableitungen $(\partial^2 f / \partial z_j \partial z_k)$ gegeben.) In diesem Falle besagt die holomorphe Version des Morseschen Lemmas, vergleiche die reelle Version bei Milnor [18], S. 6, daß man stets ein lokales Koordinatensystem $(z_0, \dots, z_n)$ so finden kann, daß $f(z) = f(a) + z_0^2 + \dots + z_n^2$ ist.

5.2. Im ganzen §5 werden folgende Bezeichnungen und Voraussetzungen benutzt: Mit $f: X \rightarrow V$ wird eine Abbildung wie in 2.1 bezeichnet, wobei zusätzlich verlangt wird:

Das Innere $\mathring{X} = X \setminus \partial X$ ist $(n+1)$ -dim. komplexe Mannigfaltigkeit.

Es ist $q=2$, also $V \subset \mathbb{C} (\approx \mathbb{R}^2)$.

Die Funktion f ist in $\mathring{X}$ holomorph.

Alle kritischen Stellen von f sind nicht entartet. Die Anzahl dieser Stellen ist endlich.

5.3. Zunächst wird zusätzlich vorausgesetzt, daß f nur eine (nicht entartete) kritische Stelle a mit $f(a)=0 \in V$ hat. Wenn $\delta > 0$ so klein ist, daß

$$D_\delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq \delta\} \subset V$$

ist, sind dann zum Weg $\omega(\varphi) = \delta e^{2\pi i \varphi}$ eine zulässige Monodromie $h: F = f^{-1}(\delta) \approx F$ mit $h|_{\partial F} = \text{id}$ und dazu Variationen $\text{var}: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F)$ für alle q definiert. Da $\mathring{F}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, ist F orientiert.

Picard-Lefschetzsche Formeln

$$(5.3.1) \quad \text{var} = 0: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F) \quad \text{für alle } q \neq n.$$

Es gibt eine „verschwindende“ Homologieklassse $s \in H_n(F)$, die durch eine in $\mathring{F}$ eingebettete n -Sphäre repräsentiert wird, deren Normalenbündel isomorph zum Tangentialbündel von S^n ist. Die Selbstschnittzahl von s ist

$$(5.3.2) \quad \langle s, s \rangle = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(5.3.3) \quad \text{var}(x) = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle x, s \rangle s \quad \text{für alle } x \in H_n(F, \partial F).$$

$$(5.3.4) \quad \text{Folgerungen für die algebraische Monodromie } h_*: H_q(F) \approx H_q(F):$$

$$h_* = \text{id} \quad \text{für alle Dimensionen } q \neq n,$$

$$h_*(y) = y - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle y, s \rangle s \quad \text{für alle } y \in H_n(F)$$

insbesondere

$$h_*(s) = (-1)^{n+1} s,$$

$$h_*^2 = \text{id}, \quad \text{falls } n \text{ gerade,}$$

$$h_*^r(y) = y - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} r \langle y, s \rangle s, \quad \text{falls } n \text{ ungerade} \\ y \in H_n(F), \quad r \in \mathbb{Z}.$$

Das ergibt sich aus (5.3.1–3), weil $h_* = \text{id} + \text{var } j_*$ ist, s. (3.1.2).

5.4. Zum Beweis der Picard-Lefschetz'schen Formeln wird zunächst eine Variante von 2.1 betrachtet: In $\dot{X}$ liege eine gleichdimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit B mit dem Rand ∂B . Auch $f|_{\partial B}$ habe (wie $f|_{\partial X}$) überall den maximalen Rang q . Außerdem sollen alle kritischen Stellen von f in B liegen. In $\dot{F}$ liegt dann die gleichdimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit $F \cap B$ mit $\partial(F \cap B) = F \cap \partial B$. Die Voraussetzungen ergeben, daß jetzt nicht nur ∂X , sondern ganz $X \setminus \dot{B}$ durch f über V trivial gefasert wird. Es gibt also eine Trivialisierung $\tau: X \setminus \dot{B} \approx (F \setminus \dot{B}) \times V$ analog zu (2.2.1) und einen mit τ verträglichen Zusammenhang, so daß der Diffeomorphismus $h_\omega: F_a \approx F_b$ zum Weg ω in $V \setminus \Delta$ sogar $\tau_1 h_\omega(y) = \tau_1(y)$ für alle $y \in F_a \setminus \dot{B}$ erfüllt, vgl. (2.2.2). Insbesondere hat bei einem geschlossenen Weg ω von $*$ nach $*$ die zulässige Monodromie $h_\omega: F \approx F$ die Eigenschaft $h_\omega|_{F \setminus \dot{B}} = \text{id}$. Darum werden durch h drei Variationen bestimmt, die in folgendem Diagramm zusammengefaßt sind:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(F, \partial F) & \xrightarrow{r} & H_q(F, F \setminus \dot{B}) & \xleftarrow{e_1} & H_q(F \cap B, F \cap \partial B) \\
 \downarrow \text{var} & & \downarrow \text{var}_2 & & \downarrow \text{var}_1 \\
 H_q(F) & = & H_q(F) & \xleftarrow{e} & H_q(F \cap B)
 \end{array}$$

Alle waagrechten Homomorphismen sind durch Einbettungen induziert. Insbesondere ist e_1 ein Ausschneidungsisomorphismus. Wegen der Natürlichkeit der Variation (3.1.3) ist das Diagramm kommutativ. Seine Bedeutung liegt darin, daß

$$(5.4.1) \quad \text{var} = e \text{ var}_1 e_1^{-1} r.$$

5.5. *Beweis der Picard-Lefschetz'schen Formeln* (5.3.1–3). In einer Umgebung von a wählt man ein komplexes Koordinatensystem $(z_0, \dots, z_n)$ für $\dot{X}$, so daß $a = (0, \dots, 0)$ und $f(z) = z_0^2 + \dots + tz_n^2$ ist, s. 5.1. Man wählt $\varepsilon > 0$ so klein, daß die Vollkugel $B = \{z: |z| \leq \varepsilon\}$ im Definitionsbereich dieses Koordinatensystems liegt, und man wählt η und δ so, daß $0 < \delta < \eta < \varepsilon^2$ und $\dot{D}_\eta \subset V$. Man hat dann die in 5.4 beschriebene Situation erreicht, indem man V auf $\dot{D}_\eta$ und X auf $f^{-1}(\dot{D}_\eta)$ einschränkt. Daher ist nach (5.4.1)

$$\text{var}: H_q(F, \partial F) \xrightarrow{r} H_q(F, F \setminus \dot{B}) \xleftarrow{e_1} H_q(F \cap B, F \cap \partial B) \xrightarrow{\text{var}_1} H_q(F \cap B) \xrightarrow{e} H_q(F),$$

wobei $F \cap B$ zur typischen Faser (4.3.2), also zu Q (4.3.5) diffeomorph ist und var_1 der in 3.5 betrachteten Variation entspricht. Dann folgt (5.3.1) aus (3.5.3). Das erzeugende Element $s_1 = [S] \in H_n(F \cap B) \approx \mathbb{Z}$ wird gemäß 4.3 gewählt. Dann hat $s = e(s_1) \in H_n(F)$ die gewünschten Eigenschaften. Schließlich wird

$$c_1 \in H_n(F \cap B, F \cap \partial B)$$

so gewählt, daß $\langle c_1, s_1 \rangle = 1$ ist (3.5.5). Dann ist $e_1^{-1} r(x) = \langle x, s \rangle c_1$, und (5.3.3) folgt aus der angegebenen Zerlegung von var und der Formel (4.3.8) für var_1 , c_1 und s_1 .

5.6. Anstelle einer einzigen kritischen Stelle a von f wie in 5.3 wird nun zugelassen, daß f endlich viele nicht entartete kritische Stellen $a_1, \dots, a_m$ hat, so daß $f(a_\mu) \neq f(a_\nu)$ für $\mu \neq \nu$ ist. Es seien $b_1, \dots, b_m \in V$ die zugehörigen kritischen

Werte. Man wählt $\delta > 0$ so klein, daß die Kreisscheiben $D_\mu = \{t \in \mathbb{C} : |t - b_\mu| \leq \delta\}$ alle in V liegen und disjunkt sind. Es sei $\omega_\mu(\varphi) = b_\mu + \delta e^{2\pi i \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 1$, und u_μ ein C^∞ -Weg in $V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ vom Basispunkt $*$ nach $b_\mu + \delta$. Man nennt dann

$$(5.6.1) \quad v_\mu = u_\mu^{-1} \cdot \omega_\mu \cdot u_\mu$$

einen elementaren Weg zu b_μ .

Nach (2.2.3–5) gehört zu jedem $\alpha \in \pi(V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}, *)$ eine Monodromie $h_\alpha: F \approx F$ mit $h_\alpha|_{\partial F}$, die bis auf eine auf ∂F stationäre Homotopie wohlbestimmt ist. (π bedeutet die Fundamentalgruppe.) Zu h_α gehören Variationen $\text{var}_\alpha: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F)$ für alle q , die nur von α abhängen (3.1.5).

Satz. Es sei β_μ die Homotopieklasse eines elementaren Weges v_μ zu b_μ (5.6.1). Dazu gehört ein $s_{\beta_\mu} \in H_n(F)$, so daß für die Monodromie $h = h_{\beta_\mu}$, die Variation $\text{var} = \text{var}_{\beta_\mu}$ und $s = s_{\beta_\mu}$ die Picard-Lefschetzschen Formeln (P.-L. Formeln) (5.3.1–3) und ihre Folgerungen für $(h_{\beta_\mu})_*$ wörtlich zutreffen.

Beweis. Wenn man $\eta > \delta$ hinreichend nahe bei δ wählt, sind für die Umgebung $V' = \{t : |t - b_\mu| < \eta\}$ von b_μ , für $X' = f^{-1}(V')$ und für $f' = f|_{X'}$ die Voraussetzungen 5.2 erfüllt, und man hat es nur mit einer kritischen Stelle a_μ zu tun. Nach 5.3 gelten dann die P.-L. Formeln für die typische Faser $F_\mu = f'^{-1}(b_\mu + \delta)$, für die Monodromie $h'_\mu: F_\mu \approx F_\mu$ längs des Weges ω_μ und die dazu gehörige Variation. Die verschwindende Homologieklassse sei $s'_\mu \in H_n(F_\mu)$. Nun bestimmt der Weg u_μ von $*$ nach $b_\mu + \delta$ einen Diffeomorphismus $\Phi: F \approx F_\mu$, so daß wegen (2.2.3) gilt: $h_{\beta_\mu} = \Phi^{-1} h'_\mu \Phi$. Da alle Operationen, die in den P.-L. Formeln auftreten, natürlich, d.h. mit Φ verträglich sind, bleiben die Formeln für $h = h_{\beta_\mu}$, $\text{var} = \text{var}_{\beta_\mu}$, $s = s_{\beta_\mu} = (\Phi^{-1})_*(s'_\mu) \in H_n(F)$ und alle $x \in H_n(F, \partial F)$ richtig.

5.7. Auch die Voraussetzung von 5.6, daß $f(a_\mu) \neq f(a_\nu)$ für $\mu \neq \nu$ gilt, kann eliminiert werden. Wie in 5.6 seien $a_1, \dots, a_m \in X$ die kritischen Stellen, von denen genau $a_{r+1}, \dots, a_{r+k}$ über demselben kritischen Wert $b \in V$ liegen mögen. Es sei ein elementarer Weg v zu b gewählt, vgl. (5.6.1). Für eine zulässige Monodromie h längs v und die zugehörige Variation $\text{var} = \text{var}_h$ gelten die Picard-Lefschetzschen Formeln (5.3.1–3) mit folgenden Änderungen:

Satz. (5.7.1) = (5.3.1), d.h. $\text{var} = 0$ in allen Dimensionen $q \neq n$. Es gibt verschwindende Homologieklassen $s_1, \dots, s_k \in H_n(F)$, die durch n -Sphären repräsentiert werden, die in $\tilde{F}$ disjunkt eingebettet sind, so daß ihre Normalenbündel zum Tangentialbündel von S^n isomorph sind. Ihre Schnittzahlen lauten:

$$(5.7.2) \quad \langle s_\mu, s_\nu \rangle = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2\delta_{\mu\nu}, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \mu, \nu = 1, \dots, k$$

$$(5.7.3) \quad \text{var } x = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\nu=r+1}^k \langle x, s_\nu \rangle s_\nu.$$

Beweis. Wie im Beweis von 5.6 führt man die Behauptung auf den Fall zurück, daß f nur einen kritischen Wert $b=0$ mit den darüber liegenden kritischen Stellen $a_1, \dots, a_k$ hat. In dieser Situation modifiziert man den Beweis 5.5, der den Fall $k=1$ behandelte, folgendermaßen: Man wählt analog zu 5.5 zu jedem a_k eine Vollkugel B_k , so daß alle B_k disjunkt sind. Man erreicht wie in 5.5 die in 5.4

beschriebene Situation; nur ist diesmal $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ und folglich $F \cap B = (F \cap B_1) \cup \dots \cup (F \cap B_k)$ diffeomorph zur disjunkten Vereinigung von k Exemplaren von Q . Daher ist in jedem $F \cap B_k$ eine n -Sphäre S_k so eingebettet, daß das Normalenbündel isomorph zum Tangentialbündel ist, und alle S_k sind offenbar in $F \cap B$ paarweise disjunkt. Daher bilden die $s'_1 = [S_1], \dots, s'_k = [S_k] \in H_n(F \cap B) \approx \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ eine Basis mit $\langle s'_\mu, s'_\nu \rangle = 0$ für n ungerade und $\langle s'_\mu, s'_\nu \rangle = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2\delta_{\mu\nu}$ für n gerade. Man definiert $s_k = e(s'_k)$. Es sei $c'_1, \dots, c'_k \in H_n(F \cap B, F \cap \partial B)$ die Basis, die bezüglich $\langle -, - \rangle$ zur Basis $s'_1, \dots, s'_k$ dual ist. Dann ist

$$e_1^{-1} r(x) = \sum_{\kappa=1}^k \langle x, s_\kappa \rangle c'_\kappa \quad \text{für alle } x \in H_n(F, \partial F)$$

und die Formeln (5.7.1–3) folgen genauso wie in 5.5.

Bemerkungen. (a) Der Leser möge die Formeln (5.3.4) für den vorliegenden Fall verallgemeinern.

(b) Da jedes Element $\alpha \in \pi(V \setminus \{b_1, \dots, b_p\}, *)$ ein Produkt der elementaren β_μ ist, kann man var_α wegen (3.1.4) durch die var_{β_μ} ausdrücken. Insbesondere ergibt sich, daß

$$(5.7.4) \quad \text{var}_\alpha = 0: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F) \quad \text{für alle } q \neq n \text{ und } \alpha \in \pi$$

gilt. Wenn man var_α in der Dimension n ausrechnen will, benötigt man die Schnittzahlen $\langle s_\mu, s_\nu \rangle$ der verschwindenden Homologieklassen, über die man im allgemeinen nichts weiß, außer in dem Fall, daß s_μ und s_ν zu kritischen Stellen a_μ und a_ν mit $f(a_\mu) = f(a_\nu)$ gehören, s. (5.7.2).

§ 6. Die Störung isolierter Singularitäten

6.1. Es sei U eine Umgebung von 0 in $\mathbb{C}^{n+1}$ und es sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$, die 0 als einzige kritische Stelle hat, d.h. für alle $z \in U$, $z \neq 0$, sei das Differential $df \neq 0$. Wie in 2.3 wählt man ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ und betrachtet die typische reguläre Faser $F = f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$ zusammen mit einer zulässigen Monodromie $h: F \approx F$, also insbesondere $h|_{\partial F} = \text{id}$, längs des Weges $\omega(\varphi) = \delta e^{2\pi i \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 1$. Offenbar ist F eine kompakte, $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial F = f^{-1}(\delta) \cap \partial B_\varepsilon$, deren Inneres $\mathring{F}$ eine komplexe Struktur trägt. Insbesondere ist F kanonisch orientiert und hat keine randlosen Zusammenhangskomponenten, da diese kompakte komplexe Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{C}^{n+1}$ also Punkte wären.

Zur Monodromie h gehört eine (von der Wahl von h unabhängige) Variation $\text{var}: H_q(F, \partial F) \rightarrow H_q(F)$, die nach 3.4 in allen Dimensionen $0 \neq q \neq 2n$ ein Isomorphismus ist. Außerdem werden eingeführt:

$$(6.1.1) \quad \text{die algebraische Monodromie } H = h_*: H_n(F) \approx H_n(F),$$

$$(6.1.2) \quad \text{die Schnittform } S: H_n(F) \otimes H_n(F) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad S(x, y) = \langle x, y \rangle \text{ und}$$

$$(6.1.3) \quad \text{die Verschlingungsform } L: H_n(F) \otimes H_n(F) \rightarrow \mathbb{Z}, \\ L(x, y) = (-1)^{n+1} \langle \text{var}^{-1}(y), x \rangle.$$

Dabei ist $\langle -, - \rangle$ die Schnittzahl (3.2.2).

Hauptsatz. (6.1.4) $H_0(F) = \mathbb{Z}$, $H_q(F) = 0$ für alle $0 \neq q \neq n$, $H_n(F)$ ist eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe.

$$(6.1.5) \quad S(x, y) = L(x, y) + (-1)^n L(y, x) \quad \text{für alle } x, y \in H_n(F).$$

$$(6.1.6) \quad L(x, H(y)) = (-1)^{n+1} L(y, x)$$

Wenn man in $H_n(B)$ irgendeine Basis wählt und H, L und S als Matrizen bezüglich dieser Basis ansieht, ist also

$$(6.1.5') \quad S = L + (-1)^n L^t, \quad t = \text{transponiert.}$$

$$(6.1.6') \quad H = (-1)^{n+1} L^{-1} L^t,$$

Da var ein Isomorphismus ist, ist L invertierbar.

(6.1.7) Die Monodromie $h: F \approx F$ läßt sich als Produkt $h = h_m \circ \dots \circ h_1$ von Monodromien $h_\mu: F \approx F$ mit $h_\mu | \partial F = \text{id}$ schreiben. Zu jedem μ gehört eine „verschwindende“ Homologieklass $s_\mu \in H_n(F)$, welche durch eine in $\mathring{F}$ eingebettete orientierte n -Sphäre repräsentiert wird, deren Normalenbündel zum Tangentialbündel von S^n isomorph ist. Für jedes h_μ , seine Variation $\text{var}_\mu = \text{var}_{h_\mu}$ und s_μ gelten die Picard-Lefschetzschen Formeln (5.3.1–4).

(6.1.8) Die $(s_1, \dots, s_m)$ bilden eine Basis von $H_n(F)$.

$$(6.1.9) \quad H = \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1, \text{ wobei } \sigma_\mu: H_n(F) \approx H_n(F), \sigma_\mu(x) = x - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S(x, s_\mu) s_\mu.$$

(6.1.10) Bezüglich der Basis (6.1.9) wird L durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben, deren Diagonalelemente $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ lauten.

6.2. Beweis. Zunächst wird gezeigt, daß aus (6.1.7+8) zusammen mit den Ergebnissen von 3.2, 3.4 und 5.3 die übrigen Behauptungen folgen:

Zu (6.1.4): Nach 3.4 ist F zusammenhängend und $\text{var}: H_q(F, \partial F) \approx H_q(F)$ für alle $0 \neq q \neq 2n$ ein Isomorphismus. Da andererseits in allen Dimensionen $q \neq n$ jedes $\text{var}_\mu = 0$ ist (5.3.1), folgt aus der Kompositionsregel (3.1.4), daß auch $\text{var} = 0$ ist. Daher muß $H_q(F) = H_q(F, \partial F) = 0$ für alle $q \neq 0, \neq n, \neq 2n$ sein. Außerdem sind dann $H_n(F)$ und $H_n(F, \partial F)$ freie abelsche Gruppen und bezüglich $\langle -, - \rangle$ dual zueinander.

Zu (6.1.5+6). Nach (3.2.5) ist $S(\text{var } a, \text{var } b) = -(\langle a, \text{var } b \rangle + (-1)^n \langle b, \text{var } a \rangle)$ für alle $a, b \in H_n(F, \partial F)$. Da var in der Dimension n ein Isomorphismus ist, ist es sinnvoll $x = \text{var } a$ und $y = \text{var } b$ einzusetzen, so daß (6.1.5) entsteht. Entsprechend folgt (6.1.6) aus (3.2.6).

Zu (6.1.9). Wegen (5.3.4) ist $\sigma_\mu = (h_\mu)_*$. Daher folgt die Behauptung aus $h = h_m \circ \dots \circ h_1$.

Zu (6.1.10). Es sei $c_1, \dots, c_m \in H_n(F, \partial F)$ die zu $s_1, \dots, s_m \in H_n(F, \partial F)$ duale Basis, also $\langle c_\mu, s_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$. Es sei V die Matrix von var bezüglich dieser Basen. Dann ist nach (6.1.3) $L = (-1)^{n+1} (V^{-1})^t$. Die Behauptung ist somit äquivalent zu:

(6.2.1) V ist eine untere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente $-(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ lauten.

Zum Beweis wird $g_\mu = h_\mu \circ \dots \circ h_1$, $\mu = 1, \dots, m$, eingeführt und durch Induktion

über μ bewiesen:

$$\begin{aligned}
 (6.2.2) \quad \text{var}_{g_\mu}(c_k) &= -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} s_k + \text{Linearkombination der } s_{k+1}, \dots, s_\mu; \quad k < \mu \\
 &= -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} s_k; \quad k = \mu \\
 &= 0; \quad k > \mu.
 \end{aligned}$$

Der Induktionsbeginn bei $\mu=1$ folgt aus (5.3.3), weil $g_1=h_1$ ist. Für den Schluß von μ auf $\mu+1$ zerlegt man die Variation von $g_{\mu+1}=h_{\mu+1} \circ g_\mu$ gemäß (3.1.4): $\text{var}_{g_{\mu+1}} = \text{var}_{h_{\mu+1}} + \text{var}_{g_\mu} + \text{var}_{h_{\mu+1} \circ j_* \circ \text{var}_{g_\mu}}$. Wenn man hier c_k einsetzt, folgt:

$\text{var}_{g_{\mu+1}}(c_k) = -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \delta_{\mu+1, k} s_{\mu+1} + \text{var}_{g_\mu}(c_k) + \lambda s_{\mu+1}$, wobei $\lambda \in \mathbb{Z}$, und zwar $\lambda=0$ falls $k > \mu$ ist. Wenn man nun $\text{var}_{g_\mu}(c_k)$ gemäß der Induktionsvoraussetzung ersetzt, folgt die Induktionsbehauptung und damit für $\mu=m$ die Behauptung (6.2.1), da $h=g_m$ ist.

6.3. Zum Beweis von (6.1.7+8) wird eine Entfaltung von $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ benutzt. Darunter versteht man eine holomorphe Funktion $g: U \times W \rightarrow \mathbb{C}$, wobei W eine konvexe Umgebung von 0 in $\mathbb{C}^q$ ist, so daß für alle $z \in U$ gilt: $f(z) = g_0(z) = g(z, 0)$. Allgemein sei für festes $a \in W$ definiert: $g_a: U \rightarrow \mathbb{C}$, $g_a(z) = g(z, a)$.

Es seien ε , η und δ gemäß 2.3 gewählt. Da 0 die einzige kritische Stelle von f ist, kann man zu jedem vorgegebenen η' mit $\delta < \eta' < \eta$ ein W finden, so daß für alle $a \in W$ gilt:

(6.3.1) Alle Fasern $g_a^{-1}(t)$, $|t| \leq \eta'$, schneiden ∂B_ε transversal.

(6.3.2) Alle Punkte $z \in B_\varepsilon$ mit $|g_a(z)| \geq \delta$ sind regulär für g_a .

Man nennt dann jedes derartige g_a eine (ε, δ) -Störung von f . Nach 2.1 ist für die Abbildung g_a mit der typischen regulären Faser $F_a = g_a^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$ längs des Weges $\omega(\varphi) = \delta e^{2\pi i \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 1$, eine zulässige Monodromie $h_a: F_a \approx F_a$ definiert.

Lemma. Wie in 6.1 sei F die typische reguläre Faser von f und $h: F \approx F$ eine zulässige Monodromie für f längs ω . Es gibt einen Diffeomorphismus $\Phi: F \approx F_a$, so daß h und $\Phi^{-1} h_a \Phi$ homotop sind, wobei die Homotopie auf ∂F stationär ist.

Beweis. Sei $D_r = \{t \in \mathbb{C}: |t| \leq r\}$. Man erhält die in 2.1 beschriebene Situation, wenn man $V = \dot{D}_{\eta'} \times W$, $X = \{(z, w) \in U \times W: |z| \leq \varepsilon \text{ und } |g(z, w)| < \eta'\}$ und $G: X \rightarrow V$, $G(z, w) = (g(z, w), w)$ wählt. Wegen (6.3.1) hat $G|_{\partial X}$ überall den maximalen Rang q . Aus (6.3.2) folgt, daß die kritische Menge Δ in $\dot{D}_\delta \times W$ enthalten ist. Man bildet in $V \setminus \Delta$ die Wege

$$\Omega(\varphi) = (\delta e^{2\pi i \varphi}, 0), \quad \Omega_a(\varphi) = (\delta e^{2\pi i \varphi}, a) \quad \text{und} \quad v(\varphi) = (\delta, a\varphi); \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Es ist $G^{-1}(\delta, 0) = F$ und $G^{-1}(\delta, a) = F_a$. Eine zulässige Monodromie h_Ω für G längs Ω ist eine zulässige Monodromie h für f längs ω kurz $h_\Omega = h$ und entsprechend $h_{\Omega_a} = h_a$. Die Wege Ω und $v^{-1} \Omega_a v$ sind in $V \setminus \Delta$ zueinander homotop. Wenn man $\Phi = h_v: F \approx F_a$ als den Diffeomorphismus längs v definiert, gilt wegen (2.2.3+4), daß $\Phi^{-1} h_a \Phi$ und h homotop sind, wobei die Homotopie auf ∂F stationär ist.

6.4. Zu jedem f gibt es eine Entfaltung g , so daß g_a für fast alle a nicht entartet ist, d.h. nur nicht entartet kritische Stellen hat, die außerdem in verschiedenen Fasern liegen. Zum Beispiel ist dies für $g(z, w) = f(z) + w_0 z_0 + \dots + w_n z_n$ der Fall,

s. Milnor [19], S. 113. Es sei nun g_a eine nicht entartete (ε, δ) -Störung von f . Dann treffen für g_a , F_a und h_a wie in 6.3 die Voraussetzungen und damit auch die Ergebnisse von 5.6 zu. Wegen des Lemmas in 6.2 kann man die Ergebnisse mittels Φ^{-1} auf f , F und h übertragen und erhält so (6.1.7). Ferner gilt, s. Milnor [19], Appendix B oder Brieskorn [3a], Appendix:

(6.4.1) *Der Rang m von $H_n(F)$, s. (6.1.9), ist gleich der Anzahl der kritischen Stellen, die eine nicht entartete (ε, δ) -Störung g_a von f innerhalb der „Dose“ $g_a^{-1}(D_\delta) \cap B_\varepsilon$ hat.*

Wenn man nun $\text{var}: H_n(F, \partial F) \approx H_n(F)$ gemäß (3.1.4) aus den einzelnen $\text{var}_\mu(x) = \pm \langle x, s_\mu \rangle s_\mu$ (5.3.3) zusammensetzt, folgt, daß $H_n(F) = \text{Bild}(\text{var})$ von $s_1, \dots, s_m$ erzeugt wird. Wegen (6.4.1) bilden die $s_1, \dots, s_m$ dann sogar eine Basis, so daß (6.1.8) bewiesen ist. (Möglicherweise läßt sich auch (6.4.1) direkt mit den hier benutzten Methoden beweisen. J. W. Bruce, Liverpool, verdanke ich den Hinweis, daß der Beweis dafür in [13] unzureichend war.)

§ 7. Literaturhinweise

Die Definition der Monodromie $h: F \approx F$ einer isolierten Singularität ist mit der willkürlichen Wahl von ε und δ behaftet, s. 2.3. Milnors Überlegungen, [19], S. 17ff., zeigen, daß h bis auf „Diffeomorphie“ von der Wahl von ε und δ unabhängig ist. Deligne, [4], S. 22ff., führt aus, wie man umgekehrt aus h die Singularität f bis auf topologische Äquivalenz rekonstruieren kann.

Die Ergebnisse von 3.5 und ihre Konsequenzen in § 5 gehen auf Picard, [22], S. 95ff., und Lefschetz, [15], S. 23f., zurück. Beim § 4 handelt es sich in etwa um eine moderne Fassung der alten Beweise, s. auch [16, 21] und [4].

Man kann $f^{-1}(0) \cap \partial B \subset \partial B$ als höherdimensionalen Knoten untersuchen. Die Seifertsche Verschlingungsform L für die üblichen Knoten im $\mathbb{R}^3$, s. [23], wurde von Levine [17] auf den höherdimensionalen Fall verallgemeinert. Bei einer isolierten Singularität entspricht diese Verschlingungsform der Variation, s. (6.1.3) und [12]. Für die Seifertsche Verschlingungsform findet man die Ergebnisse (6.1.5+6) im wesentlichen schon bei Levine [17]. Durfee [5] bewies mit den Methoden des Manuskriptes [13] direkt für die Seifertsche Verschlingungsform L die Dreiecksgestalt, vgl. (6.1.10), ohne den Zusammenhang (6.1.3) zu benutzen.

Die von allen „Spiegelungen“ $\sigma_1, \dots, \sigma_m: H_n(F) \approx H_n(F)$ erzeugte Automorphismengruppe hängt nicht von der Wahl der Störung g_a von f ab, mit deren Hilfe die σ_μ gewinnen wurden, s. 6.4. Das ergibt sich, wenn man statt irgendeiner Entfaltung g „die“ universelle Entfaltung nimmt, s. dazu Looijenga [17a].

Beginnend mit Pham [20] wurden eine Reihe von Methoden entwickelt, um die Verschlingungsform L einer isolierten Singularität explizit zu berechnen, siehe insbesondere [1, 7–11].

Arnold, s. [2] und [3], und Siersma [24] haben alle isolierten Singularitäten mit $\text{rg } H_n(F) \leq 13$ bis auf analytische Äquivalenz klassifiziert und die zugehörigen Verschlingungsformen angegeben. Arnolds Arbeiten enthalten darüber hinaus einen Überblick über alle wichtigen Ergebnisse im Zusammenhang mit isolierten Singularitäten und umfangreiche Literaturverzeichnisse.

Literatur

1. A'Campo, N.: Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I. Math. Ann. **213**, 1 – 32 (1975)
2. Arnold, V.I.: Some remarks on the stationary phase method and Coxeter numbers. Uspehi mat. Nauk (engl. Übersetzung in Russ. math. Surveys) **28:2**, 17 – 44 (1973)
3. Arnold, V.I.: Normal forms of functions near degenerate critical points. Ibid. **29:2**, 11 – 49 (1974)
- 3a. Brieskorn, E.: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Manuscripta mathematica **2**, 103 – 161 (1970)
4. Deligne, P.: Exposé XIV in Groupes de monodromie en géométrie algébrique. In: Séminaire de géométrie algébrique 7 II par P. Deligne et N. Katz. Lecture Notes in Mathematics N° 340, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
5. Durfee, A.: Fibered knots and algebraic singularities. Topology **13**, 47 – 59 (1974)
6. Ehresmann, C.: Sur l'espaces fibrés différentiables. C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 1611 – 1612 (1947)
7. Gabrielov, A.M.: Intersection matrices of some singularities. Funkcional'. Analiz Prilozhenija (engl. Übersetzung: Functional Analysis Appl.) **7:3**, 18 – 32 (1973)
8. Gabrielov, A.M.: Bifurcations, Dynkin diagrams and number of modules of isolated singularities. Ibid. **8:2**, 7 – 12 (1974)
9. Gabrielov, A.M.: Dynkin diagrams of unimodular singularities. Ibid. **8:3** (1974)
10. Gusein-Zade, S.M.: Intersection matrices of some singularities of functions of two variables. Ibid. **8:1**, 11 – 15 (1974)
11. Gusein-Zade, S.M.: Dynkin diagrams for singularities of functions of two variables. Ibid. **8:4** (1974)
12. Kauffman, L.H.: Branched coverings, open books and knot periodicity. Topology **13**, 143 – 160 (1974)
13. Lamotke, K.: Die Störung einer isolierten Hyperflächensingularität. Vervielfältigtes Manuskript. Syracuse University 1970
14. Lamotke, K.: Isolated critical points and monodromy. Vervielfältigtes Manuskript. Liverpool Singularities Symposium 1970 (nicht in den Proceedings dieses Symposiums)
15. Lefschetz, S.: L'Analysis situs et la géométrie algébrique. Paris: Gauthiers-Villars 1924
16. Leray, J.: Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. Bull. Soc. math. France **87**, 81 – 180 (1959)
17. Levine, J.: Polynomial invariants of knots in codimension two. Ann. of Math., II. Ser. **84**, 537 – 554 (1966)
- 17a. Looijenga, E.: The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. Inventiones Math. **23**, 105 – 116 (1974)
18. Milnor, J.: Morse Theory. Annals of Math. Studies n° 51. Princeton: Princeton University Press 1963
19. Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces. Ibid. n° 61, 1968
20. Pham, F.: Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. math. France **93**, 333 – 367 (1965)
21. Pham, F.: Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars 1967
22. Picard, E., Simart, S.: Traité des fonctions algébriques de deux variables. Vol. I. Paris: Gauthier-Villars 1897
23. Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571 – 592 (1934)
24. Siersma, D.: Classification and deformation of singularities. Dissertation. Amsterdam 1974. (S. auch Indagationes math. **23**, 105 – 116 (1974))
25. Wolf, J.: Differentiable fibre spaces and mappings compatible with Riemannian metrics. Michigan math. J. **11**, 65 – 70 (1964)

Prof. Dr. K. Lamotke
Mathematisches Institut der Universität
D-5000 Köln 41
Weyertal 86
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 12. Dezember 1974)