Comment. Math. Helvetici **60** (1985) 179–192 0010–2571/85/020179–14$01.50 + 0.20/0
© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur l'invariant de Kervaire des noeuds classiques

JEAN LANNES

0. Introduction

L'objet de cette note est de montrer que l'invariant de Kervaire d'un noeud de $\mathbb{R}^3$, donné par l'une de ses projections génériques, s'exprime comme une somme dans $\mathbb{Z}/2$ de termes indexés par les paires de points de croisements.

Le plan du papier est le suivant. On rappelle tout d'abord la définition de l'invariant de Kervaire d'un noeud (paragraphe 1). On fixe ensuite une immersion générique de S^1 dans $\mathbb{R}^2$ et on considère l'ensemble des noeuds de $\mathbb{R}^3$ audessus de cette immersion; cet ensemble fini, noté A, est muni trivialement d'une structure de $\mathbb{Z}/2$-espace affine (paragraphe 2). Au paragraphe 3, on caractérise l'invariant de Kervaire parmi les fonctions définies sur A et à valeurs dans $\mathbb{Z}/2$. Cette caractérisation permet au paragraphe 4 le calcul de l'invariant de Kervaire. On montre au paragraphe 5 que les formules du paragraphe 4 peuvent conduire à une définition purement combinatoire de l'invariant de Kervaire d'un noeud. On montre au paragraphe 6 que ces mêmes formules permettent d'exprimer la forme de Kervaire relative à la surface de Seifert du noeud construite à partir de sa projection. Enfin, le paragraphe 7 est consacré à quelques exemples.

Le papier se veut "élémentaire" aussi a-t-on essayé, dans la mesure du possible, d'être "self-contained".

1. Rappel sur l'invariant de Kervaire d'un noeud

L'invariant de Kervaire d'un noeud a été découvert par Robertello dans [7]; il a été étudié et sa définition reformulée par beaucoup d'auteurs (voir en particulier l'article [5] de J. Levine). On trouvera dans [3] une méthode de calcul de cet invariant, basée sur le travail de J. H. Conway [2], différant sensiblement de celle de notre papier.

Soit N un noeud dans $\mathbb{R}^3$. On sait qu'il existe une surface compacte orientée M plongée dans $\mathbb{R}^3$ dont le bord est N; on dit que M est une surface de Seifert du noeud. Le plongement de M dans $\mathbb{R}^3$ induit une parallélisation stable de M, notée

t, qui détermine une application $q_t : H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ telle que l'on a, pour tous u, v dans $H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$:

$$q_t(u+v) = q_t(u) + q_t(v) + \langle u \cup v, [M] \rangle.$$

En d'autres termes, q_t est une forme quadratique, appelée forme de Kervaire, associée à la forme bilinéaire non dégénérée:

$$H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \times H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2, \qquad (u, v) \mapsto \langle u \cup v, [M] \rangle.$$

On montre que la classe de q_t dans le groupe de Witt quadratique $WQ(\mathbb{Z}/2)$ est indépendante du choix de M (c'est en fait un invariant de la classe de cobordisme du noeud N). Or le groupe $WQ(\mathbb{Z}/2)$ ne contient qu'un seul élément non trivial, l'unique isomorphisme de $WQ(\mathbb{Z}/2)$ sur $\mathbb{Z}/2$ est appelé l'invariant de Arf (parce qu'il coïncide avec l'invariant de Arf défini plus généralement pour tout corps de caractéristique 2 [1]); l'invariant de Arf de q_t est appelé l'invariant de Kervaire (ou parfois de Arf) du noeud N.

La forme de Kervaire q_t, qui est définie pour toute surface compacte orientée M munie d'une parallélisation stable t, peut être caractérisée de la façon suivante. Soient C une sous-variété de dimension 1 compacte sans bord de $M - \partial M$ dont le fibré normal dans M est orienté et t_C la parallélisation stable de C induite par t, alors la valeur de q_t sur l'élément de $H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$, représenté par C, est la classe de (C, t_C) dans le groupe de cobordisme stablement parallélisé $\Omega_1^{fr} \simeq \mathbb{Z}/2$; c'est aussi , dans le cas particulier où M est une surface de Seifert, la réduction modulo 2 de l'enlacement dans $\mathbb{R}^3$ de C et de sa translatée selon la normale orientée à M.

2. Formalisme relatif aux noeuds de $\mathbb{R}^3$ au-dessus d'une immersion générique de S^1 dans $\mathbb{R}^2$

Soit $\alpha : S^1 \to \mathbb{R}^2$ une immersion générique. On note respectivement $\tilde{X}$ et X l'ensemble des points doubles de α à la source et au but. La restriction de $\alpha : \tilde{X} \to X$ est un revêtement trivial à deux feuillets dont l'ensemble des sections est noté A. Cet ensemble est un espace affine sous le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel $V = (\mathbb{Z}/2)^X$: la différence entre deux sections s_1, s_2 est la fonction caractéristique du sous-ensemble $\{x; s_1(x) \neq s_2(x)\}$ de X. On observera que l'on peut aussi considérer V comme le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de base X. On note enfin $\xi \mapsto \xi^*$ l'involution de $\tilde{X}$ associée au revêtement $\tilde{X} \to X$.

A une section s de $\tilde{X} \to X$, on fait correspondre un noeud de la façon suivante. Soit $\lambda_s : S^1 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que:

$$\lambda_s(s(x)) > \lambda_s((s(x))^*), \qquad \forall x \in X;$$

alors l'application $\beta_s = \alpha \times \lambda_s : S^1 \to \mathbb{R}^3$ est un plongement dont la classe d'isotopie est indépendante du choix de λ_s. Le noeud correspondant est noté N_s.

Nous espérons que les prochains paragraphes convaincront le lecteur de l'utilité du formalisme ci-dessus qui peut paraître a priori un tantinet pédant!

3. Caractérisation de l'invariant de Kervaire des noeuds N_s

Soit a un point de $S^1 - \tilde{X}$, on définit une section, notée s_a, du revêtement $\tilde{X} \to X$ de la façon suivante. On munit $S^1 - \{a\}$ de la relation d'ordre induite par un difféomorphisme orienté de $S^1 - \{a\}$ sur $\mathbb{R}$ et on pose $s_a(x) = \inf \alpha^{-1}(x)$. Il est clair que s_a ne dépend que de la composante connexe de a dans $S^1 - \tilde{X}$. Nous appelons les sections du type s_a les sections descendantes. Le tracé des noeuds correspondants explique cette terminologie; ces noeuds sont triviaux.

Soient x et y deux points distincts de X, on note $e : V \times V \to \mathbb{Z}/2$ l'unique forme bilinéaire alternée telle que:

$$e(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha^{-1}(x) \text{ et } \alpha^{-1}(y) \text{ sont enlacés dans } S^1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

THEOREME 3.1. *L'application $k : A \to \mathbb{Z}/2$ qui associe à une section s du revêtement $\tilde{X} \to X$ l'invariant de Kervaire du noeud N_s est caractérisée par les propriétés suivantes:*

(i) $k(s+u+v) - k(s+u) - k(s+v) + k(s) = e(u, v), \quad \forall s \in A, \quad \forall (u, v) \in V \times V$

(ii) *k est nulle sur les sections descendantes.*

Démontrons tout d'abord l'unicité. La différence entre deux applications possédant les propriétés (i) et (ii) est une application affine qui est nulle sur les sections descendantes; l'unicité résulte donc du lemme suivant:

LEMME 3.2. *Les sections descendantes engendrent affinement A.*

Démonstration. Soient ξ un point de $\tilde{X}$ et s_1, s_2 les sections descendantes correspondant aux deux composantes connexes de $S^1 - \tilde{X}$ adjacentes à ξ, il est clair que $s_2 - s_1 = \alpha(\xi)$.

Suite de la démonstration du théorème 3.1. Il est évident que l'invariant de Kervaire vérifie (ii), il reste à montrer qu'il vérifie (i). Pour cela, on va utiliser la surface de Seifert du noeud N_s que l'on construit à partir de sa projection (voir par exemple [8] p. 120).

Commençons par définir la surface de Seifert de l'immersion α. Les sous-ensembles $\alpha^{-1}(x)$, x parcourant X, sont des 0-sphères plongées dans S^1. Nous notons L la trace des chirurgies orientées correspondant à ces 0-sphères, L est donc une surface orientée dont le bord est une somme disjointe $(-\partial_0 L) \amalg \partial_1 L$, $\partial_0 L$ désignant notre S^1 d'origine et $\partial_1 L$ le résultat de la chirurgie. Nous appelons surface de Seifert de l'immersion α la surface orientée, notée M, obtenue en collant un disque D^2 sur chacune des composantes connexes de $\partial_1 L$.

La construction de Seifert (loc. cit.) montre qu'il existe un plongement $\gamma_s : M \to \mathbb{R}^3$ qui étend le plongement $\beta_s : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Le plongement γ_s détermine une parallélisation stable de M compatible avec l'orientation; cette parallélisation stable est notée $f(s)$. L'ensemble, noté B, des parallélisations stables de M compatibles avec l'orientation est un espace affine sous $[M, SO] \simeq H^1(M; \mathbb{Z}/2)$.

Comme nous l'avons rappelé au §1, un élément t de B détermine une forme quadratique $q_t : H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$, associée à la forme bilinéaire alternée notée $b : H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \times H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$, $(u, v) \mapsto \langle u \cup v, [M] \rangle$. L'invariant de Kervaire du noeud N_s est par définition l'invariant de Arf de la forme quadratique $q_{f(s)}$.

LEMME 3.3. *L'invariant de Arf de q_t, noté $\kappa(t)$, vérifie la formule:*

$$\kappa(t+u+v) - \kappa(t+u) - \kappa(t+v) + \kappa(t) = b(ju, jv),$$
$$\forall t \in B, \qquad \forall (u, v) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2) \times H^1(M; \mathbb{Z}/2),$$

$j : H^1(M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$ désignant l'isomorphisme inverse de celui induit par l'inclusion: $(M, \varnothing) \hookrightarrow (M, \partial M)$.

Démonstration. L'effet d'un changement de trivialisation sur la forme de Kervaire est décrit par la formule suivante:

$$q_{t+u}(c) = q_t(c) + \langle u \cup c, [M] \rangle, \qquad \forall c \in H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2);$$

soit encore:

$$q_{t+u}(c) = q_t(c) + b(ju, c), \qquad \forall c \in H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2). \tag{*}$$

Pour s'en convaincre, on peut considérer la caractérisation de q_t que nous

avons donnée au §1 et utiliser que le J-homomorphisme: $\pi_1 SO \to \Omega_1^{fr}$ est un isomorphisme. On en déduit:

$$\kappa(t+u)-\kappa(t)=q_t(ju) \qquad (**)$$

et le résultat.

Compte tenu du lemme précédent, la preuve du théorème 3.1 sera achevée dès qu'on aura démontré les deux lemmes suivants.

LEMME 3.4. *L'application $f: A \to B$ est affine et l'application linéaire sous-jacente $V \to H^1(M; \mathbb{Z}/2)$ est la composition ci-dessous, notée $h: V \simeq H_1(L, \partial_0 L; \mathbb{Z}/2) \to H_1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\text{dualité de Poincaré}} H^1(M; \mathbb{Z}/2)$.*

LEMME 3.5. *Les formes bilinéaires alternées e et b sont reliées par la formule:*

$$e(u, v) = b((j\circ h)u, (j\circ h)v), \qquad \forall (u, v) \in V \times V$$

Démonstration de 3.4. Il suffit de vérifier la formule $f(s+x)-f(s)=h(x)$. Pour cela on observe que les surfaces de Seifert $\gamma_s(M)$ et $\gamma_{s+x}(M)$ diffèrent seulement au voisinage de x par le remplacement d'une bande tordue d'un demi-tour dans un certain sens par une bande tordue d'un demi-tour dans le sens opposé. Soyons un peu plus formel. Par construction, la 0-sphère $\alpha^{-1}(x)$ de S^1 borde dans M un 1-disque que l'on note D_x; un voisinage tubulaire de D_x dans M est de la forme $D_x \times D'_x$ où D'_x est encore un 1-disque. Les bandes auxquelles nous avons fait allusion ci-dessus sont $\gamma_s(D_x \times D'_x)$ et $\gamma_{s+x}(D_x \times D'_x)$. On vérifie que la différence $f(s+x)-f(s)$ est l'image dans $H^1(M; \mathbb{Z}/2)$ du générateur de $H^1(D'_x, \partial D'_x; \mathbb{Z}/2)$ par la composition:

$$H^1(D'_x, \partial D'_x;\ \mathbb{Z}/2) \simeq H^1(D_x \times D'_x, D_x \times \partial D'_x;\ \mathbb{Z}/2)$$
$$\simeq H^1(M, M-(D_x \times (D'_x - \partial D'_x)); \mathbb{Z}/2 \to H^1(M; \mathbb{Z}/2).$$

Démonstration de 3.5. Soient $\bar{M}$ la surface sans bord $M \bigcup_{S^1} D^2$ et $\bar{D}_x$ la réunion du 1-disque D_x introduit ci-dessus et du segment joignant dans D^2 les deux points de $\alpha^{-1}(x)$. Il est clair que $(j\circ h)(x)$, qui appartient à $H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \simeq H^1(\bar{M}; \mathbb{Z}/2)$, est le dual de Poincaré de l'élément de $H_1(\bar{M}; \mathbb{Z}/2)$ représenté par $\bar{D}_x$. Soient x et y deux points distincts de X, $\bar{D}_x$ et $\bar{D}_y$ se rencontrent bien transversalement en un point ou sont disjoints suivant que $\alpha^{-1}(x)$ et $\alpha^{-1}(y)$ sont enlacés ou non.

4. Calcul de l'invariant de Kervaire des noeuds N_s

On choisit à nouveau un point a de $S^1-\tilde{X}$ et on munit X de la relation d'ordre image réciproque de celle de $S^1-\{a\}$ par la section descendante s_a. En d'autres termes, on a $x<y$, x et y désignant deux points de X, si et seulement si $\inf \alpha^{-1}(x)<\inf \alpha^{-1}(y)$. Il est clair là encore que cette relation d'ordre ne dépend que de la composante connexe de a dans $S^1-\tilde{X}$.

THEOREME 4. *L'invariant de Kervaire des noeuds N_s est donné par la formule:*

$$k(s)=\sum_{x<y} e(x, y)(1+u(x))u(y), \tag{1}$$

où $\sum_{x<y}$ désigne la sommation sur les couples (x, y) de $X\times X$ vérifiant $x<y$ pour la relation d'ordre définie ci-dessus par le choix d'un point a et où u désigne la différence entre la section s et la section descendante s_a. On a de même:

$$k(s)=\sum_{x<y} e(x, y)u(x)(1+u(y)). \tag{2}$$

Démonstration. On pose $E(u)=\sum_{\{x,y\}} e(x, y)u(x)u(y)$, $\sum_{\{x,y\}}$ désignant la sommation sur les parties à deux éléments de X. On *a*:

. $E(u+v)-E(u)-E(v)=e(u, v), \qquad \forall (u, v)\in V\times V$

. $E(z)=0, \qquad \forall z\in X.$

D'après le théorème 3.1, la différence $L(u)=k(s_a+u)-E(u)$ est une forme linéaire en u; puisque $L(z)=k(s_a+z)$, il suffit donc de calculer $k(s_a+z)$ pour déterminer L et avoir ainsi l'expression de k.

Soient s_1, s_2 deux éléments de A; la propriété (i) du théorème 3.1 s'écrit:

$$k(s_2)-k(s_1)-k(s_a+s_2-s_1)+k(s_a)=e(s_1-s_a, s_2-s_1);$$

ou encore compte tenu de $k(s_a)=0$

$$k(s_2)-k(s_1)=k(s_a+s_2-s_1)+e(s_1-s_a, s_2-s_1). \tag{3}$$

Soient maintenant z un point de X et s_-, s_+ les sections descendantes associées aux composantes connexes de $S^1-\tilde{X}$ respectivement adjacentes à

gauche et à droite à $\inf \alpha^{-1}(z)$. On vérifie les formules:

$$s_+ - s_- = z \tag{4}$$

$$e(s_- - s_a, z) = \sum_{\substack{r \in X \\ r<z}} e(r, z). \tag{5}$$

Les formules (3), (4) et (5) impliquent la suivante:

$$k(s_+) - k(s_-) = k(s_a + z) + \sum_{\substack{r \in X \\ r<z}} e(r, z).$$

Compte tenu de $k(s_-) = 0$ et $k(s_+) = 0$, il vient:

$$k(s_a + z) = \sum_{\substack{r \in X \\ r<z}} e(r, z). \tag{6}$$

D'où:

$$\begin{aligned} k(s_a + u) &= \sum_{\{x,y\}} e(x, y)u(x)u(y) + \sum_{z \in X} \left(\sum_{\substack{r \in X \\ r<z}} e(r, z) \right) u(z) \\ &= \sum_{\{x,y\}} e(x, y)u(x)u(y) + \sum_{x<y} e(x, y)u(y) \\ &= \sum_{x<y} e(x, y)(1 + u(x))u(y). \quad \text{Cqfd.} \end{aligned}$$

Soient d'autre part, s'_- et s'_+ les sections descendantes associées aux composantes connexes de $S^1 - \tilde{X}$ respectivement adjacentes à gauche et à droite à $\sup \alpha^{-1}(z)$; on vérifie les formules:

$$s'_+ - s'_- = z$$

$$s'_- - s_- = \sum_{r \in X} e(r, z)r.$$

On en déduit comme précédement:

$$k(s'_+) - k(s'_-) = k(s_a + z) + \sum_{\substack{r \in X \\ r<z}} e(r, z) + \sum_{r \in X} e(r, z);$$

ou encore

$$k(s'_+) - k(s'_-) = k(s_a + z) + \sum_{\substack{r \in X \\ r > z}} e(r, z);$$

d'où l'on tire:

$$k(s_a + z) = \sum_{\substack{r \in X \\ r > z}} e(r, z) \tag{7}$$

et la formule (2).

Remarque. Les formules (6) et (7) impliquent la suivante:

$$\sum_{r \in X} e(r, z) = 0, \qquad \forall z \in X; \tag{Γ}$$

en d'autres termes, le vecteur $\sum_{x \in X} x$ appartient au noyau de la forme e.

Voici une preuve directe de (Γ). Soit D un petit disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre z, on note I_1, I_2 les deux composantes connexes dans S^1 de $\alpha^{-1}(D - \partial D)$; on note J_i, $i = 1, 2$, le segment joignant dans D les deux points de $\alpha(\partial I_i)$, et C_i, $i = 1, 2$, la réunion $\alpha(I_i) \cup J_i$; on observera que J_1 et J_2 ne se rencontrent pas. La somme $\sum_{r \in X} e(r, z) r$ représente dans $H_0(\mathbb{R}^2; \mathbb{Z}/2)$ l'intersection des deux cercles "immergés" C_1 et C_2, on a donc $\sum_{r \in X} e(r, z) = 0$.

La formule (Γ) explique pourquoi $k(s)$ est donné à la fois par les formules (1) et (2), ce qui traduit deux propriétés de l'invariant de Kervaire d'un noeud. En effet, les seconds membres de (1) et (2) sont échangés dans les deux cas suivants, quand on remplace s par s^*, quand on change l'orientation de S^1: un noeud et son image dans un miroir, un noeud et son inverse, ont même invariant de Kervaire.

5. Digression combinatoire

Essayons d'abstraire la combinatoire des paragraphes précédents. On considère un ensemble fini X, et un revêtement à deux feuillets: $\tilde{X} \to X$, où $\tilde{X}$ est un sous-ensemble (fini) de S^1. On note V le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2)^X$ et A l'espace affine sous V formé des sections du revêtement: $\tilde{X} \to X$. On définit comme au §2 le sous-ensemble de A des sections descendantes et la forme bilinéaire alternée $e : V \times V \to \mathbb{Z}/2$.

PROPOSITION 5. *Il existe une application* $k : A \to \mathbb{Z}/2$ *possédant les propriétés* (i) *et* (ii) *du théorème* 3.1 *si et seulement si la condition* (Γ) *de la fin du* §4 *est satisfaite. Dans ce cas, cette application* k *est unique et est donnée par les formules* (1) *et* (2) *du théorème* 4.

Démonstration. La deuxième partie de cette proposition a déjà été prouvée. Montrons que la condition (Γ) est nécessaire. Considérons les sections descendantes s_-, s_+, s'_-, s'_+ introduites dans la démonstration du théorème 4. On a: $s_+ = s_- + z$, $s'_- = s_- + \sum_{r \in X} e(r, z)r$, $s'_+ = s_- + z + \sum_{r \in X} e(r, z)r$; si k possède la propriété (i) du théorème 3.1, il vient:

$$k(s'_+) - k(s'_-) - k(s_+) + k(s'_-) = e\left(\sum_{r \in X} e(r, z)r, z\right)$$

$$= \sum_{r \in X} e(r, z).$$

Si en outre k possède la propriété (ii), alors $\sum_{r \in X} e(r, z) = 0$ pour tout z dans X.

Réciproquement, supposons (Γ) satisfaite. On définit alors une application $l : A \times X \to \mathbb{Z}/2$, en posant $l(s, z) = e(s - t, z)$, t désignant l'une des sections s_-, s_+, s'_-, s'_+, et on note $L : A \times V \to \mathbb{Z}/2$ le prolongement linéaire par rapport à V de $l(L(s, u) = \sum_{z \in X} l(s, z)u(z))$. On considère enfin l'application $K : A \times A \to \mathbb{Z}/2$, $(s_1, s_2) \mapsto E(s_2 - s_1) + L(s_1, s_2 - s_1)$. On vérifie la formule:

$$K(s_1, s_2) + K(s_2, s_3) = K(s_1, s_3), \qquad \forall (s_1, s_2, s_3) \in A \times A \times A. \tag{8}$$

Par définition même $K(s_1, s_2) = 0$ si s_1 et s_2 sont deux sections descendantes correspondant à deux composantes connexes adjacentes de $S^1 - \tilde{X}$; la formule (8) montre plus généralement que $K(s_1, s_2) = 0$ pour tout couple (s_1, s_2) de sections descendantes. Fixons une section descendante s_a de A; il est clair à présent que l'application: $A \to \mathbb{Z}/2$, $s \mapsto K(s_a, s)$ répond à la question ($K(s_1, s_2)$ n'est pas autre chose que $k(s_2) - k(s_1)$).

La conclusion de cette digression est la suivante: On peut définir "l'invariant de Kervaire" d'un noeud de manière "combinatoire" sans parler de surface de Seifert et de forme de Kervaire. Voici brièvement comment procéder. Un noeud étant donné par l'une de ses projections génériques, on considère a priori l'élément k de $\mathbb{Z}/2$ déterminé par les formules (1) ou (2) du théorème 4. Pour montrer qu'il s'agit bien d'un invariant du noeud, il suffit de vérifier que cet élément est invariant par les trois modifications de Reidemester [4], [6]; cette vérification est immédiate parce que, dans les formules (1) ou (2), on a le choix du point a.

6. Retour sur la forme de Kervaire

L'objet de ce paragraphe est de montrer que les calculs du §4 déterminent aussi les formes quadratiques $q_{f(s)} : H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ considérées au §3.

Puisque l'application linéaire $j \circ h : V \to H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$ est surjective et que la forme bilinéaire alternée $b : H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2) \times H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)$ est non dégénérée, le lemme 3.5 montre que le noyau de $j \circ h$ coïncide avec celui de la forme bilinéaire alternée e et que $j \circ h$ induit une isométrie de $(V/\ker e, \bar{e})$, $\bar{e}$ désignant la régularisée de e, sur $(H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2), b)$. En d'autres termes, b s'identifie à la régularisée de e.

Soit maintenant $K(u)$ le second membre des formules (1) ou (2) du théorème 5. La formule (*) de la démonstration de 3.3 donne:

$$k(s_a + u) - k(s_a) = q_{f(s_a)}((j \circ h)u);$$

soit encore

$$q_{f(s_a)}((j \circ h)u) = K(u); \tag{9}$$

plus généralement, d'après la formule (**) de 3.3, on a:

$$q_{f(s)}((j \circ h)u) = K(u) + e(s - s_a, u). \tag{10}$$

L'application: $V \to \mathbb{Z}/2$, $u \mapsto K_s(u)$, $K_s(u)$ désignant le second membre de (10), est une forme quadratique associée à e; la formule (10) montre que K_s s'annule sur $\ker e$ et que K_s induit une forme quadratique notée $\bar{K}_s : V/\ker e \to \mathbb{Z}/2$ associée à $\bar{e}$. Elle montre également que $j \circ h$ induit une isométrie de $(V/\ker e, \bar{K}_s)$ sur $(H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2), q_{f(s)})$. En d'autres termes, $q_{f(s)}$ s'identifie à la régularisée de K_s.

Voici une application de la formule (9):

PROPOSITION 6. *La proportion des éléments s de A tels que l'invariant de Arf du noeud N_s vaut 1 est donnée par la formule:*

$$\frac{\#k^{-1}(1)}{\#A} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^g}\right),$$

g désignant l'entier défini par $2g =$ rang de e et le symbole $\#$ le cardinal d'un ensemble fini.

Démonstration. Soient W un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimension finie et $q : W \to \mathbb{Z}/2$ une forme quadratique non dégénérée; alors l'invariant de Arf de q, noté $\kappa(q)$, peut être défini par la formule:

$$\#q^{-1}(0) - \#q^{-1}(1) = 2^{1/2 \dim W}(-1)^{\kappa(q)};$$

ou encore:

$$\frac{\#q^{-1}(1)}{\#W} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(-1)^{\kappa(q)}}{2^{1/2 \dim W}}\right).$$

Comme, d'après ce qui précède, g est le genre de la surface de Seifert M de l'immersion α et que l'invariant de Arf de $q_{f(s_\alpha)}$ est nul, on a:

$$\frac{\#q^{-1}_{f(s_\alpha)}(1)}{\#H^1(M, \partial M; \mathbb{Z}/2)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^g}\right);$$

d'où, grâce à (9):

$$\frac{\#K^{-1}(1)}{\#V} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^g}\right),$$

ce qui, compte tenu du théorème 4, démontre la proposition.

7. Exemples

Voici le mode d'emploi du théorème 4.

Soit N un noeud donné par l'une de ses projections génériques. On choisit une origine sur N (indiquée sur les figures par un tiret transverse au tracé du noeud) en dehors de l'ensemble X des points de croisements. On parcourt ensuite N en suivant l'orientation (indiquée par une flèche sur les figures). La succession des passages aux points de croisements détermine une application $\tilde{\nu} : \{1, 2, \ldots, 2n\} \to X$, n désignant le cardinal de X, qui est un revêtement à deux feuillets. On définit une bijection $\nu : \{1, 2, \ldots, n\} \to X$ en posant

$$\nu(i) = \tilde{\nu}(\inf\{j; \#\tilde{\nu}(\{1, 2, \ldots, j\}) = i\});$$

moins formellement: on numérote les points de croisements à mesure qu'on les rencontre! En pratique, en même temps qu'on numérote les points de croise-

ments, on met en mémoire l'application $\omega = \nu^{-1} \circ \tilde{\nu} : \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, autrement dit on écrit le $2n$-uple $(\omega(1), \omega(2), \ldots, \omega(2n))$ que l'on note encore ω.

La bijection ν identifie l'espace vectoriel $V = (\mathbb{Z}/2)^X$ à $(\mathbb{Z}/2)^n$ et un élément u de V à un n-uple $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/2$. La fonction polynôme $K(u)$ second membre des formules (1) et (2) du théorème 4 s'écrit:

$$K(u) = \sum_{(i,j)\in\Lambda} (1+u_i)u_j \quad \text{ou} \quad K(u) = \sum_{(i,j)\in\Lambda} u_i(1+u_j),$$

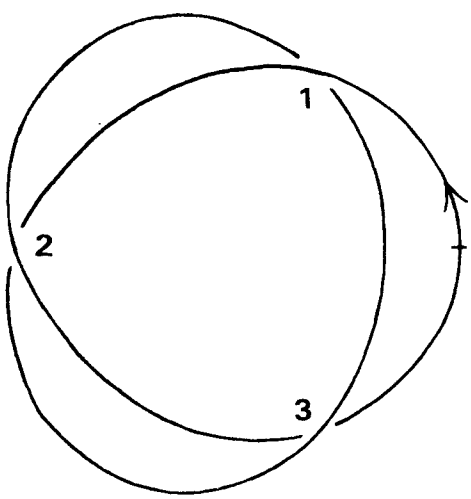
Λ désignant le sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ formé des couples (i, j) tels que $i < j$ et $\inf \omega^{-1}(j) < \sup \omega^{-1}(i) < \sup \omega^{-1}(j)$, ou ce qui revient au même $\inf \omega^{-1}(i) < \inf \omega^{-1}(j) < \sup \omega^{-1}(i) < \sup \omega^{-1}(j)$, c'est-à-dire tels que le quadruple (i, j, i, j) apparaît, dans cet ordre là, dans le $2n$-uple ω.

La "différence" u entre le noeud N et le noeud "descendant" correspondant à l'origine choisie se définit comme suit: $u_i = 0$ ou 1 respectivement suivant que, la première fois où l'on passe par le point de croisement numéro i, l'on se trouve sur le brin supérieur ou inférieur du noeud.

L'invariant de Kervaire k du noeud N est la valeur de K pour cet élément u.

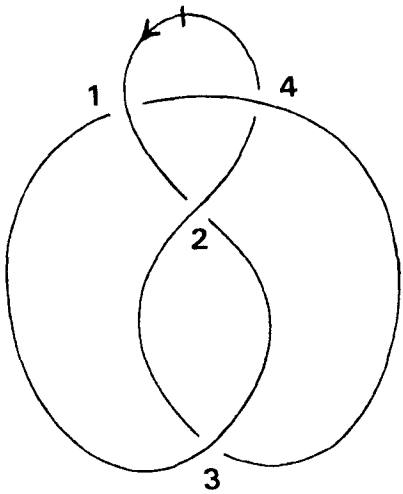
Nous terminons par trois exemples.

7.1. *Le noeud de trèfle*



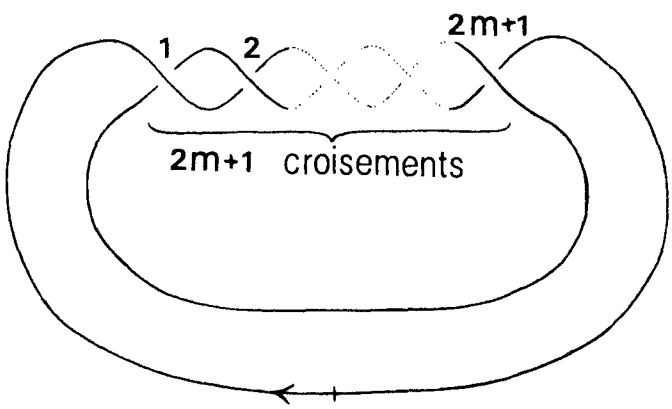
$\omega = (1, 2, 3, 1, 2, 3)$
$K(u) = u_1(1+u_2) + u_1(1+u_3) + u_2(1+u_3)$
$u = (0, 1, 0)$
$k = 1.$

7.2. *Le noeud de huit*



$\omega = (1, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 4)$
$K(u) = u_1(1+u_2) + u_1(1+u_3) + u_2(1+u_4) + u_3(1+u_4) = (u_1+u_4+1)(u_2+u_3)$
$u = (0, 1, 0, 0)$
$k = 1.$

7.3. *Le noeud torique de type* $(2, 2m+1)$ (généralisation du premier exemple)



$\omega = (1, 2, \ldots, 2m+1, 1, 2, \ldots, 2m+1)$

$$K(u) = \sum_{1 \le i < j \le 2m+1} (1+u_i)u_j$$

$u = (0, 1, 0, 1, \ldots, 1, 0), \quad u_i = i - 1 \pmod 2$

$$k = \frac{m(m+1)}{2} \pmod 2$$

REFERENCES

[1] C. ARF, *Untersuchungen über quadratische Formen in Körpen der Characteristik 2*, J. Reine Angew. Math., vol. *183* (1941), 148–167.
[2] J. H. CONWAY, *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970.
[3] L. H. KAUFFMAN, *The Conway Polynomial*, Topology, vol. *20* (1980), 101–108.
[4] L. H. KAUFFMAN, *Formal knot theory*, Mathematical notes, Princeton University Press, 1983.
[5] J. LEVINE, *Polynomial invariants of knots of codimension two*, Ann. of Math., vol. *84* (1966), 534–554.
[6] K. REIDEMEISTER, *Knotentheorie*, Chelsea Publishing Company, New York, 1948; Copyright 1932, Julius Springer, Berlin.
[7] R. ROBERTELLO, *An invariant of knot cobordism*, Comm. Pure Appl. Math., vol. *18* (1965), 543–555.
[8] D. ROLFSEN, *Knots and links*, Publish or Perish Press, 1976.

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
Route de Saclay
F-91128 Palaiseau cedex

Reçu le 18 juin 1984