

Sur la non-applicabilité de deux domaines  
appartenant respectivement à des espaces...  
Lebesgue, H.  
pp. 166 - 168



---

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes.

Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

### Purchase a CD-ROM

The Goettingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Goettingen - Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen, Germany, Email: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à  $n$  et  $n + p$  dimensions.

(Extrait d'une lettre à M. O. Blumenthal).

Par

HENRI LEBESGUE à Paris.

L'autre jour, comme vous me parliez d'une *démonstration de l'impossibilité d'établir une correspondance univoque et continue entre les points de deux espaces à  $n$  et  $n + p$  dimensions*, démonstration due à M. Brouwer et que les *Mathematische Annalen* doivent publier, je vous ai indiqué le principe de quelques preuves du même théorème. Je vous expose la plus simple de ces démonstrations; je ne me préoccuperais pas ici de tirer du raisonnement d'autres conséquences que le théorème en question lui-même.

Ce théorème résulte de suite d'une sorte de généralisation de cette proposition qu'énonce M. Jordan dans son Cours d'Analyse et d'après laquelle tout ensemble de points admet au moins un point frontière: *Si chaque point d'un domaine  $D$  à  $n$  dimensions appartient à l'un au moins des ensembles fermés  $E_1, E_2, \dots, E_p$  en nombre fini et si ces ensembles sont suffisamment petits, il y a des points communs au moins à  $n + 1$  de ces ensembles.*

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les  $n$  coordonnées; on peut préciser le degré de petitesse des  $E_i$  en supposant que  $D$  contient un intervalle de diamètre  $2l$  [c'est-à-dire l'ensemble des points définis par  $n$  inégalités de la forme

$$0 \leq x_i - x_i^0 \leq 2l,$$

où les  $x_i^0$  sont des constantes] et que chaque  $E_i$  est contenu dans un intervalle de diamètre  $l$ .

Je suppose d'abord que chaque  $E_i$  soit formé par la réunion d'un nombre fini d'intervalles et je considère ceux des  $E_i$  qui contiennent des points de la variété  $x_1 = x_1^0$  frontière de l'intervalle  $I$  de diamètre  $2l$  contenu dans  $D$ . L'ensemble  $e_1$  de ces  $E_i$  n'a pas de points communs avec la variété  $x_1 = x_1^0 + 2l$ ; la frontière de  $e_1$  à l'intérieur de  $I$  est un

ensemble de variétés linéaires à  $n - 1$  dimensions, c'est-à-dire définies chacune par une seule équation du premier degré jointe à certaines inégalités\*). Cet ensemble de variétés contient en particulier un ensemble  $I_1$  d'un seul tenant qui s'étend depuis chaque variété  $x_i = x_i^0$  jusqu'à chaque variété  $x_i = x_i^0 + 2l$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ).

Je considère l'ensemble  $e_2$  des points qui appartiennent à ceux des  $E_i$  non entièrement intérieurs à  $e_1$  qui contiennent des points communs à  $I_1$  et à  $x_2 = x_2^0$ , l'ensemble commun à  $e_2$  et à  $I_2$  est limité à l'intérieur de  $I$  par un ensemble de variétés linéaires à  $n - 2$  dimensions, car  $e_2$  ne pouvant contenir de points de  $x_2 = x_2^0 + 2l$  a nécessairement une frontière intérieure à  $I$ . Une partie  $I_2$  de cette frontière s'étend depuis  $x_i = x_i^0$  jusqu'à  $x_i = x_i^0 + 2l$ , pour  $i = 3, 4, \dots, n$ .

On définira ainsi de proche en proche les ensembles  $I, I_1, I_2, \dots, I_n$ . Or tout point de  $I$  appartient au moins à l'un des  $E_i$ , tout point de  $I_1$  appartient au moins à deux  $E_i$  et ainsi de suite, tout point  $I_n$  appartient au moins à  $n + 1$  des  $E_i$ . Le théorème est donc démontré pour les  $E_i$  particuliers considérés.

Pour le cas général je considère un carrelage de l'espace à l'aide d'intervalles non empiétant de diamètre  $\varepsilon$ . Je remplace chaque  $E_i$  par l'ensemble  $\mathcal{E}_i$  de ceux des intervalles du carrelage qui ont des points communs avec  $E_i$ . Le théorème étant vrai pour les  $\mathcal{E}_i$ , quel que soit  $\varepsilon$ , est par suite vrai aussi pour les  $E_i$ .

Le théorème énoncé est entièrement démontré; pour en déduire l'impossibilité de l'application des espaces à  $n$  et à  $n + p$  dimensions il suffit de le compléter en prouvant que les  $E_i$  peuvent être choisis de manière qu'il n'y ait pas de points communs à plus de  $n + 1$  des  $E_i$ . Or ceci est facile.

Soit d'abord le cas de deux dimensions  $x$  et  $y$ . Les droites  $x = \text{entier}$ ,  $y = \text{entier}$ , divisent le plan en carrés qui se répartissent en bandes parallèles à  $Ox$  qu'on numérote de proche en proche. Déplaçons chacune des bandes de rang impair parallèlement à  $Ox$  et d'une longueur égale à  $\frac{1}{2}$ . Nous obtenons un carrelage équivalent, au point de vue de l'analysis situs, au carrelage formé d'hexagones réguliers; en prenant les carrés ainsi définis pour les  $E_i$ , il n'y a que des sommets triples.

Si l'on a 3 coordonnées  $x, y, z$ , on considère le carrelage de l'espace à l'aide de cubes limités par des plans  $z = \text{entier}$  et dont les faces parallèles à  $Oxy$  se projettent sur le carrelage défini plus haut. Les cubes ainsi

\*) Cette équation et ces inégalités sont respectivement de la forme  $x_k = \alpha$ ,  $\beta \leq x_j \leq \gamma$ . L'étude de ces égalités et inégalités permettrait de démontrer algébriquement les faits bien évidents que je vais admettre.

construits se répartissent en couches; faisons subir à celles de ces couches qui sont de rang impair la translation qui amène le point  $0, 0, 0$  dans la position  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ . En prenant les cubes ainsi placés pour les ensembles  $E_i$ , on n'a que des sommets quadruples.

En continuant ainsi on ne sera jamais arrêté.

La démonstration précédente est en relation intime avec la proposition suivante que je me borne à énoncer: *une courbe qui remplit un domaine à  $n$  dimensions a nécessairement des points multiples d'ordre  $n + 1$  au moins et il y a des courbes remplissant un domaine à  $n$  dimensions qui n'ont pas de points multiples d'ordre supérieur à  $n + 1$ .*\*)

On pourrait présenter la démonstration précédente de façon moins artificielle, mais j'ai cherché surtout à être court parce qu'une méthode de démonstration naturelle et qui a l'avantage d'élucider en même temps plusieurs autres questions fondamentales d'Analysis situs a été indiquée par M. R. Baire\*\*). Sans doute M. Baire n'a pas développé sa démonstration; mais il me semble que, si l'on tient compte des indications données par M. Baire\*\*\*), il ne reste plus à trancher que des difficultés de détail peu sérieuses.

Paris, 14 octobre 1910.

---

\*) Déjà, dans son article des *Mathematische Annalen*, M. Hilbert remarquait qu'on peut remplir un domaine plan avec des courbes n'ayant que des points triples.

\*\*\*) Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 31 (Avril 1907).

\*\*\*) Voir aussi Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 144 (11 Février 1907).