

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

JEAN-YVES LE DIMET

Cobordisme d'enlacements de disques

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 32 (1988), p. 1-92.

[<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_32__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_32__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COBORDISME D'ENLACEMENTS DE DISQUES

par Jean-Yves LE DIMET

Résumé. Un enlacement de k disques de dimension n , ou (n,k) enlacement, est un plongement de k exemplaires du disque de dimension n dans le disque de dimension $n+2$. Deux (n,k) enlacements se composent par empilement. Si bien que l'ensemble des classes de cobordisme des (n,k) enlacements est doté d'une structure de groupe. Ce groupe est noté $C_{n,k}$. Dans une première partie nous construisons des invariants pour $C_{1,k}$. Il se trouve que $C_{1,k}$ n'est pas commutatif pour $k > 2$, mais $C_{1,1}$ est isomorphe au groupe de cobordisme des noeuds classiques. Le reste du travail est consacré à l'étude des enlacements en grandes dimensions. Une longue suite exacte relie les groupes $C_{n,k}$ à des groupes de chirurgie homologique.

COBORDISM OF LINKED DISCS

Abstract. A (n, k) link (of discs) is a p.l. locally flat embedding of k copies of the disc D^n in the disc D^{n+2} . Two (n, k) links are composed by stacking. Thus, the set $C_{n,k}$ of cobordism classes of (n,k) links inherits a natural group structure. In the first part of this work we construct two invariants for $C_{1,k}$. $C_{1,k}$ is not commutative when $k > 2$, but $C_{1,1}$ is isomorphic to the classical knot cobordism group. The rest of this work is devoted to higher dimensional links. The groups $C_{n,k}$ are related to homology surgery groups in a long exact sequence.

Texte reçu le 11 février 1987.

Jean-Yves LE DIMET, Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Nantes,
2 rue de la Houssinière . 44072 Nantes cedex 03

SOMMAIRE

	page
Introduction.....	1
Chapitre 0 Préliminaires.....	6
§ 1 . Localisation.....	7
§ 2 . Chirurgie homologique.....	12
Chapitre I.....	18
§ 1 . Définitions - Les groupes $C_{n,k}$	19
§ 2 . Localisation d'un enlacement.....	22
§ 3 . Automorphismes de $\pi_1(E_k)$ et groupes de tresses.....	26
§ 4 . Calculs dans $C_{1,2}$	33
Chapitre II.....	47
§ 1 . Le groupe $\mathcal{A}_{n+1}$	48
§ 2 . Le groupe $\mathcal{S}_{n+2}$	50
§ 3 . La suite exacte (S).....	54
§ 4 . Calcul de $\mathcal{S}_{n+2}$	56
§ 5 . Etude de $\mathcal{A}_{n+1}$	63
Chapitre III.....	69
§ 1 . Enlacements bords.....	70
§ 2 . Enlacements et entrelacs.....	76
ANNEXE Démonstration des résultats du chapitre 0, §1	82
RÉFÉRENCES.....	92

INTRODUCTION

Il existe plusieurs façons d'évaluer les groupes C_n de cobordisme de noeuds introduits par M. KERVAIRE dans [K].

L'une d'elle pourrait consister à remarquer les faits suivants. Un noeud de dimension n , $f : S^n \longrightarrow S^{n+2}$ et de complémentaire X donne lieu à une application $\overline{f} : (X, \partial X) \longrightarrow (D^{n+1} \times S^1, S^n \times S^1)$ qui est un homéomorphisme sur le bord et induit un isomorphisme en homologie entière ; une telle application est un Z -lissage de la variété $X_0^{n+2} = D^{n+1} \times S^1$ qui est le complémentaire du noeud trivial. Réciproquement à un Z -lissage $\overline{g} : (V, \partial V) \longrightarrow (D^{n+1} \times S^1, S^n \times S^1)$, $n \geq 3$, nous pouvons associer - du moins dans la catégorie semi-linéaire - un noeud $g : S^n \times 0 \rightarrow V \bigcup_{\partial V} S^n \times D^2$ bien défini à cobordisme près.

Nous obtenons ainsi un isomorphisme de groupe entre C_n et le groupe $\mathcal{S}_Z(X_0^{n+2})$ des classes d'équivalence des Z -lissages de X_0^{n+2} .

Enfin, un calcul simple montre que, pour $n \geq 4$, $\mathcal{S}_Z(X_0^{n+2})$ est isomorphe au groupe de chirurgie homologique $\Gamma_{n+3}(\Delta)$ où Δ est le diagramme ci-dessous (ϵ étant le morphisme d'augmentation) :

$$\begin{array}{ccc}
 Z[t, t^{-1}] & \xrightarrow{\text{id}} & Z[t, t^{-1}] \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\
 Z[t, t^{-1}] & \xrightarrow{\text{id}} & Z
 \end{array}$$

Il semble naturel de vouloir généraliser le raisonnement qui précède aux entrelacs de dimension n à k composantes,

$f : \frac{1}{k} S^n \longrightarrow S^{n+2}$. Malheureusement si les complémentaires de tels entrelacs ont bien tous même homologie que le complémentaire de l'entrelacs trivial $X_0^{n+2}(k)$, il n'est pas possible, en général, d'associer à un entrelacs f un Z -lissage $\bar{f}$ de l'entrelacs trivial.

En fait, S.E. CAPPELL et J.L. SHANESON ont remarqué qu'un tel $\bar{f}$ existait si et seulement si f était un entrelacs bord. Rappelons qu'un entrelacs est un entrelacs bord si les composantes de cet entrelacs bordent dans S^{n+2} des surfaces de SEIFERT disjointes. Cette remarque est à la base du calcul, en terme de groupes de chirurgie homologique, de l'ensemble des classes de cobordisme des entrelacs bords, voir [CS₂].

Dans le but d'obtenir un modèle homologique pour les complémentaires et aussi une structure naturelle de groupe sur l'ensemble des classes de cobordisme, nous avons été conduits, au lieu des entrelacs de sphères, à considérer les plongements $f : \frac{1}{k} D^n \longrightarrow D^{n+2}$ triviaux sur le bord. De tels plongements sont appelés, dans la suite, enlacements de k disques de dimension n , ou (n,k) enlacements.

Remplacer les sphères S^n par des disques D^n présente deux avantages :

1- Deux (n,k) enlacements peuvent se composer par "empilement", si bien que l'ensemble $C_{n,k}$ des classes de cobordisme des (n,k) enlacements est un groupe pour cette loi de composition. Rappelons, à ce propos, que la somme connexe de deux entrelacs n'est pas bien définie, même à cobordisme près ; voir [H] page 126.

2- Soit X le complémentaire d'un (n,k) -enlacement f ; alors

$\partial X = \#_k S^n \times S^1$ et il existe une inclusion canonique du bouquet de k cercles $V_k S^1$ dans ∂X .

Maintenant, il est facile de voir que la composition des inclusions $V_k S^1 \hookrightarrow \partial X \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme en homologie entière. Par conséquent X et $V_k S^1$ ont même localisé au sens de BOUSFIELD, voir $[B_1]$, $[B_2]$. Rappelons que le foncteur E de localisation a les propriétés suivantes :

- a) $X \longrightarrow E(X)$ induit un isomorphisme en homologie entière et
- b) Si $g : Y \longrightarrow Z$ induit un isomorphisme en homologie entière, l'application $g^* : [Z, E(X)] \longrightarrow [Y, E(X)]$ est une bijection.

Par conséquent, nous pouvons associer à tout enlacement f une application $\bar{f} : X \longrightarrow E(V_k S^1)$ qui induit un isomorphisme en homologie entière. Mais si nous voulons mettre en oeuvre pour les enlacements le plan esquissé pour les noeuds, nous nous heurtons à un obstacle : le complexe $E(V_k S^1)$ présente le grave inconvénient de ne pas être un complexe fini.

En fait, il existe une théorie de localisation due à P. VOGEL, voir [V₁], pour laquelle le foncteur de localisation, noté encore E, possède les propriétés suivantes :

- c) Si X est un complexe fini, E(X) est limite inductive de sous complexes finis K_p .
- d) $X = K_0$ et pour tout entier p, l'inclusion $K_p \hookrightarrow K_{p+1}$ induit un isomorphisme en homologie entière.

C'est ce foncteur E que nous utiliserons dans la suite. Plus précisément, si $(K_p)_{p \geq 0}$ désigne la filtration de $E(V_k S^1)$ décrite ci-dessus, il est possible d'adjoindre à tout K_p un bord ∂K_p^{n+1} homéomorphe à $\#_k S^n \times S^1$ de sorte que $(K_p, \partial K_p^{n+1})$ soit un $\mathbb{Z}$ -complexe de Poincaré de dimension $n+2$. Ceci nous permet de construire un morphisme de groupe $b : \mathcal{S}_{n+2} \longrightarrow C_{n,k}$ où $\mathcal{S}_{n+2} = \varinjlim_p \mathcal{S}_2(K_p)$

Dans le chapitre II nous montrons que $\mathcal{S}_{n+2}$ est isomorphe à un groupe de chirurgie homologique et que b fait partie d'une longue suite exacte (S) :

$$(n > 3) \quad \dots \longrightarrow \mathcal{A}_{n+2} \xrightarrow{a} \mathcal{S}_{n+2} \xrightarrow{b} C_{n,k} \xrightarrow{d} \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow \dots$$

Dans ce même chapitre, le groupe $\mathcal{A}_{n+1}$ est calculé en fonction des groupes d'homotopie du localisé E_k de $V_k S^1$.

La définition précise des enlacements et la structure de groupe

de $C_{n,k}$ sont mis en place dans le chapitre I. En fait $C_{n,k}$ est un groupe abélien pour $n \geq 2$. Le reste du chapitre est consacré à l'étude de $C_{1,k}$. Deux invariants pour $C_{1,k}$ sont construits, des exemples sont donnés. En particulier nous montrons comment associer à tout élément de $C_{1,k}$ k séries formelles en k variables non commutatives. Etant donné la complexité des calculs, nous avons dû nous aider d'un ordinateur pour traiter les exemples.

Au chapitre III nous étudions le groupe $B_{n,k}$ des classes de cobordisme des enlacement bords. Puis dans ce même chapitre nous montrons que l'ensemble des classes de cobordisme des entrelacs est le quotient de $C_{n,k}$ sous l'action d'un groupe d'automorphismes de $\pi_1(E_k)$.

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES

Les deux ingrédients principaux de ce travail sont :

- 1°) La localisation des espaces.
- 2°) La chirurgie homologique.

Nous avons besoin d'une théorie de localisation plus précise que celle qui a été étudiée par A.K. Bousfield dans $[B_1]$, $[B_2]$. Ce travail - malheureusement non publié - a été fait par P. Vogel dans $[V_1]$. Dans le §1 ci-dessous, nous exposons les résultats de $[V_1]$ qui nous sont nécessaires. Les démonstrations se trouvent dans l'Annexe.

La chirurgie homologique a été développée par S.E. Cappell et J.L. Shaneson dans $[CS_1]$ et utilisée, en particulier, pour le calcul des groupes de cobordisme des entrelacs bords dans $[CS_2]$. Nous avons cru bon de résumer dans le §2 les résultats principaux de cette théorie.

§1 - LOCALISATION

Notre but est de construire un foncteur de localisation

$E : CW. \longrightarrow CW.$, $CW.$ désignant la catégorie des CW - complexes pointés et des classes d'homotopie d'applications continues, tel que, si X est un complexe fini, $E(X)$ soit limite inductive de sous-complexes finis ayant tous même homologie que X donc que $E(X)$. De plus, pour des raisons qui deviendront évidentes dans la suite, nous avons besoin que la flèche de localisation $X \longrightarrow E(X)$ induise un morphisme normalement surjectif $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(E(X))$.

Rappelons que les démonstrations se trouvent dans l'Annexe.

1.1 DÉFINITION. $\mathcal{W}$ est la classe des paires (K,L) de complexes finis pointés tels que K/L soit contractile.

Malheureusement la classe $\mathcal{W}$ n'est pas assez grande pour y développer une théorie de localisation, c'est pourquoi nous étendons $\mathcal{W}$ à $\mathcal{W}^*$ comme suit :

1.2 DÉFINITION. Une paire (X,A) de complexes pointés est dans $\mathcal{W}^*$ si toute application continue pointée $(M,N) \longrightarrow (X,A)$, où (M,N) est une paire de complexes finis, se factorise à travers un élément (K,L) de $\mathcal{W}$.

1.3 REMARQUES.

1- En raison du théorème de Whitehead, dire que X/A est contractile est équivalent à :

a) $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme en homologie entière et

b) pour tout point a de A , $\pi_1(X, a)$ est la clôture normale de l'image de $\pi_1(A, a)$. En d'autres termes, $\pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ est normalement surjectif.

2- (X, A) est dans $\mathcal{U}^*$ si et seulement si (X, A) est limite inductive de paires de sous-complexes (K, L) appartenant à $\mathcal{U}$. En particulier X/A est contractile si (X, A) est dans $\mathcal{U}^*$.

1.4 PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{U}$ ET $\mathcal{U}^*$.

P_1 : Si (X, A) est dans $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$), alors pour tout complexe Y (resp. complexe fini) et pour toute application continue pointée $A \longrightarrow Y$, $(X \cup_A Y, Y)$ est dans $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$).

P_2 : Si (Y, X) et (X, A) sont dans $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$), alors (Y, A) est dans $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$).

P_3 : Si (X, A) est dans $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$) alors $(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ est dans $\mathcal{U}^*$ (resp. $\mathcal{U}$).

1.5 DÉFINITION.

Un complexe pointé Z est $\mathcal{U}^*$ -local si pour tout élément (X, A) de $\mathcal{U}^*$ l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit une bijection $[X, Z] \xrightarrow{\sim} [A, Z]$.

1.6 THÉORÈME. Il existe un foncteur $E : CW_* \longrightarrow CW_*$ et un morphisme fonctoriel $\eta : \text{id} \longrightarrow E$ ayant les propriétés suivantes :

i) Pour tout X dans CW_* , $\eta_X : X \longrightarrow E(X)$ est tel que $(E(X), X)$ soit dans $\mathcal{U}^*$.

ii) Pour tout X dans CW_* , $E(X)$ est $\mathcal{U}^*$ -local.

Enfin un tel couple (E, η) est unique.

1.7 DÉFINITION. E est le foncteur de $\mathcal{U}^*$ -localisation et $E(X)$ est le $\mathcal{U}^*$ -localisé de X .

Dans la suite, nous ferons usage du résultat suivant .

1.8 PROPOSITION. Si X est un complexe fini, son localisé $E(X)$ est limite inductive de sous-complexes finis X_p , $p \geq 0$ tels que :

$$a) X_0 = X$$

$$b) \text{ pour tout entier } p, (X_p, X) \text{ est dans } \mathcal{U}.$$

Les espaces $\mathcal{U}^*$ -locaux sont caractérisés par certaines propriétés de leurs groupes d'homotopie. Citons en particulier :

1.9 PROPOSITION.

Soit X un complexe $\mathcal{U}^*$ -local, $G = \pi_1(X)$. Soit L_0 et L_1 deux $Z[G]$ -modules libres de type fini et $\alpha : L_0 \longrightarrow L_1$ un morphisme tel que $\alpha \otimes_Z : L_0 \otimes_G Z \rightarrow L_1 \otimes_G Z$ soit un isomorphisme. Alors, pour tout entier $n > 1$, $\alpha^* : \text{Hom}_G(L_1, \pi_n(X)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(L_0, \pi_n(X))$ est un isomorphisme.

Les $\pi_n(X)$ sont donc des $Z[G]$ -modules locaux au sens de $[V_2]$, voir ci-dessous. Il s'ensuit que :

1.10 COROLLAIRE : Si Λ est le localisé universel au sens de $[CO]$ de l'augmentation $\varepsilon : Z[G] \longrightarrow Z$, alors, pour tout entier $n > 1$.

1) l'application canonique $\pi_n(X) \xrightarrow{\sim} \pi_n(X) \otimes_G \Lambda$ est un isomorphisme.

2) $\text{Tor}_1^G(\pi_n(X), \Lambda)$ est nul.

1.11 Rappelons que l'anneau Λ est caractérisé par les propriétés suivantes :

a) Il existe un diagramme commutatif (dans la catégorie des anneaux)

$$\begin{array}{ccc} & & \Lambda \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathbb{Z}[G] & & \mathbb{Z} \\ & \searrow \varepsilon & \end{array}$$

tel que toute matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}[G]$ inversible dans $\mathbb{Z}$ est inversible dans Λ .

b) Λ est universel pour la propriété a).

Rappelons qu'un $\mathbb{Z}[G]$ -module M est local au sens de $[V_2]$ s'il possède la propriété suivante :

Pour tout morphisme $\alpha : L_0 \rightarrow L_1$ entre $\mathbb{Z}[G]$ -modules libres de type fini tel que $\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ soit un isomorphisme,

$\alpha^* : \text{Hom}_G(L_1, M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_G(L_0, M)$ est un isomorphisme.

Le corollaire 1.10 provient des faits suivants prouvés dans $[V_2]$, section

6 : Si M est un $\mathbb{Z}[G]$ -module local, alors l'application canonique

$M \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ est un isomorphisme et $\text{Tor}_1^G(M, \Lambda) = 0$.

Il s'ensuit que les modules locaux ont les propriétés ci-dessous :

1.12 PROPOSITION . Soit M un $\mathbb{Z}[G]$ -module local. Alors pour tout Λ -module N ,

1) $N \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est isomorphe à $N \otimes_{\Lambda} M$ et

2) $\text{Tor}_1^G(N, M)$ est isomorphe à $\text{Tor}_1^\wedge(N, M)$.

Enfin nous ferons usage du résultat ci-dessous qui se déduit aisément du theoreme 1.13 de $[V_2]$.

1.13 PROPOSITION. Soit (Y, X) un élément de $\mathcal{U}^*$. Soit $\pi = \pi_1(Y)$, et soit Λ le localisé universel de l'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}[\pi] \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Alors pour tout entier $q > 0$, $H_q(Y, X ; \Lambda) = 0$.

1.14 REMARQUE. Nous n'avons exposé ici qu'un cas très particulier de la théorie de P. Vogel. Voici un résumé succinct de $[V_1]$. Appelons classe localisante toute classe $\mathcal{V}$ d'application entre CW-complexes pointés possédant de bonnes propriétés de stabilité :

- 1) $\mathcal{V}$ est stable par composition finie.
- 2) les équivalences d'homotopie sont dans $\mathcal{V}$.
- 3) $\mathcal{V}$ est stable par réunion disjointe.
- 4) si $X \longrightarrow Y$ est une cofibration de $\mathcal{V}$, alors pour toute application $X \longrightarrow Z$, $Z \longrightarrow Z \cup_X Y$ est dans $\mathcal{V}$.
- 5) si $X \longrightarrow Y$ est une cofibration de $\mathcal{V}$, $X \times I \cup Y \times (0, 1) \longrightarrow Y \times I$ est dans $\mathcal{V}$.

$\mathcal{V}$ est dite "pas trop grosse" s'il existe un nombre cardinal infini c tel que tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^n & \hookrightarrow & D^{n+2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

à travers $X' \longrightarrow Y'$ de $\mathcal{V}$, X' et Y' ayant au plus c cellules.

THÉORÈME. Toute classe localisante pas trop grosse admet un foncteur de localisation.

Par exemple :

- Si h_* est une théorie homologique égalisant les applications homotopes, alors la classe $\mathcal{V}$ des applications $X \longrightarrow Y$ induisant des isomorphismes $h_*(X) \rightarrow h_*(Y)$ est une classe localisante pas trop grosse.

- La classe des application q -connexes $X \longrightarrow Y$ est une classe localisante pas trop grosse et le localisé de X est le $(q-1)^{\text{ième}}$ étage de la tour de Postnikov de X .

Soit maintenant $\mathcal{V}$ une classe localisante, c un nombre cardinal infini et $\mathcal{V}_c$ la sous-classe de $\mathcal{V}$ constituée des applications $X \longrightarrow Y$ où X et Y sont des complexes ayant moins de c cellules. Alors il existe une plus petite classe localisante $\mathcal{V}_c^*$ contenant $\mathcal{V}_c$. $\mathcal{V}_c^*$ n'est pas trop grosse et possède donc un foncteur de localisation.

§2 - CHIRURGIE HOMOLOGIQUE.

Ceci est un résumé de [C-S 1] adapté à nos besoins : les résultats cités n'y figurent pas dans leur plus grande généralité. Nous avons également choisi de nous situer dans la catégorie semi-linéaire (PL) bien que les résultats énoncés soit également vrais dans les catégories DIFF et TOP.

2.1 DÉFINITIONS, NOTATIONS. Soit X un complexe fini connexe,

∂X un sous-complexe et soit $\mathcal{F} : Z[\pi] \longrightarrow A$ un morphisme surjectif d'anneaux, $\pi = \pi_1(X)$.

Nous dirons que $(X, \partial X)$ est un A-complexe de Poincaré de dimension $n : (n > 0)$ et de classe fondamentale $[X] \in H_n(X, \partial X)$ si le cap-produit $\cap [X] : H^*(X; A) \longrightarrow H_{n-*}(X, \partial X; A)$ est un isomorphisme.

Une application $f : Y \longrightarrow X$ sera appelée A-équivalence d'homologie si $f_* : H_*(Y; A) \longrightarrow H_*(X; A)$ est un isomorphisme.

Enfin, il convient de supposer que le morphisme d'augmentation $\varepsilon : Z[\pi] \longrightarrow Z$ se factorise par $\mathcal{F}$ de sorte que toute A-équivalence d'homologie soit une Z-équivalence d'homologie.

Supposons donc que $(X, \partial X)$ soit un A-complexe de Poincaré de dimension n et donnons nous une application normale $(f, \hat{f})$ (toujours supposée de degré 1), $f : (V, \partial V) \longrightarrow (X, \partial X)$ telle que $f|_{\partial V}$ soit une A-équivalence d'homologie, V désignant une variété orientée de dimension n .

A quelle condition $(f, \hat{f})$ est-elle normalement cobordante à une A-équivalence d'homologie de paires ? La réponse est fournie par :

2.2 THÉOREME. ($n \geq 5$) Il existe un groupe abélien $\Gamma_n(\mathcal{F})$ et un élément $\sigma(f, \hat{f}) \in \Gamma_n(\mathcal{F})$ - qui dépend seulement de la classe de cobordisme normal de $(f, \hat{f})$ - ayant la propriété suivante :

$\sigma(f, \hat{f}) = 0$ si et seulement si $(f, \hat{f})$ est normalement cobordante, relativement à ∂V , à une A-équivalence d'homologie.

2.3 THÉORÈME (DE RÉALISATION). ($n \geq 5$)

Soit $(h, \hat{h}), h : (V, \partial V) \longrightarrow (X, \partial X)$, une application normale telle que h soit une A -équivalence d'homologie de paires. Alors pour tout élément $\gamma \in \Gamma_{n+1}(\mathcal{F})$, il existe un cobordisme normal $(H, \hat{H})$,

$$H : (W, \partial_+ W, \partial_0 W, \partial_- W) \longrightarrow (X \times I, \partial X \times I, X \times 0, X \times 1)$$

étant tel que : $\partial_+ W = \partial V \times I$, $\partial_0 W = V$, $\partial(\partial_- W) = \partial V$

$$H|_{\partial_0 W} = h, \quad H|_{\partial_+ W} = (h|_{\partial V}) \times \text{id}_I$$

$$H|_{\partial_- W} \text{ est une } A\text{-équivalence d'homologie et } \sigma(H, \hat{H}) = \gamma.$$

2.4 Les groupes $\Gamma_n(\mathcal{F})$ généralisent les groupes de Wall $L_n(\pi)$, voir [W].

En fait $\Gamma_n(\text{id}_\pi) = L_n(\pi)$ et l'application $\Gamma_n(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{n+4}(\mathcal{F})$ qui à $\sigma(h, \hat{h})$ associe $\sigma((h, \hat{h}) \times \text{id}_{\mathbb{CP}^2})$ est un isomorphisme.

Il existe aussi des groupes Γ_n relatifs. A un diagramme Φ :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}' & \\ Z[\pi'] & \xrightarrow{\quad} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \mathcal{F} & \\ Z[\pi] & \xrightarrow{\quad} & A \end{array}$$

on sait associer des groupes $\Gamma_n(\Phi)$ et une suite exacte :

$$\dots \Gamma_{n+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{n+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{n+1}(\Phi) \xrightarrow{\partial} \Gamma_n(\mathcal{F}') \longrightarrow \dots$$

Ces groupes $\Gamma_n(\Phi)$ s'interprètent de la façon suivante :

2.5 THÉORÈME : ($n \geq 6$) Soit $(X, \partial X)$ un A -complexe de Poincaré de dimension n tel que $\partial X = Y_+ \cup Y_-$, $(Y_+, \partial Y_+)$ et $(Y_-, \partial Y_-)$ étant des

A-complexes de Poincaré tels que $\partial Y_+ = \partial Y_-$ et $\pi = \pi_1(X)$, $\pi' = \pi_1(Y_+)$.

Soit $(h, \hat{h})$, $h : (V, \partial_- V, \partial_+ Y) \longrightarrow (X, Y_-, Y_+)$ une application normale telle que :

$h|_{\partial_- V} : \partial_- V \longrightarrow Y_-$ est une A-équivalence d'homologie

$h|_{\partial(\partial_- V)} : \partial(\partial_- V) \longrightarrow \partial Y_-$ est une A'-équivalence d'homologie

Alors il existe $\sigma(h, \hat{h})$ dans $\Gamma_n(\Phi)$ ayant la propriété suivante :

$\sigma(h, \hat{h}) = 0$ si et seulement si $(h, \hat{h})$ est normalement cobordante, relativement à $\partial_- V$, à $(g, \hat{g})$, $g : (W, \partial_- W, \partial_+ W) \longrightarrow (X, Y_-, Y_+)$ étant tel que :

$g|_{\partial_+ W} : \partial_+ W \longrightarrow Y_+$ est une A'-équivalence d'homologie

$g : W \longrightarrow X$ est une A-équivalence d'homologie

2.6 THÉORÈME. (≥ 6) Soit $(X, \partial X)$ un A-complexe de Poincaré de dimension n , $\pi = \pi_1(X)$ et $\pi' = \pi_1(\partial X)$.

Soit $(h, \hat{h})$, $h : (V, \partial V) \longrightarrow (X, \partial X)$ une application normale telle que : h est une A-équivalence d'homologie

$h|_{\partial M} : \partial M \longrightarrow \partial X$ est une A'-équivalence d'homologie

et $H|_{\partial M} : \partial M \longrightarrow \partial X$ est j -connexe pour $2j < n - 1$.

Alors pour tout $\gamma \in \Gamma_{n+1}(\Phi)$, il existe un cobordisme normal $(F, \hat{F})$ entre $(h, \hat{h})$ et $(f, \hat{f})$, f vérifiant les mêmes hypothèses que h et $\sigma(H, \hat{H}) = \gamma$

2.7 Les groupes $\Gamma_n(\mathcal{F})$ permettent de généraliser la suite exacte de Wall-Sullivan [W] de la façon suivante.

Soit $(X, \partial X)$ un A-complexe de Poincaré dont le bord ∂X est une variété. Appelons A-lissage de X toute application $f : (M, \partial M) \longrightarrow (X, \partial X)$,

(où M est une variété de dimension n) telle que f soit une A -équivalence d'homologie et $f|_{\partial M}$ est un homéomorphisme. Deux A -lissages de X , f et g , $g : (N, \partial N) \longrightarrow (X, \partial X)$, sont dits équivalents s'il existe

$$F : (W, N, M, \partial_0 W) \longrightarrow (X \times I, X \times 0, X \times 1, \partial X \times I)$$

telle que :

F est une A -équivalence d'homologie

$$\partial W = N \cup M \cup \partial_0 W$$

$$F|M = f, \quad F|N = g \text{ et}$$

$$F|_{\partial_0 W} : \partial_0 W \longrightarrow \partial X \times I \text{ est un homéomorphisme.}$$

Nous désignerons par $\mathcal{S}_A(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence des A -lissages de X . Désormais $\mathcal{S}_A(X)$ est supposé non vide.

Fixons nous maintenant un A -lissage de X , $f_0 : (M_0, \partial M_0) \longrightarrow (X, \partial X)$. D'après les hypothèses faites en 2-1, f_0 est une Z -équivalence d'homologie ; il s'ensuit que f_0 est couverte par une application fibrée $\hat{f}_0$ de sorte que $(f_0, \hat{f}_0)$ soit une application normale.

D'après 2.3, un élément $\gamma \in \Gamma_{n+1}(\mathcal{F})$ est égal à l'obstruction $\sigma(H, \hat{H})$ d'un cobordisme normal $(H, \hat{H})$ entre $(f_0, \hat{f}_0)$ et $(h, \hat{h})$, h étant une A -équivalence d'homologie donc aussi un A -lissage de X .

Ceci nous permet de définir $\xi : \Gamma_{n+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{S}_A(X)$ comme étant l'application qui associe à $\gamma = \sigma(H, \hat{H})$ la classe de h dans $\mathcal{S}_A(X)$.

Nous obtenons alors une suite "exacte" :

$$\Gamma_{n+1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\xi} \mathcal{S}_A(X) \xrightarrow{\eta} [X/\partial X, G/PL] \xrightarrow{\sigma} \Gamma_n(\mathcal{F}) \quad (n \geq 5)$$

où η associe à un A-lissage f la classe de cobordisme normal de $(f, \hat{f})$ et σ associe à une application normale $(f, \hat{f})$ (dont la restriction au bord est un homéomorphisme) l'obstruction $\sigma(f, \hat{f}) \in \Gamma_n(\mathcal{F})$

Cette suite est exacte au sens suivant :

$$\text{Im } \eta = \text{Ker } \sigma \text{ et}$$

$\eta(x)$ est égal à la classe du A-lissage f_0 si et seulement si $x = \xi(Y)$ pour un certain Y de $\Gamma_{n+1}(\mathcal{F})$.

En remplaçant X par $X \times I$, cette suite se prolonge sur la gauche et devient une suite exacte de groupes abéliens.

Dans la suite, il sera fait usage du résultat suivant.

2.8 PROPOSITION. ($n \geq 5$) Tout A-lissage de X est équivalent dans $\mathcal{S}_A(X)$ à un A-lissage $g : (N, \partial N) \longrightarrow (X, \partial X)$ tel que $g_* : \pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(X)$ soit un isomorphisme.

2.9 REMARQUE. Grâce au résultat ci-dessus la suite exacte de 2.5 devient, pour $A = \mathbb{Z}[\pi]$, la suite de Wall-Sullivan.

Pour terminer citons encore le résultat ci-dessous prouvé dans [V₂].

2.10 THÉORÈME. Soit Λ le localisé universel de $\mathcal{F} : \mathbb{Z}[\pi] \longrightarrow \mathbb{Z}$. Alors $\Gamma_n(\mathcal{F})$ est isomorphe à $L_n^h(\Lambda)$.

CHAPITRE 1

LES GROUPES $C_{n,k}$ - GÉNÉRALITÉS - EXEMPLES EN BASSE DIMENSION

Dans ce chapitre, nous prouvons que l'ensemble $C_{n,k}$ des classes de cobordisme des enlacements de k disques de dimension n a une structure naturelle de groupe. Ce groupe est abélien pour $n \geq 2$, cependant $C_{1,k}$ contient le groupe des tresses à k brins, voir §3.

Au §2 nous définissons la notion de localisation d'un enlacement. Cette notion jouera un rôle important dans la suite.

Nous construisons, dans le §4, deux invariants par les enlacements d'intervalles. Quelques exemples sont traités.

§1 - DÉFINITIONS ; LE GROUPE $C_{n,k}$

1.1 NOTATIONS. Le disque de dimension n est $D^n = [0,1]^n = I^n$. Pour tout entier $k > 0$, l'ensemble $\{1,2,\dots,k\}$ sera noté $\underline{k}$ et $a_1, a_2, \dots, a_k$ étant k points distincts de l'intérieur de D^2 , nous désignerons par

$j_0 : \underline{k} \times D^n \longrightarrow D^{n+2}$ l'inclusion définie par $j_0(i,x) = (a_i, x) \in D^2 \times D^n = D^{n+2}$, $i = 1,2,\dots,k$.

1.2 Un enlacement de k disques de dimension n , ou (n,k) enlacement, ($n \geq 1, k \geq 1$) est un plongement semi-linéaire localement plat et transverse au bord $f : \underline{k} \times D^n \longrightarrow D^{n+2}$ tel que

$$f|_{\underline{k} \times \partial(D^n)} = j_0|_{\underline{k} \times \partial(D^n)}.$$

Dans la suite, l'enlacement $j_0 : \underline{k} \times D^n \longrightarrow D^{n+2}$ sera appelé l'enlacement trivial.

1.3 Deux (n,k) enlacements $f, g : \underline{k} \times D^n \longrightarrow D^{n+2}$ seront dits cobordants s'il existe un plongement semi-linéaire localement plat et transverse au bord, $F : \underline{k} \times D^n \times I \longrightarrow D^{n+2} \times I$ tel que

$$F|_{\underline{k} \times D^n \times 0} = f, F|_{\underline{k} \times D^n \times 1} = g \text{ et } F|_{\underline{k} \times \partial D^n \times I} = (j_0|_{\underline{k} \times \partial D^n}) \times \text{id}_I$$

1.4 Somme de deux (n,k) enlacements.

Notons $\alpha_1, \alpha_2 : D^{n+2} \longrightarrow D^{n+2}$ les applications

$$\alpha_1(y,t) = (y, t/2), \quad \alpha_2(y,t) = (y, \frac{1+t}{2}), \quad (y,t) \in D^{n+1} \times I = D^{n+2}.$$

f_1 et f_2 étant deux (n,k) enlacements, leur somme

$f_1 + f_2 : \underline{k} \times D^n \rightarrow D^{n+2}$ est le (n,k) enlacement défini par :

$$f_1 + f_2(x, t) = \begin{cases} \alpha_{11} f_1(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_{22} f_2(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

où $(x, t) \in D^n = D^{n-1} \times I$.

Il est aisé de vérifier que, pour tout (n, k) enlacement f , $f + j_0$, $j_0 + f$ et f sont cobordants (en fait, isotopes).

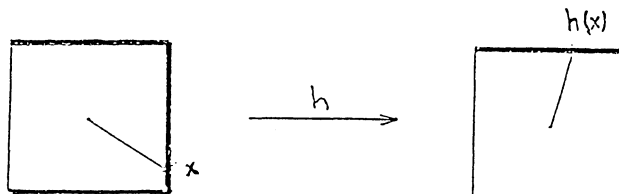
1.5 Symétrique d'un (n, k) enlacement.

Soit $\alpha : D^{n+2} \longrightarrow D^{n+2}$ définie par $\alpha(y, t) = (y, 1-t)$, $(y, t) \in D^{n+1} \times I$, et soit f un (n, k) enlacement. Nous désignerons par $(-f) : \underline{k} \times D^n \longrightarrow D^{n+2}$ le (n, k) enlacement suivant :

$$(-f)(x, t) = \alpha f(x, 1-t), \quad (x, t) \in D^{n-1} \times I.$$

1.6 PROPOSITION. Pour tout (n, k) enlacement f , $f + (-f)$ est cobordant à j_0 .

Démonstration. Soit $h : \partial(I \times I) \longrightarrow \partial(I \times I)$ est un homéomorphisme tel que $h(0 \times I) = 0 \times I \cup I \times 0 \cup 1 \times I$, $h(0, 1) = (0, 1)$, $h(0, 0) = (1, 1)$. L'application h se prolonge (radialement) à un homéomorphisme, noté encore $h : I \times I \longrightarrow I \times I$.



$f : \underline{k} \times D^{n-1} \times I \longrightarrow D^{n+1} \times I$ étant un (n,k) enlacement, définissons $F :$

$\underline{k} \times D^{n-1} \times I \times I \rightarrow D^{n+1} \times I \times I$ par

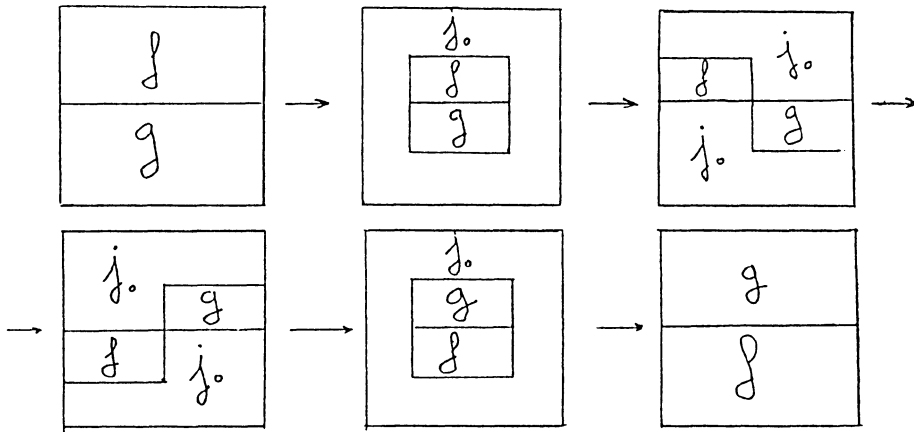
$$F = (\text{id}_{D^{n+1}} \times h) \circ (f \times \text{id}_I) \circ (\text{id}_{\underline{k} \times D^{n-1}} \times h^{-1}).$$

Alors $F|_{\underline{k} \times D^n \times 0} = j_0$ et $F|_{\underline{k} \times D^n \times 1} = f + j_0 + (-f)$.

Donc $f + (-f)$ est cobordant à j_0 .

1.7 PROPOSITION. Soient f et g deux (n,k) enlacements. On suppose $n \geq 2$. Alors $f+g$ est cobordant à $g+f$.

Démonstration : se fait suivant le schéma ci-dessous. En $f+g$ est isotope à $g+f$.



Nous avons donc prouvé le :

1.8 THÉORÈME. Les classes de cobordisme des enlacements de k disques de dimension n forment un groupe noté $C_{n,k}$. Ce groupe est abélien dès que $n \geq 2$.

Cependant $C_{1,k}$ n'est pas commutatif, du moins pour $k > 2$, voir §3 et 4 ci-après. Mais il est clair que $C_{1,1}$ est isomorphe au groupe C_1 de FOX et MILNOR.

§2- EXTÉRIEUR D'UN ENLACEMENT ; LOCALISATION

2.1 Un (n,k) enlacement f se prolonge de façon unique - à isotopie près- à un plongement $\bar{f}: \underline{k} \times D^n \times D^2 \longrightarrow D^{n+2}$.

Définissons l'extérieur $X(f)$ du (n,k) enlacement f comme étant la fermeture de $D^{n+2} - f(\underline{k} \times D^n \times D^2)$

L'extérieur du (n,k) enlacement trivial j_0 sera noté X_0^{n+2} .

Clairement $X_0^{n+2} = X_0^{n+1} \times I = X_0^2 \times D^n$ où X_0^2 est le disque D^2 privés de k disques ouverts et disjoints. X_0^{n+2} est homéomorphe à $\#_k(D^{n+1} \times S^1)$ (somme connexe sur le bord).

2.2 Le bord de X_0^{n+2} se décompose de la façon suivante :

$$\partial X_0^{n+2} = (\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}} \cup (\partial X_0^{n+2})_{\text{int}}$$

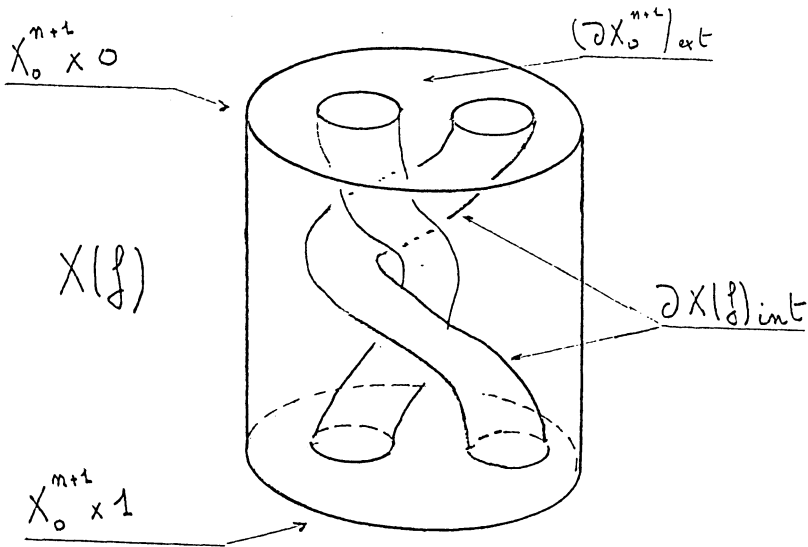
$$\text{où } (\partial X_0^{n+2})_{\text{int}} = \bigcup_0 (\underline{k} \times D^n \times S^1) \text{ et } (\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}} = \overline{\partial D^{n+2} - \bigcup_0 (\underline{k} \times \partial D^n \times D^2)}.$$

Notons aussi que $(\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}} = (\partial X_0^{n+1})_{\text{ext}} \times I \cup X_0^{n+1} \times \partial I$.

Plus généralement le bord de $X(f)$ se décompose sous la forme :
 $\partial X(f) = (\partial X(f))_{\text{int}} \cup (\partial X(f))_{\text{ext}}$; mais, puisque $f|_{\underline{k} \times \partial D^n} = j_0|_{\underline{k} \times \partial D^n}$, il est
 clair que $(\partial X(f))_{\text{ext}} = (\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}}$

Enfin, posons, pour tout (n,k) enlacement f

$$Y(f) = \overline{\partial X(f) - X_0^{n+1} \times 0} = X_0^{n+1} \times 1 \cup (\partial X(f))_{\text{int}} \cup (\partial X_0^{n+1})_{\text{ext}} \times I$$



$Y(f)$ s'obtient de $X_0^{n+1} \times 1$ en ajoutant un collier à $\partial X_0^{n+1} \times 1$;

$Y(f)$ a donc le type d'homotopie de $V_k S^1$. Rappelons maintenant que la

classe $\mathcal{U}$ définie au chapitre 0 est constituée des paires (K, L) de complexes finis tels que K/L soit contractile.

2.3 PROPOSITION. Pour tout (n, k) enlacement f , la paire $(X(f), Y(f))$ est un élément de $\mathcal{U}$. Autrement dit, l'inclusion $Y(f) \hookrightarrow X(f)$ induit un isomorphisme $H_*(Y(f)) \xrightarrow{\sim} H_*(X(f))$ et une application normalement surjective $\pi_1(Y(f)) \longrightarrow \pi_1(X(f))$

Démonstration : $\bar{f} : \underline{k} \times D^n \times D^2 \longrightarrow D^{n+2}$ étant l'épaississement du (n, k) enlacement f , posons $A = Y(f) \cup \bar{f}(\underline{k} \times D^n \times D^2)$; A se rétracte par déformation sur $D^{n+1} \times 1 \subset D^{n+2}$; A est donc contractile. D'autre part, le diagramme ci-dessous est cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y(f) & \hookrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(f) & \hookrightarrow & D^{n+2} \end{array}$$

La suite exacte de MAYER-VIETORIS et le théorème de VAN-KAMPEN fournissent le résultat cherché.

2.4 Localisation d'un (n, k) enlacement. E étant le foncteur de localisation défini au chapitre 0, posons $E_k = E(V_k S^1)$. D'après la proposition 1.8, chapitre 0, $E_k = \varinjlim_p K_p$, $K_0 = V_k S^1$ et, pour tout p , (K_{p+1}, K_p) est dans $\mathcal{U}$.

Maintenant fixons nous, une fois pour toutes, une équivalence

d'homotopie $s : X_0^2 \longrightarrow V_k S^1$; s se prolonge à une équivalence
 d'homotopie notée encore $s : X_0^{n+2} \longrightarrow V_k S^1$ par $s(x,t) = s(x)$,
 $(x,t) \in X_0^{n+2} = X_0^2 \times I^n$.

L'épaississement $\bar{f} : \underline{k} \times D^n \times D^2 \longrightarrow D^{n+2}$ du (n,k) enlacement f
 permet de construire un homéomorphisme $f' : Y(f) \longrightarrow Y(j_0)$ tel que
 $f'|Y(f) - (\partial X(f))_{int}$ soit l'identité et $f'(\partial X(f))_{int} = \bar{f}^{-1}(\partial X(f))_{int}$.

En raison de la proposition 2.3 précédente et de la propriété
 universelle de E_k , l'application $s|Y(j_0) \circ f' : Y(f) \longrightarrow V_k S^1 \subset E_k$ se
 prolonge, de façon unique à homotopie fixe sur $Y(f)$ près, à une
 application $l(f) : X(f) \longrightarrow E_k$

$l(f)$ sera appelée la localisation du (n,k) enlacement f

$$\begin{array}{ccccccc}
 & f' & & s|Y(j_0) & & & \\
 Y(f) & \longrightarrow & Y(j_0) & \longrightarrow & V_k S^1 & \longrightarrow & E_k \\
 \downarrow & & & \nearrow & & & \\
 X(f) & & & l(f) & & &
 \end{array}$$

2.5 Localisation d'un cobordisme

Soit $F : \underline{k} \times D^n \times I \longrightarrow D^{n+2} \times I$ un cobordisme entre les deux
 (n,k) enlacements f et g . F s'épaissit en $\bar{F} : \underline{k} \times D^n \times I \times D^2 \longrightarrow D^{n+2} \times I$
 et nous poserons $X(F) = \overline{D^{n+2} \times I - \underline{k} \times D^n \times I \times D^2}$, $Y(F) = \partial X(F) - X_0^{n+1} \times I \times 0$.
 $Y(F)$ se décompose sous la forme $Y(F) = X(f) \cup X(g) \cup Z$.

A l'aide de $\bar{F}$, il est possible de construire un homéomorphisme

$F' : Z \longrightarrow Y(j_0) \times I$ prolongeant f' et g' . Définissons maintenant

$$1'(F) : Y(F) \rightarrow E_k \quad \text{par} \quad 1'(F)|X(f) = 1(f) \quad , \quad 1'(F)|X(g) = 1(g) \quad , \\ 1'(F)|Z = (s|Y(j_0) \times I) \circ F'.$$

Mais $(X(F), Y(F))$ est un élément de $\mathcal{U}$. Par conséquent $1'(F)$ se prolonge - de façon unique à homotopie fixe sur $Y(F)$ près- à une application $1(F) : X(F) \longrightarrow E_k$.

$1(F)$ est la localisation du cobordisme F .

§3- AUTOMORPHISMES DE $\pi_1(E_k)$ ET GROUPES DE TRESSSES.

Une sorte de généralisation du théorème de représentation d'Artin (proposition 3-5) nous prouve que $C_{1,k}$ contient le groupe des tresses pures.

3.1 Le groupe $\pi_1(E_k)$ sera désormais noté G_k et F_k désignera le groupe libre ayant $x_1, x_2, \dots, x_k$ pour générateurs

Notons que le morphisme de groupe $i_* : F_k \longrightarrow G_k$ induit par l'inclusion $i : V_k S^1 \longrightarrow E_k$ est une injection car, d'une part $i_* : H_1(F_k) \xrightarrow{\sim} H_1(G_k)$ est un isomorphisme et $H_2(F_k) = H_2(G_k) = 0$, d'autre part F_k est résiduellement nilpotent ; voir [St].

3.2 PROPOSITION.

Soit $g_1, g_2, \dots, g_k$ k éléments quelconques de G_k . Alors il existe un et un seul automorphisme σ de G_k tel que $\sigma(x_i) = g_i x_i g_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Démonstration :

1) Existence de σ Etant donné $g_1, g_2, \dots, g_k$ dans G_k considérons une application $f : V_k S^1 \longrightarrow E_k$ telle que, pour $i = 1, 2, \dots, k$,

$$f_*(x_i) = g_i x_i g_i^{-1}, \quad f_* = \pi_1(V_k S^1) \longrightarrow \pi_1(E_k).$$

Il est clair que f_* est normalement surjective et que f induit un isomorphisme en homologie entière. Par conséquent, pour tout entier p tel que $K_p \supset f(V_k S^1)$, $(K_p, f(V_k S^1))$ est dans la classe $\mathcal{U}$.

Il s'ensuit que $(E_k, f(V_k S^1))$ est dans $\mathcal{U}^*$ car pour toute application $(M, N) \longrightarrow (E_k, f(V_k S^1))$ où (M, N) est une paire de complexes finis, il existe un entier p tel que K_p contienne l'image de M et $f(V_k S^1)$.

Les propriétés du foncteur de localisation E font que f se prolonge en une équivalence d'homotopie $E(f) : E_k \longrightarrow E_k$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & V_k S^1 & \\ i \swarrow & & \searrow f \\ E_k & \xrightarrow{E(f)} & E_k \end{array}$$

Par conséquent $E(f)$ induit un automorphisme σ de $G_k = \pi_1(E_k)$ tel que $\sigma(x_i) = g_i x_i g_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

2) Unicité : Il suffit de prouver que le seul automorphisme de G_k laissant fixes les x_i est l'identité. Appelons τ un tel automorphisme :

$\tau(x_i) = x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ et soit $p : E_k \longrightarrow BG_k$ l'application induisant l'identité sur les π_i .

Il existe une application $g : BG_k \longrightarrow BG_k$ telle que $g_* = \tau$ et le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} V_k S^1 & \rightarrow & E_k & \rightarrow & BG_k \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow g \\ V_k S^1 & \rightarrow & E_k & \rightarrow & BG_k \end{array}$$

Les obstructions à relever $g : p : E_k \longrightarrow BG_k$ en $\bar{g} : E_k \longrightarrow E_k$ se situent dans les $H^{q+1}(E_k, V_k S^1; \pi_q(E_k))$, $q \geq 2$, car la fibre de p est le revêtement universel de E_k . Mais, d'une part les $\pi_q(E_k)$ sont des Λ_k -modules, Λ_k étant le localisé universel de l'augmentation $\mathbb{Z}[G_k] \longrightarrow \mathbb{Z}$ et d'autre part $H_*(E_k, V_k S^1; \Lambda_k) = 0$, (voir §1 chap 0).

Les $H_{q+1}(E_k, V_k S^1; \pi_q(E_k))$, $q \geq 2$, sont par conséquent tous nuls ; il s'ensuit que $\bar{g}$ existe. Mais, en vertu des propriétés de E_k , $\bar{g}$ est nécessairement homotope à l'identité. Donc g est homotope à l'identité.

3.3 NOTATIONS

Nous noterons $\mathcal{H}(G_k)$ (resp. $\mathcal{H}(F_k)$) le groupe des automorphismes σ de G_k (resp. F_k) de la forme $\sigma(x_i) = g_i x_i g_i^{-1}$, $g_i \in G_k$ (resp. F_k), $i = 1, 2, \dots, k$.

$\mathcal{H}_0(G_k)$ (resp. $\mathcal{H}_0(F_k)$) est le sous-groupe de $\mathcal{H}(G_k)$ (resp. $\mathcal{H}(F_k)$) constitué des automorphismes σ tels que $\sigma(x_1 x_2 \dots x_k) = x_1 x_2 \dots x_k$.

Notons encore que, d'après la proposition précédente, $\mathcal{H}_0(F_k)$ (resp. $\mathcal{H}(F_k)$) est un sous-groupe de $\mathcal{H}_0(G_k)$ (resp. $\mathcal{H}(G_k)$).

3.4 Soit B_k le groupe des tresses à k brins, voir [M], et soit P_k le sous-groupe de B_k constitué des tresses pures : P_k est le noyau de $B_k \longrightarrow \mathfrak{S}_k$ où $\mathfrak{S}_k$ est le groupe symétrique.

Clairement, une tresse pure à k brins est un $(1, k)$ enlacement et la loi de composition des tresses fait qu'il existe un morphisme de groupe $\mu : P_k \longrightarrow C_{1,k}$.

D'autre part, le théorème de Représentation d'Artin ([M], theorem 4-6) nous fournit un isomorphisme $\lambda : P_k \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_0(F_k)$.

3.5 PROPOSITION. Il existe un morphisme de groupe

$\bar{\lambda} : C_{1,k} \longrightarrow \mathcal{H}_0(G_k)$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 P_k & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{H}_0(F_k) \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \\
 C_{1,k} & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \mathcal{H}_0(G_k)
 \end{array} \quad (\Delta)$$

Démonstration :

Soit f un $(1, k)$ enlacement d'extérieur $X(f)$ et de localisation $1(f) : X(f) \longrightarrow E_k$. $1(f) | X_0^2 \times 1$ est l'équivalence d'homotopie s définie en 2-4 et si $y_1, y_2, \dots, y_k$ désignent les générateurs canoniques de

$\pi_1(X_0^2 \times 0)$ alors, clairement, y_i et x_i sont conjugués dans $\pi_1(X(f))$. Il existe donc $g_1, g_2, \dots, g_k$ dans G_k tels que $l_*(y_i) = g_i x_i g_i^{-1}$; de plus $\Pi_i x_i = \Pi_i g_i x_i g_i^{-1}$ puisque $\Pi_i x_i$ est représenté dans $\pi_1(X_0^2 \times 1)$ par le bord du disque D^2 contenant $X_0^2 \times 1$.

La proposition précédente nous permet d'associer à f un élément σ_f de $\mathcal{H}_0(G_k)$.

Soit maintenant g un $(1, k)$ enlacement cobordant à f et soit Z l'extérieur d'un cobordisme entre f et g . Les propriétés de E_k font que $l(f)$ et $l(g)$ se prolongent en $l(F) : Z \longrightarrow E_k$; voir 2.5 . Il s'ensuit que $\tau_f = \tau_g$. Ceci définit une application $\bar{\lambda} : C_{1,k} \longrightarrow \mathcal{H}_0(G_k)$.

D'autre part la définition de la composition des enlacements fait que $\bar{\lambda}$ est un morphisme de groupe.

Enfin le diagramme (Δ) est commutatif car cette construction de $\bar{\lambda}$ n'est qu'une généralisation à $C_{1,k}$ de la construction de l'isomorphisme λ , voir [M].

3.6 COROLLAIRE.

Pour $k \geq 3$, le groupe $C_{1,k}$ n'est pas commutatif.

Démonstration : Il suit de la proposition précédente que μ est une injection. Or P_k n'est pas commutatif pour $k \geq 3$. Plus

précisément, il existe une suite exacte et scindée, voir [M].

$$1 \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow 1$$

3.7 REMARQUE. Ce qui a été fait dans ce paragraphe peut se généraliser de la façon suivante.

Appelons enlacement généralisé de k intervalles tout plongement $f : \underline{k} \times I \longrightarrow D^2 \times I$ tel que $f(i \times 0) = a_i \times 0$, $f(i \times 1) = a_{s(i)} \times 1$ où s est un élément quelconque du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ et les a_i des points distincts de l'intérieur de D^2 choisis une fois pour toutes, $i = 1, 2, \dots, k$.

En considérant les classes de cobordisme de tels objets nous obtenons un groupe, disons D_k , contenant $C_{1,k}$.

La proposition 3-2 se généralise en :

3-2'. Soit $g_1, g_2, \dots, g_k$ k éléments quelconques de G_k et soit s un élément de $\mathfrak{S}_k$. Alors il existe un et un seul automorphisme σ de G_k tel que $\sigma(x_i) = g_i x_{s(i)} g_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Notons maintenant $\mathcal{F}(G_k)$ (resp. $\mathcal{F}(F_k)$) le groupe des automorphismes σ de G_k (resp. F_k) de la forme $\sigma(x_i) = g_i x_{s(i)} g_i^{-1}$ et $\mathcal{F}_0(G_k)$ (resp. $\mathcal{F}_0(F_k)$) le sous-groupe de $\mathcal{F}(G_k)$ (resp. $\mathcal{F}(F_k)$) constitué des σ tels que $\sigma(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$

Le théorème de représentation d'Artin nous fournit un isomorphisme $\alpha : B_k \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0(F_k)$ et la proposition 3-4 peut être reformulée ainsi :

3-4'. Il existe un morphisme de groupe $\bar{\alpha} : D_k \longrightarrow \mathcal{F}_0(G_k)$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 B_k & \xrightarrow{\sim \alpha} & \mathcal{F}_0(F_k) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D_k & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathcal{F}_0(G_k)
 \end{array}$$

§4 - CALCULS DANS $C_{1,2}$.

Pour tester la commutativité de $C_{1,2}$ ou pour pouvoir décider si deux enlacements donnés sont différents (à cobordisme près), nous avons besoin de construire des invariants pour $C_{1,k}$.

Mais, puisque $H_1(F_k) = H_1(G_k)$, les invariants que l'on peut espérer via l'abélianisation de G_k sont des invariants d'entrelacs (de cercles), du genre polynôme d'Alexander, forme de Blanchfield (voir [H]), et de ce fait, ne répondent pas à nos besoins.

Dans ce qui suit, nous montrons que l'on peut associer à tout $(1,k)$ enlacement k séries formelles en k variables non commutatives et à tout $(1, 2)$ enlacement une fraction rationnelle. Quelques exemples sont traités.

4.1 NOTATIONS. Soit $P_k = \mathbb{Z}[[X_1, X_2, \dots, X_k]]$ l'anneau des séries formelles en les variables **non commutatives** $X_1, X_2, \dots, X_k$, et soit $U = \{p \in P_k \mid p(0) = \pm 1\}$ le groupe des unités de P_k .

F_k étant, comme d'habitude, le groupe libre engendré par $x_1, x_2, \dots, x_k$, nous désignerons par $\alpha : F_k \longrightarrow U$ le morphisme de groupe défini par $\alpha(x_i) = 1 + X_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

4.2 PROPOSITION. Le morphisme $\alpha : F_k \longrightarrow U$ se prolonge, de façon unique, en un morphisme de groupe $\bar{\alpha} : G_k \longrightarrow U$.

Démonstration : Soit I_n l'idéal de P_k engendré par les monômes de degré n , $n \geq 0$; et soit $U(n)$ le sous-groupe normal de U constitué des éléments de la forme $1 + p$ où $p \in I_n$.

Prouvons maintenant que $U/U(n)$ est un groupe nilpotent. Pour cela, notons U_n le $n^{\text{ième}}$ terme de la série centrale descendante de U :

$U_1 = [U, U]$ et $U_n = [U, U_{n-1}]$. Clairement $U_1 \subset U(1)$. Une récurrence facile prouve que, pour tout $n \geq 1$, $U_n \subset U(n)$. Il s'ensuit que le $n^{\text{ième}}$ terme de la série centrale descendante de $U/U(n)$ se réduit à l'élément neutre.

$U/U(n)$ est donc nilpotent. Or tout groupe nilpotent est local au sens de Bousfield, voir [B₁]. Il se trouve, d'autre part, que l'inclusion $i_* : F_k \longrightarrow G_k$ induit un isomorphisme sur le H_1 et que $H_2(F_k) = H_2(G_k) = 0$. Par conséquent l'application $c \circ \alpha : F_k \longrightarrow U/U(n)$ où $c : U \longrightarrow U/U(n)$ désigne l'application canonique, se prolonge, de façon unique, à $\bar{\alpha}_n : G_k \longrightarrow U/U(n)$.

Terminons la démonstration en remarquant que :

$U = \varprojlim_n U/U(n)$ et qu'une limite projective de groupes locaux est clairement un groupe local.

4.3 PROPOSITION. L'application $\bar{\alpha} : G_k \longrightarrow P_k$ induit un morphisme de groupe $\mathcal{H}_0(G_k) \longrightarrow \text{Aut } P_k$.

Démonstration : Soit τ un élément de $\mathcal{H}_0(G_k)$. nous savons qu'il existe des éléments $a_1, a_2, \dots, a_k$ de G_k tels que $\tau(x_i) = a_i x_i a_i^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Pour $i = 1, 2, \dots, k$, nous définirons la série $\overline{\tau}(X_i)$ par $\overline{\tau}(X_i) = \overline{\alpha}(a_i) X_i \overline{\alpha}(a_i^{-1})$. Remarquons au passage que $\overline{\tau}(X_i) = X_i + q_i$, q_i étant un élément de P_k de valuation ≥ 2 .

Plus généralement, si $p(X_1, X_2, \dots, X_k)$ est un polynôme, nous poserons $\overline{\tau}(p) = p(\overline{\tau}(X_1), \overline{\tau}(X_2), \dots, \overline{\tau}(X_k))$. Soit maintenant $s = \sum_{i \geq 0} p_i$ un élément de P_k où les p_i sont des polynômes homogènes de degré i .

D'après la remarque précédente $\overline{\tau}(p_i)$ est de valuation i , par conséquent la suite de terme général $\overline{\tau}(s_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} \overline{\tau}(p_i)$ est une suite de Cauchy de P_k pour la métrique induite par la valuation. Il s'ensuit que $\overline{\tau}(s_n)$ converge vers $\overline{\tau}(s) = \sum_{i \geq 0} \overline{\tau}(p_i)$.

Le groupe U étant local, nous savons que l'application $\text{Hom}(G_k, U) \longrightarrow \text{Hom}(F_k, U)$ induite par l'inclusion $F_k \longrightarrow G_k$ est une bijection.

Or, par construction de $\overline{\tau}$, $\overline{\tau} \circ \overline{\alpha}|_{F_k} = \overline{\alpha} \circ \tau|_{F_k}$. Par conséquent le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_k & \xrightarrow{\tau} & G_k \\ \overline{\alpha} \downarrow & & \downarrow \overline{\alpha} \\ P_k & \xrightarrow{\overline{\tau}} & P_k \end{array}$$

est commutatif.

Vérifions maintenant que $\overline{\tau}$ est bien un automorphisme de P_k . De la même façon que précédemment, nous pouvons associer à τ^{-1} une application $\tau^{-1} : P_k \longrightarrow P_k$. Il est clair que $\overline{\tau} \tau^{-1}(X_i) = \tau^{-1} \overline{\tau}(X_i) = X_i$ $i = 1, 2, \dots, k$.
Il s'ensuit que $\overline{\tau} \tau^{-1} = \tau^{-1} \overline{\tau} = \text{id } P_k$.

4.4 Le diagramme $C_{1,k} \xrightarrow{\overline{\lambda}} \mathcal{H}_0(G_k) \longrightarrow \text{Aut } P_k$ nous permet

d'associer à la classe de cobordisme d'un $(1, k)$ enlacement f , un automorphisme σ_f de P_k ; donc en particulier d'associer à f des séries formelles $Y_i = \sigma_f(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Mais, dans la pratique, il semble difficile d'exhiber l'automorphisme σ_f ; même le calcul complet des séries Y_i nous paraît, pour l'instant, peu accessible.

Dans ce qui suit, nous nous sommes contentés de calculer les séries Y_1, Y_2 , tronquées au degré 4, pour certains enlacements à deux composantes.

Et si nous nous sommes contentés du degré 4 c'est parce que, même à l'aide d'un ordinateur, les calculs aux degrés supérieurs à 4 sont longs et pénibles : des calculs intermédiaires nous font passer par des polynômes à 4 variables non commutatives et de tels polynômes de degré 5 dépendent de 1365 coefficients.

Précisons maintenant les notations et la méthode de calcul utilisée. x_1 et x_2 désignent les générateurs canoniques de $\pi_1(X_0^2 \times 0)$ et

y_1, y_2 ceux de $\pi_1(X_0^2 \times 1)$. x_1, x_2, y_1, y_2 ont pour images respectives $1+X_1, 1+X_2, 1+Y_1, 1+Y_2$ dans P_2 selon le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X_0^2 \times 0) & & \searrow & & \\ & & \pi_1(X(f)) & \longrightarrow & G_2 \longrightarrow P_2 \\ \pi_1(X_0^2 \times 1) & & \nearrow & & \end{array}$$

où $X(f)$ est l'extérieur de l'enlacement f .

Le groupe $\pi_1(X(f))$ est calculé selon la méthode de Wirtinger ; puis dans les relations obtenues, x_1, x_2, y_1, y_2 sont remplacés par $1+X_1, 1+X_2, 1+Y_1, 1+Y_2$.

L'exemple A est traité en détails. Les exemples B et D sont similaires. Dans l'exemple C un générateur supplémentaire z apparaît ; dans les relations définissant $\pi_1(X(C))$, z est remplacé par $1+Z$. En fait z est conjugué à x_1 . Donc $Z=X_1$ au degré 1.

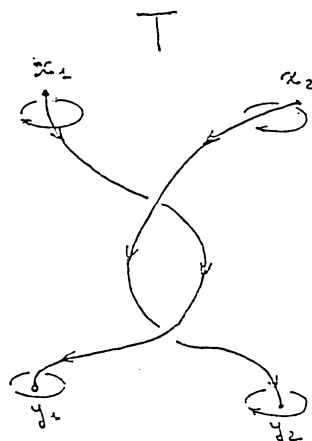
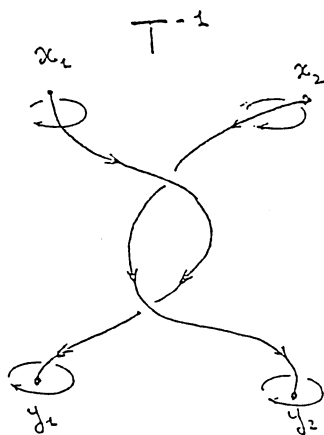
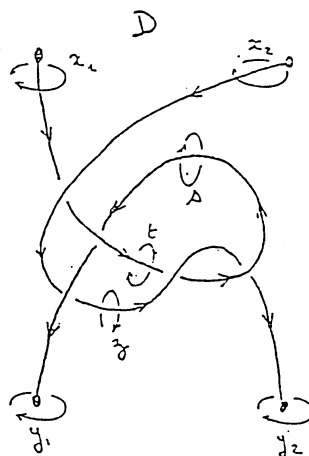
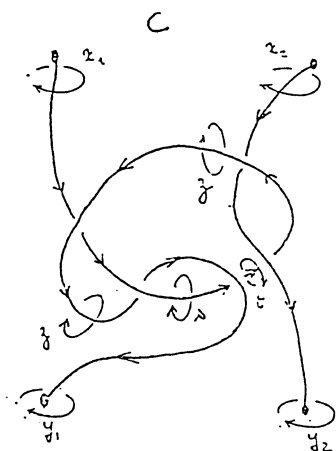
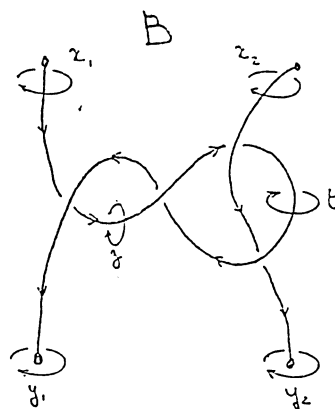
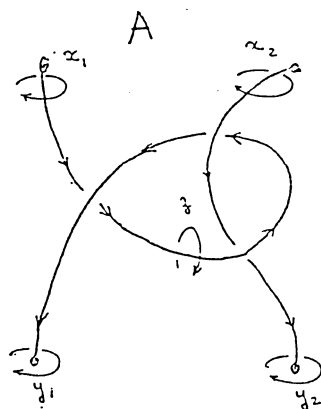
La connaissance de Z au degré 1 nous donne Y_1 et Y_2 au degré 2. La connaissance de Y_1 et Y_2 au degré 2 nous donne Z au degré 2 qui nous donne Y_1 et Y_2 au degré 3 etc

Ajoutons que nous nous sommes aidés d'un programme informatique pour faire les calculs qui suivent.

Tresse T

Les relations

$$\begin{aligned} Y_1 &= x_2^{-1} x_1 x_2 \\ Y_2 &= x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2 \end{aligned} \quad \text{donnent :}$$



$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 + X_1 X_2 - X_2 X_1 + X_2^2 X_1 - X_2 X_1 X_2 - X_2^3 X_1 + X_2^2 X_1 X_2 \\
Y_2 &= X_2 + X_2 X_1 - X_1 X_2 + 2 X_2 X_1 X_2 + X_1^2 X_2 - X_2^2 X_1 - X_1 X_2 X_1 - X_1 X_2^2 \\
&\quad + X_2 X_1 X_2 X_1 - 2 X_2^2 X_1 X_2 - X_2 X_1^2 X_2 + X_2^3 X_1 + X_1^2 X_2 X_1 \\
&\quad - X_1^3 X_2 - X_1 X_2 X_1 X_2 + X_2 X_1 X_2^2 + X_1^2 X_2^2
\end{aligned}$$

Tresse T^{-1}

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \\
y_2 &= x_1 x_2 x_1^{-1} \quad \text{donnent :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 + X_2 X_1 - X_1 X_2 - X_1^2 X_2 + 2 X_1 X_2 X_1 + X_1 X_2^2 - X_2 X_1^2 \\
&- X_2 X_1 X_2 + X_1^2 X_2 X_1 + X_1^2 X_2^2 - 2 X_1 X_2 X_1^2 - X_1 X_2 X_1 X_2 - X_1 X_2^2 X_1 - X_1 X_2^3 \\
&+ X_2 X_1^3 + X_2 X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1 X_2^2 \\
Y_2 &= X_2 + X_1 X_2 - X_2 X_1 - X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^2 - X_2 X_1^3 + X_1 X_2 X_1^2
\end{aligned}$$

Enlacement A

Les relations $y_1 z = x_1 y_1$, $y_1 x_2 = x_2 z$, $y_2 z = z x_2$ donnent :

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_2 y_1^{-1} x_1 y_1 x_2^{-1} \\
y_2 &= y_1^{-1} x_1 y_2 x_2 y_1^{-1} x_1^{-1} y_1
\end{aligned}$$

En remplaçant x_1, x_2, y_1, y_2 par $1+X_1, 1+X_2, 1+Y_1, 1+Y_2$ il vient :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 + X_2 X_1 - X_1 X_2 + X_1 X_2^2 - X_2 X_1 X_2 + Y_1 X_1 X_2 - X_1 Y_1 X_2 - X_2 Y_2 X_1 + Y_1^2 X_1 \\
&+ X_2 X_1 Y_1 - Y_1 X_1 Y_1 - X_1 X_2^3 + X_2 X_1 X_2^2 - Y_1 X_1 X_2^2 + X_1 Y_1 X_2^2 + X_2 Y_1 X_1 X_2 \\
&- Y_1^2 X_1 X_2 - X_2 X_1 Y_1 X_2 + Y_1 X_1 Y_1 X_2 + X_2 Y_1^2 X_1 - Y_1^3 X_1 - X_2 Y_1 X_1 Y_1 + Y_1^2 X_1 Y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2 = & X_2 + X_1 X_2 - X_2 X_1 - Y_1 X_1 X_2 + X_1 Y_1 X_2 - X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^2 + X_2 Y_1 X_1 - X_2 X_1 Y_1 \\
& + Y_1^2 X_1 X_2 - Y_1 X_1 Y_1 X_2 + Y_1 X_2 X_2 X_1 - X_1 Y_1 X_2 X_1 + X_1 X_2 X_1^2 - X_2 X_1^3 - X_2 Y_1 X_1^2 \\
& + X_1 X_2 Y_1 X_1 - X_2 Y_1^2 X_1 - X_1 X_2 X_1 Y_1 + X_2 X_1^2 Y_1 + X_2 Y_1 X_1 Y_1
\end{aligned}$$

Dans les équations ci-dessus il convient de remplacer, dans les membres de droite, Y_1 par $X_1 + X_2 X_1 - X_1 X_2$ qui représente Y_1 tronqué au degré 2. En tronquant au degré 4 les résultats obtenus, il vient :

$$\begin{aligned}
Y_1 = & X_1 + X_2 X_1 - X_1 X_2 - X_1^2 X_2 + 2 X_1 X_2 X_1 + X_1 X_2^2 - X_2 X_1^2 - X_2 X_1 X_2 + 2 X_1^2 X_2^2 \\
& + X_1^2 X_2 X_1 - 2 X_1 X_2 X_1^2 - 3 X_1 X_2 X_1 X_2 - X_1 X_2^2 X_1 - X_1 X_2^3 - X_2^2 X_1^2 \\
& + 3 X_2 X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^3 + X_2 X_1 X_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2 = & X_2 + X_1 X_2 - X_2 X_1 - X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^2 + X_1 X_2 X_1^2 + 2 X_1 X_2 X_1 X_2 - X_1^2 X_2^2 - X_2 X_1^3 \\
& + X_2^2 X_1^2 - 2 X_2 X_1 X_2 X_1
\end{aligned}$$

Enlacement B

Les relations $y_1 z = x_1 y_1$, $z y_1 = t z$, $x_2 t = z x_2$, $t y_2 = x_2 t$ donnent :

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1^{-1} y_1 x_2^{-1} y_1^{-1} x_1 y_1 x_2 y_1^{-1} x_2 \\
Y_2 &= x_2^{-1} y_1^{-1} x_1^{-1} y_1 x_2 y_1^{-1} x_1 y_1 x_2
\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}
Y_1 = & X_1 + X_1 X_2 - X_2 X_1 - X_2 X_1 X_2 + X_2^2 X_1 + X_1^2 X_2^2 - 2 X_1 X_2 X_1 X_2 \\
& + 2 X_2 X_1 X_2 X_1 - X_2^2 X_1^2 + X_2^2 X_1 X_2 - X_2^3 X_1
\end{aligned}$$

$$Y_2 = X_2 + X_2 X_1 - X_1 X_2 - X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^2 + 2 X_2 X_1 X_2 - 2 X_2^2 X_1 + X_1 X_2 X_1 X_2 \\ - X_1^3 X_2 + X_1^2 X_2 X_1 - X_2 X_1 X_2 X_1 + X_2^2 X_1^2 - X_2 X_1^3 + 2 X_2^3 X_1 - 2 X_2^2 X_1 X_2$$

Enlacement C

Les relations $zs = x_1 z$, $sy_1 = zs$, $y_1 t = sy_1$, $zy_2 = x_2 z$, $y_2 z = ty_2$

donnent :

$$y_1 = z^{-1} x_1^{-1} z x_1 z$$

$$y_2 = z^{-1} x_2 z$$

compte tenu de $y_2 = y_1^{-1} x_1 x_2$, nous obtenons en notant $1+Z$ l'image de z dans P_2 :

$$Z = X_1 + X_1 X_2 - X_2 X_1 + X_1^2 X_2 - 2 X_1 X_2 X_1 + X_2 X_1^2 - X_2 X_1 X_2 + X_2^2 X_1 - X_1^3 X_2 \\ + 2 X_1^2 X_2 X_1 - X_1 X_2 X_1^2 - 3 X_1 X_2 X_1 X_2 + X_1^2 X_2^2 + X_1 X_2^2 X_1 + 3 X_2 X_1 X_2 X_1 \\ - 2 X_2^2 X_1 + X_2^2 X_1 X_2 - X_2^3 X_1$$

puis

$$Y_1 = X_1 + X_1 X_2 - X_2 X_1 - X_2 X_1 X_2 + X_2^2 X_1 + X_1^2 X_2^2 - 2 X_1 X_2 X_1 X_2 \\ + 2 X_2 X_1 X_2 X_1 - X_2^2 X_1^2 + X_2^2 X_1 X_2 - X_2^3 X_1$$

$$Y_2 = X_2 + X_2 X_1 - X_1 X_2 + X_1^2 X_2 - X_1 X_2 X_1 - X_1 X_2^2 + 2 X_2 X_1 X_2 - X_2^2 X_1 + X_1 X_2 X_1 X_2 \\ - X_1^3 X_2 + X_1^2 X_2 X_1 + X_2 X_1 X_2^2 - X_2^2 X_1 X_2 - X_2 X_1 X_2 X_1 + X_2^2 X_1^2 - X_2^2 X_1 X_2 + X_2^3 X_1 \\ - X_2 X_1^2 X_2$$

Enlacement D

Les relations $x_2 t = x_1 x_2$, $y_1 t = ts$, $sz = zt$, $y_2 s = sz$, $y_1 z = x_2 y_1$

donnent :

$$y_1 = x_2^{-1} x_1 x_2 y_2^{-1} x_2 y_1 x_2^{-1} x_1 x_2 y_1^{-1} x_2^{-1} y_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2$$

$$y_2 = y_1^{-1} x_2 y_1 x_2^{-1} x_1 x_2 y_1^{-1} x_2 y_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 y_1^{-1} x_2^{-1} y_1, \text{ puis}$$

$$Y_1 = X_1 - X_1^2 X_2^2 + 2 X_1 X_2 X_1 X_2 - 2 X_2 X_1 X_2 X_1 + X_2^2 X_1^2$$

$$Y_2 = X_2 + X_1^2 X_2^2 - 2 X_1 X_2 X_1 X_2 + 2 X_2 X_1 X_2 X_1 - X_2^2 X_1^2$$

Les enlacements A+C et C+A donnent tous les deux :

$$Y_1 = X_1 + 2 X_1^2 X_2^2 - 4 X_1 X_2 X_1 X_2 - 2 X_2^2 X_1^2 + 4 X_2 X_1 X_2 X_1$$

$$Y_2 = X_2 + 4 X_1 X_2 X_1 X_2 - 2 X_1^2 X_2^2 - 4 X_2 X_1 X_2 X_1 + 2 X_2^2 X_1^2$$

4.5 CONCLUSIONS

1- A, B et D ne sont pas cobordants à des tresses

Il est facile de voir que les séries Y_1, Y_2 pour la tresse T^n ($n \in \mathbb{Z}$) sont de la forme : $Y_1 = X_1 + n(X_1 X_2 - X_2 X_1) + \dots$

$$Y_2 = X_2 - n(X_1 X_2 - X_2 X_1) + \dots$$

Si A est cobordant à une tresse, cette tresse ne peut-être que T^{-1} , or $Y_1(A) \neq Y_1(T^{-1})$, $Y_2(A) \neq Y_2(T^{-1})$. De même B n'est pas cobordant à T^0 .

2- Nous avons, en fait, calculé de nombreux exemples et effectué des tests jusqu'au degré 5. Mais tous ces calculs ne nous ont pas permis de conclure quant à la non commutativité du groupe $C_{1,2}$.

4.6 NOTATIONS .

Posons $A = \mathbb{Z}[F_2/F'_2] = \mathbb{Z}[G_2/G'_2]$ et désignons par Λ le localisé universel de l'augmentation $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{Z}$; Λ est constitué des fractions a/b où a et b sont des éléments de A et $\varepsilon(b) = \pm 1$

Nous nous proposons maintenant de construire un invariant, à valeurs dans Λ , pour les enlacements à deux composantes.

Cette construction utilise les résultats ci-dessous dont la démonstration est reportée à la fin de ce paragraphe.

Précisons encore quelques notations. H étant un groupe, H' et H'' sont les deux premiers sous-groupes dérivés de H ; enfin H'/H'' est muni de la structure de $Z[H/H']$ module définie par
 $(hH') \cdot (aH'') = (hah^{-1})H''$.

4.7 PROPOSITION . Soit x_1, x_2 les générateurs de F_2 et soit

$$c = [x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}. \text{ Alors:}$$

1 - Le morphisme de A -modules $A \longrightarrow F'_2/F''_2$ qui à 1 associe c est un isomorphisme

2 - L'inclusion $F_2 \longrightarrow G_2$ induit un isomorphisme

$$F'_2/F''_2 \otimes_A \Lambda \xrightarrow{\sim} G'_2/G''_2 \otimes_A \Lambda$$

4.8 COROLLAIRE. Le morphisme de A -modules $\Lambda \longrightarrow G'_2/G''_2 \otimes_A \Lambda$ qui à $\lambda \in \Lambda$ associe $c \otimes \lambda$ est un isomorphisme.

4.9 CONSTRUCTION DE $\varphi : C_{1,2} \longrightarrow \Lambda$

Nous savons associer à un enlacement f à deux composantes un automorphisme σ_f de G_2 ; σ_f induit un automorphisme σ'_f de G'_2/G''_2 .

Mais, puisque σ_f conjugue x_1 et x_2 , σ'_f est un automorphisme de G'_2/G''_2 en tant que A -module.

A son tour, σ'_f induit un automorphisme de $G'_2/G''_2 \otimes_A \Lambda$, donc induit aussi, en vertu du corollaire précédent, un automorphisme σ''_f de Λ ; σ''_f est donc la multiplication par $\sigma''_f(1)$.

Nous poserons $\varphi(f) = \sigma''_f(1)$. L'application φ prend ses valeurs dans le groupe des unités $U(\Lambda)$ de Λ et c'est un morphisme de groupe.

4.10 EXEMPLES

Les notations et conventions de 4.4 sont conservées. De plus, nous poserons $z = y_1 x_1^{-1}$ et nous désignerons par Z son image dans Λ . Nous poserons encore $d = [y_1, y_2] = \sigma_f(c)$ et nous noterons D l'image de d dans Λ . Clairement $\varphi(f) = D$. Enfin nous désignerons par t_1 et t_2 les images de x_1 et x_2 dans Λ .

Calculons maintenant D en fonction de Z . Compte tenu des relations $y_1 y_2 = x_1 x_2$ et $z = y_1 x_1^{-1}$, l'égalité $d = y_1 y_2 y_1^{-1} y_2^{-1}$ devient $d = c(x_2 z^{-1} x_2^{-1}) (x_1^{-1} z x_1)$; ce qui donne dans Λ :

$$D = 1 - t_2 Z + t_1^{-1} Z \quad (1)$$

Enlacement A :

La relation $y_1 = x_2 y_1^{-1} x_1 y_1 x_2^{-1}$ donne après multiplication à droite par x_1^{-1} ,

$$z = x_2 x_1^{-1} z^{-1} x_1 z x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} \text{ ou } \\ z = (x_2 x_1^{-1} z^{-1} x_1 x_2^{-1}) (x_2 z x_2^{-1}) c^{-1}$$

$$\text{Dans } \Lambda, \text{ il vient } Z = -t_1^{-1} t_2 z + t_2 Z - 1 \quad \text{ou} \quad Z = \frac{-1}{1 + t_1^{-1} t_2 - t_2}$$

et compte tenu de la relation (1), nous obtenons

$$\varphi(A) = 1 + \frac{1 - t_1 t_2}{t_1 + t_2 - t_1 t_2}$$

Enlacement B

Ici $z = y_1 x_1^{-1} = x_1^{-1} y_1 x_2^{-1} y_1^{-1} x_1 y_1 x_2 y_1^{-1}$ ce qui s'écrit encore :

$$z = (x_1^{-1} z x_1) (x_2^{-1} x_1^{-1} z x_1 x_2) (x_2^{-1} z x_2) (x_2^{-1} c x_2) z^{-1}$$

Et dans Λ :

$$Z = t_1^{-1} Z - t_1^{-1} t_2^{-1} Z + t_2^{-1} Z + t_2^{-1} Z$$

$$\text{Donc } \varphi(B) = 1 + \frac{1 - t_1 t_2}{1 - t_1 - t_2 + 2t_1 t_2}$$

Tresse T

On obtient directement $d = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$ ou $d = x_2^{-1} x_1^{-1} c x_1 x_2$

$$\text{Donc } \varphi(T) = t_1^{-1} t_2^{-1}$$

Tresse T^{-1}

$$d = x_1 x_2 c x_2^{-1} x_1^{-1} \quad \text{ce qui donne } \varphi(T^{-1}) = t_1 t_2$$

DÉMONSTRATION DE 4.7

Dans la suite, les notations F_2 et G_2 seront simplifiées en F et G ;
enfin l'idéal d'augmentation d'un groupe H sera noté $I(H)$.

1- Il est facile de voir que tout commutateur a de F s'écrit sous la forme $a = m c^n m^{-1}$ où m est un mot en x_1, x_2 et n un entier relatif.

Par conséquent, tout élément de F'/F'' s'écrit comme un produit de termes de la forme $x_1^p x_2^q c^n x_2^{-q} x_1^{-p} F''$.

2- En général, si $1 \longrightarrow N \longrightarrow H \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ est une suite exacte de groupes, alors la suite

$$0 \longrightarrow N/N' \longrightarrow Z[Q] \otimes_H I(H) \longrightarrow I(Q) \longrightarrow 0 \quad \text{est une suite exacte}$$

de $Z[Q]$ -modules, voir [H-S] theorem 6.3.

En particulier les suites exactes :

$$1 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F/F' \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G/G' \longrightarrow 1$$

donnent les suites exactes de A -modules :

$$(1) \quad 0 \longrightarrow F'/F'' \longrightarrow A \otimes_F I(F) \longrightarrow I(F/F) \longrightarrow 0$$

$$(1') \quad 0 \longrightarrow G'/G'' \longrightarrow A \otimes_G I(G) \longrightarrow I(G/G') \longrightarrow 0$$

En tensorisant les suites ci-dessous par Λ , on obtient les suites exactes de A -modules :

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \Lambda \otimes_A F'/F'' \longrightarrow \Lambda \otimes_F I(F) \longrightarrow \Lambda \otimes_A I(F/F') \longrightarrow 0$$

$$(2') \quad 0 \longrightarrow \Lambda \otimes_A G'/G'' \longrightarrow \Lambda \otimes_G I(G) \longrightarrow \Lambda \otimes_A I(G/G') \longrightarrow 0$$

Pour terminer il reste à prouver que $\Lambda \otimes_F I(F)$ est isomorphe à $\Lambda \otimes_G I(G)$.

Appelons Λ_G le localisé universel de l'augmentation $Z[G] \longrightarrow Z$. Alors Λ est un Λ_G module et le théorème 1-10 chap. 0 montre que l'inclusion $V_2 S^1 \longrightarrow E_2$ induit un isomorphisme $i_* : H_* (V_2 S^1, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_* (E_2, \Lambda)$. En particulier : $i_* : H_1(F, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_1(G, \Lambda)$ est un isomorphisme.

La tensorisation par Λ des suites exactes :

$$0 \longrightarrow I(F) \longrightarrow Z[F] \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow I(G) \longrightarrow Z[G] \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0$$

fournit les suites exactes

$$(3) \quad 0 \longrightarrow H_1(F, \Lambda) \longrightarrow \Lambda \otimes_F I(F) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

$$(3') \quad 0 \longrightarrow H_1(G, \Lambda) \longrightarrow \Lambda \otimes_G I(G) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

La comparaison de (3) et (3') termine la démonstration

Démonstration de 4.8. Claire puisque:

$$G'/G'' \otimes_A \Lambda \xrightarrow{\sim} F'/F'' \otimes_A \Lambda \xrightarrow{\sim} A \otimes_A \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda$$

CHAPITRE II

LA SUITE EXACTE (S)

Nous nous proposons ici de construire une longue suite exacte :

$$\dots \mathcal{A}_{n+2} \xrightarrow{a} \mathcal{S}_{n+2} \xrightarrow{b} C_{n,k} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow \dots (S)$$

où $\mathcal{S}_{n+2}$ s'exprime en fonction des groupes Γ de S.E. Cappell et J. L. Shaneson, (voir §4). La partie "homotopique" $\mathcal{A}_{n+2}$ de la suite (S) est étudiée au §5.

§1 - LE GROUPE $\mathcal{A}_{n+1}$ ($n \geq 2$)

Rappelons que nous avons défini en 2.4 chap. I, une équivalence d'homotopie $s : X_0^{n+1} \longrightarrow V_k S^1$, X_0^{n+1} étant l'extérieur du $(n-1, k)$ enlacement trivial.

1.1 DÉFINITION. $\mathcal{A}_{n+1}$ est l'ensemble des classes d'homotopie, rel. ∂X_0^{n+1} , des applications $h : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ telles que $h|_{\partial X_0^{n+1}} = s|_{\partial X_0^{n+1}}$

1.2 $h, h' : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ étant deux applications telles que :
 $h|_{\partial X_0^{n+1}} = h'|_{\partial X_0^{n+1}} = s|_{\partial X_0^{n+1}}$, définissons $h+h' : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ par

$$(h+h')(x,t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h'(x, 1-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad (x,t) \in X_0^{n+1} = X_0^n \times I.$$

ainsi que $(-h) : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ par $(-h)(x,t) = h(x, 1-t)$.

Il est aisé de vérifier que, pour $n \geq 2$, $h+h'$ est homotope (rel. ∂X_0^{n+1}) à $h'+h$. Nous pouvons donc énoncer la

1.3 PROPOSITION. $\mathcal{A}_{n+1}$ admet une structure de groupe d'éléments neutre s . Ce groupe est abélien pour $n \geq 2$

1.4 DÉFINITION DE $\partial : C_{n,k} \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$.

$1(f) : X(f) \longrightarrow E_k$ étant la localisation du (n,k) enlacement f , posons $\partial(f) = 1(f)|_{X_0^{n+1} \times 0}$.

$\partial(f)$ est clairement un élément de $\mathcal{A}_{n+1}$ et il est facile de vérifier

que $\partial(f) = \partial(g)$ si f et g sont deux (n, k) enlacements cobordants.

1.5 PROPOSITION. Pour $n \geq 2$, $\partial : C_{n,k} \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ est un morphisme de groupe.

Démonstration : Pour prouver cela, généralisons la construction faite en 2.4, chap I. Considérons un élément de $\mathcal{A}_{n+1}$ représenté par

$h : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ et prolongeons h à une application, encore notée

$h : Y(j_0) \rightarrow E_k$ par $h|(\partial X_0^{n+1})_{\text{ext}} \times I = s$ où

$$Y(j_0) = X_0^{n+1} \times I \cup (\partial X_0^{n+1})_{\text{ext}} \times I.$$

f étant un (n, k) enlacement, l'application $h \circ f' : Y(f) \longrightarrow E_k$ se prolonge

à $1_h(f) : X(f) \longrightarrow E_k$ (voir 2.4 chap I). Définissons alors

$\partial_h : C_{n,k} \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ par $\partial_h(f) = 1_h(f)| X_0^{n+1} \times \{0\}$.

Il est bien clair que :

- si h et h' sont équivalents dans $\mathcal{A}_{n+1}$, alors $\partial_h = \partial_{h'}$,
- $\partial_s = \partial$
- si g est un (n, k) enlacement $\partial_{\partial(g)}(f) = \partial(g+f)$.

Supposons, pour le moment, avoir prouvé la formule suivante :

$$\partial_h(f) = \partial(f) + h.$$

En remplaçant dans cette formule h par $\partial(g)$, il vient :

$$\partial_{\partial(g)}(f) = \partial(g+f) = \partial(f) + \partial(g) ; \text{ ce qui prouve la proposition.}$$

Démonstration de la formule : $\partial_h(f) = \partial(f) + h$.

Se fait, suivant le schéma ci-dessous, en remplaçant $X(f)$ par

$$X'(f) = X(f) \cup \begin{matrix} X_0^{n+2} \\ X_0^n \times 1 \times I \end{matrix} \text{ qui lui est homéomorphe.}$$

$$\begin{array}{ccc} s & + & h \\ \hline \begin{array}{c} X_0^{n+1} \times 1 \\ \\ X(f) \\ \\ X_0^{n+1} \times 0 \end{array} & & \begin{array}{c} X_0^{n+1} \times 1 \\ \\ X_0^{n+2} \\ \\ X_0^{n+1} \times 0 \end{array} \\ \hline \partial(f) & + & h \end{array}$$

Clairement $\partial_{s+h}(f) = \partial(f) + h$, mais $s+h$ est équivalent à h dans $\mathcal{A}_{n+1}$; donc $\partial_h(f) = \partial(f) + h$.

§2 - LE GROUPE $\mathcal{S}_{n+2}$ ($n \geq 2$)

Dans ce paragraphe, un groupe $\mathcal{S}_{n+2}$ est défini en fonction des lissages homologiques du localisé E_k de $V_k S^1$. Le calcul de $\mathcal{S}_{n+2}$ en termes de groupes de chirurgie est effectué au §4.

2.1. Rappelons que $E_k = \varinjlim_p K_p$ où les K_p sont des complexes finis, que $K_0 = V_k S^1$ et que pour tout entier p , (K_{p+1}, K_p) est un élément de $\mathcal{U}$.

Rappelons aussi que $s : X_0^{n+2} \longrightarrow V_k S^1 = K_0$ est une équivalence d'homotopie.

Définissons $\overline{K}_p^{n+2}$ comme étant le cylindre de $s|\partial X_0^{n+2} \longrightarrow K_p$.

2.2 PROPOSITION. Pour tout $n \geq 2$, pour tout p , $(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ est un $\mathbb{Z}$ -complexe de Poincaré de dimension $n+2$.

Démonstration : La suite exacte :

$$H_q(K_p) \longrightarrow H_q(K_p, \partial X_0^{n+2}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(\partial X_0^{n+2}) \longrightarrow H_{q-1}(K_p)$$
 prouve que $\partial : H_q(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) \longrightarrow H_{q-1}(\partial X_0^{n+2})$ est un isomorphisme pour $q \geq 3$.

Définissons alors $[\overline{K}_p^{n+2}] \in H_{n+2}(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ comme étant l'image réciproque par ∂ de la classe fondamentale de ∂X_0^{n+2} . Pour $q \geq 3$ nous obtenons alors des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H^q(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) & \xleftarrow{\sim} & H^{q-1}(\partial X_0^{n+2}) \\ \cap [\overline{K}_p^{n+2}] \downarrow & & \downarrow \cap [\partial X_0^{n+2}] \\ H_{n+2-q}(\overline{K}_p^{n+2}) & \xleftarrow{\sim} & H_{n+2-q}(\partial X_0^{n+2}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont issues des suites exactes de la paire $(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$.

Enfin, $H^1(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) = 0 = H_{n+2}(\overline{K}_p^{n+2})$ et

$$H^2(\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) = 0 = H_n(\overline{K}_p^{n+2})$$

car $\partial X_0^{n+2} = \#_k S^1 \times S^n$ et $n \geq 2$.

2.3 DÉFINITION DE $\mathcal{S}_{n+2}$ ($n \geq 2$)

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{S}_2(\overline{K}_p^{n+2})$ des classes

d'équivalences des Z -lissages de $(K_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ par des variétés semi-linéaires (voir chap.0, §2).

$\mathcal{S}_Z(\bar{K}_p^{n+2})$ est naturellement muni d'une structure de groupe abélien (car $\partial X_0^{n+2} = \partial(X_0^n \times I \times I)$ pour $n \geq 2$) d'élément neutre (X_0^{n+2}, s) .

De plus les inclusions $i_p : (\bar{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) \hookrightarrow (\bar{K}_{p+1}^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ induisent des isomorphismes de degré 1 en homologie entière, donc induisent aussi des morphismes de groupe :

$$(i_p)_* : \mathcal{S}_Z(\bar{K}_p^{n+2}) \longrightarrow \mathcal{S}_Z(\bar{K}_{p+1}^{n+2})$$

$$\text{Nous poserons } \mathcal{S}_{n+2} = \varinjlim_p \mathcal{S}_Z(\bar{K}_p^{n+2})$$

2.4 DÉFINITION DE $a : \mathcal{A}_{n+2} \longrightarrow \mathcal{S}_{n+2}$ ($n \geq 2$)

Soit x un élément de $\mathcal{A}_{n+2}$ représenté par $f : X_0^{n+2} \longrightarrow E_k$; alors $f|X_0^{n+1} \times 1 = s|X_0^{n+1} \times 1$ car, par définition de $\mathcal{A}_{n+2}$, $f|\partial X_0^{n+2} = s|\partial X_0^{n+2}$. Il est donc clair que f induit un isomorphisme en homologie entière ; il existe d'autre part un entier p tel que :

$$f(X_0^{n+2}) \subset K_p.$$

(X_0^{n+2}, f) est donc un Z -lissage de $(\bar{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$; de plus si f et g sont équivalents dans $\mathcal{A}_{n+2}$, alors clairement (X_0^{n+2}, f) et (X_0^{n+2}, g) sont équivalents dans $\mathcal{S}_{n+2}$. Ceci nous permet de définir $a(x)$ comme étant la classe de (X_0^{n+2}, f) dans $\mathcal{S}_{n+2}$.

Enfin, il est facile de voir que l'application $a : \mathcal{A}_{n+2} \longrightarrow \mathcal{S}_{n+2}$ ainsi construite est un morphisme de groupe.

2.5 DÉFINITION DE $b : \mathcal{S}_{n+2} \rightarrow C_{n,k} \quad (n \geq 3)$

Soit y un élément de $\mathcal{S}_{n+2}$ représenté par un couple (V, f) ,

l'application $f : (V, \partial V) \longrightarrow (\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ étant telle que $f_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(K_p)$ soit un isomorphisme, voir chap. 0, §2.

Désignons maintenant par N la variété de dimension $n+2$ telle que le diagramme ci-dessous soit cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} k \times D^n \times S^1 = (\partial X_0^{n+2})_{\text{int}} & \xrightarrow{(f|(\partial X_0)_{\text{int}})^{-1}} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ k \times D^n \times D^2 & \xrightarrow{\bar{f}} & N \end{array}$$

L'application f se prolonge en $\hat{f} : N \longrightarrow \overline{K}_p^{n+2} \cup (\underline{k} \times D^n \times D^2)$.

Il est clair que :

- $\hat{f}$ est une $\mathbb{Z}$ -équivalence d'homologie
- $\hat{f}$ induit un isomorphisme sur les π_1 .

N est donc contractile car $\overline{K}_p^{n+2} \cup (\underline{k} \times D^n \times D^2)$ l'est, par définition de la classe $\mathcal{U}$.

D'autre part, $(\hat{f}|_{\partial N}) : \partial N \longrightarrow (\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}} \cup \underline{k} \times D^n \times S^1 = S^{n+1}$ est un homéomorphisme.

Par conséquent N est homéomorphe à D^{n+2} car $n+2 \geq 5$.

Plus précisément, l'homéomorphisme $\hat{f}|_{\partial N} : \partial N \longrightarrow S^{n+1}$ se prolonge - de façon unique à isotopie près - à un homéomorphisme $h : N \longrightarrow D^{n+2}$.

$h \circ (\overline{f}|k \times D^n \times 0) : k \times D^n \longrightarrow D^{n+2}$ est donc un (n,k) enlacement dont la classe de cobordisme dans $C_{n,k}$ est, par définition, $b(y)$.

Une fois encore, il est facile de vérifier que $b(y)$ ne dépend pas du représentant choisi pour y et que $b : \mathcal{S}_{n+2} \longrightarrow C_{n,k}$ est un morphisme de groupe.

§3- EXACTITUDE DE LA SUITE (S).

Les constructions précédentes permettent de former une longue suite de groupe abéliens notée (S). Nous nous proposons ici de prouver le

3.1 THÉORÈME : La suite (S) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \mathcal{A}_{n+2} & \xrightarrow{a} & \mathcal{S}_{n+2} & \xrightarrow{b} & C_{n,k} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}_{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & \dots & \longrightarrow & \mathcal{S}_5 & \xrightarrow{b} & C_{3,k} & \xrightarrow{d} & \mathcal{A}_4 & \xrightarrow{a} & \mathcal{S}_4 & \text{est exacte} \end{array}$$

Démonstration:

$$1- \text{Ker } b = \text{Im } a$$

$$\text{Clairement } ba = 0.$$

Soit maintenant x un élément de $\mathcal{S}_{n+2}$ tel que $b(x) = 0$ dans $C_{n,k}$; x est représenté par un couple, (V, f) tel que $f : V \longrightarrow E_k$ soit une Z -équivalence d'homologie et l'on peut supposer que $\partial V = \partial X_0^{n+2}$ et que $f|_{\partial V} = s|_{\partial X_0^{n+2}}$.

Puisque $b(x) = 0$, il existe une variété W de dimension $n+3$, avec $\partial W = V \cup X_0^{n+2} \cup \partial X^{n+2} \times I$, telle que l'inclusion $V \hookrightarrow W$ soit un élément de $\mathcal{W}$.

L'application $f : V \longrightarrow E_k$ se prolonge donc à $F : W \longrightarrow E_k$ et $F| \partial X_0^{n+2} \times I = s| \partial X_0^{n+2} \times I$. Mais $(X_0^{n+2}, F|X_0^{n+2})$ représente un élément y de $\mathcal{A}_{n+2}$ et clairement $a(y) = x$.

$$2- \text{Im } b = \text{Ker } \partial.$$

$\partial b = 0$ car si x est un élément de $\mathcal{S}_{n+2}$ représenté par (V, f) , avec $\partial V = \partial X_0^{n+2}$ et $f| \partial V = s| \partial X_0^{n+2}$, alors $\partial b(x)$ est la classe de (X_0^{n+1}, s) dans $\mathcal{A}_{n+1}$; donc $\partial b(x) = 0$.

D'autre part il est clair, par construction de ∂ , que $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } b$.

$$3- \text{Im } \partial = \text{Ker } a.$$

$a\partial = 0$ car si f est un (n, k) enlacement, la localisation $1(f) : X(f) \longrightarrow E_k$ nous procure une équivalence entre $\partial a(f)$ et (X_0^{n+1}, s) qui représente l'élément nul de $\mathcal{S}_{n+1}$.

Considérons maintenant un élément x de $\mathcal{A}_{n+1}$ représenté par $f : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ et tel que $a(x) = 0$. Ceci signifie qu'il existe une variété M de dimension $n+2$ et une Z -équivalence d'homologie $F : M \longrightarrow E_k$ tels que : $\partial M = \partial(X_0^{n+1} \times I)$, $F|X_0^{n+1} \times 0 = f$, $F|X_0^{n+1} \times 1 = s$ et $F| \partial X_0^{n+1} \times I$. De plus, il existe un entier p tel que $F(M) \subset K_p$ et nous pouvons aussi supposer que $F_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(K_p)$ est un isomorphisme. L'inclusion $X_0^{n+1} \times 1 \hookrightarrow M$ est donc un élément de $\mathcal{U}$.

Par conséquent la variété $\overline{M}$ telle que le diagramme ci-dessous soit cocartésien :

$$\begin{array}{ccc}
 (\partial X_0^{n+1})_{\text{int}} \times I = k \times D^n \times S^1 & \hookrightarrow & M \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 k \times D^n \times D^2 & \longrightarrow & \overline{M}
 \end{array}$$

est une variété contractile de dimension $n+1$ et de bord S^{n+1} , ($n \geq 3$). $\overline{M}$ est donc homéomorphe à D^{n+2} .

L'inclusion : $\underline{k} \times D^n \times S^1 \hookrightarrow M$ induit un plongement $g : \underline{k} \times D^n \times 0 \longrightarrow \overline{M}$, ($0 \in D^2$). L'application g est donc un (n, k) enlacement ayant pour extérieur M , pour localisation f et dont l'image dans $\mathcal{A}_{n+1}$ est l'élément x donné.

§4- CALCUL DE $\mathcal{S}_{n+2}$ ($n \geq 4$)

4.1 NOTATIONS, DÉFINITIONS.

Rappelons que $E_k = \varinjlim_p K_p$, que $\overline{K}_p^{n+2}$ est le cylindre de $s|\partial X_0^{n+2} : \partial X_0^{n+2} \longrightarrow K_p$ et que $\pi_1(\partial X_0^{n+2}) = \pi_1(X_0^{n+2}) = \pi_1(V_k S^1) = F_k$, F_k étant le groupe libre à k générateurs.

Nous poserons $G(p) = \pi_1(K_p) = \pi_1(\overline{K}_p^{n+2})$ et $G_k = \pi_1(E_k)$; donc $G_k = \varinjlim_p G(p)$.

Enfin nous désignerons respectivement par $\Phi(p)$ et Φ_k les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 Z[F_k] & \xrightarrow{id} & Z[F_k] \\
 \downarrow s_* & & \downarrow \varepsilon \\
 Z[G(p)] & \xrightarrow{\varepsilon} & Z
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Z[F_k] & \xrightarrow{id} & Z[F_k] \\
 \downarrow s_* & & \downarrow \varepsilon \\
 Z[G_k] & \xrightarrow{\varepsilon} & Z
 \end{array}$$

où s_* est induite par $s|_{\partial X_0^{n+2}}$ et les ε sont des morphismes d'augmentation.

On se propose dans la suite de prouver le

4.2 THÉOREME : Pour tout entier $n \geq 4$, $\mathcal{S}_{n+2}$ est isomorphe à $\Gamma_{n+3}(\Phi_k)$.

La démonstration se fera en plusieurs étapes. Commençons par prouver le lemme ci-dessous (probablement bien connu).

4.3 LEMME : Soit V une variété close de dimension $n+1$, $n \geq 4$. Alors toute équivalence d'homotopie $h : V \longrightarrow \#_k S^n \times S^1$ est homotope à un homéomorphisme.

Démonstration :

Le "Splitting Theorem" de S. Cappell (voir [C]) prouve que V et h se décomposent sous la forme $V = \#_k V_i$, $h = \#_k h_i$, les $h_i : V_i \rightarrow S^n \times S^1$ étant des équivalences d'homotopie, $i = 1, 2, \dots, k$.

Prouvons maintenant que V_i est homéomorphe à $S^n \times S^1$: a et b étant deux points distincts de S^n , nous pouvons toujours supposer que h_i

est transverse à $(a,b) \times S^1$. Alors $W_i = V_i - D^n \times h_i^{-1}((a,b) \times S^1)$ a le type d'homotopie de $S^{n-1} \times I \times S^1$ et $\partial W_i = S^{n-1} \times \partial I \times S^1$. Le théorème du h-cobordisme prouve que W_i est homéomorphe à $S^{n-1} \times I \times S^1$. Pour $n=4$ voir [W], theorem 16.1.

Par conséquent $V_i = W_i \cup_{\partial W_i} D^n \times \partial I \times S^1$ est homéomorphe à $S^n \times S^1$.

Pour terminer, il suffit de remarquer que $[S^n \times S^1, S^n \times S^1] = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2$ est engendré par des homéomorphismes.

4.4 CONSTRUCTION DE $\varphi(p) : \Gamma_{n+3}(\Phi(p)) \longrightarrow \mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2})$

L'application $s : (X_0^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) \longrightarrow (\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ est une $\mathbb{Z}$ -équivalence d'homologie et sa restriction au bord est l'identité. Par conséquent s est couverte par une application fibrée $\hat{s}$ de sorte que $(s, \hat{s})$ soit une application normale.

Soit alors γ un élément de $\Gamma_{n+3}(\Phi(p))$. D'après le théorème de réalisation 2.6 chap 0, il existe un cobordisme normal $(F, \hat{F})$ entre $(s, \hat{s})$ et $(f, \hat{f})$ d'obstruction de chirurgie $\sigma(F, \hat{F}) = \gamma$, $f : (V, \partial V) \rightarrow (\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ étant une $\mathbb{Z}$ -équivalence d'homologie et $f|_{\partial V} : \partial V \longrightarrow \partial X^{n+2}$ une $\mathbb{Z}[F_k]$ -équivalence d'homologie 2-connexe.

$f|_{\partial V}$ est donc une équivalence d'homotopie et, en raison du lemme précédent, nous pouvons supposer que c'est un homéomorphisme (rappelons que $\partial X_0^{n+2} = \#_k S^n \times S^1$). Par conséquent le couple (V, f) est un élément de $\mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2})$.

Nous poserons donc $\varphi(p)(\gamma) = (V, f)$. Il reste à vérifier que cela définit bien une application de $\Gamma_{n+3}(\Phi(P))$ dans $\mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2})$. Considérons, par conséquent, un cobordisme normal $(H, \hat{H})$ entre $(s, \hat{s})$ et $(h, \hat{h})$,

$h : (W, \partial W) \longrightarrow (\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$, tel que $\sigma(H, \hat{H}) = \sigma(F, \hat{F}) = \gamma$.

En recollant H et F le long de $s : X_0^{n+2} \longrightarrow \overline{K}_p^{n+1}$, nous obtenons un cobordisme normal $(G, \hat{G})$ entre $(f, \hat{f})$ et $(h, \hat{h})$ d'obstruction de chirurgie $\gamma - \gamma = 0$.

Par conséquent $(G, \hat{G})$ est normalent cobordant, rel. $V \cup W$, à $(J, \hat{J})$,
 $J : (M, V, W, \partial_0 M) \longrightarrow (\overline{K}_p^{n+2} \times I, \overline{K}_p^{n+2} \times 0, \overline{K}_p^{n+2} \times 1, \partial X_0^{n+2} \times I)$
 étant une $\mathbb{Z}$ -équivalence d'homologie dont la restriction à $\partial_0 M$ est une $\mathbb{Z}[F_k]$ -équivalence d'homologie (voir théorème 2.5 chap 0).

Mais nous pouvons supposer que :

$(J|_{\partial_0 M})_* : \pi_1(\partial_0 M) \rightarrow \pi_1(\partial X_0^{n+2} \times I)$ est un isomorphisme, voir [CS₁],
 addendum to 3.3. $J|_{\partial_0 M}$ est donc une équivalence d'homotopie et $\partial_0 M$ est homéomorphe à $\partial X_0^{n+2} \times I$ en raison du théorème du s -cobordisme, car le groupe de Whitehead de F_k est nul.

Pour terminer la démonstration il reste à prouver que $J|_{\partial_0 M}$ est homotope à un homéomorphisme.

Dans ce but, admettons provisoirement l'affirmation :
 l'application $L_{n+3}(F_k) \longrightarrow \mathcal{S}(\partial X_0^{n+2} \times I)$ issue de la suite exacte de chirurgie est l'application nulle.

Appelons maintenant x l'image de $(\partial_0 M, J|_{\partial_0 M})$ dans $\mathcal{S}(\partial X_0^{n+2} \times I)$
 $= \mathcal{S}_{\mathbb{Z}[F_k]}(\partial X_0^{n+2} \times I)$ et x' son image dans $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(\partial X_0^{n+2} \times I)$

La restriction au bord du cobordisme normal entre $(G, \hat{G})$ et $(J, \hat{J})$
 nous procure un élément de $\Gamma_{n+3}(\mathbb{Z}[F_k] \longrightarrow \mathbb{Z})$ ayant pour image x'
 dans $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(\partial X_0^{n+2} \times I)$. La consultation du diagramme ci-dessous montre
 que $x = 0$ dans $\mathcal{S}(\partial X_0^{n+2} \times I)$.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{S}(\partial X_0^{n+2} \times I) \\
 \swarrow & & \downarrow \\
 \Gamma_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z) & \rightarrow & \mathcal{S}_Z(\partial X_0^{n+2} \times I)
 \end{array}
 \rightarrow \left[(\partial X_0^{n+2} \times I) / (\partial X_0^{n+2} \times \partial I), G/PL \right]$$

$(j|_{\partial_0 M})$ est donc homotope à un homéomorphisme. Par conséquent (V, f) et (W, g) sont égaux dans $\mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2})$.

Démonstration de l'affirmation : Un élément de l'image de $L_{n+3}(F_k)$ dans $\mathcal{S}(\partial X_0^{n+2} \times I)$ est représenté par une équivalence d'homotopie h ,

$$h: \partial X_0^{n+2} \times I \longrightarrow \partial X_0^{n+2} \times I, \text{ dont la restriction aux }$$

extrémités est l'identité.

De plus, il existe $H: \partial X_0^{n+2} \times I \times I \longrightarrow \partial X_0^{n+2} \times I \times I$ tel que $H|_{\partial X_0^{n+2} \times I \times 0} = h$ et $H|_{\partial X_0^{n+2} \times I \times 1} = \text{id}$.

Considérons $\partial X_0^{n+2} \times I \times I$ comme un voisinage collier de $X_0^{n+2} \times I$ et prolongeons par l'identité H à $H': X_0^{n+2} \times I \longrightarrow X_0^{n+2} \times I$. H' est clairement une équivalence d'homotopie car $X_0^{n+2} \times I$ a le type d'homotopie de $V_k S^1$.

De plus H' satisfait aux hypothèses du "Splitting Theorem" de [C]. H est donc homotope, relativement au bord, à une équivalence d'homotopie $H_1: \partial X_0^{n+2} \times I \times I \longrightarrow \partial X_0^{n+2} \times I \times I$. Ceci prouve que $(\partial X_0^{n+2} \times I, h)$ est équivalent à $(\partial X_0^{n+2} \times I, \text{id})$ dans $\mathcal{S}(\partial X_0^{n+2} \times I)$.

4.5 LEMME.

Pour $n \geq 4$; $\sigma: [X_0^{n+2} / \partial X_0^{n+2}, G/PL] \longrightarrow L_{n+2}(F_k)$ est un isomorphisme.

Démonstration :

Il suffit de prouver que $\mathcal{S}(X_0^{n+2}) = \mathcal{S}_{\mathbb{Z}[\mathbb{F}_k]}(X_0^{n+2})$ est nul pour $n \geq 3$.

Un élément de $\mathcal{S}(X_0^{n+2})$ est représenté par une équivalence d'homotopie $h : (V, \partial V) \longrightarrow (X_0^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ dont la restriction au bord est l'identité.

Mais le "Splitting Theorem" de [C] nous prouve que V et h se décomposent sous la forme :

$$V = \#_k V_i \quad (\text{somme connexe sur le bord}) \text{ et}$$

$$h = \# h_i, \quad h_i : V_i \longrightarrow D^{n+1} \times S^1$$

(Rappelons que $X_0^{n+2} = \#_k D^{n+1} \times S^1$).

Posons $\overline{V}_i = V_i \cup_{\partial V_i} D^{n+1} \times S^1$. Alors h_i se prolonge à une équivalence d'homotopie $\overline{h}_i : \overline{V}_i \longrightarrow S^{n+1} \times S^1$ telle que $\overline{h}_i|_{D^{n+1} \times S^1} = \text{id}$ car :

$$S^{n+1} \times S^1 = D^{n+1} \times S^1 \cup_{S^n \times S^1} D^{n+1} \times S^1.$$

D'après le lemme 4.3 précédent, $\overline{V}_i$ est homéomorphe à $S^{n+1} \times S^1$, donc $\overline{V}_i$ borde une variété W_i homéomorphe à $D^{n+2} \times S^1$.

Mais les applications $\overline{h}_i$ se prolongent à $H_i : W_i \longrightarrow D^{n+2} \times S^1$ car $H^{q+1}(W_i, \overline{V}_i; \pi_q(S^1)) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Considérons alors $H = \#_k H_i$; l'application H est un h -cobordisme entre $h : V \longrightarrow X_0^{n+2}$ et l'identité de X_0^{n+2} . Ceci prouve que $\mathcal{S}(X_0^{n+2})$ est nul.

4.6 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.2

Commençons par remarquer que l'application

$s : (X_0^{n+2}, \partial X_0^{n+2}) \longrightarrow (\overline{K}_p^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$ induit un isomorphisme
 $s^* : [K_p^{n+2}/\partial X_0^{n+2}, G/PL] \longrightarrow [X_0^{n+2}/\partial X_0^{n+2}, G/PL]$ car s est une
 Z -équivalence d'homologie dont la restriction au bord est l'identité.

La comparaison des deux suites exactes ci-dessous et l'utilisation
du lemme précédent prouvent que $\varphi(p) : \Gamma_{n+3}(\Phi(p)) \longrightarrow \mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2})$ est
un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow \Gamma_{n+3}(Z[G(p)] \rightarrow Z) & \rightarrow \mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2}) & \rightarrow [\overline{K}_p^{n+2}/\partial X_0^{n+2}, G/PL] & \rightarrow \Gamma_{n+2}(Z[G(p)] \rightarrow Z) & \rightarrow \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & \text{id} & \varphi(p) & & \text{id} \\
 \rightarrow \Gamma_{n+3}(Z[G(p)] \rightarrow Z) & \rightarrow \Gamma_{n+3}(\Phi(p)) & \rightarrow L_{n+2}(F_k) & \rightarrow \Gamma_{n+2}(Z[G(p)] \rightarrow Z) & \rightarrow
 \end{array}$$

Les $\varphi(p)$ induisent donc un isomorphisme:

$\varphi_k : \varinjlim_p \Gamma_{n+3}(\varphi(p)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_p \mathcal{S}_Z(\overline{K}_p^{n+2})$. Mais $\varinjlim_p \mathcal{S}(\overline{K}_p^{n+2})$
est, par définition, égal à $\mathcal{S}_{n+2}$ et d'autre part, les groupes Γ commutent
aux limites inductives

4.7 REMARQUE Soit Λ_k le localisé universel de l'augmentation

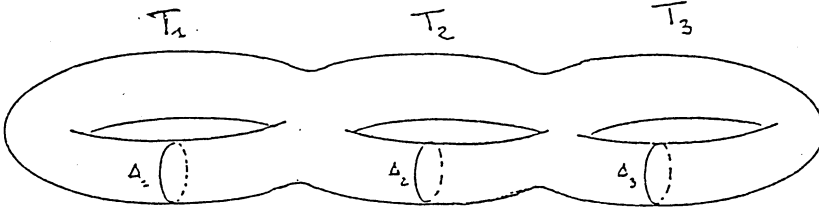
$\varepsilon : Z[G_k] \longrightarrow Z$. Alors $\Gamma_{n+3}(\Phi_k)$ est isomorphe à $L_{n+3}^h(\Lambda_k, Z[G_k])$, car
d'après le théorème de $[V_2]$ cité en 2.8 chap. 0, $L_{n+3}^h(\Lambda_k)$ est isomorphe à
 $\Gamma_{n+3}(Z[G_k] \rightarrow Z)$.

§5 - ÉTUDE DE $\mathcal{A}_{n+1}$ ($n \geq 2$).

Ce paragraphe décrit, au moyen d'une suite exacte, le lien entre $\mathcal{A}_{n+1}$ et les groupes d'homotopie de E_k , voir théorème 5.6.

5.1 - X_0^{n+1} est la somme connexe sur le bord de k exemplaires de $D^n \times S^1$ notés $T_1, T_2, \dots, T_k$.

Pour chaque $i = 1, 2, \dots, k$, donnons nous un disque de dimension n , Δ_i tel que $(\Delta_i, \partial\Delta_i) \subset (T_i, \partial T_i) = (D^n \times S^1, S^n \times S^1)$



Clairement, $X_0^{n+1} = \bigcup_i (\Delta_i \times I)$ est homéomorphe à un disque D^{n+1} . Il existe donc une application d'attachement $h : S^n \rightarrow Z$, avec $Z = \partial X_0^{n+1} \cup (\bigcup_i \Delta_i)$, telle que le carré:

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{h} & \partial X_0^{n+1} \cup (\bigcup_i \Delta_i) = Z \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D^{n+1} & \longrightarrow & X_0^{n+1}
 \end{array}$$

soit cocartésien.

5.2- L'APPLICATION $\alpha : \pi_{n+1}(E_k) \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$.

Soit $F : S^n \times I \longrightarrow V_k S^1$, une homotopie entre l'application constante et $h' = (s|Z) \circ h$, $h' : S^n \longrightarrow V_k S^1$.

L'homotopie F permet de faire correspondre à toute application $f : (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E_k, *)$ une application $f' : (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E_k, V_k S^1)$ telle que $f'|S^n = h'$; de plus f' se factorise à travers une unique application $f'' : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$ telle que $f''| \partial X_0^{n+1} = s$ et la classe $[f'']$ de f'' dans $\mathcal{A}_{n+1}$ ne dépend que de la classe d'homotopie de f dans $\pi_{n+1}(E_k)$.

Ceci nous permet de définir $\alpha : \pi_{n+1}(E_k) \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ par $\alpha[f] = [f'']$.

Il est aisé de vérifier que α est un morphisme de groupe.

5.3- L'APPLICATION $\beta : \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow \pi_n(E_k)^k$.

Soit un élément de $\mathcal{A}_{n+1}$ représenté par $f : X_0^{n+1} \longrightarrow E_k$.

L'application β est définie par $\beta(a) = ([f|\Delta_1], [f|\Delta_2], \dots, [f|\Delta_k])$. β est clairement un morphisme de groupe.

5.4- L'inclusion $V_k S^1 \hookrightarrow E_k$ induit une action du groupe libre $F_k = \pi_1(V_k S^1)$ sur $\pi_*(E_k)$. Ceci nous permet de considérer le morphisme

$\xi : \pi_*(E_k)^k \longrightarrow \pi_*(E_k)$, $* \geq 2$, défini par $\xi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{1 \leq i \leq k} x_i a_i$ où $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les générateurs de F_k .

5.5 - LEMME : Pour tout entier $* \geq 2$, il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_1(F_k; \pi_*(E_k)) \longrightarrow \pi_*(E_k)^k \xrightarrow{1-\xi} \pi_*(E_k) \longrightarrow H_0(F_k; \pi_*(E_k)) \longrightarrow 0$$

Démonstration:

Nous savons que le noyau I de l'augmentation $\varepsilon : Z[F_k] \longrightarrow Z$ est le $Z[F_k]$ -module libre engendré par $1-x_1, 1-x_2, \dots, 1-x_k$. Par conséquent, pour tout $Z[F_k]$ -module M , la suite exacte

$0 \longrightarrow I \longrightarrow Z[F_k] \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0$ devient, en tensorisant par M :

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_1^{F_k}(Z, M) \longrightarrow I \otimes_{F_k} M \longrightarrow Z[F_k] \otimes_{F_k} M \longrightarrow Z \otimes_{F_k} M \longrightarrow 0$$

ceci s'écrit encore :

$$0 \longrightarrow H_1(F_k; M) \longrightarrow M^k \xrightarrow{1-\xi} M \longrightarrow H_0(F_k; M) \longrightarrow 0$$

5.6 - THÉORÈME : pour $n \geq 2$, la suite :

$$\dots \pi_{n+1}(E_k)^k \xrightarrow{1-\xi} \pi_{n+1}(E_k) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{A}_{n+1} \xrightarrow{\beta} \pi_n(E_k)^k \xrightarrow{1-\xi} \pi_n(E_k) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

En d'autres termes, la suite :

$$0 \longrightarrow H_0(F_k, \pi_{n+1}(E_k)) \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow H_1(F_k, \pi_n(E_k)) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration:

a- Il est clair, par construction de α et β , que $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$

b- Pour $i = 1, 2, \dots, k$, considérons k applications

$$f_i : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (E_k, *) \text{ et notons } a = ([f_1], [f_2], \dots, [f_k]) \in \pi_n(E_k)^k$$

Alors a est dans $\text{Im } \beta$ si et seulement si $\sum_i (f_i - x_i f_i) : S^n \longrightarrow E_k$ se prolonge au disque D^{n+1} .

En d'autres termes, a est dans $\text{Im } \beta$ si et seulement si $(1-\xi)a = 0$; ce qui prouve que $\text{Im } \beta = \text{Ker } (1-\xi)$.

c- Il nous reste à prouver que $\text{Im}(1 - \xi) = \text{Ker } \alpha$. Mais en raison du lemme précédent, cela revient à démontrer que α se factorise à travers $Z \otimes_{F_k} \pi_{n+1}(E_k)$ et que l'application induite $\bar{\alpha} : Z \otimes_{F_k} \pi_{n+1}(E_k) \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}$ est injective.

Pour cela revenons aux notations de 5.2. Un élément a de $\pi_{n+1}(E_k)$ représenté par $f : (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E_k, *)$ fournit une application $f' : (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E_k, V_k S^1)$ telle que $f'|S^n = h'$. Soit alors $x \in F_k$; xa est représenté par une application $xf' : (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E_k, V_k S^1)$ telle que $xf'|S^n = h'$.

Il existe d'autre part une homotopie H entre xf' et f' , $H : (D^{n+1} \times I, S^n \times I) \longrightarrow (E_k, V_k S^1)$ et si m est un point S^n , $H|m \times I$ a pour classe d'homotopie x dans $\pi_1(V_k S^1) = F_k$.

De plus, nous pouvons supposer que H est constante sur $Y \times I$, Y étant une partie de S^n contenant l'image réciproque de $\partial X_0^{n+1} - (\cup_i \partial \Delta_i)$ par h .

H se factorise donc par $H' : X_0^{n+1} \times I \longrightarrow E_k$, l'application H' étant telle que :

$$H'|\partial X_0^{n+1} \times I = s$$

$$H'|\partial X_0^{n+1} \times 0 = f''$$

$$H'|\partial X_0^{n+1} \times 1 = x f''$$

Ceci prouve que $\alpha(a) = \alpha(xa)$, donc que α se factorise par

$$\bar{\alpha} : Z \otimes_{F_k} \pi_{n+1}(E_k) \longrightarrow \mathcal{A}_{n+1}.$$

Soit alors $a = [f]$, $b = [g]$ deux éléments de $\pi_{n+1}(E_k)$ et supposons que $\alpha(a) = \alpha(b)$. La construction de α montre qu'il existe une application

$G, \quad G: (D^{n+1} \times I, S^n \times I, S^n \times (0,1)) \longrightarrow (E_k, V_k S^1, *)$, telle que
 $G|D^{n+1} \times 0 = f, \quad G|D^{n+1} \times 1 = g$.

La restriction de G à $m \times I, m \in S^n$, nous donne un élément x de F_k
tel que $a = x b$.

5.7-REMARQUE : Nous ne connaissons malheureusement pas les
groupes d'homotopie de l'espace E_k . Cependant, il découle du corollaire
ci-dessous que si le premier groupe d'homotopie non nul de E_k est le
 $p^{\text{ième}}$ (le π_1 mis à part) alors $\mathcal{A}_p$ est isomorphe à $H_{p+1}(G_k)$.

5.8 PROPOSITION : Soit $p > 1$ le plus petit entier tel que $\pi_p(E_k)$ soit
non nul.

Alors $\pi_p(E_k)$ est isomorphe à $H_{p+1}(G_k; \Lambda_k)$ où Λ_k est le localisé
universel de $\varepsilon: Z[G_k] \longrightarrow Z$.

5.9 COROLLAIRE : $H_0(F_k; \pi_p(E))$ est isomorphe à $H_{p+1}(G_k)$.

Pour la définition de Λ_k et les propriétés des modules locaux voir
1.11 et 1.12, chap. 0.

Démonstration de 5.8

Soit $q: E_k \longrightarrow BG_k$ l'application ayant pour fibre le revêtement
universel de E_k . Alors $\pi_p(E_k)$ est isomorphe à $\pi_{p+1}(BG_k, E_k)$ donc à
 $H_{p+1}(BG_k, E_k; Z[G_k])$. Mais $\pi_p(E_k)$ est local d'après 1.10, chap. 0.

Donc $\pi_p(E_k)$ est isomorphe à $H_{p+1}(BG_k, E_k; Z[G_k]) \otimes_{G_k} \Lambda_k$. Par

conséquent $\pi_p(E_k)$ est isomorphe à $H_{p+1}(BG_k, E_k; \Lambda_k)$ en raison du théorème des coefficients universels.

D'autre part, il découle de la proposition 1.13, chap. 0 que

$$H_*(E_k, V_k S^1; \Lambda_k) = 0$$

Finalement, $\pi_p(E_k)$ est isomorphe à $H_{p+1}(BG_k, V_k S^1; \Lambda_k)$ donc à $H_{p+1}(BG_k; \Lambda_k)$.

Démonstration de 5.9 :

$H_0(F_k; \pi_p(E_k))$ est isomorphe à $\pi_p(E_k) \otimes_{G_k} Z$.

Mais Z est local, par conséquent :

$$H_0(F_k; \pi_p(E_k)) \otimes_{\Lambda_k} Z \xrightarrow{\sim} H_{p+1}(G_k; \Lambda_k) \otimes_{\Lambda_k} Z \xrightarrow{\sim} H_{p+1}(G_k).$$

CHAPITRE III

ENLACEMENTS BORDS ET ENTRELACS

Nous définissons ci-après le groupe $B_{n,k}$ des enlacements bords. Il se trouve que $B_{n,k}$ est isomorphe au groupe $C_n(F_k)$ de Cappell et Shaneson, voir [C.S₂].

Dans le §2, nous prouvons que le groupe $\mathcal{H}(G_k)$ défini au chapitre I agit sur $C_{n,k}$ de sorte que l'ensemble des orbites soit isomorphe à l'ensemble des classes de cobordisme d'entrelacs.

1.3 PROPOSITION.

La relation de F_k -cobordisme est une relation d'équivalence.

Démonstration : Soit f un (n,k) enlacement, soit $G = \pi_1(X(f))$.

Prouvons d'abord que si $i_* : F_k \longrightarrow G$ admet un scindage σ , ce scindage est unique.

Rappelons dans ce but que si un morphisme de groupe $\alpha : A \longrightarrow B$ induit un isomorphisme sur les H_1 et un épimorphisme sur les H_2 , alors α induit des isomorphismes $\alpha_n : A/A_n \xrightarrow{\sim} B/B_n$ où A_n (resp. B_n), est le $n^{\text{ième}}$ de la série centrale descendante de A (resp. B), voir [St].

Posons alors $G_\omega = \bigcap_n G_n$. Puisque $\bigcap_n (F_k)_n$ se réduit à l'élément neutre nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & i_* & & \sigma & \\
 F_k & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F_k \\
 (i)_\omega \searrow & & \downarrow p & \nearrow & \sigma_\omega \\
 & & G/G_\omega & &
 \end{array}$$

où p est la projection canonique. σ_ω et $(i_*)_\omega$ sont des isomorphismes ; σ est donc égal à $(i_*)_\omega^{-1} \circ p$.

Il est alors facile de voir que si l'enlacement bord f est F_k -cobordant à g et h , alors g est F_k -cobordant à h .

1.4 NOTATION. Nous désignerons par $B_{n,k}$ l'ensemble des classes de F_k -cobordisme des (n,k) enlacements bords.

1.5 THÉORÈME.

La somme des enlacements (définie au chapitre I) induit sur $B_{n,k}$ une structure de groupe abélien.

Démonstration : Soit f et g deux (n,k) enlacements bords d'extérieurs respectifs $X(f)$, $X(g)$. Alors $X(f+g)$ est la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_0^{n+1} & \xrightarrow{\times 1} & X(f) \\ \times 0 \downarrow & & \\ & & X(g) \end{array}$$

En raison du théorème de Van Kampen, $f+g$ est un (n,k) enlacement bord. Le reste est clair.

1.6 PROPOSITION. Pour $n \geq 3$, $B_{n,k}$ est isomorphe à $\mathcal{S}_Z(X_0^{n+2})$

Démonstration.

Tout élément de $\mathcal{S}_Z(X_0^{n+2})$ peut-être représenté par un Z -lissage (V, f) de X_0^{n+2} tel que $f_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X_0^{n+2})$ soit un isomorphisme.

Un morphisme de groupe $\gamma : \mathcal{S}_Z(X_0^{n+2}) \longrightarrow B_{n,k}$ est construit de la même façon que $b : \mathcal{S}_{n+2} \longrightarrow C_{n,k}$, voir 2.4 chap II : à (V, f) est associé un (n,k) enlacement $\overline{f}$ d'extérieur V . $\overline{f}$ est donc un enlacement bord. Pour vérifier que γ est bien définie, il suffit de noter que si (V, f) et (V', f') sont deux Z -lissages équivalents de X_0^{n+2} tels que $\pi_1(V) = \pi_1(V') = F_k$, alors il existe un cobordisme W entre V et V' tel que $\pi_1(W) = F_k$.

Prouvons maintenant que :

γ est surjective :

L'épaississement à $D^n \times D^2$ du (n,k) enlacement bord f permet de construire un homéomorphisme $\hat{f} : \partial X(f) \longrightarrow \partial X_0^{n+2}$ dont la restriction à $(\partial X(f))_{\text{ext}}$ est l'identité.

Mais, puisque f est bord, nous disposons d'un scindage σ de i_* et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 X(f) & \xrightarrow{\sigma} & F_k = \pi_1(X_0^{n+2}) \\ i_* \uparrow & & \uparrow \hat{f}_* \\ F_k & \xrightarrow{\gamma} & \pi_1 \partial X(f) \end{array}$$

est commutatif.

L'application $\hat{f} : \partial X(f) \longrightarrow X_0^{n+2}$ se prolonge donc au 2-squelette relatif de $(X_0^{n+2}, \partial X_0^{n+2})$. Mais puisque $H^{q+1}(X(f), \partial X(f); \pi_q(X_0^{n+2})) = 0$ pour $q > 1$, $\hat{f}$ se prolonge en une application

$\tilde{f} : X(f) \longrightarrow X_0^{n+2}$ et il est facile de vérifier que $\tilde{f}$ est une Z -équivalence d'homologie. Par conséquent $(X(f), \tilde{f})$ est un Z -lissage de X_0^{n+2} ayant pour image la classe de f dans $B_{n,k}$.

γ est injective :

Supposons que le (n,k) enlacement f soit F_k -cobordant à l'enlacement trivial j_0 et désignons par Z l'extérieur d'un F_k -cobordisme entre f et j_0 .

Alors $\partial Z = X(f) \cup X_0^{n+2} \cup (\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}} \times I \cup \partial Z_0$, où ∂Z_0 est homéomorphe à $(\partial X_0^{n+2})_{\text{int}} \times I$. Il existe donc un application

$F : \partial Z \longrightarrow \partial(X_0^{n+2} \times I)$ telle que :

$F|X(f) = \tilde{f}$, $F|X_0^{n+2} \cup (\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}} \times I = \text{id}$ et $F|_{\partial Z_0}$ est une homotopie entre $\tilde{f}|_{\partial X(f)_{\text{int}}}$ et $\text{id}|_{(\partial X_0^{n+2})_{\text{int}}}$.

Comme précédemment, un scindage de $i_* : F_k \longrightarrow \pi_1(Z)$ permet de prolonger F à une Z -équivalence d'homologie $\tilde{F} : Z \longrightarrow X_0^{n+2} \times I$.

Ce qui prouve que la classe de $(X(f), \tilde{f})$ est la classe nulle dans $\mathcal{S}_2(X_0^{n+2})$.

1.7 THÉOREME : Pour tout entier $n \geq 4$, $B_{n,k}$ est isomorphe à

$$\Gamma_{n+3} \left[\begin{array}{ccc} Z[F_k] & \xrightarrow{\text{id}} & Z[F_k] \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ Z[F_k] & \xrightarrow{\varepsilon} & Z \end{array} \right]$$

Démonstration : découle de la comparaison des suites exactes,

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z) & \longrightarrow & \mathcal{S}_2(X_0^{n+2}) & \longrightarrow & [X_0^{n+2}/\partial X_0^{n+2}, G/PL] & \longrightarrow & \Gamma_{n+2}(Z[F_k] \rightarrow Z) \\ \parallel & & \uparrow \psi_k & & \uparrow & & \parallel \\ \Gamma_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z) & \longrightarrow & \Gamma_{n+3}(\overline{\psi_k}) & \longrightarrow & L_{n+2}(F_k) & \longrightarrow & \Gamma_{n+2}(Z[F_k] \rightarrow Z) \end{array}$$

où $\overline{\psi_k}$ est le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z[F_k] & \xrightarrow{\text{id}} & Z[F_k] \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ Z[F_k] & \xrightarrow{\varepsilon} & Z \end{array}$$

et ψ_k est construite de la même façon que $\varphi(p)$, voir 4.3 chap. II.

1.8 COROLLAIRE : (Comparer avec [CS₂], théorèmes 6.1, 6.2).

1) Si n est pair, alors $B_{n,k} = 0$

2) Si n est impair, il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tilde{\Gamma}_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z) \longrightarrow B_{n,k} \longrightarrow L_{n+1}(1)^k \longrightarrow 0$$

où $\tilde{\Gamma}_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z)$ est le conoyau de $L_{n+3}(F_k) \longrightarrow \Gamma_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z)$

Démonstration :

Il est prouvé dans [CS₁] que, si n est pair $\Gamma_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z) = 0$ et que $L_{n+2}(F_k) \longrightarrow \Gamma_{n+2}(Z[F_k] \rightarrow Z)$ est injective.

Il s'ensuit que $B_{n,k} = 0$ si n est pair et que, si n est impair, la suite :

$$0 \longrightarrow \tilde{\Gamma}_{n+3}(Z[F_k] \rightarrow Z) \longrightarrow B_{n,k} \longrightarrow L_{n+2}(F_k) \longrightarrow 0$$

est exacte. Mais, d'autre part $L_{n+2}(F_k) = L_{n+2}(1) \oplus L_{n+1}(1)^k$. Donc, si n est impair, $L_{n+2}(F_k) = L_{n+1}(1)^k$.

§2- ENLACEMENTS DE DISQUES ET ENTRELACS.

2.1 DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

Un (n, k) entrelacs est un plongement semi-linéaire et localement plat $g : \underline{k} \times S^n \longrightarrow S^{n+2}$.

Deux (n, k) entrelacs g_0 et g_1 sont cobordants s'il existe un plongement semi-linéaire et localement plat $G : \underline{k} \times S^n \times I \longrightarrow S^{n+2} \times I$ transverse au bord tel que $G|_{\underline{k} \times S^n \times i} = g_i$, $i = 0, 1$.

Nous noterons $\tilde{C}_{n,k}$ l'ensemble des classes de cobordisme des (n, k) entrelacs.

Un (n, k) entrelacs g admet un fibré normal trivial ; par conséquent g s'épaissit en $\bar{g} : \underline{k} \times S^n \times D^2 \longrightarrow S^{n+2}$. L'extérieur $\tilde{X}(g)$ de g est la fermeture dans S^{n+2} de $S^{n+2} - \bar{g}(\underline{k} \times S^n \times S^2)$.

2.2 L'application $p : C_{n,k} \longrightarrow \tilde{C}_{n,k}$.

Soit f un (n, k) enlacement et soit j_0 le (n, k) enlacement trivial.

Alors $\tilde{f} = f \cup_{\underline{k} \times S^{n-1}} j_0 : \underline{k} \times S^n \rightarrow S^{n+2}$ est un (n, k) -entrelacs.

Il est clair que si f_0 et f_1 sont deux (n, k) -enlacements cobordants, $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}_1$ sont des entrelacs cobordants. Nous avons donc construit ainsi une application surjective $p : C_{n,k} \longrightarrow \tilde{C}_{n,k}$.

Notons encore que l'extérieur de $\tilde{f}$ est $\tilde{X}(\tilde{f}) = X(f) \cup_{(\partial X_0^{n+2})_{\text{ext}}} X_0^{n+2}$

et que, puisque $n \geq 2$, l'inclusion $j : X \longrightarrow \tilde{X}$ induit un isomorphisme

$$j_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}).$$

2.3 SYSTÈME DE MÉRIDIENS.

Soit g un (n,k) entrelacs d'extérieur $\tilde{X}(g)$. Nous appellerons système de méridiens sur g toute application $\mu : V_k S^1 \longrightarrow \tilde{X}(g)$ rendant homotopiquement commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{k} \times S^n \times S^1 & \xrightarrow{c} & V_k S^1 \\ \downarrow & \nearrow \mu & \\ \overline{g} | \underline{k} \times S^n \times S^1 & & \tilde{X}(g) \end{array}$$

où c désigne l'application canonique. Appelons (n,k) entrelacs équipé tout couple (g, μ) où g est un (n,k) entrelacs et μ un système de méridiens pour g .

Deux (n,k) entrelacs équipés (g_0, μ_0) , et (g_1, μ_1) seront dits cobordants s'il existe un cobordisme entre g_0 et g_1 d'extérieur Y tel que μ_0 et μ_1 soient (librement) homotopes dans Y .

Nous désignerons par $C'_{n,k}$ l'ensemble des classes de cobordisme des (n,k) entrelacs équipés.

REMARQUES :

1) Si deux systèmes de méridiens μ_0 et μ_1 de l'entrelacs g sont homotopes, alors clairement (g, μ_0) est cobordant à (g, μ_1) . Pour cette raison, nous ne distinguerons pas deux systèmes de méridiens homotopes.

2) Soit $*$ un point quelconque de $\tilde{X}(g)$ et μ un système de méridiens pour g . Soit c un chemin quelconque dans $\tilde{X}(g)$ joignant $*$ à

$\mu(a)$ où a est le point de base de $V_k S^1$. A l'aide de c , il est possible de construire un système de méridiens μ' homotope à μ tel que $\mu'(a) = *$.

Nous pourrions donc supposer que tous les systèmes de méridiens μ pour g sont tels que $\mu(a) = *$.

3) Un système de méridiens peut donc être considéré comme un élément de $\pi_1(\tilde{X}(g), *)^k$. Soit alors $a_1, a_2, \dots, a_k$, k éléments de $\pi_1(\tilde{X}(g), *)$ et soit $\mu = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ un système de méridiens pour g . Alors clairement $(a_1 m_1 a_1^{-1}, a_2 m_2 a_2^{-1}, \dots, a_k m_k a_k^{-1})$ est encore un système de méridiens et, de plus, tout autre système de méridiens pour g est de cette forme.

2.5 PROPOSITION.

Pour tout entier n , il existe une bijection $q : C_{n,k} \xrightarrow{\sim} C'_{n,k}$.

Démonstration :

Nous disposons sur l'enlacement f d'une application

$$i : V_k S^1 \longrightarrow X_0^{n+1} \times 1 \subset \partial X(f).$$

La construction faite en 2.2 permet d'associer à f l'entrelacs équipé $(\tilde{f}, j, i)$, $j : X \longrightarrow \tilde{X}$ étant l'inclusion construite en 2.2. Ceci définit l'application q .

Construction de q^{-1} : Soit (g, μ) un (n, k) entrelacs équipé. Les cercles $\mu(S_i^1)$, $i = 1, 2, \dots, k$, bordent dans S^{n+2} , k disques disjoints $D_1, D_2, \dots, D_k$ tels que, pour tout i , $g(i \times S^n) \cap D_i$ soit réduit à un point a_i . Soit maintenant N un voisinage régulier de $V_k D_i$ dans S^{n+2} tel que $N_i = N \cup g(i \times S^n)$ soit un voisinage régulier de a_i dans $g(i \times S^n)$. N est homéomorphe à un disque

de dimension $n+2$ et les N_i à des disques de dimension n , voir [RS].

Par conséquent $S^{n+2} - N$ est homéomorphe à D^{n+2} , et $i \times S^n - g^{-1}(N_i)$ à D^n . La restriction de g à $\underline{k} \times S^n - \cup g^{-1}(N_i)$ est donc un (n,k) enlacement dont l'image par q est clairement (g, μ) . Ceci définit q^{-1} . Il est aisé de vérifier que q et q^{-1} sont compatibles avec le cobordisme et inverses l'un de l'autre.

2.6 - ACTION DE $\mathcal{H}(G_k)$ sur $C_{n,k}$.

Soit f un (n,k) enlacement ($n \geq 3$) d'extérieur X et soit $1 : X \longrightarrow E_k$ sa localisation, voir chap. I. Soit τ un élément de $\mathcal{H}(G_k)$, voir §3 chap. I.

τ est défini par k éléments $a_1, a_2, \dots, a_k$ de G_k : $\tau(x_i) = a_i x_i a_i^{-1}$, $x_1, x_2, \dots, x_k$ étant les générateurs de F_k , $i=1,2,\dots,k$.

Rappelons maintenant que E_k est limite inductive de sous-complexes K_p tels que l'inclusion $K_p \rightarrow K_{p+1}$ induise un isomorphisme en homologie entière. Il existe donc un p tel que $\pi_1(K_p)$ contienne $a_1, a_2, \dots, a_k$ et, quitte à remplacer f par un (n,k) -enlacement qui lui est cobordant, nous pouvons supposer que $1_* : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(K_p)$ est un isomorphisme.

Nous savons que $j \cdot i = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ est un système de méridiens pour $\tilde{f}$. Par conséquent $\tau(j \cdot i) = (a_1 x_1 a_1^{-1}, a_2 x_2 a_2^{-1}, \dots, a_k x_k a_k^{-1})$ est encore un système de méridiens pour $\tilde{f}$. De plus, si μ est un autre système de méridiens sur $\tilde{f}$, il existe un élément τ de $\mathcal{H}(G_k)$ tel que $\mu = \tau(j \cdot i)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 F_k & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X) & \xrightarrow{-} & \pi_1(K_p) \longrightarrow \pi_1(F_k) \\
 & \searrow (j \cdot i)_* & \downarrow j_* & & \\
 & & \pi_1(\tilde{X}) & &
 \end{array}$$

L'action de $\mathcal{H}(G_k)$ sur $C_{n,k}$ est alors définie par $\tau \cdot f = q^{-1}(\tilde{f}, \tau(j \cdot i))$. Il est facile de vérifier que $\tau \cdot f$ est bien définie à cobordisme près et que si τ' est un autre élément de $\mathcal{H}(G_k)$, alors $(\tau' \tau) \cdot f = \tau' \cdot (\tau \cdot f)$.

2.7 THÉOREME.

Pour tout entier $n \geq 3$, $C_{n,k}$ est isomorphe à $C_{n,k} / \mathcal{H}(G_k)$.

Démonstration :

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{n,k} & \xrightarrow{p} & \tilde{C}_{n,k} \\
 q \downarrow & \nearrow \omega & \\
 C'_{n,k} & &
 \end{array}$$

où ω est l'oubli du système de méridiens. Si deux (n,k) -enlacements f et f' sont égaux dans $\tilde{C}_{n,k}$, alors il existe un système de méridiens μ sur $\tilde{f}$ tel que $(\tilde{f}', j \cdot i)$ soit cobordant à $(\tilde{f}, \mu)$.

Par conséquent, il existe τ dans $\mathcal{H}(G_k)$ tel que $\tau \cdot f$ soit cobordant à f' .

Enfin, il est clair que pour tout élément τ de $\mathcal{H}(G_k)$, $p(f)$ et $p(\tau \cdot f)$ sont égaux dans $\tilde{C}_{n,k}$.

2.8 REMARQUE.

Nous ignorons si $\mathcal{H}(G_k)$ agit linéairement sur $C_{n,k}$. Cependant il est facile de voir que $\mathcal{H}(G_k)$ laisse fixe l'élément neutre.

ANNEXE

DÉMONSTRATION DES RÉSULTATS DU CHAPITRE 0, §1

Démonstration de 1.4

Propriété P_1 :

La suite exacte de Mayer-Vietoris et le théorème de Van Kampen prouvent la propriété P_1 dans le cas où (X,A) est dans $\mathcal{U}$ et Y est fini.

Supposons maintenant que (X,A) soit dans $\mathcal{U}^*$. Donnons nous un complexe quelconque Y et une application $f : (M,N) \longrightarrow (X \cup_A Y, Y)$ où (M,N) est une paire de complexes finis.

Dans cette situation, nous pouvons trouver des paires de complexes finis $(M', N') \subset (X,A)$, $(M'', N'') \subset (X \cup_A Y, Y)$, $M'' = M' \cup_N N''$, telles que f se factorise à travers (M'', N'') .

Mais, par hypothèse, l'inclusion $(M', N') \hookrightarrow (X,A)$ se factorise à travers un élément (K', L') de $\mathcal{U}$. Posons $L = L' \cup_N N''$ et $K = K' \cup_N N''$. La paire (K,L) est clairement dans $\mathcal{U}$ et $(M'', N'') \hookrightarrow (X \cup_A Y, Y)$ se factorise à travers (K,L) , donc f se factorise à travers (K,L) .

Ce qui prouve que $(X \cup_A Y, Y)$ est dans $\mathcal{U}^*$.

Propriété P_2 :

Supposons (X,A) et (Y,X) dans $\mathcal{U}$; Y/X et X/A sont donc contractiles. Or $Y/X = (Y/A)/(X/A)$, par conséquent Y/A est contractile.

Supposons maintenant (X, A) et (Y, X) dans $\mathcal{U}^*$, et soit

$f : (M, N) \longrightarrow (Y, A)$ une application continue, (M, N) étant une paire de complexes finis. L'application f , considérée comme application de (M, N) dans (Y, X) , se factorise à travers un élément (K, L) de $\mathcal{U}$. Puisque (X, A) est dans $\mathcal{U}^*$, $(L, N) \hookrightarrow (X, A)$ se factorise à travers un élément (K', L') de $\mathcal{U}$.

Posons $K'' = K \cup_L K'$. D'après ce qui précède, (K'', L') est dans $\mathcal{U}$.

Or $f : (M, N) \longrightarrow (Y, A)$ se factorise à travers (K'', L') .

Donc (Y, A) est dans $\mathcal{U}^*$.

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{\quad} & M & & \\
 \downarrow & \searrow & & \downarrow & \\
 & & L \hookrightarrow K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 L' \hookrightarrow K' \hookrightarrow K'' = K \cup_L K' & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A \hookrightarrow X \longrightarrow Y & & & &
 \end{array}$$

Propriété P_3 :

Si (X, A) est dans $\mathcal{U}$, alors clairement $(X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ est aussi dans $\mathcal{U}$, car l'inclusion $X \times \partial I \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$ induit d'une part un isomorphisme en homologie entière et d'autre part une surjection au niveau des π_1 .

Supposons maintenant (X, A) dans $\mathcal{U}^*$ et soit

$f : (M, N) \longrightarrow (X \times I, X \times \partial I \cup A \times I)$ une application continue, (M, N) étant une paire de complexes finis. Il existe une paire $(M', N') \subset (X, A)$ de

complexes finis telle que f se factorise à travers $(M' \times I, M' \times \partial I \cup N' \times I)$.

Mais puisque (X, A) est dans $\mathcal{U}^*$, il existe (K, L) dans $\mathcal{U}$ tel que $(M', N') \subset (K, L) \subset (X, A)$.

L'application f se factorise donc à travers $(K \times I, K \times \partial I \cup L \times I)$ qui, d'après ce qui précède, est dans $\mathcal{U}$.

Démonstration du Théorème 1.6

Remarquons d'abord que l'unicité du couple (E, η) vérifiant les propriétés i) et ii) du théorème est claire car si (E', η') est un autre couple vérifiant également i) et ii), il existe $f : E(X) \longrightarrow E'(X)$ et $g : E'(X) \rightarrow E(X)$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \eta_x & \\ X & \nearrow & E(X) \\ & \eta'_x & \\ & \searrow & E'(X) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ f \downarrow \uparrow g \\ \end{array}$$

Alors $g \cdot f$ est homotope à $\text{id}_{E(X)}$ et $f \cdot g$ à $\text{id}_{E'(X)}$.

Avant de construire (E, η) , admettons provisoirement le

LEMME : Supposons avoir construit (E, η) tel que

- i) Pour tout complexe X , $(E(X), X)$ est dans $\mathcal{U}^*$
- iii) Pour toute paire (K, L) de $\mathcal{U}$ l'inclusion $L \hookrightarrow K$, induit une bijection $[K, E(X)] \xrightarrow{\sim} [L, E(X)]$.

Alors, pour tout complexe X , $E(X)$ est $\mathcal{U}^*$ -local.

Il nous suffit donc de construire (E, η) vérifiant i) et iii).

Construction de E

Pour tout complexe pointé X , désignons par $\mathcal{A}(X)$ l'ensemble des diagrammes $L \hookrightarrow K$ où (K,L) parcourt $\mathcal{U}$ et notons $\Phi(X)$ la somme

$\downarrow$

X

amalgamée de X et de $\coprod_{\mathcal{A}(X)} K$ le long de $\coprod_{\mathcal{A}(X)} L$.

$\mathcal{A}(X)$

$\mathcal{A}(X)$

La paire $(\Phi(X), X)$ est clairement dans $\mathcal{U}^*$. En réitérant la construction précédente, nous obtenons une suite $X \longrightarrow \Phi(X) \longrightarrow \Phi^2(X) \longrightarrow \dots$ dont $E(X)$ est, par définition, la limite inductive et $\eta_X : X \longrightarrow E(X)$ l'application canonique.

$E(X)$ vérifie i) :

Si (M,N) est une paire de complexes finis et $f : (M, N) \longrightarrow (E(X), X)$ une application continue, il existe un entier n tel que $f(M) \subset \Phi^n(X)$. L'application f se factorise donc à travers $(\Phi^n(X), X)$ qui, d'après la propriété P_2 , est dans $\mathcal{U}^*$. Par conséquent f se factorise à travers un élément (K,L) de $\mathcal{U}$.

$E(X)$ vérifie iii) : Donnons nous un élément (K,L) de $\mathcal{U}$ et notons

$\alpha : [K, E(X)] \longrightarrow [L, E(X)]$ l'application induite par l'inclusion $L \hookrightarrow K$.

- La construction des Φ^n montre clairement que α est surjective.

- Prouvons que α est injective : $\alpha[f] = \alpha[g]$ signifie que $f|_L$ est homotope à $g|_L$. Il existe donc une application $h : K \times \partial I \cup L \times I \longrightarrow E(X)$ telle que $h|_{K \times 0} = f$, $h|_{K \times 1} = g$.

Mais, d'une part il existe un entier n tel que $h(K \times \partial I \cup L \times I)$ soit contenu

dans $\Phi^n(X)$, d'autre part $(K \times I, K \times \partial I \cup L \times I)$ est dans $\mathcal{U}$ d'après P_3 . Par conséquent h se prolonge à $\bar{h} : K \times I \rightarrow \Phi^{n+1}(X)$. Ce qui prouve que $[f] = [g]$.

Démonstration du lemme.

Donnons nous un élément (Z, Y) de $\mathcal{U}^*$ et notons $\alpha : [Z, E(X)] \rightarrow [Y, E(X)]$ l'application induite par l'inclusion.

α est surjective : Soit $f : Y \longrightarrow E(X)$ une application continue et posons $X' = E(X) \cup_Y Z$. D'après la propriété P_1 , $(X', E(X))$ est dans $\mathcal{U}^*$, donc d'après ce qui précède et la propriété P_2 , $(E(X'), E(X))$ est dans $\mathcal{U}^*$.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E(X) & \longrightarrow & X' \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & E(X')
 \end{array}$$

Nous allons prouver que $E(X) \longrightarrow E(X')$ est une équivalence d'homotopie faible, donc une équivalence d'homotopie.

Soit $g : (D^{n+1}, S^n) \longrightarrow (E(X'), E(X))$ une application continue, $n \geq 0$; g se factorise à travers un élément (K, L) de $\mathcal{U}$. Mais nous savons, d'après iii), que l'inclusion $L \hookrightarrow K$ induit des bijections:

$$\begin{array}{ccc}
 [K, E(X)] & \xrightarrow{\sim} & [L, E(X)] \quad \text{et} \quad [K, E(X')] \xrightarrow{\sim} [L, E(X')] \\
 S^n & \hookrightarrow & D^{n+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L & & K \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 E(X) & \longrightarrow & E(X')
 \end{array}$$

Il s'ensuit que les groupes d'homotopie relative $\pi_{n+1}(E(X'), E(X))$ sont tous nuls. Ceci démontre la surjectivité de α .

α est injective : Soit $f, g : Z \longrightarrow E(X)$ deux applications telles que $f|_Y$ soit homotope à $g|_Y$; il existe donc $h : Z \times \partial I \cup Y \times I \longrightarrow E(X)$ telle que $h|_{Z \times 0} = f, h|_{Z \times 1} = g$.

Désignons par T la somme amalgamée de $E(X)$ et de $Z \times I$ le long de $Z \times \partial I \cup Y \times I$

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \partial I \cup Y \times I & \longrightarrow & Z \times I \\
 h \downarrow & & \downarrow \\
 E(X) & \longrightarrow & T \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & E(T)
 \end{array}$$

Alors $(E(T), E(X))$ est dans $\mathcal{U}^*$ car $(E(T), T)$ et $(T, E(X))$ le sont.

Un raisonnement semblable au raisonnement précédent montrerait que $E(X) \longrightarrow E(T)$ est une équivalence d'homotopie.

Par conséquent h se prolonge à $\bar{h} : Z \times I \longrightarrow E(X)$, ce qui prouve que α est injective.

Démonstration de 1.8.

Commençons par noter que les ensembles $\mathcal{A}(\Phi^n(X))$ définis lors de la construction de E sont dénombrables. Par conséquent, si X est un complexe dénombrable, $E(X)$ l'est aussi.

Supposons maintenant que X est un complexe fini et appelons Y un sous-complexe fini de $E(X)$ contenant X . Puisque $(E(X), X)$ est dans $\mathcal{U}^*$, l'inclusion $(Y, X) \longrightarrow (E(X), X)$ se factorise à travers un élément (K, L) de $\mathcal{U}$.

Posons alors $\overline{X} = K \cup_L X$. $\overline{X}$ contient Y et d'après P_1 , $(\overline{X}, X)$ est dans $\mathcal{U}$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \hookrightarrow & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L & \longrightarrow & K \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & \overline{X} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & E(X)
 \end{array}$$

Ceci prouve l'existence de la famille $(X_p)_{p,0}$ puisque $E(X)$ est réunion dénombrable de sous-complexes finis.

Démonstration de 1.9.

Commençons par noter le fait suivant : si (X', X) est dans $\mathcal{U}^*$ et si X est $\mathcal{U}^*$ -local, alors il existe une (unique à homotopie près) rétraction $r : X' \longrightarrow X$ car l'application $[X', X] \longrightarrow [X, X]$ induite par l'inclusion est une bijection.

1°) $\alpha^* : \text{Hom}_G(L_1, \pi_n(X)) \longrightarrow \text{Hom}_G(L_0, \pi_n(X))$ est injective.

Soit $\varphi : L_1 \longrightarrow \pi_n(X)$ telle que $\alpha^*(\varphi) = \varphi$. $\alpha = 0$

En attachant des $(n+1)$ -cellules à X , nous pouvons construire un complexe Y tel que $\pi_{n+1}(Y, X) = L_1$, le morphisme $\partial : \pi_{n+1}(Y, X) \longrightarrow \pi_n(X)$ étant égal à φ . Il existe un donc $\varphi' : L_0 \longrightarrow \pi_{n+1}(Y)$ tel que le diagramme de $Z[G]$ -modules ci-dessous soit commutatif.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L_0 & & \\
 & \swarrow \varphi' & \downarrow \alpha & & \\
 \pi_{n+1}(Y) & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, X) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_n(X) \\
 & & \parallel & & \\
 & & L_1 & &
 \end{array}$$

Maintenant attachons des $(n+2)$ cellules à Y pour obtenir X' de sorte que $L_0 = \pi_{n+2}(X', Y)$ et $\varphi' = \partial$, $\partial : \pi_{n+2}(X', Y) \longrightarrow \pi_{n+1}(Y)$.

Par hypothèse $\alpha \otimes_G Z : L_0 \otimes_G Z \longrightarrow L_1 \otimes_G Z$ est un isomorphisme, donc $H_{n+2}(X', Y)$ est isomorphe à $H_{n+1}(Y, X)$. Il s'ensuit que l'inclusion $X \hookrightarrow X'$ induit un isomorphisme en homologie entière. D'autre part $\pi_1(X) = \pi_1(X')$. Par conséquent (X', X) est dans $\mathcal{U}^*$ car X' est obtenu de X en ajoutant un nombre fini de cellules.

Il existe donc une rétraction $r : X' \longrightarrow X$. Ceci prouve que $\varphi = 0$ en raison du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+1}(Y, X) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_n(X) \\
 \downarrow & \nearrow & \partial = 0 \\
 \pi_{n+1}(X', X) & &
 \end{array}$$

2°) α^* est surjective : Soit $\varphi' : L_0 \longrightarrow \pi_n(X)$.

Considérons $Y = X \vee (VS^n)$ de sorte que $L_1 = \pi_n(Y, X)$, $\pi_n(Y) = \pi_n(X) \oplus L_1$:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+1}(X', Y) = L_0 & \xrightarrow{\alpha} & L_1 = \pi_n(Y, X) \\
 \varphi' \downarrow & \searrow \psi & \uparrow \\
 \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(Y)
 \end{array}$$

Appelons $\psi : L_0 \longrightarrow \pi_n(Y)$ l'application composée de φ' et de $\pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ induite par l'inclusion $X \subset Y$. Maintenant attachons des $(n+1)$ -cellules à Y de façon à obtenir un complexe X' tel que $\pi_{n+1}(X', Y) = L_0$ et $\psi = \partial$, $\partial : \pi_{n+1}(X', Y) \rightarrow \pi_n(Y)$. Mais $\alpha \otimes_G \mathbb{Z}$ étant un isomorphisme, il s'ensuit, comme précédemment, que (X', X) est dans $\mathcal{U}^*$.

L'obstruction à prolonger la rétraction $r : Y \longrightarrow X$ est la classe de cohomologie de φ' dans $H^{n+1}(X', Y; \pi_n(X))$; mais cette obstruction est nulle puisque l'inclusion $(X', X) \longrightarrow (X', Y)$ induit un isomorphisme : $H^{n+1}(X', Y; \pi_n(X)) \xrightarrow{\sim} H^{n+1}(X', X; \pi_n(X))$.

Ceci prouve qu'il existe $\varphi : L_1 \longrightarrow \pi_n(X)$ telle que $\varphi \cdot \alpha = \varphi'$.

Démonstration de 1.12.

Rappelons que si M est local alors l'application canonique $M \rightarrow \Lambda \otimes_G M$ est un isomorphisme et $\text{Tor}_1^G(M, \Lambda) = 0$, voir $[V_2]$, section 6.

La première affirmation découle des isomorphismes :

$$N \otimes_G M \xrightarrow{\sim} (N \otimes_{\Lambda} \Lambda) \otimes_G M \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\Lambda} (\Lambda \otimes_G M) \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\Lambda} M.$$

Pour la deuxième affirmation, il suffit de remarquer que si $0 \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathbb{Z}[G]$ -modules, alors $0 \longrightarrow P \otimes_G \Lambda \longrightarrow L \otimes_G \Lambda \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est une suite exacte de Λ -modules en raison des propriétés du Λ -module M citées plus haut.

Démonstration de 1.13.

Le théorème 1.13 de $[V_2]$ est l'affirmation suivante : soit π un groupe, Λ le localisé universel de $\mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{Z}$ et soit C_* un $\mathbb{Z}[\pi]$ -module différentiel gradué ou chaque C_n est libre et de type fini. Alors C_* est Λ -acyclique si et seulement si C_* est $\mathbb{Z}$ -acyclique.

Ceci prouve la proposition 1.13 dans le cas où (Y, X) est dans $\mathcal{W}$.

Maintenant si (Y, X) est dans $\mathcal{W}^*$, alors (Y, X) est limite inductive d'éléments de $\mathcal{W}$ qui sont Λ -acycliques.

RÉFÉRENCES

- [B₁] BOUSFIELD, A.K. The localization of spaces with respect to homology. *Topology* 14 (1975) pp. 133-150.
- [B₂] BOUSFIELD, A.K. Homological localization towers for groups and π -Modules. *Memoirs Amer. Math. Soc.* 186 (1977).
- [C] CAPPELL, S.E. A splitting theorem for manifolds. *Inventiones Math.* 33 (1976) pp. 69-170.
- [CO] COHN, P.M. Inversive localization in noetherian rings. *Comm. Pure Appl. Math.* , 26 (1973) pp. 679-691
- [CS₁] CAPPEL, S.E. et SHANESON, J. L. The codimension two placement problem and homology equivalent manifolds. *Ann. of Math.* (2), 99 (1974) pp. 277-348.
- [CS₂] CAPPELL, S. E. et SHANESON, J. L. Link cobordism. *Comment. Math. Helv.* 55 (1980) pp. 20-49.
- [H] HILLMAN, J.A. Alexander ideals for links. *Lect. Notes in Math.* 895, Springer (1981).
- [HS] HILTON, P.J. et STAMMBACH, V. A course in homological Algebra. Springer (1971).
- [K] KERVAIRE, M.A. Les noeuds de dimensions supérieures. *Bull. Soc. Math. France* 93 (1965) pp. 225-271.
- [M] MORAN, S. The mathematical Theory of Knots and braids. North Holland, (1983).
- [St] STALLINGS, J. Homology and lower central series of group. *J. Alg.* 2 (1965) pp. 170-181.
- [V₁] VOGEL, P. Localization of spaces with respect to a class of maps. *Polycopié, Univ. de Nantes*, (1978).
- [V₂] VOGEL, P. On the obstruction group inhomology surgery. *Pub. Math IHES* 55 (1982) pp. 165-206.
- [W] WALL, C.T.C. Surgery on compact manifolds. Academic Press, (1970).
- [RS] ROURKE, C.P. et SANDERSON, B. J. Introduction to piecewise-linear topology. Springer, (1972).