Les ensembles boréliens et les extensions des groupes;

PAR GEORGE W. MACKEY.

1. INTRODUCTION. — Soit K un groupe commutatif et soit Q un groupe arbitraire. Soit α, $y \rightarrow \alpha_y$ un homomorphisme de Q dans le groupe A(K) de tous les automorphismes de K. Soit η une application de $Q \times Q$ dans K de telle sorte que $\eta(e, e) = e$. (Nous notons par e l'élément neutre de tous les groupes que nous considérons.) Nous définissons une « multiplication » dans $K \times Q$ en posant

$$(\xi_1, y_1) \circ (\xi_2, y_2) = (\xi_1 \alpha_{y_1}(\xi_2) \eta(y_1, y_2), y_1 y_2), \tag{1}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont en K et y_1 et y_2 sont en Q. Les faits suivants sont bien connus et se vérifient facilement :

(a) Pour que $K \times Q$ soit un groupe pour la multiplication $\circ$ il faut et il suffit que η satisfasse à l'identité suivante :

$$\eta(y_1, y_2)\eta(y_1 y_2, y_3) = \alpha_{y_1}(\eta(y_2, y_3))\eta(y_1, y_2 y_3). \tag{2}$$

(b) Si l'identité (2) se trouve satisfaite de manière que $K \times Q$ soit un groupe pour la multiplication $\circ$ (nous noterons ce groupe par $K\eta Q$), alors l'application $(\xi, y) \rightarrow y$ est un homomorphisme de $K \times Q$ sur Q et l'application $\xi \rightarrow (\xi, e)$ est un isomorphisme de K sur le noyau de cet homomorphisme. Ainsi le groupe $K\eta Q$ est une « extension » de K par Q.

(c) Soit G un groupe arbitraire pour lequel il existe un homomorphisme h de G sur Q et un isomorphisme γ de K sur le noyau de h.

Alors il existe : (i) un homomorphisme α de Q dans A(K); (ii) une application η de $Q \times Q$ dans K pour laquelle $\eta(e, e) = e$ et qui satisfait à l'identité (2) par rapport à α et (iii) un isomorphisme β de $K\eta Q$ sur G tel que $\beta((\xi, e)) = \gamma(\xi)$ pour chaque élément ξ dans K et $h(\beta((\xi, y))) = y$ pour chaque élément (ξ, y) dans $K\eta Q$. L'homomorphisme α est déterminé univoquement par la donnée de G, h, et γ et l'application η est déterminée univoquement par la donnée de G, h, et γ à une multiplication près par une application de la forme η_0 où pour chaque application θ de Q dans K telle que $\theta(e) = e$ nous posons

(3) $$\eta_0(y_1, y_2) = \theta(y_1)\alpha_{y_1}(\theta(y_2))(\theta(y_1 y_2))^{-1}.$$

Souvent on appelle des applications qui satisfont à (2) des systèmes de facteurs. Nous réservons cette application pour ceux qui ont aussi la propriété $\eta(e, e) = e$.

Cette analyse des extensions possibles de K par Q, utilisant des systèmes de facteurs, rencontre une difficulté sérieuse quand on tente de l'appliquer aux groupes topologiques. Pour construire η en démontrant (c) on choisit une application Φ de Q dans G telle que $h(\Phi(y)) = y$ pour tout y dans Q et l'on pose

$$\eta(y_1, y_2) = \Phi(y_1)\Phi(y_2)\Phi(y_1 y_2)^{-1}.$$

Mais, pour que la définition du groupe $K\eta Q$ donnée en (b) puisse conduire à un groupe topologique, il faut que η soit soumise à des restrictions topologiques. Cela signifie qu'il ne suffit pas de faire seulement intervenir l'axiome du choix en construisant l'application Φ. On doit trouver une méthode pour démontrer l'existence d'un choix possédant des propriétés topologiques convenables (la continuité par exemple). Mais, en effet, Hochschild [1] a montré qu'il est possible qu'il n'existe pas une Φ continue même si K et Q sont des groupes de Lie connexes. Naturellement il est évident qu'on peut choisir Φ comme application continue chaque fois que Q est discret. De plus Hochschild [1] a montré que si K et Q sont des groupes de Lie connexes et si de plus Q est simplement connexe on peut alors choisir Φ comme application analytique. En dehors de ces cas jusqu'à maintenant cette difficulté a empêché l'utilisation des ensembles facteurs dans l'analyse des extensions des groupes topologiques par des groupes topologiques [1].

C'est l'objet de cette Note de montrer comment on peut surmonter cette difficulté pour les groupes séparables localement compacts. Il arrive qu'il soit toujours possible de choisir Φ comme application borélienne et (ce qui est plus surprenant) qu'un ensemble facteur borélien η est toujours associé avec un groupe $K\eta Q$ localement compact. Ce dernier fait est une conséquence de certains théorèmes sur les ensembles boréliens qu'on trouve dans le livre [3] de Kuratowski et de la réciproque approximative du théorème de Haar démontré par Weil dans (5).

2. Espaces boréliens. — Soit S un ensemble arbitraire. Soit B un ensemble des sous-ensembles de S tel que $S \in B$ et tel que $\bigcup E_j \in B$ et $S - E_j \in E$ chaque fois que $E_1, E_2, \ldots$ sont des membres de B. Nous appellerons B une structure borélienne sur S. Un ensemble S muni d'une structure borélienne sera appelé un espace borélien. Les ensembles $E \in B$ seront appelés des sous-ensembles boréliens de S. Soit f une application de l'espace borélien S_1 dans l'espace borélien S_2. Si $f^{-1}(E)$ est un sous-ensemble borélien de S_1 chaque fois que E est un sous-ensemble borélien de S_2, nous dirons que f est une application borélienne. S'il existe une application f de S_1 sur S_2 qui est biunivoque et tel que f et f^{-1} sont toutes les deux boréliennes nous dirons que S_1 et S_2 sont isomorphes en tant qu'espaces boréliens. Il est évident que chaque ensemble F de sous-ensembles de S est continu dans une unique structure borélienne sur S qui est plus petite que toutes les autres. Nous l'appellerons la structure borélienne engendrée par F. Si S est muni d'une structure topologique, la structure boré-

---

(1) Après avoir écrit ceci nous avons appris que M. L. Calabi a surmonté cette difficulté pour une classe des groupes plus grande que la classe des groupes localement compacts séparables. [*Sur les extensions des groupes topologiques* (*Ann. Mat. pura appl.* (4), t. 32, 1951, p. 295-370.] M. Calabi fait usage du fait que l'on peut choisir l'application Φ de telle façon qu'elle soit continue au moins à l'élément e. Nous espérons qu'on trouvera que notre méthode, assez différente, a encore un certain intérêt.

lienne engendrée par les ensembles fermés sera appelée la structure borélienne associée avec la structure topologique. Soient S_1 et S_2 des espaces métriques complets et séparables. Soit E_1 et E_2 des sous-ensembles boréliens non dénombrables avec $E_1 \subseteq S_1$ et $E_2 \subseteq S_2$. Soient E_1 et E_2 munis de structures boréliennes associées avec leurs structures topologiques. Alors c'est une conséquence du théorème 2 sur la page 358 de [3] que E_1 et E_2 sont des espaces boréliens isomorphes. Inspirés par ce fait nous dirons qu'un espace borélien est canonique s'il est dénombrable ou s'il est isomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ et, en conséquence, à l'espace borélien défini par un sous-ensemble borélien non dénombrable quelconque de n'importe quel espace métrique complet séparable. Soient S_1 et S_2 des espaces boréliens. Nous munissons $S_1 \times S_2$ de la structure borélienne engendrée par les ensembles $E_1 \times E_2$, où pour $i = 1, 2$, E_i est un sous-ensemble borélien de S_i. Il est évident que l'espace $S_1 \times S_2$ est canonique chaque fois que S_1 et S_2 le sont. Nous aurons besoin du lemme suivant qui est une conséquence immédiate du théorème 1 de la page 253 de [2].

Lemme. — *Soit f une application biunivoque de l'espace borélien canonique S_1 dans l'espace borélien canonique S_2. Soit E l'ensemble de valeurs de f. Alors E est un ensemble borélien et f^{-1} est une application borélienne.*

3. Groupes boréliens. — Soit G un groupe qui est aussi un espace borélien. Si l'application $x, y \to xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G est borélienne nous dirons que G est un groupe borélien. Si G est canonique comme espace borélien nous dirons que G est un groupe borélien canonique. Évidemment, chaque groupe séparable localement compact muni de la structure borélienne associée avec sa topologie est un groupe borélien canonique.

Théorème 1. — *Soit G un groupe borélien canonique et soit μ une mesure définie pour tous les ensembles boréliens de G. Supposons que G est somme dénombrable d'ensembles boréliens de mesure finie et que la mesure μ est invariante par rapport aux transformations $E \to Es$ (ou $E \to sE$) pour $s \to G$. Alors il existe une et une seule structure topologique localement compacte sur G dont la structure borélienne associée* *est donnée sur* G *et par rapport à laquelle* G *est un groupe topologique. Cette structure topologique est séparable.*

Ce théorème est un cas spécial d'un théorème plus fort que nous nous proposons de démontrer en détail dans un autre article. En conséquence, nous ne donnerons ici que des indications brèves. D'abord, on utilise le fait que G est canonique dans certains théorèmes connus concernant les ensembles boréliens pour démontrer que la mesure μ satisfait aux hypothèses (M) et (M′) de l'appendice I de [5]. Ainsi le théorème principal de cet appendice montre que les ensembles $E.E'$, où E et E′ sont des ensembles boréliens de mesure finie et positive, définissent un système fondamental des entourages de e pour une structure topologique dans G par rapport à laquelle G est un sous-groupe partout dense d'un groupe localement compact G′. Puis utilisant certaines propriétés des rapports entre la mesure μ dans G et la mesure de Haar dans G′ qui sont démontrées dans l'appendice I de [5], ainsi que le fait que G est canonique, on peut prouver que $G = G'$.

4. Les théorèmes principaux. — Soit K et Q des groupes séparables et localement compacts et soit K commutatif. Soit α un homomorphisme de Q dans le groupe A(K) des automorphismes de K. Supposons que l'application $x, y \to \alpha_y(x)$ de $K \times Q$ dans K soit continue. Soit η un système de facteurs qui est borélien comme application de $Q \times Q$ dans K, c'est-à-dire un système de facteurs borélien.

Théorème 2. — *Il existe dans le groupe* $K\eta Q$ *une unique structure topologique localement compacte par rapport à laquelle* $K\eta Q$ *est groupe topologique telle que l'application identique de* $K \times Q$ *dans* $K\eta Q$ *est une application borélienne. L'application* $\xi \to \xi, e$ *applique* K *sur un sous-groupe fermé de* $K\eta Q$ *et est bicontinue. L'application de* $(K\eta Q)/K$ *sur* Q *définie par l'application* $\xi, y \to y$ *de* $K\eta Q$ *sur* Q *est aussi bicontinue.* $K\eta Q$ *est un groupe séparable.*

Démonstration. — Il est évident que $K\eta Q$ est un espace borélien canonique si on le munit de la structure borélienne de $K \times Q$. De plus on voit facilement du fait que η est application borélienne que

$K\eta Q$ est un groupe borélien. Soit α_1 une mesure de Haar dans K invariante à droite et soit α_2 une telle mesure dans Q. Soit α la mesure $\alpha_1 \times \alpha_2$ restreinte aux ensembles boréliens de $K\eta Q$. On vérifie sans difficulté que α est invariante à droite par rapport aux opérations du groupe $K\eta Q$. L'existence de la structure topologique annoncée est maintenant une conséquence immédiate du théorème 1. Comme on le sait une représentation mesurable d'un groupe localement compact par des opérateurs unitaires est automatiquement continue. De ce fait on conclut facilement qu'une application du groupe localement compact G_1 sur le groupe localement compact G_2 qui est à la fois un isomorphisme algébrique et un isomorphisme borélien est aussi bicontinue. Ainsi $\xi \to \xi, e$ est bicontinue et puisque K est localement compact on en conclut que l'image de K dans $K\eta Q$ est fermée. L'application $\xi, y \to y$ de $K\eta Q$ sur Q est évidemment borélienne. Donc c'est une conséquence du lemme 1.2 de [4] que l'application ζ de $(K\eta Q)/K$ sur Q qu'il définit est aussi borélienne. Puisque $(K\eta Q)/K$ et Q ont les structures boréliennes canoniques il résulte du lemme du paragraphe 2 que ζ soit un isomorphisme borélien. Ainsi ζ est bicontinue.

THÉORÈME 3. — *Soit G un groupe topologique localement compact et séparable. Supposons qu'il existe un homomorphisme continu h de G sur Q et un isomorphisme bicontinu γ de K sur le noyau N de h. Alors il existe :* (i) *un homomorphisme α de Q dans le groupe A(K) des automorphismes bicontinus de K de telle sorte que l'application $\xi, y \to \alpha_y(\xi)$ est continue;* (ii) *une application borélienne de $Q \times Q$ dans K qui est système de facteurs par rapport à α et* (iii) *un isomorphisme bicontinu β de $K\eta Q$ sur G de telle sorte que $\beta((\xi, e)) = \gamma(\xi)$ pour $\xi \in K$ et que $h(\beta(\xi, y)) = y$ pour $\xi, y \in K\eta Q$. L'homomorphisme α est univoquement déterminé par la donnée de G, h et γ et l'application η est univoquement déterminée par la donnée de G, h et γ à une multiplication près par une application de la forme η_θ, où θ est une application borélienne de Q dans K et θ se définit par l'équation* (3).

Démonstration. — Comme dans le cas discret l'automorphisme intérieur défini par $x \in G$ induit un automorphisme de $\gamma(K)$ qui ne dépend que de $h(x)$. Pour chaque $y \in Q$ nous notons par α_y l'automorphisme de $\gamma(K)$ ainsi défini par x, où x est un élément quelconque de G tel que $h(x) = y$. Puisque l'application $\xi, x \to x\xi x^{-1}$ de $K \times G$ dans K est continue et l'application h est ouverte, on voit sans peine que l'application $\xi, y \to \alpha_y(\xi)$ est continue. Maintenant utilisant le lemme 1.1 de (4) on choisit un ensemble borélien V dans G tel que pour chaque x dans G il existe exactement un élément de l'ensemble $V \cap x\gamma(K)$. Pour chaque $y \in Q$ nous notons par $\Phi(y)$ l'élément unique de V tel que $h(\Phi(y)) = y$. Soit E un ensemble borélien quelconque de G. Donc $\Phi^{-1}(E) = \Phi^{-1}(E \cap V) = h(E \cap V)$. Puisque h restreint à V est biunivoque et puisque $E \cap V$ est borélien il résulte du lemme du paragraphe **2** que $h(E \cap V) = \Phi^{-1}(E)$ est aussi borélien. Ainsi Φ est une application borélienne. Évidemment nous pouvons supposer que $\Phi(e) = e$. Posons

$$\eta(y_1, y_2) = \Phi(y_1)\Phi(y_2)\Phi(y_1 y_2)^{-1} \qquad \text{et} \qquad \beta((\xi, y)) = \gamma(\xi)\Phi(y).$$

On vérifie exactement comme dans le cas discret que β est un isomorphisme algébrique de $K\gamma_\eta Q$ sur G. De plus il est évident que β est une application borélienne. Donc, on en conclut, que d'après le lemme du paragraphe **2**, β est un isomorphisme borélien. Ainsi par des raisonnements donnés plus haut on voit que β est biunivoque. Les autres énoncés du théorème sont vérifiés exactement comme dans le cas discret.

5. — Le groupe des extensions des groupes. — Étant donné Q, K et α il est évident que les systèmes de facteurs boréliens par rapport à α constituent un groupe par rapport à la multiplication et que ceux de la forme η_θ définissent un sous-groupe. Par les théorèmes 2 et 3 les éléments du groupe quotient sont mis en correspondance biunivoque avec les extensions « essentiellement distinctes » de K par Q. On est conduit à se poser les questions suivantes : Quelle est la structure de ce groupe ? Est-il possible de le munir d'une structure borélienne d'une façon naturelle telle qu'il devienne un groupe borélien ? Si c'est possible est-ce que cette structure est canonique et dans l'affirmative est-ce que la structure est associée avec une topologie localement compacte ? Nous n'avons encore pu étudier ces questions que d'une manière assez superficielle. Nous espérons les étudier d'une façon plus approfondie. Pour le moment nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Si le système de facteurs borélien η est tel que $\eta(y_1, y_2) = e$ pour presque chaque paire y_1, y_2 dans $Q \times Q$ (par rapport à la mesure de Haar) alors il existe θ de telle sorte que $\eta = \eta_\theta$.*

Démonstration. — Soit Q' l'ensemble des éléments $y \in Q$ pour lequel $\eta(y, z)$ a la même valeur pour presque tout $z \in Q$. Notons cette valeur par $\theta(y)$.

Alors si $y_1 \in Q'$ et $y_2 \in Q'$ nous avons

$$\eta(y_1 y_2, z) = \eta(y_1, y_2)^{-1} \alpha_{y_1}(\eta(y_2, z))(\eta(y_1, y_2, z)) = \eta(y_1, y_2)^{-1} \alpha_{y_1}(\theta(y_2))(\theta(y_1))$$

pour presque tout z. Donc, $y_1 y_2 \in Q'$ et

$$\theta(y_1, y_2) = \eta(y_1, y_2)^{-1} \alpha_{y_1}(\theta(y_2))(\theta(y_1)).$$

De la même manière on montre que si $y \in Q'$ alors $y^{-1} \in Q'$. Donc Q' est un sous-groupe. Mais par hypothèse $Q - Q'$ a une mesure nulle. Comme toutes les classes $Q'x$ ont ici la même mesure, il résulte que $Q' = Q$. Ainsi

$$\eta(y_1, y_2) = \theta(y_1) \alpha_{y_1}(\theta(y_2))(\theta(y_1 y_2))^{-1}$$

pour tout y_1 et y_2 en Q et la preuve du théorème est faite.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. HOCHSCHILD, *Group extensions of Lie groups* (*Ann. Math.*, vol. 54, 1951, p. 96-109).

[2] C. KURATOWSKI, *Topologie*, I, Varsovie, 1933.

[3] C. KURATOWSKI, *Topologie*, I, (2e éd.), Varsovie, 1948.

[4] G. W. MACKEY, *Induced Representations of locally compact groups I* (*Ann. Math.*, vol. 55, 1952, p. 101-139).

[5] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (*Actual. Sc. Ind.*, no 869, Hermann et Cie, Paris, 1940).