Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring.

Von

Wilhelm Magnus in Princeton N. J. (U. S. A.)

Einleitung.

Läßt sich jedem Element einer Gruppe eindeutig ein Element eines Ringes zuordnen, so daß dem Produkt zweier Gruppenelemente das Produkt der entsprechenden Ringelemente zugeordnet ist, so liefert die Untersuchung der zweiseitigen Ideale des Ringes und der zugehörigen Restklassenringe rückwärts Aussagen über die Gruppe; hiervon hat K. Shoda[1]) bei seinen Untersuchungen der Automorphismengruppen Abelscher Gruppen Gebrauch gemacht. Im folgenden wird zunächst (§ 2) für die freien Gruppen, die ja jede diskrete Gruppe als Faktorgruppe enthalten, eine Darstellung in einem „freien" Ring mit Einheitselement gegeben. Dieser ist folgendermaßen konstruiert:

s_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien Größen, zwischen denen eine kommutative Addition und assoziative Multiplikation erklärt ist, wobei die distributiven Gesetze gelten sollen. Es werde nun ein „allgemeinster" Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement e konstruiert, der die Größen s_i enthält und dessen allgemeines Element eine beliebige formale Summe

$$n_0 e + \sum_{k=1}^{\infty} n_k P_k$$

ist, wobei die P_k alle möglichen Potenzprodukte der s_i bedeuten und die n_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ irgendwelche ganzen Zahlen sind. Daß diese Größen tatsächlich einen Ring bilden, ist leicht zu sehen; zugleich bieten sich in diesem Ring von selber eine unendliche Reihe von Idealen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n, \ldots$ dar, nämlich die Potenzen des von den s_i erzeugten „Primideals" $\mathfrak{J}_1$ (der Restklassenring nach $\mathfrak{J}_1$ sind die ganzen Zahlen). $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$ besitzt eine endliche Basis, d. h. alle Elemente sind Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten von endlich vielen Elementen, sofern die Anzahl der s_i endlich ist. Indem man den Elementen einer

---

[1]) Math. Annalen **100** (1928), S. 674–686; Shoda benutzt den vollen Gruppenring, während zwischen den Elementen der Restklassenringe $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$ (siehe unten), welche den Elementen von $F/F^{(n)}$ zugeordnet sind, lineare Beziehungen bestehen derart, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$ nicht den vollen Gruppenring von $F/F^{(n)}$ enthält.

freien Gruppe F geeignete Elemente von $\mathfrak{R}$ zuordnet (§ 2), erhält man eine getreue Darstellung von F in $\mathfrak{R}$ und entsprechend eine Darstellung einer Faktorgruppe $F/F^{(n)}$ von F in $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}_n$; die sehr einfachen Eigenschaften von $\mathfrak{J}_n/\mathfrak{J}_{n+1}$ ermöglichen eine eingehende Untersuchung der Gruppen $F/F^{(n)}$, die dann im weiteren angewendet wird; die leicht ersichtliche Möglichkeit der Zwischenschaltung von Idealen zwischen $\mathfrak{J}_n$ und $\mathfrak{J}_{n+1}$ wird in § 6 zur Konstruktion von Gruppen mit bestimmten Eigenschaften ausgenutzt. Zur Vereinfachung der Diskussion wird in § 2 $\mathfrak{R}$ selber durch Matrizen mit Parametern in den Koeffizienten dargestellt.

$\mathfrak{J}_n$ kann charakterisiert werden als das Ideal von $\mathfrak{R}$, das aus allen Elementen einer „Dimension" $\geqq n$ in den s_i besteht. Die Gruppen $F^{(n)}$ mögen daher die F zugeordneten „Dimensionsgruppen" heißen; infolge ihrer „Vollinvarianz" (Satz IV, § 2) lassen sich auch für eine beliebige Gruppe G Dimensionsgruppen $G^{(n)}$ definieren; das im folgenden entwickelte Verfahren ist insbesondere brauchbar zur Untersuchung von solchen Gruppen G^*, für die der Durchschnitt der Gruppen $G^{*(n)}$ das Einheitselement ist. Die Dimensionsgruppen $G^{(n)}$ sind vermutlich identisch mit den von K. Reidemeister[2]) für die Untersuchung unendlicher diskontinuierlicher Gruppen herangezogenen höheren Kommutatorgruppen G_n einer beliebigen Gruppe G; die Definition der G_n wird in § 1 gegeben; sie stehen jedenfalls in engen Beziehungen mit den $G^{(n)}$ und sind im übrigen, wie aus Untersuchungen von W. Burnside[3]) und P. Hall[4]) hervorgeht, für die Gruppen von Primzahlpotenzordnung von großer Bedeutung. Ein Nachweis der Übereinstimmung von $G^{(n)}$ und G_n würde es ermöglichen, einen Teil der von P. Hall[4]) erhaltenen Resultate in vereinfachter Weise abzuleiten (§ 6). Für $n = 3$ und $n = 4$ ist diese Übereinstimmung leicht direkt nachzuweisen, und das im folgenden entwickelte Verfahren führt bei unwesentlicher Modifikation zu den für diese Fälle von K. Reidemeister[2]) und H. Adelsberger[5]) gegebenen Darstellungen für die Faktorgruppen G/G_3 und G/G_4.

In § 2 wird zunächst das allgemeine Verfahren entwickelt, wobei als Grundlage die freien Gruppen benutzt werden; die Tatsache, daß die freien Gruppen zu den eingangs mit G^* bezeichneten Gruppen gehören, wird in § 5 zu dem Nachweis benutzt, daß, entsprechend einer allgemeinen Vermutung von H. Hopf[6]), freie Gruppen von endlich vielen Erzeugenden

[2]) Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1926), S. 33—39.

[3]) Theory of groups of finite order, Cambridge 1911, 2. Aufl., S. 166.

[4]) Proceedings of the London Mathematical Society (2) 36 (1933), S. 29—95.

[5]) Journ. f. d. reine u. angew. Math. 163 (1930), S. 103—124.

[6]) Nach einer Mitteilung von Herrn B. Neumann.

nicht mit einer ihrer Faktorgruppen einstufig isomorph sein können. Dieser Satz ist implizit in einem Theorem von F. Levi[7]) enthalten; wie sich aus § 5 entnehmen läßt, gilt er allgemein für Gruppen G^* von endlich vielen Erzeugenden.

Der zweite Teil von § 2 ermöglicht die weitgehende Anwendung der linearen Algebra auf die Untersuchung von Automorphismen und von Isomorphie unendlicher diskreter Gruppen (§ 3); § 4 enthält einfache Beispiele hierzu. Die volle Reduktion der für den Fall einer freien Gruppe G den Faktorgruppen $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ zugeordneten Darstellungen der linearen Gruppen[8]) dürfte für einige speziellere Fragen nützlich sein, konnte jedoch vom Verfasser bisher nicht durchgeführt werden.

Es sei noch auf eine Beziehung des in § 6 angegebenen Beispiels zur Klassenkörpertheorie hingewiesen. Das Klassenkörperturmproblem legt die folgende Frage nahe: Muß jede Kette $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ von Gruppen von Primzahlpotenzordnung, in der G_i isomorph ist mit der Faktorgruppe nach der i-ten Kommutatorgruppe von G_{i+1}, nach endlich vielen Schritten abbrechen? Das gilt jedenfalls, wenn die Abelsche Gruppe G_1 zyklisch oder vom Typ $(2, 2)$ ist. Die Untersuchungen von A. Scholz[9]) und O. Taussky[9]) legen es nahe, dies auch für den Fall anzunehmen, daß G_1 vom Typ $(3^{m_1}, 3^{m_2})$ ist. Eine bejahende Antwort auf diese Frage würde bedeuten, daß die Klassenzahl eines durch hinreichend oft wiederholte Konstruktion des absoluten Hilbertschen Klassenkörpers über einem algebraischen Zahlkörper k entstehenden Oberkörpers zu irgendeinem vorgegebenen Primfaktor der Klassenzahl von k teilerfremd sein muß. Das angegebene Beispiel zeigt aber, daß jedenfalls die etwas schwächere Frage zu verneinen ist: Ist die Stufigkeit einer Gruppe G von Primzahlpotenzordnung schon durch die Struktur der Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe beschränkt?

§ 1.

Definition gewisser charakteristischer Faktorgruppen einer beliebigen Gruppe.

Es sei $G = G_1$ eine beliebige Gruppe. G_2 sei ihre Kommutatorgruppe, und G_n sei für $n > 1$ rekursiv definiert als die kleinste invariante Untergruppe von G, die alle Kommutatoren $g\, g_{n-1}\, g^{-1}\, g_{n-1}^{-1}$ eines beliebigen

---

[7]) Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 90—97.

[8]) In einem Spezialfall tritt eine solche (für $n = 3$) auf bei F. Levi und B. L. van der Waerden, „Über eine besondere Klasse von Gruppen“, Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 9 (1932), S. 154—158.

[9]) Journ. f. Math. 171 (1934), S. 19—41. Einer Mitteilung von Fräulein O. Taussky verdanke ich den Hinweis auf die obenstehende Frage.

Elementes g_{n-1} aus G_{n-1} mit einem beliebigen Element g aus G enthält. Im Anschluß an P. Hall[3]) mögen die Gruppen G_n die Untergruppen, die Gruppen G/G_n die Faktorgruppen der „absteigenden Zentralreihe" („lower central series") von G heißen. Die G_n brauchen weder untereinander noch von G verschieden zu sein. G_n/G_{n+1} ist stets eine zum Zentrum von G/G_{n+1} gehörige Abelsche Gruppe; diese besitzt jedenfalls dann eine endliche Basis, wenn G endlich viele Erzeugende besitzt. Die Invarianten von G_n/G_{n+1} sind dann für die Gruppe G charakteristische Zahlen, da G_n und G_{n+1} charakteristische Untergruppen von G sind [vergl. K. Reidemeister[2])].

Durch vollständige Induktion lassen sich in einfacher Weise die folgenden Behauptungen ableiten:

Hilfssatz 1. Sind g_k bzw. g_l Elemente aus G_k bzw. G_l, so ist $g_k g_l g_k^{-1} g_l^{-1}$ Element aus G_{k+l}.

Hilfssatz 2. Ist $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ein Potenzprodukt aus irgendwelchen Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ aus G, und ist $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ Element von G_n, so ist für jede natürliche Zahl h

$$f(a_1^h, a_2^h, \ldots, a_n^h)\,[f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]^{-h^n}$$

ein Element aus G_{n+1}.

Beim Beweise ist die vollständige Induktion für Hilfssatz 2 nach n zu nehmen; für Hilfssatz 1 nehme man $k \leqq l$ an; für $k = 1$ ist der Satz dann nach Definition richtig, für größere k nehme man g_k als Kommutator eines Elementes aus G_{k-1} und eines Elementes aus G an (was offenbar genügt), und führe dadurch den Satz auf kleinere Werte von k zurück. Auch bei Hilfssatz 2 ist es zweckmäßig anzunehmen, daß f Kommutator eines Elementes aus G_{n-1} mit irgendeinem Element aus G ist; der allgemeine Fall ist sofort auf diesen Fall reduzierbar.

§ 2.

Zwei Darstellungen der freien Gruppen.

$F \equiv F^{(1)}$ sei eine freie Gruppe. a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien freie Erzeugende von F. Es soll nun zunächst eine Darstellung von F durch Elemente eines Ringes $\mathfrak{R}$ von der in der Einleitung charakterisierten Art gegeben werden. Dazu werde jedem a_i eine Größe s_i zugeordnet; $\mathfrak{R}$ sei der von einem Einheitselement 1 und den assoziativen Größen s_i erzeugte „freie" Ring. Man setze nun

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_i &= 1 + s_i, \\ a_i^{-1} &= 1 - s_i + s_i^2 \mp \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)_i^n s_i^n. \end{aligned}$$

Dieser Ansatz entspricht gewissermaßen der Vorstellung, daß man die als lineare Operatoren gedachten a_i und ihre Reziproken „in der Umgebung" des Einheitselementes entwickelt; für die unten zur Darstellung von $\mathfrak{R}$ benutzten Matrizen ist die Möglichkeit einer solchen Entwicklung evident.

Es gilt nun der Satz:

I. *Durch die Beziehungen* (1) *erhält man eine getreue Darstellung von* F *durch Elemente aus* $\mathfrak{R}$, *wenn man einem Produkt der* $a_i^{\pm 1}$ *das entsprechende Produkt der Elemente* $1 + s_i$, $\Sigma\,(-1)^n s_i^n$ *aus* $\mathfrak{R}$ *zuordnet.*

Beweis: Der Einfachheit halber werde der Satz nur für den Fall bewiesen, daß F nur zwei Erzeugende $a_1 = a$, $a_2 = b$ besitzt. Der allgemeine Fall ist prinzipiell nicht schwieriger. Wir schreiben noch s und t für s_1 bzw. s_2. Jedes Element g von F ist auf eine und nur eine Weise in der Form

$$g = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \tag{2}$$

darstellbar, wobei die α_i und β_i, abgesehen von α_1 und β_m, von Null verschiedene ganze Zahlen $\lessgtr 0$ sind, während α_1 oder β_m oder beide gleich Null sein dürfen. Dem Element (2) von F ist in $\mathfrak{R}$ das Element

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \binom{\alpha_1}{\nu_1} s^{\nu_1} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \binom{\beta_1}{\mu_1} t^{\mu_1} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \binom{\alpha_2}{\nu_2} s^{\nu_2} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \binom{\beta_2}{\mu_2} t^{\mu_2} \ldots \\ &\qquad \ldots \sum_{\nu_m=0}^{\infty} \binom{\alpha_m}{\nu_m} s^{\nu_m} \sum_{\mu_m=0}^{\infty} \binom{\beta_m}{\mu_m} t^{\mu_m} \\ &= \sum_{\nu_i, \mu_i = 0}^{\infty} \binom{\alpha_1}{\nu_1}\binom{\beta_1}{\mu_1}\binom{\alpha_2}{\mu_2}\binom{\beta_2}{\mu_2} \ldots \binom{\alpha_m}{\nu_m}\binom{\beta_m}{\mu_m} s^{\nu_1} t^{\mu_1} s^{\nu_2} t^{\mu_2} \ldots s^{\nu_m} t^{\mu_m} \end{aligned} \tag{3}$$

zugeordnet. Das einzige, was man zum Beweis von I nachzuweisen hat, ist, daß die Elemente (3) alle vom Einheitselement von $\mathfrak{R}$ verschieden sind, falls nicht $m = 1$ und $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ist. Das ist aber in der Tat der Fall, denn in der in (3) auftretenden Summe besitzt das Element

$$s^{|\alpha_1|} t^{|\beta_1|} s^{|\alpha_2|} t^{|\beta_2|} \ldots s^{|\alpha_m|} t^{|\beta_m|}$$

einen von Null verschiedenen Koeffizienten, nämlich

$$\prod_{i=1}^{m} \binom{\alpha_i}{|\alpha_i|} \binom{\beta_i}{|\beta_i|}.$$

Für das Weitere benötigt man noch einen Hilfssatz, der es gestattet, aus der Darstellung eines Gruppenelementes von F in $\mathfrak{R}$ die Darstellung des inversen Elementes in $\mathfrak{R}$ in einfacher Weise zu berechnen. Allen Elementen von F sind ja Elemente von $\mathfrak{R}$ zugeordnet, die die Form $1+r$ besitzen, wobei r eine Summe von Elementen aus $\mathfrak{R}$ ist, in der das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ nicht mehr auftritt. Es gilt nun der Satz:

II. *Dem Element g von F sei das Element $1 + r$ aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Dann ist g^{-1} das Element $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n$ zugeordnet*[10]).

Der Satz II werde wieder nur für den Fall von zwei Erzeugenden von F mit Benutzung der nach I eingeführten Bezeichnungen bewiesen. g sei in der Form (2) geschrieben.

$$l = |\alpha_1| + |\beta_1| + |\alpha_2| + |\beta_2| + \cdots + |\alpha_m| + |\beta_m|$$

heiße die Länge von g. Hat g die Länge Eins, so ist die Behauptung trivial. Satz II sei für alle g mit einer Länge $< l$ bewiesen. Dann gilt er auch für alle g mit der Länge l. Zum Beweise nehme man etwa $\alpha_1 > 0$ an und setze

$$g' = a^{\alpha_1 - 1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} = a^{-1} g.$$

Es sei g' das Element $1 + u$ aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Nach Voraussetzung ist dann g'^{-1}, d. h. dem Element

$$b^{-\beta_m} a^{-\alpha_m} \ldots b^{-\beta_2} a^{-\alpha_2} b^{-\beta_1} a^{-\alpha_1 + 1},$$

das Element $1 - u + u^2 \mp \ldots$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Man weiß nun ferner, daß dem Element g das Element $(1 + s)(1 + u)$ und dem Element g^{-1} das Element $(1 - u + u^2 \mp \ldots)(1 - s + s^2 \mp \ldots)$ von $\mathfrak{R}$ zugeordnet ist. Setzt man

$$(1 + s)(1 + u) = 1 + s + u + su = 1 + v; \quad v = s + u + su,$$

so lautet also die zu beweisende Behauptung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s^\nu.$$

Nun bestehen offenbar die Gleichungen

$$(1 + v) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu = 1, \quad (1 + v) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s^\nu = 1.$$

Die erste Gleichung ist nämlich trivial, und die zweite folgt aus der Beziehung $1 + v = (1 + s)(1 + u)$ und der Gültigkeit des Assoziativgesetzes. Subtraktion der beiden Beziehungen ergibt:

$$(1 + v) \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu v^\nu - \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu u^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu s^\nu \right\} = 0.$$

Hieraus folgt nun, daß der Koeffizient von $1 + v$ gleich Null sein muß, und damit Satz II. Nach der Definition von $\mathfrak{R}$ läßt sich nämlich jedes

---

[10]) Hierbei ist implizit vorausgesetzt, daß sowohl r^n als auch $\Sigma(-1)^n r^n$ wirklich Linearkombinationen mit endlichen Koeffizienten der „Basiselemente" $s_1^{\alpha_{11}} s_2^{\alpha_{12}} \ldots s_k^{\alpha_{1k}} s_1^{\alpha_{21}} \ldots s_1^{\alpha_{m1}} s_2^{\alpha_{m2}} \ldots s_k^{\alpha_{mk}}$ von $\mathfrak{R}$ sind, wenn r selber eine solche Linearkombination ist. Das folgt leicht mit Benutzung des unten beim Beweise von II eingeführten Begriffes der „Dimension" eines solchen „Basiselementes".

Element ϱ von $\mathfrak{R}$ auf eine und nur eine Weise als Linearkombination der Elemente

$$s^{\mu_1} t^{\nu_1} s^{\mu_2} t^{\nu_2} \dots s^{\mu_m} t^{\nu_m} \tag{4}$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten schreiben; die Zahlen $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \dots, \mu_m, \nu_m$ sind dabei natürliche Zahlen, mit Ausnahme von μ_1 und ν_m, die auch $= 0$ sein können. Es möge nun

$$\mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 + \dots + \mu_m + \nu_m = d$$

die „*Dimension*" des Elementes (4) heißen. Das Einheitselement 1 von $\mathfrak{R}$ habe die Dimension Null; für jedes $d > 0$ gibt es nur endlich viele, etwa h_d, Elemente (4) der Dimension d. Diese bezeichne man in irgendeiner Reihenfolge mit $e_\lambda^{(d)}$, wobei λ die Werte $1, 2, \dots, h_d$ durchläuft. Jedes Element ϱ aus $\mathfrak{R}$ ist dann gleich einer Summe

$$\varrho = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{h_d} c_{d\lambda}\, e_\lambda^{(d)}$$

mit ganzzahligen $c_{d\lambda}$. Da das Produkt $e_{\lambda_1}^{(d_1)} e_{\lambda_2}^{(d_2)}$ zweier Elemente der Dimensionen d_1 und d_2 die Dimension $d_1 + d_2$ besitzt, besitzt ein Produkt $(1 + v)\,\varrho$ dieselben Glieder niedrigster Dimension wie ϱ, sofern v nur Glieder von einer Dimension > 0 enthält. Aus $(1 + v)\,\varrho = 0$ folgt also $\varrho = 0$ und damit Satz II.

Jedem Element g aus F ist eindeutig eine Summe von ganzzahligen Vielfachen von Potenzprodukten der Elemente s_i von $\mathfrak{R}$ zugeordnet. Man denke sich diese Summe nach Gliedern von nicht abnehmender Dimension geordnet. Als erstes Glied erhält man dann stets die 1; alle weiteren Glieder besitzen dagegen eine von Null verschiedene Dimension d. Die kleinste unter diesen Dimensionen heiße d_g, und diese Zahl heiße „*die Dimension von g*". d_g ist dann und nur dann $= 0$, wenn g das Einheitselement ist. Die jedem Element g zugeordnete Zahl d_g läßt sich nun durch den folgenden Satz charakterisieren:

III. *Ist F_n die n-te Untergruppe der „absteigenden Zentralreihe"* (siehe § 1) *von $F \equiv F_1$, so ist die Dimension jedes Elementes $\neq 1$ aus F_n mindestens gleich n. Ist $g \neq 1$ ein Element mit der Dimension n, so gibt es ein Element aus F_n, das dieselben Glieder der Dimension n besitzt wie g^{δ_n}, wobei δ_n eine für jedes n feste Zahl ist.*

Es ist zu vermuten, daß alle und nur die Elemente die Dimension n besitzen, die zu F_n, aber nicht zu F_{n+1} gehören; durch Rechnung läßt sich das für kleine Werke von n direkt beweisen, doch ist es dem Verfasser nicht gelungen, dies allgemein zu zeigen. — Zum Beweise von III werde zunächst gezeigt:

IV. *Die Elemente von F mit einer Dimension $\geqq n$ bilden eine invariante Untergruppe $F^{(n)}$ von F, wobei $F \equiv F^{(1)}$ gesetzt sei. $F^{(n)}$ ist nicht nur charakteristisch, sondern sogar „vollinvariant" in F; das heißt, wenn ein Potenzprodukt Π der Erzeugenden a_i in $F^{(n)}$ liegt, so liegt auch jedes Element von F in $F^{(n)}$, das man erhält, indem man in Π die a_i durch irgendwelche Elemente g_i von F ersetzt.* $F^{(n)}$ heiße n-te Dimensionsgruppe von F.

Beweis: Daß $F^{(n)}$ invariant in F ist, folgt unmittelbar daraus, daß sich die Dimension eines Elementes bei Transformation mit einem anderen Element nicht ändert. Daß $F^{(n)}$ vollivariant ist, folgt aus Satz II. Denn sind den Elementen g_i in $\mathfrak{R}$ die Elemente $1 + \gamma_i$ zugeordnet, und ist dem Potenzprodukt $\Pi(a_i)$ der a_i das Element $1 + \pi_n + \pi_{n+1} + \cdots$ zugeordnet, wobei die $\pi_n, \pi_{n+1}, \ldots$ Glieder der Dimensionen $n, n+1, \ldots$ in den s_i sind, so ist $\Pi(\gamma_i)$ in $\mathfrak{R}$ das Element zugeordnet, das man erhält, wenn man in $\pi_n, \pi_{n+1}, \ldots$ die s_i durch γ_i ersetzt und dann die Potenzprodukte der γ_i wieder in Potenzprodukte der s_i auflöst. Da alle γ_i mindestens die Dimension Eins in den s_i besitzen (sofern $g_i \neq 1$ ist; andernfalls ist $\gamma_i = 0$), liefern $\pi_n, \pi_{n+1}, \ldots$ dabei lauter Glieder einer Dimension $\geqq n$.

Weiterhin ist die folgende Ergänzung zu IV ohne weiteres klar:

IVa. *$F^{(n)}/F^{(n+1)}$ ist eine Abelsche Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung. Die Anzahl der unabhängigen Erzeugenden von $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Elemente von $\mathfrak{R}$ von der Dimension n, die als Anfangsglieder in der Entwicklung eines Elementes aus $F^{(n)}$ auftreten können.* Zum Beispiel sind die Glieder der Dimension 2 eines Elementes von $F^{(2)}$ stets Linearkombinationen $\Sigma \lambda_{ik}(s_i s_k - s_k s_i)$ mit ganzzahligen λ_{ik}.

Schließlich ist auch das folgende Analogon zu Hilfssatz 2 aus § 1 trivial: Ist $g(a_i)$ ein Element aus $F^{(n)}$, und ersetzt man in dem als Potenzprodukt der a_i geschriebenen Element g die a_i durch a_i^h, so ist $g(a_i^h)\,[g(a_i)]^{-h^n}$ ein Element von $F^{(n+1)}$. Es genügt, dies für den Fall zu zeigen, daß $g(a_i)$ die genaue Dimension n hat; es sei in $\mathfrak{R}$ $g(a_i) = 1 + \gamma_n + \gamma$, wobei γ die Glieder von einer Dimension $> n$ enthält. Es wird dann $[g(a_i)]^{h^n} = 1 + h^n \gamma_n + \gamma'$ und $g(a_i^h) = 1 + h^n \gamma_n + \gamma''$; denn ersetzt man in γ und γ_n die s_i durch $h s_i + \binom{h}{2} s_i^2 + \ldots$, so bleibt an Gliedern der n-ten Dimension genau $h^n \gamma_n$ nach der Ausmultiplikation stehen. Daraus folgt mittels II die Behauptung.

Zum Beweise von III ist nun zu sagen, daß der erste Teil sofort aus II durch vollständige Induktion folgt; und zwar gilt folgendes: Bezeichnet man die s_i als Differenzen erster Ordnung $\Delta_1^{(i)}$, die $s_i s_k - s_k s_i$ als Differenzen zweiter Ordnung $\Delta_2^{(i,k)}$ und rekursiv die Ausdrücke

$$s_{i_n} \Delta_{n-1}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})} - \Delta_{n-1}^{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})} s_{i_n}$$

als „*Differenzen n-ter Ordnung*", wenn $\Delta_{n-1}^{(i_1, \ldots, i_{n-1})}$ eine beliebige Differenz $(n-1)$-ter Ordnung ist, so sind die Glieder der ersten bis $(n-1)$-ten Dimension eines Elementes aus F_n gleich Null, während die der n-ten Dimension Linearkombinationen mit ganzen rationalen Koeffizienten aus den Differenzen n-ter Ordnung sind. — Der zweite Teil von Satz III erledigt sich so: g sei ein Element der genauen Dimension n; $g = 1 + \gamma_n + \gamma$, wobei die Glieder von γ mindestens die Dimension $n+1$ haben. Es sei $g = g(a_i)$ als Potenzprodukt der a_i geschrieben; g liege in F_k, wobei $k \leqq n$ sein muß wegen des ersten Teiles von Satz III. $h_0, h_1, \ldots, h_{n-k-1}$ seien irgendwelche ganzen Zahlen. Ferner sei

$$g(a_i^{h_0})\,[g(a_i)]^{-h_0^k} = g_1(a_i), \qquad g_1(a_i^{h_1})\,[g_1(a_i)]^{-h_1^{k+1}} = g_2(a_i),$$

$$\ldots, g_{n-k-1}(a_i^{h_{n-k-1}})\, g_{n-k-1}(a_i)]^{-h_{n-k-1}^{n-1}} = g_{n-k}(a_i).$$

Nach Hilfssatz (2) aus § 1 liegt dann $g_{n-k}(a_i)$ in F_n. Andererseits wird

$$g_{n-k} = 1 + (h_0^n - h_0^k)(h_1^n - h_1^{k+1}) \ldots (h_{n-k-1}^n - h_{n-k-1}^{n-1})\,\gamma_n + \gamma'$$

die Entwicklung von g_{n-k} in $\mathfrak{R}$, wobei γ' nur Glieder einer Dimension $> n$ enthält. Es gibt also Elemente aus F_n, deren Glieder n-ter Dimension gleich

$$(h_0^n - h_0^k)(h_1^n - h_1^{k+1}) \ldots (h_{n-k+1}^n - h_{n-k+1}^{n-1})\,\gamma_n$$

sind, und wenn der größte gemeinsame Teiler aller möglichen hierin auftretenden Faktoren von γ_n gleich δ_n gesetzt wird, erhält man Satz III.

Es möge nun eine zweite Darstellung der freien Gruppe F und der Faktorgruppen $F/F^{(n)}$ mit Hilfe von Matrizen gegeben werden. Der Einfachheit halber möge wieder nur der Fall zweier Erzeugenden a und b von F betrachtet werden. α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ und β_i $(i = 1, 2, \ldots)$ seien zwei unendliche Reihen von Parametern. Man setze

$$(5) \qquad a = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \alpha_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \beta_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{pmatrix},$$

wobei also unter der Hauptdiagonale Nullen, in dieser selbst Einsen, über diesen die α_i bzw. β_i und dann wieder Nullen stehen.

Die in (5) auftretenden unendlichen Matrizen besitzen eindeutige Reziproke; es ist nämlich

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 & \dots \\ 0 & 1 & -\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{pmatrix};$$

das Bildungsgesetz der Elemente der Matrix a^{-1} wird unten näher charakterisiert. Es gelten nun die folgenden Sätze:

V. *Die Matrizen* (5) *erzeugen zusammen mit ihren Reziproken bei Multiplikation eine freie Gruppe F von zwei Erzeugenden. F und $\mathfrak{R}$ sind damit durch Matrizen dargestellt.*

VI. *Bezeichnet man als n-ten Abschnitt einer Matrix die aus den ersten n Zeilen und Spalten gebildete n-reihige Matrix, so ist das Produkt zweier n-ten Abschnitte zweier Matrizen aus der Darstellung* (V) *von F gleich dem n-ten Abschnitt des Produktes. Die n-ten Abschnitte bilden also eine Gruppe; diese ist isomorph mit $F/F^{(n)}$.*

Die Beweise für diese Behauptungen lassen sich aus den Sätzen I bis IV entnehmen, wenn gezeigt wird, daß die aus den Matrizen (5) (bzw. deren n-ten Abschnitten) und ihren Reziproken durch Komposition entstehenden Matrizen umkehrbar eindeutig den Entwicklungen (3) der Elemente von F (bzw. den Entwicklungsabschnitten bis zu Gliedern der $(n-1)$-ten Dimension) zugeordnet sind, so daß dem Produkt zweier Matrizen das Produkt der zugehörigen Entwicklungen (3) zugeordnet ist (wobei den Elementen a und b die Matrizen (5) zugeordnet sind).

Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß offenbar die aus den Matrizen (5) und ihren Reziproken durch wiederholte Komposition erzeugbaren Matrizen $\mathfrak{M}$ sämtlich durch Angabe ihrer ersten Zeile eindeutig bestimmt sind. Denn die k-te Zeile entsteht aus der ersten, indem man das Element der r-ten Spalte in der ersten Zeile in die $r+k-1$-te Spalte der k-ten Zeile versetzt und die Indizes der Parameter α_i und β_i dabei um $k-1$ vergrößert. Jedem Potenzprodukt aus $a^{\pm 1}$, $b^{\pm 1}$ ist vermöge (5) eindeutig eine Matrix $\mathfrak{M}$ zugeordnet. Es soll nun gezeigt werden, daß die erste Zeile dieser Matrix umkehrbar eindeutig die Entwicklung (3) dieses Potenzproduktes bestimmt.

Es sei

$$c_{\nu_1, \mu_1, \dots, \nu_m, \mu_m}\, s^{\nu_1} t^{\mu_1} \dots s^{\nu_m} t^{\mu_m} \tag{6}$$

mit ganzzahligen $c_{\nu_1, \mu_1, \dots, \nu_m, \mu_m}$ der allgemeine Summand in (3); seine Dimension sei d. Ihm werde ein Produkt in den Variablen α_i, β_i zugeordnet, das vom Grade d ist und den Ausdruck (6) eindeutig beschreibt, nämlich

$$\text{(6a)} \quad c_{\nu_1, \mu_1, \ldots, \nu_m, \mu_m} \alpha_1 \ldots \alpha_{\nu_1} \beta_{\nu_1+1} \ldots \beta_{\nu_1+\mu_1} \ldots \alpha_{\nu_1+\mu_1+\ldots+1} \ldots \alpha_{\nu_1+\mu_1+\ldots+\nu_m} \cdot \beta_{\nu_1+\mu_1+\ldots+\nu_m+1} \ldots \beta_{\nu_1+\mu_1+\ldots+\nu_m+\mu_m}.$$

(6a) ist so gebildet, daß, wenn in dem Produkt $s^{\nu_1} t^{\mu_1} \ldots s^{\nu_m} t^{\mu_m}$ als r-ter Faktor s bzw. t steht, in (6a) der Faktor α_r bzw. β_r vorkommt. — Umgekehrt ist (6) bei Angabe von (6a) eindeutig bestimmt.

Es sei nun irgendein Potenzprodukt (2) in $a^{\pm 1}$ und $b^{\pm 1}$ gegeben. Ihm ist vermöge (5) eine Matrix $\mathfrak{M}$ zugeordnet, und vermöge (3) eine Entwicklung als Summe von Ausdrücken der Form (6). Man betrachte die Glieder der d-ten Dimension in (3), bilde die ihnen zugeordneten Produkte der Form (6a) und summiere dieselben. Diese Summe ist dann das Element der ersten Zeile und $(d+1)$-ten Spalte der Matrix $\mathfrak{M}$. Diese Behauptung ist offensichtlich richtig für die speziellen Potenzprodukte $a^{\pm 1}$ und $b^{\pm 1}$. Durch vollständige Induktion nach wachsender „Länge" der Potenzprodukte ist sie leicht allgemein nachzuweisen, und daraus folgen ohne Schwierigkeit die Sätze V und VI.

Es ist ohne weiteres zu sehen, daß in der oben gegebenen Darstellung von F durch Matrizen der Untergruppe $F^{(n)}$ diejenigen Matrizen entsprechen, in denen die „Parallelen zur Hauptdiagonale" bis zur $(n-1)$-ten einschließlich nur Nullen enthalten, oder mit anderen Worten: Eine Matrix $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann einem Element von $F^{(n)}$ zugeordnet, wenn in $\mathfrak{M} = (m_{ik})$ für $0 < k - i < n$ alle $m_{ik} = 0$ sind. Dies setzt in Evidenz, *daß der Durchschnitt aller Gruppen $F^{(n)}$ und mithin auch aller Gruppen F_n das Einheitselement ist.* Dies folgt nicht aus den allgemeinen Sätzen von F. Levi[7]), da F_n zwar für F, aber nicht für F_{n-1} charakteristisch ist (für $n > 2$).

§ 3.

Kriterien für Automorphismen und für Isomorphie von Gruppen.

Aus Satz IV, das heißt aus der „Vollinvarianz" von $F^{(n)}$ in der freien Gruppe F, folgt sofort: Setzt man zwischen den Erzeugenden von F irgendwelche Relationen an, wobei dann F in eine Faktorgruppe G von F und $F^{(n)}$ in eine invariante Untergruppe $G^{(n)}$ von G übergeht (wobei $G^{(n)}$ Faktorgruppe von $F^{(n)}$ ist), so ist $G^{(n)}$ charakteristische Untergruppe von G, d. h. $G^{(n)}$ geht bei allen Automorphismen von G in sich über. Daraus folgt, daß auch $G^{(n)}/G^{(n+1)}$, d. h. die Invarianten dieser Abelschen Gruppe, für G charakteristisch sind. Es ist dabei wesentlich, daß $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis ist, sofern G endlich viele Erzeugende besitzt. $G^{(n)}$ heiße „*n-te Dimensionsgruppe*" von G.

Es ist für das Weitere von Bedeutung, daß nicht nur $F^{(n)}$ selber, sondern auch gewisse $F^{(n+1)}$ enthaltende Untergruppen von $F^{(n)}$ in F vollinvariant sind, so daß diese Untergruppen in analoger Weise wie $F^{(n)}$ zur Herleitung charakteristischer Zahlen für eine beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ dienen können. Dazu werde eine beliebige Abbildung von F auf eine Untergruppe von F und die Wirkung dieser Abbildung auf $F^n/F^{(n+1)}$ untersucht. Bei der Abbildung mögen a und b (wir beschränken uns wieder auf zwei Erzeugende) in a' und b' übergehen. a' und b' lassen sich in der Form schreiben

$$a' = a^{u_1} b^{v_1} c_1, \qquad b' = a^{u_2} b^{v_2} c_2,$$

wobei $u_1, \ldots, v_2$ ganze Zahlen und c_1 und c_2 Elemente der Kommutatorgruppe $F^{(2)}$ von F sind. Es genügt für das Folgende anzunehmen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{7}$$

ist, und ebenso die entsprechende Determinante für den Fall von mehr als zwei Erzeugenden. (Diese Beschränkung ist nicht notwendig, doch lassen sich die dieser Beschränkung entsprechend enger formulierten Sätze einfacher aussprechen.)

Um nun die Wirkung der vorliegenden Abbildung auf $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ zu untersuchen, berücksichtige man, daß die Entwicklungen von a' und b' bis zu Gliedern erster Dimension die Form haben:

$$a' = 1 + u_1 s + v_1 t + \ldots, \qquad b' = 1 + u_2 s + v_2 t + \ldots.$$

Ersetzt man in einem Element $f^{(n)}$ von $F^{(n)}$ a und b durch a' und b', so erhält man die Glieder n-ter Dimension des Elementes $f'^{(n)}$, in das $f^{(n)}$ bei der Abbildung übergeht, indem man in den Gliedern n-ter Dimension von $f^{(n)}$ s und t durch $u_1 s + v_1 t$ und $u_2 s + v_2 t$ ersetzt (vgl. Beweis zu Satz IV). Nun sind nach Satz III und IVa die Glieder n-ter Dimension Linearkombinationen der „Differenzen n-ter Ordnung", und es tritt auch jede Differenz n-ter Ordnung wirklich als Glied n-ter Dimension auf (und, eventuell, eine rationales Vielfaches mit durch die Größe von n beschränktem Nenner δ_n (Satz IV), wobei die Koeffizienten der Potenzprodukte in diesem rationalen Vielfachen immer noch ganze Zahlen sein müssen). $f'^{(n)}$ ist folglich ebenfalls eine Linearkombination der Differenzen n-ter Ordnung, und diese erfahren mithin beim Übergang von a, b zu a', b' eine lineare Substitution (welche eben die Abbildung von $F^n/F^{(n+1)}$ auf sich beschreibt). Die Koeffizienten dieser linearen Substitution sind homogene Funktionen n-ten Grades in $u_1. v_1$; u_2, v_2; die Substitution heiße $S^{(n)}(u, v)$.

Sind r_n, aber nicht $r_n + 1$, unter den Differenzen n-ter Ordnung linear unabhängig, so erfährt das einem System von r_n linear unabhängigen n-ten Differenzen vermöge (6) und (6a) zugeordnete System von Multilinearformen

$$L_\varrho^{(n)}(\alpha_i, \beta_i) \quad [\varrho = 1, 2, \ldots, r_n;\ i = 1, 2, \ldots, n],$$

welche linear und homogen in den n Variablenreihen α_i, β_i und mithin insgesamt vom n-ten Grade sind, unter der Einwirkung von $S^{(n)}(u, v)$ (aufgefaßt als Substitution dieser Formen) eine lineare Transformation, welche man dadurch erhält, daß man die α_i, β_i kogredient der linearen Substitution

$$\alpha_i = u_1 \alpha_i' + v_1 \beta_i',$$
$$\beta_i = u_2 \alpha_i' + v_2 \beta_i'$$

unterwirft. Es ist übrigens leicht auch durch direkte Betrachtung der $L_\varrho^{(n)}$ zu erkennen, daß diese bei kogredienter Transformation der α_i, β_i (sogar mit einer beliebigen unimodularen Substitution) sich linear substituieren müssen, daß also die $L_\varrho^{(n)}$ oder, was auf dasselbe herauskommt, die zu ihnen gehörigen Tensoren n-ter Stufe einen Darstellungsraum für die volle Gruppe der unimodularen Substitutionen (im vorliegenden Falle von zwei Variablen) bilden. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Darstellungsraum im allgemeinen nicht nur reduzibel ist, sondern auch sogleich in halbreduzierte Form gebracht werden kann, wenn man ausschließlich Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten der $L_\varrho^{(n)}$ bzw. der oben erwähnten rationalen Vielfachen von diesen als erlaubte neue „Basisvektoren" des Darstellungsraumes zuläßt. Denn ist $n = n_1 + n_2$, so liegen die Kommutatoren zweier Elemente aus $F^{(n_1)}$ und $F^{(n_2)}$ in $F^{(n)}$, aber im allgemeinen nicht alle in $F^{(n+1)}$, und die zugeordneten Glieder n-ter Dimension aller solcher Kommutatoren müssen einen invarianten Teilraum des Raumes aller $L_\varrho^{(n)}$ erzeugen. Jedenfalls ist jeder solche invariante Teilraum (und damit auch die Anzahl seiner Dimensionen) für F charakteristisch.

Die oben angestellten Betrachtungen können nun auf die Untersuchung der Automorphismen einer beliebigen Gruppe G angewandt werden. Um einfach auszusprechende Resultate zu erhalten, sollen indessen die folgenden Annahmen gemacht werden: G sei Gruppe von endlich vielen, etwa k, Erzeugenden und die Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe sei die Abelsche Gruppe von k unabhängigen Erzeugenden unendlicher Ordnung. Das Verfahren liefert aber im allgemeinen auch sonst Resultate, ausgenommen, wenn G mit seiner Kommutatorgruppe identisch ist.

F sei die freie Gruppe von k Erzeugenden. G ist Faktorgruppe von F und kann definiert werden, indem man zwischen den Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von F irgendwelche Relationen

$$R_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots)$$

ansetzt. $R_\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sind dabei Elemente aus F, die in $F \neq 1$ sein sollen und nach Voraussetzung in $G^{(2)}$ liegen sollen. Jedem Automorphismus von G entspricht eindeutig ein solcher von $G/G^{(2)}$, der mithin durch eine ganzzahlige Matrix (u_{il}) von k Zeilen und Spalten mit einer Determinante ± 1 eindeutig charakterisiert wird. Diese Matrizen bilden bei Multiplikation eine Gruppe, welche „*die G zugeordnete lineare Gruppe*" $\mathfrak{L}_G$ heißen möge. $\mathfrak{L}_F$ ist nach J. Nielsen[11]) die volle Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen von k Variablen mit der Determinante ± 1. Es soll nun gezeigt werden, daß $\mathfrak{L}_G$ „im allgemeinen" eine echte Untergruppe von $\mathfrak{L}_F$ sein muß. Dazu betrachte man die kleinste Zahl n derart, daß mindestens ein Element R_σ in $F^{(n)}$, aber nicht in $F^{(n+1)}$ liegt. Eine solche Zahl muß nach dem am Schluß von § 2 Bemerkten existieren, da sonst alle R_σ in F gleich Eins wären. Den „Differenzen n-ter Ordnung" von k assoziativen nicht kommutativen Größen sind dann (wie oben für $k = 2$) eine gewisse Anzahl r_n von Multilinearformen $L_\varrho^{(n)}$, linear und homogen in n Reihen von k Variablen, (oder auch Tensoren n-ter Stufe in k Variablen) zugeordnet, und diese liefern bei kogredienter linearer Transformation der Variablensysteme eine Darstellung von $\mathfrak{L}_F$ und mithin auch von $\mathfrak{L}_G$. Die gemäß (3), § 2 in Reihen entwickelten R_σ besitzen zum Teil von Null verschiedene Glieder n-ter Dimension, und diesen sind vermöge (6) und (6a) von § 2 gewisse Linearkombinationen $\Lambda_\tau(L_\varrho^{(n)})$ der $L_\varrho^{(n)}$ zugeordnet (wobei τ endlich viele Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots$ durchläuft). Nun gilt der Satz:

VII. *Die G zugeordnete lineare Gruppe ist notwendig in der Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{L}_F$ aller ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 enthalten, welche aus denjenigen Substitutionen von $\mathfrak{L}_F$ besteht, die bei Darstellung von $\mathfrak{L}_F$ im Raume der Tensoren $L_\varrho^{(n)}$ den von den Linearkombinationen $\Lambda_\tau(L_\varrho^{(n)})$ aufgespannten Teilraum in sich überführen.*

Beweis: Jeder Automorphismus von $G = F/J$ kann aufgefaßt werden als homomorphe Abbildung von F auf einen Teil von sich, wobei Elemente der invarianten Untergruppe J wieder in solche übergehen. Denn jeder Automorphismus von G läßt sich dadurch charakterisieren, daß man Potenzprodukte der a_i angibt, in welche diese bei dem Automorphismus übergehen. Diese Potenzprodukte sind natürlich

---

11) Math. Annalen 79 (1919), S. 269—272.

nicht eindeutig, sondern nur bis auf beliebige Elemente von J bestimmt. Aber da J nach Voraussetzung in $F^{(n)}$ mit $n \geqq 2$ liegt, ist jedenfalls die der Determinante (7) entsprechende k-reihige Determinante $= \pm 1$. Bezeichnet man die kleinste, J und $F^{(n+1)}$ enthaltende Untergruppe von F mit H, so geht bei jeder Abbildung von F auf einen Teil von F, welche zu einem Automorphismus von G gehört, jedes Element von H wieder in ein solches über. Jeder Automorphismus von G definiert folglich eine homomorphe Abbildung von H und somit auch eine solche von $H/F^{(n+1)}$ auf sich. $H/F^{(n+1)}$ ist aber nun gerade der von den Linearformen $\Lambda_\tau(L_\varrho^{(n)})$ aufgespannte Teilraum von $F^{(n)}/F^{(n+1)}$, d. h. des Raumes der $L_\varrho^{(n)}$. Dieser muß folglich bei einer Substitution der G zugeordneten linearen Gruppe in sich übergehen.

Offenbar sagt Satz VII „im allgemeinen“ wirklich aus, daß die G zugeordnete lineare Gruppe nicht die volle Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 ist. Dies läßt sich besonders deutlich für den Fall, daß G nur eine definierende Relation besitzt, etwa so ausdrücken:

VII a. *Ist G eine Gruppe von k Erzeugenden mit einer definierenden Relation $R(a_1, \ldots, a_k) = 1$, und ist R, als Element der freien von $a_1, \ldots, a_k$ erzeugten Gruppe F betrachtet, in $F^{(n)}$ $(n > 1)$ aber nicht in $F^{(n+1)}$ gelegen, so ist das Folgende notwendige Bedingung dafür, daß die G zugeordnete lineare Gruppe die volle Gruppe $\mathfrak{L}_F$ der ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 von k Variablen ist: Bei Darstellung von $\mathfrak{L}_F$ im Raume der Tensoren $L_\varrho^{(n)}$ n-ter Stufe muß der den Gliedern n-ter Dimension in der Entwicklung von R zugeordnete Tensor invariant sein. Nach allgemeinen Sätzen über die Darstellungen der linearen Gruppe ist dies höchstens dann möglich, wenn n ein Vielfaches von k ist; für $k = 2$ bzw. $k = 3$ lassen sich außerdem durch direkte Rechnung noch die Bedingungen $k \neq 4$ bzw. $k \geqq 6$ ableiten.*

Zu beweisen ist hiervon, nachdem VII bewiesen ist, nur noch die Behauptung, daß n ein Vielfaches von k ist. Das folgt daraus, daß der Raum der Tensoren $L_\varrho^{(n)}$ ein Teilraum desjenigen Darstellungsraumes der vollen Gruppe aller unimodularen (nicht notwendig ganzzahligen) Substitutionen ist, den man erhält, wenn man die ursprüngliche Darstellung der vollen linearen Gruppe in k Variablen n mal mit sich selber multipliziert (vermittelst der Kroneckerschen Produkttransformation). In diesem Darstellungsraum treten aber nur dann Fixelemente auf, wenn n ein Vielfaches von k ist. Es ist leicht einzusehen, daß eine Invariante der Gruppe $\mathfrak{L}_F$ der ganzzahligen Substitutionen zugleich eine solche der vollen linearen Gruppe sein muß, und damit ist Satz VII a bewiesen.

Es ist klar, daß das hier vorgeführte Verfahren auch dazu dienen kann, um notwendige Bedingungen für die Isomorphie zweier Gruppen abzuleiten. Im einfachsten Falle, wenn zwei Gruppen G_1 und G_2 mit nur einer definierenden Relation vorgelegt sind, müssen die linken Seiten der Relationen, als Elemente der zugehörigen freien Gruppen betrachtet, bei Entwicklung gemäß (3), § 2 mit Gliedern der gleichen Dimension n beginnen, und die diesen Gliedern zugeordneten Tensoren n-ter Stufe müssen sich, falls $n > 1$ ist, durch eine Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante ± 1 ineinander überführen lassen, bis auf einen Faktor ± 1, da eine Form und ihr Negatives dasselbe System von ganzzahligen Vielfachen besitzen.

§ 4.

Beispiele.

a) Für zwei Erzeugende a, b und $n = 5$ lassen sich als Basis für die 5-ten Differenzen die folgenden Ausdrücke wählen (in denen $\varDelta = st - ts$ gesetzt ist):

$$s^3 \varDelta - 3 s^2 \varDelta s + 3 s \varDelta s^2 - \varDelta s^3,$$
$$t^3 \varDelta - 3 t^2 \varDelta t + 3 t \varDelta t^2 - \varDelta t^3,$$
$$t s^2 \varDelta - 2 t s \varDelta t + t \varDelta s^2 - s^2 \varDelta t + 2 s \varDelta s t - \varDelta s^2 t,$$
$$s t^2 \varDelta - 2 s t \varDelta t + s \varDelta t^2 - t^2 \varDelta s + 2 t \varDelta t s - \varDelta t^2 s,$$
$$s \varDelta^2 - 2 \varDelta s \varDelta + \varDelta^2 s = (s \varDelta - \varDelta s) \varDelta - \varDelta (s \varDelta - \varDelta s),$$
$$t \varDelta^2 - 2 \varDelta t \varDelta + \varDelta^2 t = (t \varDelta - \varDelta t) \varDelta - \varDelta (t \varDelta - \varDelta t).$$

Die beiden letzten werden unter sich transformiert, (sie entsprechen Kommutatoren von Elementen aus $F^{(3)}$ und $F^{(2)}$), wenn man s und t einer linearen Substitution unterwirft. Das gleiche gilt natürlich in entsprechender Weise für die zugehörigen Formen. Außer $\varDelta$ tritt erst für $n = 6$ wieder eine Invariante auf, nämlich

$$(x \varDelta - \varDelta x)(y \varDelta - \varDelta y) - (y \varDelta - \varDelta y)(x \varDelta - \varDelta x).$$

b) Ein Automorphismus der Fundamentalgruppe G einer geschlossenen zweiseitigen Fläche vom Geschlecht p bestimmt im wesentlichen, d. h. abgesehen von inneren Automorphismen, eine Klasse von Abbildungen der Fläche auf sich. Die der Automorphismengruppe zugeordnete lineare Gruppe besitzt gleichfalls eine Bedeutung; sie[12]) ist die Gruppe der

[12]) Genauer: die in ihr enthaltene Untergruppe vom Index 2, bestehend aus den Substitutionen, die zu Automorphismen gehören, deren zugeordnete Abbildungsklassen solche mit Erhaltung der Orientierung der Fläche sind.

Transformationen der Perioden der Abelschen Integrale erster Gattung, welche zu einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht p gehören. Es ist nun wohlbekannt, daß die Gruppe nicht die Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen in $2p$ Variablen mit der Determinante ± 1 ist, sondern eine Untergruppe derselben, bestehend aus denjenigen Substitutionen, die eine gewisse Bilinearform in sich überführen. Diese Tatsache läßt sich mit Hilfe des oben entwickelten Verfahrens etwa so ableiten: Es sei etwa $p = 2$; a_1, a_2, a_3, a_4 seien die Erzeugenden,

$$a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} a_3 a_4 a_3^{-1} a_4^{-1} = 1$$

sei die definierende Relation von G. Die linke Seite derselben besitzt, aufgefaßt als Element der von a_1, a_2, a_3, a_4 erzeugten freien Gruppe, eine Entwicklung, deren Glieder bis zur zweiten Dimension einschließlich lauten:

$$1 + s_1 s_2 - s_2 s_1 + s_3 s_4 - s_4 s_3 + \ldots,$$

wobei $a_i = 1 + s_i$ gesetzt ist; die zu den Gliedern zweiter Ordnung gehörige Bilinearform ist

$$\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} - \alpha_2^{(1)} \alpha_1^{(2)} + \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(2)} - \alpha_4^{(1)} \alpha_3^{(2)},$$

wobei den a_ι die Parameter $\alpha_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ zugeordnet sind, entsprechend dem im zweiten Teil von § 2 beschriebenen Verfahren. Alle Substitutionen der G zugeordneten linearen Gruppe müssen also nach VIIa die Eigenschaft haben, diese Bilinearform in ein Vielfaches von sich überzuführen[13]), wenn man die Substitution gleichzeitig auf $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_3^{(1)}, \alpha_4^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_4^{(2)}$ anwendet. Daß umgekehrt jede solche Substitution wirklich in der G zugeordneten linearen Gruppe auftritt, bedarf eines besonderen Beweises, der in der bekannten Weise zu erbringen ist[14]). — Gewöhnlich wird das eben abgeleitete Resultat mit Hilfe von Schnittzahlen von Kurven auf der Fläche bewiesen.

c) Irgend zwei Gruppen G_1 und G_2 von k Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ und mit den einzigen definierenden Relationen

$$T_1 R T_1^{-1} T_2 R T_2^{-1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \Theta_1 R \Theta_1^{-1} \Theta_2 R \Theta_2^{-1} \Theta_3 R \Theta_3^{-1} = 1$$

können nicht isomorph sein, wenn $T_1, T_2, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, R$ beliebige Ausdrücke in den a_i bedeuten, von denen jedoch R nicht schon als Element

[13]) D. h., da die Transformationsdeterminante ± 1 ist, in sich oder in ihr negatives. Letzteres bedeutet eine Umkehrung der Orientierung der Fläche.

[14]) Siehe etwa H. Burkhardt, Math. Annalen **35** (1890), S. 209 ff. Clebsch-Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866, § 85.

der freien, von den a_i erzeugten Gruppe F betrachtet, gleich Eins sein soll.

Beweis. R liege in $F^{(n)}$. Man darf $n > 1$ annehmen, da der Satz sonst trivial ist. Ist $L^{(n)}$ die R zugeordnete Multilinearform, so müssen sich die Formen $2L^{(n)}$ und $\pm 3L^{(n)}$ durch eine ganzzahlige Substitution der Determinante ± 1 ineinander transformieren lassen. d sei der größte gemeinsame Teiler der (ganzzahligen!) Koeffizienten von $L^{(n)}$. Ließe sich $2L^{(n)}$ in $\pm 3L^{(n)}$ transformieren, so müßte dies auch modulo $2d$ möglich sein. Modulo $2d$ ist aber $2L^{(n)} \equiv 0$, nicht aber $\pm 3L^{(n)}$.

§ 5.

Über ein Problem von H. Hopf.

H. Hopf hat die Frage aufgeworfen[15]), ob eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden mit einer ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein kann. Falls diese Frage zu verneinen ist, wäre eine von der in hohem Maße willkürlichen Wahl der Erzeugenden unabhängige Eigenschaft (etwa im Sinne eines abgeschwächten „Teilerkettensatzes") der mit Hilfe von endlich vielen Erzeugenden definierbaren Gruppen gefunden, und diese Eigenschaft würde zugleich eine Rechtfertigung für die bevorzugte Stellung dieser Gruppen liefern.

Daß eine endliche Gruppe oder eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis nicht mit einer ihrer echten Faktorgruppen isomorph sein kann, ist trivial. Merkwürdigerweise enthält das Problem aber schon für freie Gruppen Schwierigkeiten. Eine Lösung für diese ist implizit in einem Satz von F. Levi[7]) enthalten. Das in den Paragraphen 2, 3 entwickelte Verfahren liefert einen ebenfalls sehr einfachen Beweis des Satzes.

VIII. *Eine freie Gruppe von endlich vielen Erzeugenden ist mit keiner ihrer echten Faktorgruppen (einstufig) isomorph.*

Beweis. a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ seien freie Erzeugende der freien Gruppe F. Eine beliebige Faktorgruppe G von F erhält man durch Hinzufügung endlich oder unendlich vieler Relationen

$$R_\sigma(a_1, \ldots, a_k) = 1 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots),$$

wobei die R_σ vom Einheitselement von F verschiedene Elemente bedeuten mögen, da andernfalls G keine echte Faktorgruppe von F zu sein brauchte. Wenn F und G isomorph wären, müßte für jedes n $F^{(n)}/F^{(n+1)} \cong G^{(n)}/G^{(n+1)}$ sein, wobei $G^{(n)}$ wie zu Beginn von § 3 definiert ist. n werde nun so gewählt, daß alle Ausdrücke R_σ zwar in $F^{(n)}$, aber nicht alle in $F^{(n+1)}$ liegen.

[15]) Nach einer Mitteilung von Herrn B. Neumann.

Das muß nach dem am Schluß von § 2 Gesagten möglich sein. Setzt man wie in § 3 $G = F/J$, so ist also der Durchschnitt von $F^{(n)}$ und J nicht ganz in $F^{(n+1)}$ enthalten. Nach der Definition von $G^{(n)}$ ist $G^{(n)}/G^{(n+1)}$, folglich echte Faktorgruppe von $F^{(n)}/F^{(n+1)}$, und da diese eine Abelsche Gruppe mit endlicher Basis ist, ist Satz VIII bewiesen.

§ 6.

Bemerkungen über Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

W. Burnside[3]) hat gezeigt: Eine endliche Gruppe G ist dann und nur dann direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung, wenn die Reihe der in § 1 definierten Gruppen G_n mit dem Einheitselement abbricht. Infolge der engen Verwandtschaft (wahrscheinlich: der Identität) der Gruppen G_n mit den zu Beginn von § 3 definierten Gruppen $G^{(n)}$ wird man vermuten, daß der Satz gilt:

IX. *Eine endliche Gruppe G ist dann und nur dann direktes Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung, wenn die Reihe der Gruppen $G^{(n)}$ mit dem Einheitselement abbricht.*

Nach Satz III ist G_n in $G^{(n)}$ enthalten. Es ist also nur noch zu zeigen, daß für Gruppen von Primzahlpotenzordnung die Reihe der $G^{(n)}$ mit dem Einheitselement schließt. Dazu genügt es zu zeigen, daß G Faktorgruppe einer anderen Gruppe $\overline{G}$ ist, welche diese Eigenschaft besitzt. Nun läßt sich nachweisen[16]), daß G Faktorgruppe einer Gruppe $\overline{G}$ ist, welche eine Darstellung durch endliche Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten gestattet, derart, daß unter der Hauptdiagonale in diesen Matrizen nur Nullen und in der Hauptdiagonale nur Einsen stehen. Man nehme ein System $x_1, x_2, \ldots, x_k$ von endlich vielen Erzeugenden[17]) von $\overline{G}$; die zugeordneten Matrizen von n Reihen seien $1 + X_1$, $1 + X_2, \ldots, 1 + X_k$, wobei 1 die Einheitsmatrix bedeutet. Dann wird, falls die X_i n-reihige Matrizen sind,

$$(1 + X_i)^{-1} = 1 - X_i + \ldots + (-1)^{n-1} X_i^{n-1},$$

und jedes Produkt aus n gleichen oder verschiedenen Faktoren X_i wird gleich Null. Damit ist den Erzeugenden x_i, ihren Reziproken und allgemein den Elementen von $\overline{G}$ eine Entwicklung zugeordnet, wie man sie aus der Entwicklung nach Art von (1), (3), § 2 durch Fortlassen der Glieder n-ter und höherer Dimension erhält. Ist F die freie Gruppe von k Erzeugenden, so ist also jedem Element von $F/F^{(n)}$ ein-

[16]) Siehe Magnus, „Über n-dimensionale Gittertransformationen", Acta Mathematica **64** (1934), S. 364.

[17]) Daß ein solches stets existiert, ist leicht einzusehen. Siehe l. c. [16]).

deutig (natürlich im allgemeinen nicht umkehrbar eindeutig) ein Element von $\overline{G}$ zugeordnet. $\overline{G}$ ist also Faktorgruppe von $F/F^{(n)}$, und damit auch G. — Es ist anzumerken, daß dabei n im allgemeinen nicht die kleinste Zahl ist, für die $G^{(n)} = 1$ ist, aber das ist unwesentlich.

Es lassen sich nun in sehr einfacher Weise eine Reihe von Sätzen ableiten, die man aus den von P. Hall[4]) für Gruppen von Primzahlpotenzordnung bewiesenen Sätzen erhält, indem man in denselben statt der Gruppen G_n der „lower central series" die Gruppen $G^{(n)}$ einsetzt. Das gilt insbesondere von den Theoremen 2. 54, 2. 55, 4. 1 von Hall. Die Beweise beruhen auf den leicht nachzuweisenden Tatsachen, daß erstens (in der Bezeichnungsweise von § 2) die Dimension des Kommutators zweier Elemente mindestens gleich der Summe der Dimensionen der Elemente ist, und daß zweitens ein Element der Dimension d, wenn man in ihm die Erzeugenden durch Elemente der Dimension d' ersetzt, in ein Element von einer Dimension $\geqq d\,d'$ übergeht.

Zum Schluß möge noch mit Hilfe des in § 2 entwickelten Verfahrens gezeigt werden (vgl. die Einleitung):

X. *Zu jeder ganzen Zahl N gibt es eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von 3 ist, deren N-te Ableitung nicht das Einheitselement ist, und für die die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe die Abelsche Gruppe vom Typ* (3, 3, 3) *ist.*

Dabei ist unter der ersten Ableitung einer Gruppe wie üblich ihre Kommutatorgruppe, und unter der k-ten Ableitung allgemein die Kommutatorgruppe der $(k-1)$-ten zu verstehen. Es soll nun eine Gruppe der in X genannten Art folgendermaßen konstruiert werden. Man gehe aus von der freien Gruppe F von drei Erzeugenden a, b, c. Diesen ordne man wie zu Beginn von § 2 Elemente $1 + r$, $1 + s$, $1 + t$ aus einem von $1, r, s, t$ erzeugten assoziativen Ringe $\mathfrak{R}$ zu. Sodann nehme man die Elemente von $\mathfrak{R}$ modulo dem kleinsten zweiseitigen Ideal $\mathfrak{I}$, das alle Produkte aus r, s, t von höherer als der 2^N-ten Dimension, die Zahl 3 und die Elemente r^3, s^3, t^3 enthält. Der Restklassenring $\mathfrak{R}^*$ nach diesem Ideal enthält ersichtlich nur endlich viele Elemente. Jedem Element von F ist eindeutig ein Element $\neq 0$ von $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet, und die verschiedenen unter diesen bilden bei Multiplikation mithin eine endliche Faktorgruppe G von F. Es soll gezeigt werden, daß G die Forderungen von Satz X erfüllt. Zunächst ist die Ordnung von G eine Potenz von 3. Denn spätestens die $3^{(2^N+1)}$-te Potenz von einem beliebigen Element aus $\mathfrak{R}$, das die Form „$1 +$ Glieder höherer Dimension" besitzt, ist in $\mathfrak{I}$ enthalten. Fernerhin ist den dritten Potenzen von a, b, c (aber keiner niedrigeren Potenz) das Einheitselement von $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet, so daß der Index der Kommutatorgruppe höchstens 27 sein kann. Nimmt man zu $\mathfrak{J}$ alle Elemente von $\mathfrak{R}$ von höherer als der ersten Dimension hinzu, so wird in dem zugehörigen Restklassenring von $\mathfrak{R}$ jedem Element von G ein Element der Form $1 + \alpha r + \beta s + \gamma t$ mit $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$ zugeordnet, so daß G also eine Abelsche Faktorgruppe vom Typ (3, 3, 3) besitzt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die N-te Ableitung $D^N(G)$ nicht nur aus dem Einheitselement besteht. Das wird gezeigt, indem direkt Elemente von G konstruiert werden, die in $D^N(G)$ liegen müssen und ungleich 1 sind. Dazu führe man die folgenden Bezeichnungen ein:

$$a b a^{-1} b^{-1} = c_1, \quad a c a^{-1} c^{-1} = b_1, \quad b c b^{-1} c^{-1} = a_1,$$

und allgemein

$$a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = c_{i+1}, \quad a_i c_i a_i^{-1} c_i^{-1} = b_{i+1}, \quad b_i c_i b_i^{-1} c_i^{-1} = a_{i+1}$$

für $i = 1, 2, \ldots$.

Es ist klar, daß a_N, b_N, c_N in $D^N(G)$ liegen. Weiterhin ist klar, daß den a_i, b_i, c_i Entwicklungen in $\mathfrak{R}^*$ zugeordnet sind, die mit Gliedern der Dimension 2^i beginnen, und zwar gilt rekursiv: Beginnt (abgesehen vom Einheitselement) die Entwicklung von a_i, b_i, c_i mit den Gliedern r_i, s_i, t_i der 2^i-ten Dimension, so beginnen die Entwicklungen von a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1} mit den Gliedern

$$r_{i+1} = s_i t_i - t_i s_i, \quad s_{i+1} = r_i t_i - t_i r_i, \quad t_{i+1} = r_i s_i - s_i r_i.$$

Es ist nun zu beweisen, daß für $i \leqq N$ sämtliche r_i, s_i, t_i von Null verschiedene Elemente von $\mathfrak{R}^*$ sind. Dazu genügt es zu zeigen, daß die r_i, s_i, t_i Summen von verschiedenen Potenzprodukten von r, s, t sind, derart, daß in keinem Potenzprodukt ein Faktor r^3, s^3 oder t^3 enthalten ist, und keiner der Koeffizienten der Potenzprodukte durch drei teilbar ist.

Zunächst ist klar, daß irgendein aus den sechs Ausdrücken st, ts, rt, tr, rs, sr gebildetes Potenzprodukt niemals einen Faktor r^3, s^3 oder t^3 enthalten kann. Weiterhin ist klar: Sind $P_1, P_2, \ldots, P_h$ irgend h verschiedene[18]) Potenzprodukte aus r, s, t von derselben Dimension, so sind auch die $(h-1)\,h$ Potenzprodukte $P_i P_k$ mit $i \neq k$ voneinander verschieden[18]). Denn aus $P_i P_k = P_l P_m$ folgt $P_i = P_l$ und $P_k = P_m$. Daraus folgt erstens, daß in den r_i, s_i, t_i keine Potenzprodukte auftreten, die einen Faktor r^3, s^3, t^3 enthalten, da die in r_i, s_i, t_i auftretenden Potenzprodukte zugleich solche in st, ts, ... sind. Weiterhin folgt: r_i, s_i, t_i sind Summen von je $2^{(2^i-1)}$ Potenzprodukten der Dimension 2^i in r, s, t, wobei als Koeffizienten dieser Potenzprodukte nur die Zahlen ± 1 auftreten und die in r_i (bzw. s_i oder t_i) auftretenden Potenzprodukte

[18]) Gemeint ist: formal verschiedene, das heißt solche, die in $\mathfrak{R}$ voneinander verschieden sind.

sowohl untereinander als auch von den in s_i und t_i (bzw. r_i und t_i oder r_i und s_i) auftretenden Potenzprodukten verschieden sind. Denn für $i = 1$ ist diese Behauptung richtig; ist sie für irgendein $i \geqq 1$ bewiesen, und ist also

$$r_i = \sum_{k=1}^{2(2^i-1)} \pm R_k, \quad s_i = \sum_{k=1}^{2(2^i-1)} \pm S_k, \quad t_i = \sum_{k=1}^{2(2^i-1)} \pm T_k,$$

wobei R_k, S_k, T_k verschiedene Potenzprodukte der 2^i-ten Dimension sind, so wird zum Beispiel

$$r_{i+1} = \sum_{k,\, l=1}^{2(2^i-1)} \pm (S_k T_l - T_l S_k),$$

und hieraus erhellt die Gültigkeit des Satzes auch für $i + 1$. Damit ist nachgewiesen, daß für $i \leqq N$ die r_i, s_i, t_i in $\mathfrak{R}^*$ nicht gleich Null sind, und folglich enthält die N-te Ableitung von G Elemente, die vom Einheitselement verschieden sind.

(Eingegangen am 23. 10. 1934.)