La Transversalite Topologique

A. Marin

The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 106, No. 2 (Sep., 1977), 269-293.

Stable URL:
http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X%28197709%292%3A106%3A2%3C269%3ALTT%3E2.0.CO%3B2-H

The Annals of Mathematics is currently published by Annals of Mathematics.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at http://uk.jstor.org/about/terms.html. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at http://uk.jstor.org/journals/annals.html.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is an independent not-for-profit organization dedicated to creating and preserving a digital archive of scholarly journals. For more information regarding JSTOR, please contact support@jstor.org.

http://uk.jstor.org/
Wed Nov 2 02:08:41 2005

Annals of Mathematics, **106** (1977), 269-293

La transversalité topologique

Par A. MARIN

Hudson a noté en [Hu-1] une différence essentielle entre la catégorie des variétés différentiables d'une part et celles des variétés linéaires par morceaux ou topologiques d'autre part; dans ces deux dernières catégories, on ne peut pas rendre localement transverses, de façon relative, deux sous-variétés d'une variété ambiante donnée. Pour donner une théorie satisfaisante de la transversalité dans le domaine linéaire par morceaux, Rourke et Sanderson avaient déjà introduit leurs désormais célèbres fibrés en blocs ([RS-4]) qui leur ont permis plus tard ([RS-1]) de construire une machine semi-simpliciale éclairant l'exemple d'Hudson et prouvant que la théorie qu'ils avaient dévoilée est essentiellement "la seule possible."

Dans le domaine topologique, Kirby et Siebenmann établissent un théorème de transversalité relatif pour la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal à l'une des deux sous-variétés ([KS-1, § 1]); malheureusement les microfibrés normaux n'existent souvent que stablement.

Ici nous proposons, dans le cas de deux sous-variétés topologiques de codimension strictement supérieure à deux, la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable à l'une des deux sous-variétés. Cette notion semble plus maniable que celle de "neighborhood transversality" suggérée par Rourke et Sanderson en [RS-2] (bien qu'elle lui soit en fait équivalente) et permet de prouver un théorème de transversalité relatif. Un théorème de transversalité à la Thom, pour les applications continues, découle ensuite par un procédé connu.

Nous relions notre notion de transversalité à celle de Kirby et Siebenmann: si deux variétés sont transverses en notre sens et si la variété intersection admet un microfibré normal dans l'une des deux sous-variétés, alors cette dernière est transverse vis-à-vis d'un microfibré normal à l'autre.* Ce théorème du microfibré normal ambiant permet d'établir (et ce de façon relative) la symétrie (pour les deux sous-variétés) de la notion de transversalité vis-à-vis d'un microfibré normal stable.

Dans un appendice, nous étudions les obstructions à ce qu'une situation

* Défini seulement prés de l'intersection, ce fibré prolonge le fibré normal donné.

de transversalité locale soit transverse vis-à-vis d'un microfibré normal stable. Nous obtenons des réponses analogues à celles données par Rourke et Sanderson en [RS-1] dans le cas linéaire par morceaux où, bien entendu, G/PL est remplacé par G/TOP.

En codimension inférieure ou égale à deux (avec peut-être des exceptions en dimension quatre), il y a existence et unicité des microfibrés normaux selon [KS-2], donc le théorème de Kirby et Siebenmann peut être utilisé. Un complément à [KS-2] (donné dans l'Appendice E) fournira un théorème de symétrie dans le cas où l'une des sous-variétés est de codimension $\leqq 2$, et l'autre sous-variété est de codimension $\geqq 3$. (Transversalité à la sous-variété de codimension $\leqq 2$ doit être entendu au sens de Kirby et Siebenmann.)

On sait donc répondre aux problèmes de transversalité topologique sauf pour quelques cas où intervient la dimension quatre, à savoir les valeurs suivantes de

$$(w;\, m,\, n;\, m + n - w)\colon (w;\, m,\, n,;\, 4),$$
$$(4;\, m,\, n;\, m + n - w)\ (w;\, 4,\, w - 2;\, 2),\ (w;\, 4,\, w - 1;\, 3)$$

et bien sûr les valeurs obtenues en permuttant m et n (ici on envisage deux sous-variétés de dimensions m et n respectivement dans une variété de dimension w; voir les conventions ci-après).

Les ingrédients essentiels de ce travail comprennent bien sûr le théorème de transversalité de Kirby et Siebenmann (et donc le théorème de structure en produit). En plus interviennent le théorème de triangulation de R.T. Miller pour les plongements de polyèdres en codimension $\geqq 3$ ([E-2] et [KS-1, III App. B]), le théorème de Casson-Sullivan sur les plongements des équivalences d'homotopie en codimension $\geqq 3$ ([W-1, § 11]), et le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique dont nous donnons une nouvelle preuve s'appuyant sur la théorie des voisinages réguliers topologiques de R. Edwards.

Je remercie mon ami L. Guillou pour ses critiques pertinentes ainsi que L.C. Siebenmann de m'avoir suggéré le problème, d'avoir notablement simplifié la solution originale et surtout d'avoir accompagné l'élaboration de la forme définitive de ce travail d'un zèle et d'une obstination auxquels on doit la parution de cet article.

Tables des matières

Paragraphe
0. Quelques conventions 271
1. La transversalité stable 272
2. Les théorèmes auxiliaires 274
3. Preuve du théorème de transversalité 1.2 277
4. Preuve du lemme d'unicité 2.1 279

5. Preuves du premier théorème du microfibré ambiant 1.3 et du théorème de symétrie 1.4 282
6. Preuve du théorème de transversalité des applications 1.7 282
Appendice
A. Preuve du théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4 283
B. Preuve du théorème de stabilité 2.3 285
C. L'espace des germes transverses 287
D. La transversalité dans le cas $p=m+n-w\leqq 1$, $w\neq 4$ 289
E. Les microfibrés normaux respectant une sous-variété en codimension $\leqq 2$. Complément au théorème de symétrie 291
Références

0. Quelques conventions

M^m et N^n sont des sous-variétés localement plates d'une variété topologique sans bord W^w dotée d'une métrique. Les sous-variétés M et N sont *localement transverses* si le triple $(W; M, N)$ est, près de tout point de l'intersection $M \cap N$, homéomorphe au triple linéaire $(R^w; R^x \times R^p \times 0, 0 \times R^p \times R^y)$; en ce cas on note P l'intersection $M \cap N$.

Les stabilisées ${}_uW$, W_v *et* ${}_uW_v$ sont respectivement $R^u \times W$, $W \times R^v$ et $R^u \times W \times R^v$; au moyen des inclusions des tranches zéro, la variété W est sous-variété de ses stabilisées. Les entiers u et v sont choisis suffisament grands pour qu'il y ait existence et unicité de microfibrés normaux à M dans W_v et à N dans ${}_uW$.

Les lettres μ et ν désignent des germes près de P de microfibrés normaux à N dans W et à M dans W respectivement. Quant aux lettres ξ et η elles seront réservées à des germes près de P de microfibrés normaux stables à N dans ${}_uW$ et à M dans W_v respectivement. L'expression un microfibré défini près de C signifie un germe près de C de microfibré.

Rappelons qu'un microfibré μ normal à N dans W est une rétraction sur la variété N d'un voisinage de N dans la variété ambiante W qui soit une submersion (topologique) dont les fibres sont des sous-variétés. On le notera par abus de langage μ: $W \longrightarrow N$.

La figure et le tableau suivant aideront à fixer ces notations:

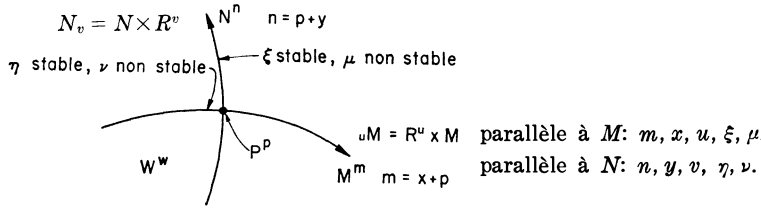

FIGURE 1

1. La transversalité stable

Définition 1.1. *La variété N est stablement transverse à la variété M en P pour η, noté $N \pitchfork M$ pour η, si:*

(i) Les variétés M et N sont localement transverses et $P = M \cap N$.

(ii) Près de P on a $N_v = \eta^{-1}(P)$.

La variété N est stablement transverse à la variété M s'il existe un microfibré normal stable η tel que $N \pitchfork M$ pour η; auquel cas nous dirons que *le microfibré η cale stablement la variété N.*

La variété N est transverse à la variété M pour ν, noté $N \pitchfork M$ pour ν si près de P on a

$$N = \nu^{-1}(P) .$$

Nous dirons en ce cas que *le microfibré ν cale la variété N.*

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ POUR LES SOUS-VARIÉTÉS 1.2. *Soit C un fermé de W tel que, près de C la variété N soit stablement transverse à M; soit D un autre fermé de W, soit V un voisinage de D dans W et soit $\varepsilon: W \longrightarrow [0, \infty]$ une fonction continue, positive sur D.*

Alors dès que $p = m + n - w \neq 4$, $w - m \geqq 3$ et $w - n \geqq 3$ il existe une ε-isotopie h_t, $0 \leqq t \leqq 1$, rel $C \cup (W - V)$ de l'identité de W à un h_1 tel que $h_1(N)$ soit stablement transverse à M près de $C \cup D$.*

Plus précisément si $N \pitchfork M$ pour η' près de C il existe un η égal à η' près de C tel que $h_1(N) \pitchfork M$ pour η près de $C \cup D$.

La preuve sera donnée au Paragraphe 3.

PREMIER THÉORÈME DU MICROFIBRÉ NORMAL AMBIANT 1.3. *Supposons $N \pitchfork M$ pour η; soit C un fermé de W et μ' un microfibré normal à N dans W défini près de C, tel que: près de C on ait $M \pitchfork N$ pour μ' et de plus les fibrés stables η et $\mu' \times (\mathrm{id} \mid R^v)$ commutent en tant que rétractions. Soit μ_0 un microfibré normal à P dans M qui étende la restriction de μ' à P.*

*Alors dès que $w - m \geqq 3$ et $w - n \geqq 3$ il existe un microfibré normal μ à N dans W** étendant μ' et μ_0 tel que l'on ait $M \pitchfork N$ pour μ et le fibré normal stable η est concordant relativement à C à un fibré η' qui commute avec $\mu \times (\mathrm{id} \mid R^v)$.*

La preuve occupera le Paragraphe 5, on en tirera aussi comme corollaire le

THÉORÈME DE SYMÉTRIE 1.4. *Dès que $w - m \geqq 3$ et $w - n \geqq 3$ la variété*

* "rel" signifie fixant un voisinage de.

** défini seulement près de $M \cap N$.

N est stablement transverse à M si et seulement si:

(1) *Les variétés M et N sont localement transverses, et*

(2) *Il existe près de P deux microfibrés normaux stables ${}_u\eta: {}_uW_v \to {}_uM$ et $\xi_v: {}_vW_v \to N_V$ qui commutent en tant que rétractions et vérifient:*

$$ {}_uM \pitchfork N_v \text{ pour } \xi_v \text{ et } N_v \pitchfork {}_uM \text{ pour } {}_u\eta \ . $$

Plus précisément:

a) *Si $N \pitchfork M$ pour η posons ${}_u\eta = (\mathrm{id} \mid R^u) \times \eta$. Supposons qu'un ξ'_v soit défini près d'un fermé C et y jouit avec ${}_u\eta$ des propritétés* (2). *Alors ξ'_v s'étend en un ξ_v défini près de tout N_v et jouissant avec ${}_u\eta$ des propriétés* (2).

b) *Soit C un fermé de W près duquel $\xi_v = \xi' \times (\mathrm{id} \mid R^v)$ où ξ' est un microfibré normal stable à N dans ${}_uW$, défini près de C. Alors il existe une concordance stable relative à C de ξ_v à $\xi \times (\mathrm{id} \mid R^v)$ où ξ étend ξ' et $M \pitchfork N$ pour ξ.*

Le lecteur pourra en déduire le:

SECOND THÉORÈME DU MICROFIBRÉ NORMAL AMBIANT 1.5. *Supposons $N \pitchfork M$ pour η; soit C un fermé de W et ν' un microfibré normal à M dans W, défini près de C et tel que: près de C on ait $N \pitchfork M$ pour ν' et $\eta = p \circ \nu'$ où $p: W_v \to W$ est la projection; soit ν_0 un microfibré normal à P dans N qui étende la restriction près de C de ν' à P.*

Alors dès que $w - m \geqq 3$ et $w - n \geqq 3$ il existe un microfibré normal ν à M dans W défini près de P, étendant ν' et ν_0, tel que $M \pitchfork N$ pour ν et il existe de plus une concordance stable relative à C de η à $p \circ \nu$.

Définition 1.6. Soit M une sous-variété localement plate d'une variété topologique W. Une application f d'une variété topologique N dans W est dite *stablement transverse à M* si:

(i) $f^{-1}(M)$ est une sous-variété localement plate de N.

(ii) L'application stabilisée $f \times (\mathrm{id} \mid R^v): N_v \to W_v$ est homotope, à travers des applications F_t telles que $F_t^{-1}(M) = f^{-1}(M)$, à un morphisme F_1 d'un microfibré normal stable à $f^{-1}(M)$ dans N_v vers un microfibré normal stable à M dans W_v. Remarquons que grâce à l'unicité à isotopie près des microfirés normaux stables (voir [Hi] et [KS-1, IV App. A]) cette définition est indépendante des microfibrés choisis. On peut bien sûr donner une définition plus "précise" (analogue à 1.1) où les microfibrés sont explicitement mentionnés. Le lecteur établira alors (s'il en éprouve le besoin) la forme "précise" du

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ DES APPLICATIONS 1.7. *Soit C un fermé*

de W au-dessus duquel l'application $f: N \to W$ soit stablement transverse à M. Soit D un autre fermé de W, soit V un voisinage de D et soit $\varepsilon: W \to [0, \infty]$ une fonction continue, positive sur D.*

Alors dés que $m + n - w \neq 4$ et $w - m \geqq 3$ il existe une ε-homotopie f_t, $0 \leqq t \leqq 1$, fixe au dessus de $C \cup (W - V)$, de f à un f_1 qui soit stablement transverse à M au dessus de $C \cup D$.

La preuve est reportée au Paragraphe 6.

2. Les théorèmes auxiliaires

Dans ce paragraphe nous énonçons les résultats nécessaires à la preuve, donnée au paragraphe suivant, du théorème de transversalité. Un des points de cette preuve est une "astuce d'échange" qui va nous faire inverser les rôles de M et N.

Afin de réduire au minimum les risques de torticolis dans les situations "inverties" les figures associées aux théorèmes auxiliaires satisferont toujours aux conventions de la Figure 1.

Le lemme suivant suffirait à prouver un théorème de transversalité si "P admettait un microfibré normal unique dans N." Nous l'appliquerons dans la variété stabilisée W_v. On peut le considérer comme un substitut de l'unicité des voisinages tubulaires DIFF.

LEMME D'UNICITÉ 2.1. *Pour $i = 0$ et $i = 1$ soit M_i une sous-variété de W avec fibré normal ν_i tel que N soit transverse à M_i pour ν_i en P et $\nu_0 \mid P = \nu_1 \mid P = \nu$. Soit C un fermé de P près duquel (M_0, ν_0) et (M_1, ν_1) soient égaux, soit D un autre fermé de P et V un voisinage de D dans W.*

*Alors dès que $m \geqq 5$ il existe une isotopie h_1 rel $C \cup (W - V)$ et fixant N de l'identité de W à un h_1 tel que, près de $C \cup D$ le transporté** de ν_0 par h_1 soit égal à ν_1 (et donc $M_1 = h_1(M_0)$).*

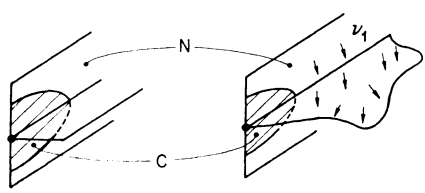

FIGURE 2

La preuve, qui consiste en une application répétée du théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique sera donnée au Paragraphe 4.

* "au dessus de C" signifie près de $f^{-1}(C)$.

** Par définition $h_1 \circ \nu_0 \circ h_1^{-1}$; on le note désormais $h_1(\nu_0)$.

Remarques 2.2. (1) Le lemme d'unicité ne sera utilisé, au Paragraphe 3, que sous sa forme absolue (on a énoncé la forme relative pour permettre une démonstration locale).

(2) L'intérêt du lemme d'unicité est de passer à côté du "théorème faux" suivant (voir Appendice C):

Si N_0 et N_1 sont stablement transverses à M en P et $N_0 = N_1$ près d'un fermé C il existe une isotopie h_t relative à C et fixant M telle que $h_1(N_0) = N_1$.

(3) Le fait que dans ce lemme la variété N soit laissée fixe facilitera la déstabilisation (voir § 3 et comparer avec l'Appendice C où un théorème de déstabilisation "de l'autre côté" devra être utilisé).

Quelques définitions. Un plongement $f\colon K \times I \to Q$ (K un espace topologique) vers une variété Q est *localement non-noué le long de* I, si pour tout point (x, t) de $K \times I$ il existe un voisinage $U_x \times V_t$ dans $K \times I$, une variété P_x contenant U_x et un plongement ouvert $F\colon P_x \times V_t \to Q$ qui prolonge $f \mid U_x \times V_t$ Remarquons qu'en ce cas $f^{-1}(\partial Q)$ est de la forme $K \times \{0, 1\} \cup L \times I$ où L est un fermé de K. Nous dirons que f *est une concordance entre les plongements* $f\mid\colon K \times 0 \to \partial Q$ *et* $f\mid\colon K \times 1 \to \partial Q$.

Dans le cas où $Q = M \times I$ et $K \subset M \times 0$, *la concordance* f *est relative à un fermé* C *de* K si f restreinte à un voisinage de $C \times I$ est en produit avec I.

Soit P une sous-variété de N, *un germe transverse à* N *en* P *dans* W est un germe autour de P de sous-variété de W localement transverse à N en P.

Nous dirons que *deux germes transverses* M_0 *et* M_1 *sont concordants* s'il existe une concordance $f\colon (N \cup M_0) \times I \to W \times I$ telle que $f \mid M_0 \times 0 \cup N \times I$ soit l'inclusion et $f(M_0 \times 1) = M_1 \times 1$.

Le théorème qui suit nous permettra de tirer dans la variété ambiante des conclusions analogues à celles que nous donne le lemme d'unicité dans la stabilisée W_v.

THÉORÈME DE STABILITÉ 2.3. *Soit* M *un germe transverse en* P *à la sous-variété stabilisée* N_v *dans* W_v. *Soit* C *un fermé de* W *tel que, près de* C, *la variété* M *soit germe transverse à* N *en* P *dans* W, *soit* D *un autre fermé de* W *et* V *un voisinage de* D *dans* W_v.

Alors, dès que $w - m \geqq 3$ *et* $w - n \geqq 3$, *il existe une concordance relative à* $(C \cap M) \cup (M - V)$ *de* M *à un* M' *qui, près de* $C \cup D$, *soit germe transverse à* N *en* P *dans* W.

Il y a un deuxième théorème de stabilité que l'on utilisera pour calculer l'espace des germes transverses dans l'Appendice C (Théorème B.3).

Le Théorème 2.3 (ainsi que l'analogue B.3) est un corollaire du théorème

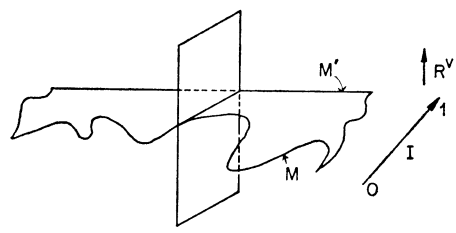

FIGURE 3

de Casson-Sullivan sur les plongements en codimension trois. Rourke et Sanderson prouvent dans le cas PL un théorème équivalent ([RS-1, § 3]). Nous donnerons une démonstration calquée sur celle de Rourke et Sanderson dans l'Appendice B.

Nous désignerons par K, soit une variété topologique, soit la réunion d'une variété et de l'un de ses germes transverses, soit plus généralement un polyèdre topologique non localement noué dans ∂Q, ce qui, selon Edwards [E-1], signifie que K est un fermé de ∂Q tel que pour tout x de K, il existe un voisinage (P_x, U_x) de x dans $(\partial Q, K)$ qui soit homéomorphe à (R^{q-1}, T) où T est un polyèdre de R^{q-1} tel que pour tout x de T le groupe fondamental $\pi_1(Lk(x, R^{q-1}) - Lk(x, T))$ soit libre.

THÉORÈME DE LICKORISCH-SIEBENMANN TOPOLOGIQUE 2.4 (cf. [LS]). *Soit $f: K \times I \to Q$ une concordance, soit C un fermé de K et soit U un voisinage de C dans ∂Q. Supposons donnée $F: U \times I \to Q$ une concordance qui prolonge f restreinte à $C \times I$.*

Alors dès que dim $Q \geqq 7$ (*ou* 6 *si* codim $K \geqq 3$ *ou si K est une variété*), *il existe U_1 un voisinage de K dans ∂Q et $F_1: U_1 \times I \to Q$ une concordance qui prolonge f et est égale à F près de $C \times I$.*

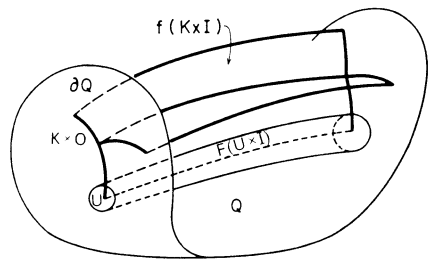

FIGURE 4

Rourke et Sanderson ont prouvé ce théorème si K est une variété [RS-2]; on peut, dans le cas codim $K \geqq 3$, obtenir une preuve plus directe utilisant la triangulation locale et le théorème de Lickorisch-Siebenmann PL, une preuve topologique du cas général s'appuyant sur la théorie des voisinages

réguliers d'Edwards apparaît dans l'Appendice A; cette preuve cependant exige dim $Q \geqq 7$.

On notera que ce résultat permet de donner une forme relative (à un $K \times I$ de codimension strictement supérieure à deux) du théorème topologique du s-cobordisme, et donc un théorème global d'extension des concordances (dans le cas $Q = V \times I$).

Remarque 2.5. Tous les énoncés des Paragraphes 1 et 2 ont une forme fortement relative, il suffit donc de les prouver localement. Ce que l'on entendra par localement sera précisé au début de chaque démonstration après les mots "on peut supposer."

3. Preuve du théorème de transversalité 1.2

Le cas $m = 3$ en codimension $\geqq 3$ est immédiat car transversalité stable n'est que transversalité locale; le théorème est obtenu en triangulant localement et en mettant en position générale. Le même argument prouve un théorème de transversalité dans le cas $m = 4$, il est cependant moins trivial de reconnaître que transversalité locale et transversalité stable sont la même chose (voir Appendice D). Nous ne traiterons donc ici que le cas $m \geqq 5$.

Nous allons bouger M et non N pour obtenir une isotopie h_t telle que $N \pitchfork h_1(M)$ pour η près de $C \cup D$. Cette conclusion est cependant équivalente à celle du théorème (it suffit d'utiliser la version avec ε et de considérer l'isotopie h_t^{-1}).

On peut supposer $W = R^x \times N$, M et N sont des cartes, D compact et $V = W$, l'isotopie devant être à support compact. Remarquons aussi que grâce à une excision préalable de C, on peut remplacer la condition $\eta = \eta'$ près de C par $\eta = \eta'$ hors d'un compact.

Le cas favorable 3.1 est celui où l'on a de plus:

$$\left.\begin{aligned} M &= R^x \times P \\ \eta' &= (\mathrm{id} \mid R^x) \times (\eta' \mid P) \end{aligned}\right\} \text{près de } C \cap D \cap N .$$

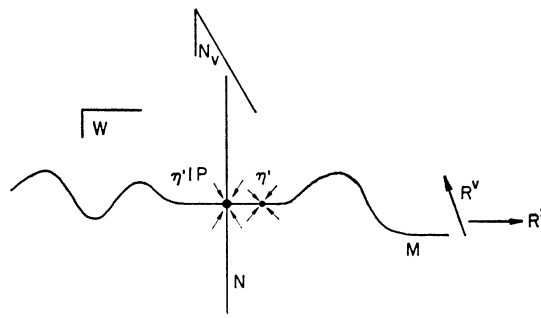

FIGURE 5 (près de $C \cap D \cap N$)

Il suffit alors d'appliquer le théorème de Kirby-Siebenmann au microfibré trivial normal à N pour obtenir l'isotopie h_t.

Reste à construire η: par l'existence des microfibrés normaux stables $\eta' | P \cap C$ s'étend en un microfibré normal η_+ à $P_+ = N \cap h_1(M)$ près de $C \cup D$ dans N_v(voir [Hi] et [KS-1, IV App. A]). Nous définirons donc η hors de C par $\eta = (\mathrm{id} | R^x) \times \eta_+$.

Remarque 3.2. Le cas favorable illustre l'astuce d'échange qui consiste à se distancier du microfibré η' donné pour aller appliquer le théorème de Kirby et Siebenmann à un microfibré "artificiel" de l'autre côté.

Il s'agit maintenant de se ramener au cas favorable 3.1.

AFFIRMATION 3.3. *Il existe un homéomorphisme φ de W fixant N tel que, près de $C \cap D \cap N$:*

(1) $\varphi^{-1}(M) = R^x \times P$;

(2) *η' est concordant au transporté par $\varphi \times (\mathrm{id} | R^v)$ de $(\mathrm{id} | R^x) \times (\eta' | P)$ par une concordance qui respecte N_v.*

Le théorème d'extension des concordances (théorème de Lickorisch-Siebenman topologique 2.4) permet de supposer la concordance à support compact (cette remarque sera systématiquement utilisée dans ce qui suit). L'affirmation produit donc un η'' égal à η' hors d'un compact et qui vérifie les hypothèses du cas favorable.

Preuve de l'Affirmation 3.3. Construisons d'abord φ. Le lemme d'unicité 2.1 nous offre Φ: $I \times W_v \hookleftarrow$ fixant $I \times N_v$, une isotopie de l'identité de W_v telle que

$$\Phi_1\big((\mathrm{id}|R^x) \times (\eta'|P)\big) = \eta \text{ près de } C \cap D \cap N, \text{ ainsi } \varphi_1(R^x \times P) = M \text{ près de } C \cap D \cap N.$$

Nous allons construire une concordance, de l'identité de W_v, Φ': $I \times W_v \hookleftarrow$ telle que:

(a) $\Phi' = \Phi$ près de $1 \times (C \cap D \cap N)$.

(b) $\Phi'(I \times M) \subset I \times W (\subset I \times W_v)$ près de $I \times (C \cap D \cap N)$ et $\Phi'(I \times M)$ y est germe transverse à $I \times N$ dans $I \times W$.

Le théorème de stabilité 2.3 nous donne un $\Phi' | I \times M$ avec les propriétés (a) et (b) et une concordance relative à $1 \times (C \cap D \cap N)$ de $\Phi | I \times M$ à ce $\Phi' | I \times M$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4 à cette concordance (dont on note l'intervalle J) relativement à $(1 \times (C \cap D \cap N) \times J) \cup (O \times W_v \times J)$. Le temps 1 de l'extension obtenue sera l'epaississement Φ' cherché de $\Phi' | I \times M$.

Par le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique, la flèche (définie seulement près de $I \times (C \cap D \cap N)$)

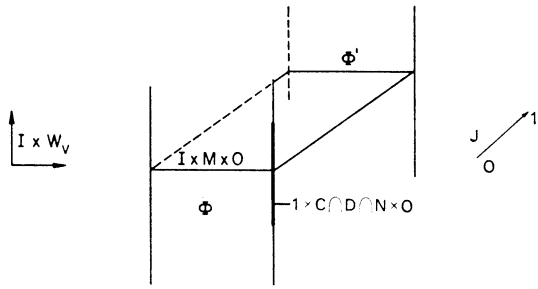

FIGURE 6

$$\Phi'|: I \times (M \cup N) \longrightarrow I \times W$$

se prolonge en une concordance de l'identité de W à support compact et fixant $I \times N$:

$$\Phi'': I \times W \longrightarrow I \times W .$$

Nous définissons $\varphi = \Phi_1''$ et la propriété $M = \varphi(R^x \times P)$ près de $C \cap D \cap N$ résulte de ce que, près de $C \cap D \cap N$, on a $\varphi|(R^x \times P) = \Phi_1''| = \Phi_1'| = \Phi_1|$.

La concordance de η' résultera d'une concordance de $\varphi \times (\mathrm{id}\,|\,R^v)$ à $\Phi_1' = \Phi_1$ près de $C \cap D \cap N$ et fixant M et N_v; cette dernière découle du lemme suivant qui achèvera la démonstration du théorème de transversalité 1.2.

LEMME D'UNICITÉ DES PROLONGEMENTS 3.4. *Soit* $f: I \times K \longrightarrow I \times Q$ *une concordance de* $f_0: K \hookrightarrow Q$ *et* $F', F'': I \times Q \longrightarrow I \times Q$ *deux concordances de* $\mathrm{id}\,|\,Q$ *qui prolongent* f. *Alors* F_1' *et* F_1'' *sont concordants par une concordance fixant* $I \times K$ *que l'on peut de plus supposer relative à un fermé* C *si* F' *et* F'' *sont égales près de* $C \times I$.

Preuve de 3.4. La concordance est $(\mathrm{id}\,|\,I \times F_1')F'^{-1}\,F'': I \times Q \hookleftarrow$. ■

Remarque sur "concordance implique isotopie" 3.5. Toutes les concordances de la preuve précédente peuvent se remplacer par des isotopies en vertu du théorème d'extension des isotopies et du théorème de "concordance entraîne isotopie" pour les germes transverses. Ce théorème résulte du théorème d'Hudson ([Hu-2]) dès que l'on a noté que le lemme de triangulation de l'Appendice B permet de trianguler la situation près de $I \times D$ où D est dans une carte de P. (Le théorème de concordance entraîne isotopie TOP est vrai pour polyèdres et variétés de codimension $\geqq 3$ (voir [Pe]) mais plus difficile à prouver car on ne peut pas supposer $f(I \times x) \subset I \times V$ où V admet une structure PL.)

4. Preuve du lemme d'unicité 2.1

On peut supposer que ν est trivial, trivialisé par $\varphi: P \times R^q \longrightarrow N$.

AFFIRMATION 4.1. *Il existe des trivialisations* $\varphi_i: M_i \times R^y \to W$ *de* ν_i *pour* $i = 0$ *et* $i = 1$ *qui prolongent* φ *et soient égales près de* C.

AFFIRMATION 4.2. *Il suffit de montrer le lemme d'unicité dans le cas* $y = 1$.

Les preuves seront données en fin de paragraphe. Plaçons-nous donc dans le cas $y = 1$, φ_0 et φ_1 étant les trivialisations de l'affirmation 4.1.

Introduisons les glissements τ_t^i de $M_i \times R$ pour $i = 0$ et $i = 1$ définis par: $\tau_t^i(z, s) = (z, s + t)$.

Dans le cas absolu l'isotopie h_t fera commuter le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 \times R & \xrightarrow{\tau_t^0} & M_0 \times R & \xrightarrow{h} & M_1 \times R & \xrightarrow{\tau_t^1} & M_1 \times R \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} \\ W & & & \xrightarrow{|h_t|} & & & W \end{array}$$

où h est un plongement ouvert qui reste à définir. Dans le cas relatif, il suffit d'atténuer ce h_t absolu par une fonction continue γ: $W \times [0, 1] \to [0, 1]$:

$\gamma(z, t) = 0$ pour z hors de V.

$\gamma(z, t) = t$ pour z près de D.

Construction de h. Soit Q le germe de variété autour de $P \times [1/4, 3/4]$ comprise entre $\varphi_0(M_0 \times 1/4)$ et $\varphi_1(M_1 \times 3/4)$ (ces germes sont disjoints car $\varphi_0 = \varphi_1$ sur $P \times R$).

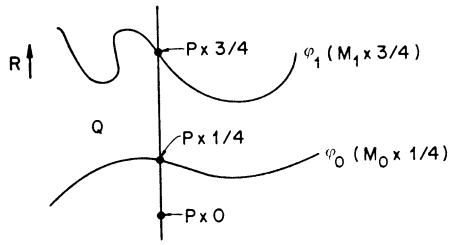

FIGURE 7

φ_0 étend la concordance $P \times [1/4, 3/4]$ près de $C \times [1/4, 3/4]$; soit F définie près de $P \times [1/4, 3/4]$ une extension de φ_0, définissons h sur trois morceaux:

$$h = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_0 \text{ sur } M_0 \times \left]-\infty, \frac{1}{4}\right],$$

$$h = \varphi_1^{-1} \circ F \text{ sur } M_0 \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

$$h = \varphi_1^{-1} \circ F_{3/4} \times \mathrm{id} \Big| \left[\frac{3}{4}, \infty\right[\text{ sur } M_0 \times \left[\frac{3}{4}, \infty\right[. \qquad \blacksquare$$

* L'isotopie h_t est définie par ce diagramme sur $\varphi_0(M \times R)$, le théorème d'extension des isotopies produit une isotopie h_t définie sur tout W.

Preuve de l'Affirmation 4.2. Appliquons une première fois le lemme d'unicité (cas $y = 1$) à $(\varphi_i(M_i \times R^{v-1}), \varphi_i(p_i))$, où p_i est la projection: $M_i \times R^v \to M_i \times R^{v-1}$, et soit g_t l'isotopie obtenue. Dans la variété $g_1(\varphi_0(M_0 \times R^{v-1})) = \varphi_1(M_1 \times R^{v-1})$ appliquons le lemme d'unicité (supposé vrai par induction sur y) et soit k_t l'isotopie produite. Il suffit de poser: $h_t = (k_t \times \mathrm{id}\,|\,R) \circ g_t$ (où l'expression $k_t \times (\mathrm{id}|R)$ correspond à la décomposition en produit déterminée par φ_1). ■

Preuve de l'Affirmation 4.1. Une trivialisation pouvant s'interpréter comme un morphisme dans un fibré trivial, l'affirmation découlera du lemme suivant:

LEMME 4.3. *Supposons N transverse à M en P pour ν et soit $r: M \to P$ une rétraction (définie seulement près de P). Alors il existe près de P un morphisme de microfibré $\rho: \nu \to \nu|P$ au dessus de la rétraction r. De plus, si un tel ρ_0 est donné près d'un fermé C on peut imposer $\rho = \rho_0$ près de C.*

Preuve de 4.3. Remarquons qu'il existe un voisinage V de P dans M et une homotopie $r_t: V \to M$ telle que $r_0 = \mathrm{id}|M$ et $r_1 = r$ (cette construction peut se relativiser). Il suffit alors d'appliquer le théorème d'homotopie des microfibrés (qui est relatif). ■

Nous aurons besoin au paragraphe suivant du:

Complément 4.4. Si la rétraction r est la projection d'un microfibré μ_0, le morphisme ρ de 4.3 est la projection d'un microfibré μ normal à N qui étend μ_0 et commute avec ν. ■

Remarque 4.5. Soit W' une sous-variété de W localement transverse à N en l'espace total de $\nu|P'$, où P' est une sous-variété de P. La preuve donnée offre un lemme d'unicité respectant W' dès que ν_0 et ν_1 respectent W' et $m + p' - p \geqq 5$.

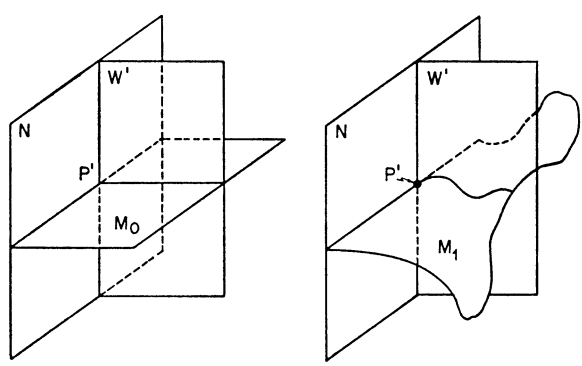

FIGURE 8

5. Preuves du premier théorème du microfibré ambiant 1.3 et du théorème de symétrie 1.4

A. *Le premier théorème du microfibré ambiant* 1.3. Le complément 4.4 nous offre un microfibré μ_v normal à N_v dans W_v, qui étend $\mu' \times (\mathrm{id} \mid R^v)$ et μ_0 et pour lequel M est transverse à N_v. Toujours par ce même complément $\mu_v^{-1}(N)$ admet un microfibré normal trivial étendant p: $C \times R^v \cup N \times R^v \longrightarrow C \cup N$. Le lemme d'unicité fournit alors une isotopie h_t relative à C et fixant N_v qui pousse $\mu_v^{-1}(N)$ sur W. Nous n'avons pas nécessairement $h_1 | \mu_v^{-1}(P) = \mathrm{id} | M$, mais ceci peut être corrigé au moyen d'une concordance G (relative à C et fixant N_v): il suffit de remarquer que $h_1 | \mu_v^{-1}(P)$ et $\mathrm{id} | M$ sont isotopes, et donc concordants, dans W_v, le théorème de stabilité 2.3 produit alors une concordance g dans W entre ces deux plongements, on l'étend par le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.3 en une concordance g_1 définie près de P. Il suffit de poser $G = g_1 \times \mathrm{id} | R^v$. Le microfibré μ est $g_1(\mu_v | N)$. ■

B. *Le théorème de symétrie* 1.4. La partie (a) découle du complément 4.4 une fois remarqué qu'il existe un microfibré ξ_0 normal à P dans ${}_uM$ étendant $\xi'_v | P \cap C$.

Quant à la partie (b), ce n'est que le premier théorème du microfibré normal ambiant où l'on a fait les substitutions:

$$(M, N, \eta, \mu', \mu_0, C) \rightsquigarrow ({}_uM, N, \eta, \xi', \xi_0, C)$$

où ξ_0 est obtenu (comme pour la partie (a)) par unicité des microfibrés normaux stables. ■

6. Preuve du théorème de transversalité des applications 1.7

Il s'agit de se ramener au théorème de transversalité des sous-variétés 1.2.

Pour cela, soit p un plongement localement plat de N dans R^u; l'application $p \times f$: $N \longrightarrow {}_uW$ est un plongement. Vérifions qu'il y a équivalence entre:

(1) *f stablement transverse à M,*

(2) *$p \times f(N)$ stablement transverse à ${}_uM$.*

Soit pour ceci ξ un microfibré normal à $f^{-1}(M)$ dans N_v et soit F_1 le morphisme du ii) de la définition. Le plongement $(p \circ \xi) \times F_1$: $N_v \longrightarrow {}_uW_v$ est, près de $f^{-1}(M)$, homotope au plongement $p \times f \times (\mathrm{id} \mid R^v)$, l'homotopie H_t fixant $f^{-1}(M)$ et vérifiant $H_t^{-1}({}_uM) = f^{-1}(M)$; comme u est grand, nous pouvons transformer cette homotopie en une isotopie K_t jouissant des mêmes propriétés. La variété $p \times f(N)$ est alors transverse à ${}_uM$ pour le microfibré $K_1((\mathrm{id} \mid R^u) \times \eta)$ (où η désigne le microfibré normal à M dans W_v).

Réciproquement l'unicité des microfibrés normaux stables (on se permet

d'augmenter v) fournit une isotopie de tout fibré normal à ${}_uM$ dans ${}_uW_v$ à un fibré de la forme $(\mathrm{id}|R^u) \times \eta$; l'homotopie F_t cherchée est la projetée sur W de cette isotopie.

On laissera au lecteur le soin de relativiser la discussion précédente. Le théorème de transversalité des applications 1.7 découle alors du théorème de transversalité des sous-variétés 1.2 appliqué dans ${}_uW$. ■

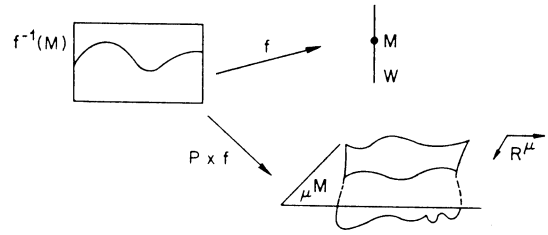

FIGURE 9

Appendices

A. Preuve du théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4

Première preuve par triangulation locale (K *variété ou* codim $K \geqq 3$). Si K est une variété de codimension inférieure ou égale à deux, il existe par [KS-2] un microfibré normal; le théorème d'homotopie des microfibrés permet alors de conclure.

Le théorème étant local, on peut supposer que K est un vrai polyèdre contractile. Le germe de voisinage de $K \times I$ dans Q se trouve ainsi muni d'une structure PL unique; le théorème de structure en produit permet de supposer que la concordance F est PL. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de triangulation des plongements en codimension 3 pour se ramener au classique théorème de Lickorisch-Siebenmann PL.

Preuve topologique alternative avec la restriction $Q \geqq 7$. Soit R une variété topologique à bord, dont le bord ∂R est décomposé en sous-variétés de codimension zéro S_0, S_1 et T telles que $\partial T = \partial S_0 \cup \partial S_1$. Soit X un polyèdre topologique non localement noué dans S_0 et soit g: $X \times I \longrightarrow R$ une concordance. On suppose de plus que $Y = \partial S_0 \cap X$ est un polyèdre topologique colleté dans X que $g(Y \times I)$ est dans T et que $g(X \times 1)$ est dans S_1.

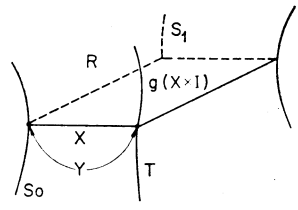

FIGURE 10

AFFIRMATION A.1. *Dès que* $\dim R \geqq 8$ *il y a un homéomorphisme du germe de* S_0 *autour de* $X \times 0$ *sur le germe de* S_1 *autour de* $g(X \times 1)$ *qui prolonge* $g_1 \circ g_0^{-1}$.

Preuve de A.1. Rappelons d'abord qu'Edwards construit en [E-1] des *voisinages réguliers* d'un polyèdre topologique X non localement noué dans une variété topologique V de dimension strictement supérieure à cinq (six dans le cas à bord où il faut supposer de plus que $Y = X \cap \partial V$ est un polyèdre topologique colleté dans X). Ce sont des sous-variétés $\mathcal{V}$ de V de codimension zéro munies d'une rétraction propre r "cone-like" sur X, on dit alors que X *est l'âme du tube* $(\mathcal{V}, r)$; un tube $\mathcal{V}$ a *un bord formel noté* $\delta\mathcal{V}$ analogue au fibré en sphères bord d'un voisinage tubulaire. (Dans le cas codim $X \geqq 3$ "cone like" signifie seulement que pour tout x de X la préimage $r^{-1}(x)$ est UV^∞ et $r^{-1}(x) \cap \delta\mathcal{V}$ est UV^1.)

Soit donc $(\mathcal{R}, r)$ un tel tube autour de $g(X \times I)$ qui se restreigne en $\mathcal{S}_i$, $r)$ et $(\mathcal{T}, r)$ des tubes autour de $g(X \times \{i\})$ dans S_i pour $i = 0$ et $i = 1$ et autour de $g(Y \times I)$ dans T. (On utilise ici $\dim \partial S_i = \dim R - 2 \geqq 6$.)

Le polyèdre topologique X se trouve muni de deux tubes: $(\mathcal{S}_0 \cup \delta\mathcal{R}, p \circ r)$ où p est la projection $p: X \times I \longrightarrow X$ et $(\mathcal{S}_1, r)$; ces deux tubes ont même bord formel $\delta\mathcal{S}_1$ et même rétraction restreinte au bord, ils sont donc homéomorphes par le théorème du cylindre d'Edwards ([E-1]) qui affirme qu'un tube est homéomorphe (par un homéomorphisme fixant le bord formel et l'âme) au cylindre d'application de la restriction de sa rétraction au bord formel (la preuve se trouve essentiellement dans [EG]). ■

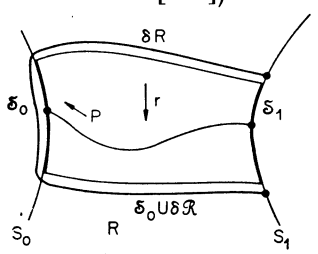

FIGURE 11

Le cas absolu du théorème de Lickorisch-Siebenmann TOP. Désignons par V_i pour $i = 1$ et $i = 2$ des voisinages disjoints de $f(K \times i)$ dans le bord de Q et soit $c: (V_0, f(K \times 0)) \times [0, 2\varepsilon[\longrightarrow (Q, f(K \times I))$ un collier étendant f.

Soit $h: I \times I \hookleftarrow$ un homéomorphisme du carré, fixant $I \times 0 \cup 0 \times I$ qui envoie $I \times 1$ sur $[0, \varepsilon] \times 1$.

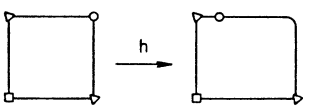

FIGURE 12

Appliquons l'affirmation à la situation $R = Q \times I$, $S_0 = Q \times 0$, $S_1 = c(V_0 \times [0, \varepsilon]) \times 1$, $X = K \times I$, $Y = K \times \{0, 1\}$ et $g = (f \times (\mathrm{id} \mid I)) \circ (\mathrm{id} \mid K) \times h)$. Nous obtenons un homéomorphisme entre le germe de Q en $f(K \times I)$ et celui de $V_0 \times [0, \varepsilon]$ en $K \times [0, \varepsilon]$.

Le cas relatif s'obtient de même en faisant toutes les constructions en produit le long de I près de $C \times I$, ce qui est possible car les théorèmes d'Edwards sont relatifs. ■

B. Preuve du théorème de stabilité 2.3

On peut supposer que P est une carte, que M et N sont des cartes de platitude locale de $P \hookrightarrow M$ et de $P \hookrightarrow N$, que W est une carte de platitude locale de $N \hookrightarrow W$, et que $V = W$, le théorème d'extension des concordances (théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique 2.4) nous permet de supposer la concordance à support compact.

Il suffira de prouver le théorème de stabilité dans le cas PL* en vertu du:

LEMME DE TRIANGULATION B.1. *Il existe une structure ω sur W dont N soit une sous-variété* PL *et une isotopie h_t relative à $C \cup (W - V)$ et fixant N_v de l'identité de W_v à un h_1 qui rende, près de $C \cup D$ le germe $h_1(M)$ sous-variété* PL *de W_v munie de la structure $\omega \times R^v$ et* PL *localement transverse à N_v.*

Preuve de B.1. Munissons tout d'abord P de la structure PL donnée par la carte et M, N, W des structures en produit fournies par les cartes de platitude locale.

Près du fermé C l'inclusion $M \cup N \hookrightarrow W$ est un plongement non localement noué de polyèdres qui est PL sur le sous-polyèdre N. Le théorème de triangulation des plongements en codimension $\geqq 3$ de Miller (voir [E-2] et [KS-1, III App. B]) donne une structure ω sur W dont N soit sous-variété PL et telle que, près du fermé C, la variété M soit sous-variété PL, PL localement transverse à N.

Munissons N_v et W_v des structures $N \times R^v$ et $\omega \times R^v$. L'inclusion $M \cup N_v \hookrightarrow W_v$ est un plongement non localement noué, PL sur N_v et près de C. Le théorème de triangulation des plongements produit l'isotopie h_t cherchée. ■

Preuve du théorème de stabilité PL (cf. [RS-1, § 3]). Triangulons W_v avec W, N_v, M et P triangulés comme sous-complexes. Les cellules duales dans la seconde subdivision barycentrique de W_v, W, N_v, N et M des simplexes de la première subdivision barycentrique de P forment cinq fibrés en

* Toutes les données et conclusions de 2.3 sont dans la catégorie PL.

blocs sur P: EW_v, EW, EN_v, EN et EM tels que, si la variété S est sous-variété de R, le fibré en bloc ES est sous-fibré en bloc de ER et, si les variétés S et T sont localement transverses dans R, les fibrés en blocs ES et ET forment une décomposition de ER (voir [RS-3] et [RS-4]).

Construisons par récurrence sur les blocs de EW_v une homotopie respectant les blocs f: $EW_v \times I \to EW_v \times I$ qui vérifie:

(0) $f|EW_v \times 0 = \mathrm{id}$ et $f^{-1}(EW_v \times i) = EW_v \times i$ pour $i = 0$ et $i = 1$.

(1) $f^{-1}(EN_v \times I) = EN_v \times I$.

(2) f est l'identité sur $EW \times I$.

(3) f_1 est une rétraction de EW_v sur EW.

Nous allons maintenant construire un plongement φ: $EM \times I \to EW_V \times I$ ayant les propriétés (0), (1), (2) et (3) (restreintes à $EM \times I$) ci-dessus.

Supposons construite une application g_k homotope par blocs à f à travers des applications vérifiant (0), (1), (2) et (3) et telle que g_k restreinte à $EM^k \times I$ soit un plongement φ_k (ici EM^k désigne la restriction du fibré en bloc EM au k-squelette de P).

Construisons φ_{k+1}: $EM^{k+1} \times I \to EW_v \times I$ un plongement prolongeant φ_k et homotope par blocs à $g_k | EM^{k+1} \times I$; g_{k+1} s'obtient alors par extension des homotopies par blocs.

Il suffit bien sûr de traiter le cas où P est un simplexe Δ^{k+1} de barycentre b. Notons $\dot{E}$ le bloc fibré en sphères, bord du bloc fibré E.

Remarquons que $g_k|$: $\dot{EM} \times I \to (\dot{EW}_v - \dot{EN}_v) \times I$ est une équivalence d'homotopie qui est l'identité au temps zéro et le plongement φ_k au-dessus de $\dot{\Delta}^{k+1} \times I$. Le théorème de Casson-Sullivan (voir [W-1, Ch. 11]) produit un plongement homotope à $g_k|$, qui prolonge φ_k et l'inclusion de la tranche zéro. On étendra successivement ce plongement à $EM \times 1$ et $EM \times I$ en prenant les cônes sur $b \times 1$ et sur $b \times 1/2$. ■

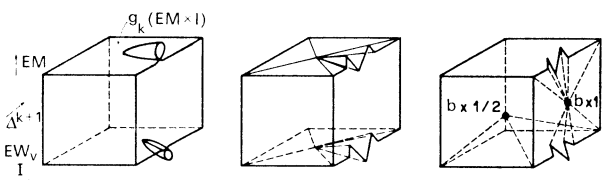

FIGURE 13

Définition B.2. Soit Q^{p+q} un germe de voisinage de P. *Un morphisme (homotopique) de* (Q, P) *dans* (N, P) est un germe autour de P d'application f: $Q \to N$, tel que:

(1) $f^{-1}(P) = P$ et $f|P = \mathrm{id}$.

(2) $f|$: $Q - P \to N - P$ est, au voisinage de tout point de P de degré un.

En utilisant la forme de Wall du théorème de Casson-Sullivan pour les plongements de Poincaré (Th. 11.3 de [W-1]) le lecteur adaptera la preuve du théorème de stabilité pour établir la forme géométrique suivante de la stabilité de G/TOP (voir Appendice C et [RS-2]):

THÉORÈME B.3. *Soit P une sous-variété de N et $f\colon (Q, P) \to (N_v, P)$ un morphisme (homotopique). Dès que $n - p \geqq 3$, f est homotope en tant que morphisme à un morphisme f_1 tel que $f_1^{-1}(P_v)$ soit une sous-variété localement plate de Q homéomorphe à P_v par un homéomorphisme φ tel que:*

$$f_1 \circ \varphi = (\mathrm{id} \mid P) \times (\mathrm{id} \mid R^v) .$$

Indication: Enoncer une forme relative et remarquer qu'une fois la situation locale triangulée et organisée en fibrés en blocs, alors $f^{-1}|(\dot{E}N_v, \dot{E}P_v)$ est un plongement de Poincaré. ■

C. L'espace des germes transverses (cf. [RS-1] et [RS-2])

Considérons M une sous-variété localement plate de W et P une sous-variété localement plate de M. Nous allons introduire quelques espaces semi-simpliciaux) dont nous ne présenterons que les zéro-simplexes pour ne pas alourdir l'exposé.*

$\mathfrak{N}(P, M; W)$ *sera l'espace des germes transverses à M en P dans W.*

Il sera commode de se permettre à tout moment d'augmenter les entiers dest abilisation u et v; posons donc: $W_\infty = \varinjlim W_v$, ${}_\infty W = \varinjlim {}_u W$, ${}_\infty W_\infty = \varinjlim_u W_v$, etc.

L'espace des microfibrés normaux stables à M dans W_∞ est noté $\mathcal{F}(M, W_\infty)$. Le théorème d'unicité des microfibrés normaux stables exprime que cet espace est contractile. Il y a une projection

$$p\colon \mathcal{F}(M, W_\infty) \longrightarrow \mathfrak{N}(P, M; W_\infty)$$

qui, à tout fibré ξ, associe l'espace total de $\xi|P$. Le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique permet de vérifier que c'est une fibration; on note $\mathcal{F}_0(M; W_\infty)$ la fibre: *c'est l'espace des microfibrés stables calant une situation de transversalité donnée.*

Considérons l'inclusion

$$i\colon \mathfrak{N}(P, M; W) \longrightarrow \mathfrak{N}(P, M; W_\infty)$$

qui, à tout N, associe N_∞.

Λ(G/TOP) désigne l'espace des chemins de G/TOP et $\{P, \mathrm{G/TOP}\}$, $\{P, \Lambda(\mathrm{G/TOP})\}$, $\{P, \Omega(\mathrm{G/TOP})\}$ désignent les espaces d'applications de P dans G/TOP, Λ(G/TOP) et Ω(G/TOP) respectivement. Nous pouvons alors énoncer

* Les 1-simplexes seront des concordances.

le

THÉORÈME C.1. (a) *Dès que* $w - m \geqq 3$ *et* $m - p \geqq 3$, *un inverse* ν_0 *du fibré normal stable* η_0 *de* M *dans* W_∞ *détermine à homotopie fibrée près, une équivalence d'homotopie fibrée*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_0(M;\, W_\infty) & \hookrightarrow & \mathcal{F}(M,\, W_\infty) & \longrightarrow & \mathcal{R}(P,\, M;\, W_\infty) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_0} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_1} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \{P,\, \Omega(\mathrm{G/TOP})\} & \hookrightarrow & \{P,\, \Lambda(\mathrm{G/TOP})\} & \longrightarrow & \{P,\, \mathrm{G/TOP}\}\,. \end{array}$$

(b) *Si de plus* $n = p + w - m \neq 4$, *l'inclusion* $i: \mathcal{R}(P, M; W) \to \mathcal{R}(P, M; W_\infty)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Commentaire C.2. Ceci signifie pour la pratique qu'étant donné une situation de transversalité locale $(P; M, N; W)$ il y a une obstruction dans $[P, \mathrm{G/TOP}]$ à ce que N soit stablement transverse à M et que s'il en est ainsi les classes d'isotopie de microfibrés normaux stables calant la situation sont en bijection avec $[P, \Omega(\mathrm{G/TOP})]$ (ici $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ désigne les classes d'homotopie de A dans B). La partie (b) signifie que si $n \geqq 5$ toutes les obstructions sont réalisées et que $[P, \mathrm{G/TOP}]$ est en bijection avec les classes d'isotopies de germes normaux à M en P dans W (cf. Remarque 3.5). Nous verrons dans l'appendice suivant que le cas $n = 4$ est équivalent à la conjecture de l'annulus.

Nous établirons dans l'Appendice E que, si $w - m \leqq 2$, $m - p \geqq 3$, et si $w - m = 2$, $p \neq 2$ et $m \neq 2$, l'espace $\mathcal{R}(P, M; W)$ est contractile.

Preuve de C.1. (a) Comme $\mathcal{F}(M, W_\infty)$ est contractile, il suffit de construire l'équivalence d'homotopie ρ. Elle rendra commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty) & \xleftarrow{e} & \mathcal{F}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty) & \xrightarrow{j} & \mathcal{F}(P, \eta_0) \\ \uparrow{\scriptstyle i'} & & & & \downarrow{\scriptstyle \oplus \nu_0} \\ \mathcal{R}(P, M; W_\infty) & & \xrightarrow[\boxed{\rho}]{} & & \{P, \mathrm{G/TOP}\}\,. \end{array}$$

L'inclusion i' provenant de $W_\infty \hookrightarrow {}_\infty W_\infty$ est une équivalence d'homotopie par le théorème de stabilité 2.3.

$\mathcal{F}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty)$ est l'espace des fibrés stables sur P dont l'espace total est un germe transverse à ${}_\infty M$ dans ${}_\infty W_\infty$ en P, l'application d'oubli e est une équivalence d'homotopie par l'unicité des microfibrés normaux stables.

$\mathcal{F}(P, \eta_0)$ est l'espace des microfibrés munis d'une équivalence d'homotopie fibrée vers η_0, l'application j est définie par $j(\eta) = (\eta, \eta \hookrightarrow (\mathrm{id} \mid R^\infty) \times \eta_0)$. Le théorème de plongements stables qui permet d'homotoper toute équivalence

d'homotopie fibrée $\eta \to \eta_0 \hookrightarrow W_\infty \hookrightarrow {}_\infty W_\infty$ à un plongement localement transverse à ${}_\infty M$ nous assure que j est une équivalence d'homotopie.

Quant à $\bigoplus \nu_0$ elle associe à l'élément $\eta \to \eta_0$ l'application classifiante du fibré homotopiquement trivialisé $\eta \bigoplus \nu_0 \to \eta_0 \bigoplus \nu_0 = \varepsilon$.

(b) Remarquons que le lemme d'unicité 2.1 nous permet de construire un élément N^0 de $\mathfrak{N}(P, {}_\infty M; {}_\infty W)$. Soit r: ${}_\infty W \to N^0$ une rétraction telle que $r^{-1}(P) = {}_\infty M$ (M est stablement transverse à N^0 pour ξ et l'on peut prendre pour rétraction la projection de ξ).

Par le théorème de stabilité 2.3 il nous suffit de montrer que ${}_\infty i$: $\mathfrak{N}(P, {}_\infty M; {}_\infty W) \to \mathfrak{N}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty)$ est une équivalence d'homotopie. Considérons alors le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{N}(P_\infty, {}_\infty M_\infty; {}_\infty W_\infty) & \xrightarrow{m_1} & \mathfrak{M}(N^0_\infty, P_\infty) & \xrightarrow{e} & \mathfrak{M}(N^0_\infty, P) \\ & \nwarrow^{\times\infty} & & & \uparrow m_2 \\ & & \mathfrak{N}(P, {}_\infty M; {}_\infty W) & \xrightarrow{{}_\infty i} & \mathfrak{N}(P, {}_\infty M; {}_\infty W_\infty) \end{array}$$

où $\mathfrak{M}(N^0_\infty, P)$ et $\mathfrak{M}(N^0_\infty, P_\infty)$ désignent les espaces de germes de voisinages de P et P_∞ munis de morphismes homotopiques dans (N^0_∞, P) et (N^0_∞, P_∞).

L'application m_1 associe à un germe transverse ce même germe muni du morphisme $r_\infty = r \times (\mathrm{id} \mid R^\infty)$, quant à m_2 elle associe le germe transverse muni de $r \circ p$ où p: ${}_\infty W_\infty \to {}_\infty W$ est la projection. Ce sont toutes deux des équivalences d'homotopie par le théorème des plongements stables.

L'application d'oubli e est une équivalence d'homotopie par la forme relative du Théorème B.3.

Quant à $\times\infty$ qui à N associe N_∞ elle est une équivalence d'homotopie pour $n \geqq 5$ par la forme respectant une sous-variété (ici $N_1 \in \mathfrak{N}(P_\infty, {}_\infty M_\infty; {}_\infty W_\infty)$) du lemme d'unicité (Remarque 4.5). C'est ici que l'on utilise vraiment l'hypothèse $n \geqq 5$ car on peut, dans tous les cas, construire le N^0 et une rétraction r (qui ne sera pas nécessairement projection d'un microfibré). ■

Remarque C.3. Si $\mathfrak{N}_r(M)$ désigne l'espace des germes de codimension r de voisinages de M le lemme d'unicité 2.1 assure que $\times\infty$: $\mathfrak{N}_r(M) \to \mathfrak{N}_r(M_\infty)$ donnée par $(W, M) \to (W_\infty, M_\infty)$ est une équivalence d'homotopie dès que $w \geqq 5$ et $r \geqq 3$: c'est le théorème de stabilité de [RS-2] (voir aussi [E-1]); on retrouve ainsi la classification homotopique des germes de voisinages en se fondant sur le théorème de Lickorisch-Siebenmann topologique (qui apparaît comme ultime corollaire dans [RS-2]!).

D. La transversalité dans le cas $p = m + n - w \leqq 1$, $w \neq 4$

Supposons N localement transverse à M en P de dimension strictement

inférieure à deux; comme $\pi_0(G/TOP) = \pi_1(G/TOP) = 0$, on peut construire un microfibré stable η qui cale la situation et ce de façon relative (Théorème C.1) (cependant comme $\pi_1(\Omega(G/TOP)) = \pi_2(G/TOP) = Z_2$ il n'y a pas unicité de cet η).

Il suffit donc de prouver un théorème de transversalité relatif pour la notion locale de transversalité.

On peut supposer M, N et W des cartes et la situation triangulée de façon à ce que près de C, les variétés M et N soient PL et PL localement transverses (les plongements localement plats des variétés de dimension strictement inférieure à deux se triangulent, on a donc des structures sur M et N dont P soit sous-variété près de C, le reste de la preuve du lemme de triangulation B.1 restant inchangé).

Après une isotopie (en restant transverse près de C) on peut supposer que les triangulations de M et N sont en position générale près de D, auquel cas on est localement transverse près de $C \cup D$.

Remarque D.1 *sur les microfibrés ambiants.* Dès que la dimension de N est différente de quatre toute situation localement transverse en une variété P de dimension un est transverse pour un microfibré normal ambiant car P admet un microfibré normal dans N et le second théorème du microfibré normal ambiant 1.5 s'applique.

AFFIRMATION D.2. *Si la dimension de N est quatre la construction d'un microfibré ambiant est équivalente à la conjecture de l'annulus.*

Une forme de cette conjecture étant Lickorisch-Siebenmann TOP, avec K un point, et Q de dimension quatre, elle permet de construire des fibrés normaux aux variétés de dimension un dans le variétés de dimension quatre. Réciproquement un contre-exemple est un arc dans Q qui n'admet pas de fibré normal; notons qu'en recollant deux voisinages V_0 et V_1 des extrémités de cet arc, on obtient un cercle dans une variété orientable N qui n'admet pas de fibré normal:

S'il y avait un fibré normal, il serait trivial et donc le germe de N autour de S^1 serait le bouclage de son revêtement ∞-cyclique N (voir [S])* mais le revêtement ∞-cyclique ayant une trivialisation où $V_0 = V_1$ est une fibre, le théorème d'unicité des bouclages fournit un fibré normal à S_1 dans N dont $V_0 = V_1$ est une fibre et l'arc avait donc un fibré normal dans Q

* *Attention*: il est essentiel de supposer ici que le voisinage Q^4 de S^1 est trivial. Q^4 n'est pas nécessairement un bouclage au sens de [S] (s'il l'était on viendrait de prouver la conjecture de l'annulus!).

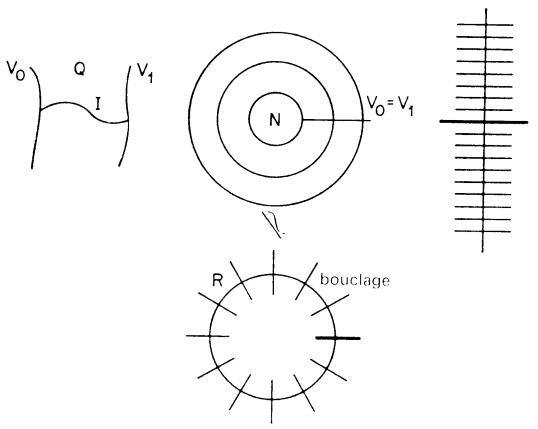

FIGURE 14

contrairement à l'hypothèse. ■

L'homéomorphisme de bouclage est l'identité près de $V_0 = V_1$ et sur S^1.

E. Les microfibrés normaux respectant une sous variété en codimension inférieure ou égale à deux

COMPLÉMENT AU THÉORÈME A DE [KS-2] E.1. *Soit N^{p+y} et M^{p+x} deux sous-variétés localement transverses en P^p dans W^w, la codimension y de M étant inférieure ou égale à deux, et la codimension x de N supérieure strictement à deux. Soit ν_0 et ν_1 deux microfibrés normaux à M dans W dont les restrictions à P sont des microfibrés normaux à P dans N. Soit C un fermé de M près duquel ν_0 et ν_1 coincident. Soit D un autre fermé de M et V un voisinage de D dans W.*

Alors dès que $(n, p) \neq (4, 2)$ et $(w, m) \neq (4, 2)$ il existe une isotopie h_t de l'identité de W relative à $C \cup (W - V)$ et fixant M telle que $h_1(\nu_0) = \nu_1$.

Preuve. Le cas $y = 1$ est le théorème du collier relatif qui est bien connu.

Pour le cas $y = 2$, il suffit de relire l'article de Kirby et Siebenmann en utilisant cependant la catégorie PL* et l'unicité des fibrés normaux PL en codimension 2 (voir [RS-3], [W-2], le cas respectant une sous-variété découlant de B $\mathrm{PL}_{y+2,y,2}$ contractile pour $x \geqq 3$ [RS-1]). Le lemme de l'anse devient

LEMME DE L'ANSE E.2. *Soit h: $(B^k \times R^{q+z+2}, B^l \times R^{q+2}, B^k \times R^{q+z}) \hookleftarrow$ (où $l = k$ ou $l < k$ et $q = 0$) un homéomorphisme identité sur $B^k \times R^{q+z}$ et* PL *près de $\partial B^k \times R^{q+z+2}$.*

Alors si $p = q + l \neq 2$ et $m = k + q + z \neq 2$, il existe une isotopie h_t à support compact, relative à $\partial B^k \times R^{q+z+2}$, fixant $B^k \times R^{q+z}$ et respectant

* Car nous utiliserons les théorèmes de triangulation en codimension $\geqq 3$ de Miller.

$B^l \times R^{q+2}$ *de* h *à un* h_1 *qui soit un plongement* PL *près de* $B^k \times R^{q+z}$.

Preuve de E.2. Comme Kirby et Siebenmann nous ne traiterons que le cas $z \neq 0$, le cas $z = 0$ se traitant par une construction analogue et plus simple.

On construit le tour en partant de

$$i\colon B^k \times T^{q+(z-1)+2} \times R \to B^k \times R^{q+z+2}$$

un plongement de Novikov tel que $h \circ i \mid B^l \times T^{q+2} \times 0$ soit un plongement PL. Ceci s'obtient par triangulation des plongements en codimension strictement supérieure à deux.

Cet ajustement fait, la machine tourne en respectant $B^l \times T^{q+2} \times 0$ et fait sortir à l'autre bout l'isotopie h_t désirée.

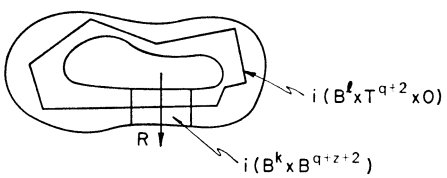

FIGURE 15

Ce complément nous permet de corriger les hypothèses de dimension dans tous les théorèmes du Paragraphe 1 en autorisant pour N une codimension $\leqq 2$, mais en excluant les cas $m = 4$ et $p = 2$ ainsi que $w = 4$ et $n = 2$.

Le seul endroit où l'hypothèse $w - n \geqq 3$ a été utilisée est dans le lemme de triangulation B.1 pour rendre les plongements $M \cup N \to W$ (près de C) et $M \cup N_v \to W_v$ plongements PL en fixant N et N_v. Pour ceci il suffit d'utiliser des microfibrés normaux triviaux à N dans W et à N_v dans W_v respectant M et de les isotoper de façon relative par unicité des microfibrés normaux (ne respectant rien du tout) à des microfibrés PL. ■

On obtient ainsi en particulier:

COMPLEMENT AU THÉORÈME DE SYMÉTRIE E.3. *Si* $w - n \leqq 2$, $w - m \geqq 3$ *et* $(m, p) \neq (4, 2)$ *la variété* N *est stablement transverse à* M *si et seulement si*:

(1) *Les variétés* M *et* N *sont localement transverses.*

(2) *Il existe près de* P *deux microfibrés normaux* $\eta\colon W_v \to M$ *et* $\mu_v\colon W_v \to N_v$ *qui commutent en tant que rétractions et vérifient*:

$$M \pitchfork N_v \text{ pour } \mu_v \text{ et } N_v \pitchfork M \text{ pour } \eta\ .$$

De plus, dans ce cas, il existe un microfibré μ *normal à* N *dans* W *tel*

que $M \pitchfork N$ *pour* μ.

Le lecteur pourra énoncer la forme relative plus précise.

UNIVERSITÉ PARIS XI, CENTRE d'ORSAY, FRANCE

RÉFÉRENCES

[E-1] R. D. EDWARDS, Topological regular neighborhoods, à paraître.
[E-2] ———, The equivalence of close PL embeddings, Gen. Top. and Appl. **5** (1975), 147-186.
[EG] R. D. EDWARDS and L. C. GLASER, A method for shrinking decompositions of certain manifolds, Trans. A.M.S. **165** (1972), 45-46.
[Hi] M. HIRSCH, On normal microbundles, Topology **5** (1966), 373-385.
[Hu-1] J. F. P. HUDSON, On transversality, Proc. Camb. Phil. **66** (1969), 17-21.
[Hu-2] ———, Concordance and isotopy of PL embeddings, Bull. A.M.S. **72** (1966), 534-536.
[KS-1] R. C. KIRBY and L. C. SIEBENMANN, *Essays on topological manifolds, smoothing and triangulations*, Annals of Mathematics Studies, No. 88.
[KS-2] ———, Normal bundles in codimension 2, Geometric Topology, Park City Utah conference Feb. 1974, Springer Notes No. 438, 1975.
[LS] W. B. R. LICKORISCH and L. C. SIEBENMANN, Regular neighborhoods, Trans. A.M.S. **139** (1969), 207-230.
[Pe] E. K. PEDERSEN, Topological concordances I and II, March 1974, Aarhus preprint Series 1973-74, No. 17 and 18.
[RS-1] C. P. ROURKE and B. J. SANDERSON, Decompositions and the relative, tubular neighborhood conjecture, Topology **9** (1970), 225-230.
[RS-2] ———, On topological neighbourhoods, Compositio Math. **22** (1970), 387-424.
[RS-3] ———, Block bundles I, Ann. of Math. **87** (1968), 1-28.
[RS-4] ———, Block bundles II, Ann. of Math. **87** (1968), 256-278.
[S] L. C. SIEBENMANN, A total Whitehead torsion obstruction to fibering over the circle, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 1-48.
[W-1] C. T. C. WALL, *Surgery on Compact Manifolds*, Academic Press, 1970.
[W-2] ———, On PL submanifolds of codimension 2, Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967), 5-8.

(Received July, 19, 1976)