ÉTUDES MATHÉMATIQUES
Collection dirigée par P. LELONG
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

théorie des perturbations et méthodes asymptotiques

V. P. MASLOV

SUIVI DE DEUX NOTES COMPLÉMENTAIRES DE

V. I. ARNOL'D ET V. C. BOUSLAEV

TRADUIT PAR

J. LASCOUX
Ancien élève
de l'École normale supérieure

R. SENEOR
Ancien élève
de l'École polytechnique

PRÉFACE DE

J. LERAY
Professeur au Collège de France

DUNOD GAUTHIER-VILLARS
PARIS
1972

Traduction de l'ouvrage publié en langue russe sous le titre :

TEORIIA VOZ MOUTCHENII, ACYMPTOTICHESTIE METODI

par les ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE MOSCOU, 1965

PRÉFACE

Le traité de V. Maslov, Professeur à la Faculté de Physique de l'Université de Moscou, tel que J. Lascoux, Directeur de Recherches au C.N.R.S., et R. Sénéor, Chargé de Recherches, l'ont traduit, annoté et complété par la traduction d'articles de V. I. Arnol'd et de V. C. Bouslaev, est un document d'un singulier intérêt.

V. Maslov prolonge les développements asymptotiques au-delà de leurs singularités; dans le cas le plus classique et le plus simple, c'est appliquer l'optique géométrique au-delà des caustiques, c'est-à-dire des enveloppes des rayons lumineux; V. Maslov y réussit par un procédé très général, employant les variétés lagrangiennes et, sur celles-ci, un indice dont V. I. Arnol'd a donné une définition topologique très claire. Cette méthode générale confirme un résultat obtenu par J. B. Keller en 1958 : la mécanique quantique corpusculaire, c'est-à-dire la première théorie des quanta, doit, pour bien approximer la mécanique quantique ondulatoire, choisir des nombres quantiques qui sont tantôt des entiers, tantôt des entiers augmentés de 1/2.

Le lecteur désireux d'employer des solutions asymptotiques trouvera dans ce traité un grand nombre de formules explicites : V. Maslov a une grande habitude de leur procédé de calcul. Sans doute lui est-il beaucoup trop familier pour qu'il en analyse les principes : le lecteur qui voudra apprendre et comprendre ce procédé s'apercevra qu'il doit fournir un gros effort, malgré toute l'aide que lui apportent les traducteurs. S'il est mathématicien, il lira beaucoup plus entre les lignes que sur les lignes. Il commencera par se demander s'il ne s'agit pas de la théorie des « Fourier integral operators » de L. Hörmander, et il constatera rapidement qu'il s'agit d'autre chose. Alors, il découvrira aisément entre ces lignes ce que j'y ai trouvé et que j'expose ailleurs. Puis, sans doute, fera-t-il mieux : expliciter et appliquer à des problèmes d'une certaine généralité les « équations opérationnelles » et ces développements asymptotiques où V. Maslov substitue à la variable tendant vers $+\infty$ un opérateur à spectre réel, positif, non borné.

Chacun lira ce traité à sa façon; mais chaque lecteur sera profondément reconnaissant à J. Lascoux et R. Sénéor d'avoir mis à son service une très exceptionnelle compétence de physicien, de mathématicien et de linguiste.

J. Leray

REMERCIEMENTS

Les traducteurs remercient Jean Leray qui a excité leur curiosité en ramenant de Moscou une copie de l'ouvrage de Maslov et Pierre Lelong qui leur a fait confiance.

Ils sont très reconnaissants à Marie-José Lecuyer d'avoir eu la longue patience de tirer au clair, sur sa machine, les lignes obscures manuscrites de nos cahiers d'écoliers.

AVANT-PROPOS

Ce livre est basé sur un cours spécialisé enseigné par l'auteur depuis plusieurs années à la Faculté de Physique de l'Université de Moscou, et se rapportant à ses travaux dans le domaine de la théorie des perturbations, de l'asymptotique quasi-classique et de l'asymptotique des courtes longueurs d'onde et également des ondes de choc. Les leçons de ce cours forment la première partie du livre et certains chapitres de la seconde.

Le livre est écrit pour les étudiants des cours terminaux du département de mathématique de la Faculté de Physique de l'Université de Moscou et aussi pour les étudiants et candidats de la Faculté de Mécanique. Il est aussi accessible aux étudiants spécialisés en physique théorique.

Dans l'idée de l'auteur, ce livre doit remplir dans une certaine mesure un maillon insuffisant de la chaîne qui relie les équations classiques de la physique mathématique et les équations de la mécanique quantique. C'est pourquoi dans ce livre les équations de la mécanique quantique et de l'optique sont traitées comme des cas particuliers d'équations générales à coefficients opératoriels dans des espaces fonctionnels. Une telle généralisation se révèle utile aussi dans les applications physiques concrètes, dans la mesure où elle établit un lien entre des formules asymptotiques se rapportant à des domaines différents de la physique. Les formules nouvelles et assez simples obtenues dans ce travail peuvent s'utiliser directement dans la théorie de la diffraction et de la réfraction de l'optique électronique [24] (en particulier parce que les problèmes correspondants de la mécanique classique sont bien élaborés [75]) et aussi en acoustique (cf. [9] [14]), dans la théorie des ondes de choc ([82] [83]) et dans la théorie quantique des molécules (*).

Remarquons que, bien que toutes les formules présentées dans ce livre, soient déjà asymptotiques, comme le montrent les calculs numériques sur

(*) Il n'y a pas dans le livre de discussion de ces problèmes, parce que le thème fondamental de ce travail a peu de points communs avec eux. Cf. les livres d'Herring, Friedlander, Glaser.

machine de problèmes concrets, pour les valeurs du paramètre de l'ordre d'un tiers, les deux premiers termes de l'asymptotique donnent une très bonne approximation (cf. par exemple [15], p. 300).

Tous les résultats (sauf ceux du § 6, ch. 2, Partie I-3°, § 2, ch. 3, et § 4, § 5, ch. 5, Partie II) présentés dans le livre dont dus à l'auteur. Une grande partie d'entr'eux est publiée ici pour la première fois.

Dans le § 1, ch. 2, Partie I, écrit par C. V. Fomin, les théorèmes connus de la théorie des opérateurs linéaires sont exposés. Au début du ch. 4, Partie I; ch. 5, Partie I; et § 2, ch. 8, Partie II, on rappelle aussi des théorèmes qui seront utilisés par la suite. Le § 5, ch. 5, Partie II, a été écrit par V. Doubnov.

On considère d'abord dans la première partie la perturbation d'opérateurs auto-adjoints à spectre discret, et ensuite la théorie de la perturbation des équations opératorielles : c'est le moyen utilisé pour préciser les estimations des formules asymptotiques et établir la convergence dans tel ou tel espace fonctionnel.

L'application des théorèmes abstraits est illustrée par des exemples sur les équations aux dérivées partielles.

Dans la seconde partie, on étudie le comportement asymptotique des solutions des équations aux dérivées partielles avec des données initiales oscillantes ou discontinues. On étudie aussi l'asymptotique des valeurs propres des opérateurs différentiels auto-adjoints. La position du problème et la formulation des principaux théorèmes sont donnés dans les chapitres 1-4. Les démonstrations sont renvoyées aux chapitres suivants 5-8. Au point de vue méthodologiques, les propositions topologiques sont démontrées au chapitre 7 dans une formulation suffisante pour les applications, mais plus faible que celle des énoncés donnés au chapitre 2.

Dans l'appendice, des exemples de formules asymptotiques de type exponentiel sont donnés à titre d'illustrations. Mais ces résultats ne sont pas démontrés ici. Nous y reviendrons plus en détail dans une publication ultérieure. De même, la question du second terme de l'asymptotique des valeurs propres des solutions, traitée pour le cas à une dimension dans le chapitre 9, y sera étudiée en toute généralité.

En conclusion, j'exprime ma profonde gratitude à N. N. Bogolioubov pour de précieuses remarques sur l'axiomatique de la mécanique quantique, A. N. Tychonov pour des consultations sur les problèmes incorrectement posés, C. V. Fomin pour la rédaction du troisième chapitre sur la théorie des

perturbations. Je suis reconnaissant à D. Anosov, V. Arnold et C. Novikov pour de nombreuses discussions topologiques et leur aide amicale; à P. A. Bérezin, A. Vinogradov et J. Sinaï qui ont lu différentes parties du livre et m'ont fait une série de précieuses remarques de caractère rédactionnel.

Les aspirants de la Faculté de Physique I. Gordeev et V. Doubnov m'ont apporté une aide soutenue pour la préparation du manuscrit. Je leur exprime ma reconnaissance de tout cœur.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES PERTURBATIONS

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE DES PERTURBATIONS

INTRODUCTION

Le problème qui sert de point de départ à l'étude du vaste ensemble de questions, que l'on regroupe généralement sous le nom de « théorie des perturbations », est le suivant : soit A une matrice dont nous connaissons les valeurs propres et les vecteurs propres. Il faut trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon B,$$

B étant une matrice donnée et ε un nombre suffisamment petit. La solution de ce problème est bien connue. Elle consiste à écrire les valeurs propres $\lambda_k(\varepsilon)$ de la matrice $A(\varepsilon)$ en séries de puissance de ε

$$\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon C_{1k} + \varepsilon^2 C_{2k} + \dots$$

où les λ_k sont les valeurs propres de la matrice « non perturbée » $A = A(0)$ et où les $C_{1k}, C_{2k}, \dots$ sont des coefficients, indépendants de ε, qui peuvent être calculés par des formules faciles à établir. On a une représentation analogue des vecteurs propres $\psi_k(\varepsilon)$ de la matrice $A(\varepsilon)$. Dans certains problèmes concernant aussi la théorie des perturbations, il est utile de chercher une représentation en série de puissance de ε pour telle ou telle fonction de $A(\varepsilon)$, comme par exemple

$$(A + \varepsilon B)^{-1}$$

ou

$$\mathrm{e}^{A + \varepsilon B}$$

Tous ces problèmes qui ne présentent pas de grandes difficultés lorsqu'il s'agit de matrices deviennent beaucoup plus compliqués lorsque, au lieu de matrices, on considère des opérateurs linéaires à valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie.

Ce qui suit est évident dans le cas où la dimension est finie. Soit $A(\varepsilon) = A + \varepsilon B$; lorsque ε tend vers zéro, $\lambda_K(\varepsilon), \psi_K(\varepsilon), (A + \varepsilon B)^{-1}, \mathrm{e}^{A+\varepsilon B} \dots$, ont pour limites $\lambda_K, \psi_K, A^{-1}$ (si A^{-1} existe), $e^A, \dots$ Ceci signifie que les valeurs propres, les vecteurs propres, la matrice inverse ... de la matrice non perturbée, sont les approximations d'ordre zéro (i.e. des approximations modulo des termes tendant vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$) des quantités correspondantes de la matrice perturbée $A + \varepsilon B$.

Par contre, pour des opérateurs dans un espace de dimension infinie, la question de l'approximation d'ordre zéro, c'est-à-dire de la convergence (pour $\varepsilon \to 0$) des fonctions de l'opérateur perturbé vers les mêmes fonctions de l'opérateur non perturbé, présente de réelles difficultés, et parfois les limites correspondantes peuvent ne pas exister. A titre d'exemple intéressant, montrant combien la situation qui se présente ici est loin d'être simple, on peut citer le théorème de H. Weyl, d'après lequel, tout opérateur A, borné et auto-adjoint, défini dans un espace d'Hilbert (*) H, peut être réalisé comme limite (en norme) d'une suite d'opérateurs $\{A_n\}$, bornés et auto-adjoints, dont les spectres soient purement ponctuels.

Considérons un opérateur de la forme

$$A(\varepsilon) = A + \varepsilon B, \tag{0.1}$$

A et B étant non bornés ; du fait même que l'opérateur perturbant B est non borné, la notion de petite perturbation εB perd son sens précis : pour deux opérateurs arbitraires A et B on ne peut pas s'attendre à ce que l'effet de la perturbation εB soit « petit » en un sens quelconque, même si ε est aussi petit que l'on veut. Pour obtenir des résultats qui aient un contenu, il faut, d'ordinaire, exiger que l'opérateur perturbant B soit dans un certain sens, dominé par l'opérateur non perturbé A. Une série de résultats importants a été obtenue dans cette direction par F. Rellich, B. Sz-Nagy, H. Weyl, M. G. Krein, O. A. Ladyženskaja et D. Faddeev ([65], [70], [36], [45]). Une autre possibilité (qui est précisément celle que nous considérons dans la suite) consiste à imposer certaines conditions sur le comportement même de $A(\varepsilon)$ considéré comme fonction de ε, lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans ce cas il n'est pas nécessaire que la dépendance en ε de $A(\varepsilon)$ soit précisément de la forme (0.1) ; elle pourrait avoir aussi un tout autre caractère.

Les méthodes de la théorie des perturbations sont largement appliquées dans différents domaines de la physique, en particulier en mécanique quantique. Dans ce dernier cas, leur utilisation est basée sur le fait, que les hamiltoniens des systèmes de la mécanique quantique peuvent souvent s'écrire comme une somme de la forme

$$\hat{H} = H_1 + \varepsilon H_2 \tag{0.2}$$

où εH_2 représente une petite « correction » à l'hamiltonien non perturbé H_1, dont on connaît les fonctions propres et les valeurs propres. (On se trouve dans une situation de ce type lorsqu'on considère, par exemple, un système formé de particules interagissant faiblement les unes avec les autres. Dans ce

(*) Séparable (*N.d.T.*).

cas H_1 est l'hamiltonien des particules sans interaction et εH_2 l'hamiltonien d'interaction).

Si on considère un opérateur de la forme $A + \varepsilon B$, où B est un opérateur borné, on sait que les problèmes mentionnés plus haut de la théorie des perturbations ont une solution pour ε suffisamment petit. Cette solution est donnée sous la forme d'une série convergente de puissance de ε. Voici les formules correspondantes (dites « formules de la théorie des perturbations ») :

$$[A + \varepsilon B]^{-1} = A^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k \tag{0.3}$$

Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints, λ_0 un point isolé, de multiplicité m, du spectre de l'opérateur A, et d la distance de λ_0 au reste du spectre de A.

Le projecteur $E^A_{\lambda_0 - d/2\,,\,\lambda_0 + d/2}$ sur le sous-espace des fonctions propres de A correspondant au point λ_0 s'exprime par la formule

$$E^A_{\lambda_0 - d/2\,,\,\lambda_0 + d/2} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint (A - z)^{-1}\,\mathrm{d}z \tag{0.4}$$

où le contour d'intégration est une courbe dans le plan complexe des z passant par les deux points réels $\lambda_0 - d/2$ et $\lambda_0 + d/2$ (*). Alors, évidemment,

$$\lambda_0 = \frac{(g\,, AE^A_{\lambda_0 - d/2\,,\,\lambda_0 + d/2}\, g)}{(g\,, E^A_{\lambda_0 - d/2\,,\,\lambda_0 + d/2}\, g)} = \frac{\oint (g\,, A(A - z)^{-1} g)\,\mathrm{d}z}{\oint (g\,, (A - z)^{-1} g)\,\mathrm{d}z}$$

pour tout g, appartenant à H, et dont la projection sur le sous-espace précédent est différente de zéro.

Pour ε suffisamment petit la dimension du projecteur

$$E^{A+\varepsilon B}_{\lambda_0 - d/2\,,\,\lambda_0 + d/2}$$

est égale à m, et l'on a

$$E^{A+\varepsilon B}_{\lambda_0 - d/2\,,\,\lambda_0 + d/2} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint (A - z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [B(A - z)^{-1}]^k\,\mathrm{d}z \tag{0.5}$$

le contour d'intégration étant un cercle centré en λ_0 et de rayon $d/2$.

(*) L'intégrale doit se comprendre comme limite d'une somme de type Cauchy-Riemann, la convergence s'effectuant au sens de la norme des opérateurs (cf. Livre 2, § I). Lorsque A est un opérateur, dans un espace L_2 de fonctions de x, dont le spectre est simple et discret

$$(A - z)^{-1} g = \int \Sigma \frac{\psi_n(x)\,\psi_n(\xi)}{\lambda_n - z} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint (A - z)^{-1} g\,\mathrm{d}z = \int \psi_n(x)\,\psi_n(\xi)\,g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = E^A_{\lambda_n - \delta\,,\,\lambda_n + \delta}\, g$$

Par conséquent les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur $A + \varepsilon B$ coïncident dans un $d/2$-voisinage du point λ_0 avec les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur

$$(A + \varepsilon B)\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint (A - z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [B(A - z)^{-1}]^k \mathrm{d}z \qquad (0.6)$$

qui peut être considéré comme restreint à un sous-espace de dimension m.

Ce dernier problème se ramène à la recherche des valeurs propres et des fonctions propres d'une matrice symétrique d'ordre m. Les développements en séries ainsi obtenues pour les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur $A + \varepsilon B$ s'appellent séries de perturbations. Dans les manuels de mécanique quantique ([47], [87]), on ne donne d'habitude que les deux premiers termes de ces séries.

Nous n'examinerons dans les deux premiers chapitres que les cas suivants : le spectre de l'opérateur A est discret, ou : le spectre de l'opérateur A contient au moins un point isolé λ.

Le problème de la perturbation des opérateurs unitaires et des semi-groupes à un paramètre d'opérateurs sera examiné au Chapitre 4. On y étudiera aussi le problème plus général du comportement pour $n \to \infty$ des solutions de l'équation

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - A_n(t)u = F(t)$$

satisfaisant la condition initiale

$$u(0) = u_0 \in H$$

les $A_n(t)$ étant des opérateurs dans un espace de Banach H, qui dépendent continûment du paramètre t, et convergent en un certain sens pour $n \to \infty$, $F(t)$ étant une fonction donnée de t à valeurs dans H.

On étudiera dans les Chapitres 3 et 5 un problème encore plus général. On peut le formuler de la façon suivante.

Soit $\{T_\varepsilon\}$ une famille d'opérateurs (ou une suite $\{T_n\}$) dans un espace de Banach B, dépendant du paramètre ε et convergeant, dans tel ou tel sens, vers l'opérateur limite T. Le problème direct de la théorie des perturbations consistera à construire une approximation de l'opérateur T_ε^{-1} (ou T_n^{-1}) à l'aide des opérateurs connus T et T^{-1}. De même, on étudiera le problème inverse de la théorie des perturbations, l'existence de l'opérateur inverse T^{-1} et l'approximation de cet opérateur à l'aide de la famille T_ε^{-1}.

Pour résoudre certains problèmes de la théorie des perturbations nous nous servirons de méthodes de régularisation.

Pour les problèmes concrets de la théorie des perturbations signalés précédemment des algorithmes bien définis de régularisation sont introduits avec les estimations correspondantes. Ces algorithmes sont optimaux dans un sens bien déterminé (asymptotiquement). Dans certains cas, ils peuvent être appliqués à la résolution de certains problèmes de la théorie des équations intégrales linéaires.

La méthode de régularisation introduite ici est basée sur les représentations physiques des propriétés d'un appareil de mesure (pour un bref aperçu, voir [51] et [9]). Et bien qu'elle soit applicable aux opérateurs abstraits, il convient d'introduire une méthode de régularisation basée sur l'interprétation de la mécanique quantique : l'impossibilité de déterminer simultanément la position et l'impulsion d'une particule, c'est-à-dire le principe d'incertitude d'Heisenberg.

Notons que A. N. Tychonov ([77], [78]) a posé le premier le problème de la régularisation des problèmes incorrectement posés dans un espace métrique et a donné certaines méthodes concrètes de régularisation.

CHAPITRE 1

PROBLÈME DE LA RÉGULARISATION DE LA THÉORIE DES PERTURBATIONS

§ 1 POSITION DU PROBLÈME

1. Exemple de régularisation du potentiel perturbatif pour l'équation de Schrödinger

Considérons l'équation de Schrödinger

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_0 + u(x)\psi_0 = \lambda_0\psi_0 .$$

Soit λ_0 un point isolé du spectre. L'équation perturbée est de la forme

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi + (u(x) + \varepsilon v(x,\varepsilon))\psi = \lambda\psi,$$

$v(x,\varepsilon)$ étant borné pour tout x lorsque $\varepsilon \to 0$.

En physique, on utilise souvent un développement formel des solutions en série de perturbations, même dans le cas où le potentiel perturbatif $v(x,\varepsilon)$ tend rapidement vers l'infini lorsque $|x| \to \infty$. Dans ce cas le spectre de l'équation perturbée peut être aussi bien discret que continu. Il apparaît souvent que quelques uns des premiers termes de la série donnent une bonne approximation, tandis que les approximations suivantes rendent le résultat moins bon. De plus, il arrive souvent que les intégrales qui donnent les différents termes de la série de perturbation, divergent; et le problème se pose alors de l'élimination des divergences, de la régularisation de ces intégrales, ce qui se fait généralement sur la base de certaines considérations d'ordre physique. Schiff, dans son manuel de mécanique quantique, admet que les séries de perturbation convergent « bien que la question effective de leur analyticité n'ait été étudiée que pour quelques problèmes très simples ». En fait, dans le cas général où $A(\varepsilon) = A + B_\varepsilon$, avec $B_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$, les séries de perturbation ne convergeront pas.

Donnons l'exemple de l'équation de Schrödinger où, bien que l'intégrale $(\psi_n^0, B_\varepsilon\psi_n^0)$ diverge, elle pourra cependant, comme nous le verrons dans la suite, être régularisée de telle façon que l'expression obtenue serve de premier terme correctif à λ^0.

Considérons l'équation

$$-\psi_n'' + x^2 e^{\varepsilon x^4} \psi_n = \lambda_n \psi_n,$$

avec la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2 \, dx = 1.$$

La perturbation est ici $x^2(e^{\varepsilon x^4} - 1)$, et x^2 est le potentiel non perturbé.

Pour $\varepsilon = 0$, on a $\lambda_n^0 = 2n + 1$ (voir [15]) ; comme la fonction propre ψ_n^0 décroît à l'infini plus lentement que $e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$, l'intégrale donnant la première correction à λ_n^0 diverge :

$$\lambda_n^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{\varepsilon x^4}) x^2 |\psi_n^0|^2 \, dx = -\infty$$

En fait, comme nous verrons plus loin, on peut prendre comme première correction l'intégrale :

$$\lambda_n^{(1)} = \int_{-\sqrt[3]{\frac{2}{3\varepsilon}}}^{+\sqrt[3]{\frac{2}{3\varepsilon}}} (1 - e^{\varepsilon x^4}) x^2 |\psi_n^0|^2 \, dx$$

qui est d'ordre $0(\varepsilon)$.

Ainsi $\lambda_n = \lambda_n^0 + \lambda_n^{(1)} + 0(\varepsilon^2)$.

La régularisation de problèmes semblables sera exposée dans le deuxième chapitre.

Il se trouve que pour les problèmes de ce type on peut remplacer l'opérateur B_ε par un opérateur $\tilde{B}_\varepsilon$ borné et « proche » de B_ε pour ε petit, tel que $\lambda_n^{(1)} = (\psi_n^0, \tilde{B}_\varepsilon \psi_n^0)$ donne alors la première correction à λ_n^0. De tels changements peuvent se faire aussi pour tous les autres termes de la série de perturbation.

2. Dépendance du moyen de régularisation du choix de la représentation

La méthode de régularisation qu'il est naturel d'employer pour un problème donné dépend de la représentation dans laquelle le problème en question est considéré. Comme il l'a déjà été indiqué plus haut, c'est à partir de considérations physiques qu'il faut déterminer l'opérateur non perturbé.

Considérons par exemple l'équation de Schrödinger :

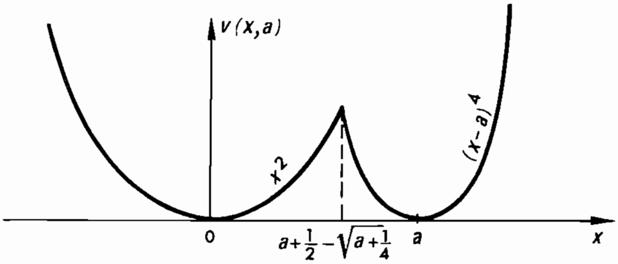
$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_n + v(x, a)\psi_n = \lambda_n \psi_n \tag{1.1}$$

avec

$$v(x, a) = \begin{cases} x^2 & \text{pour} \quad x < a + 1/2 - \sqrt{a + 1/4} \\ (x - a)^4 & \text{pour} \quad x \geqslant a + 1/2 - \sqrt{a + 1/4} \end{cases} \tag{1.2}$$

(Voir fig. 1)

Soit $\varphi(x)$ une fonction à support compact. Il est évident que $v(x,a)\varphi(x)$ est égale à $x^2\varphi(x)$ pour a suffisamment grand. Par conséquent, lorsque $a \to \infty$, l'opérateur de multiplication par $v(x,a)$ tend vers l'opérateur de multiplication par x^2.



Supposons que nous ayons le problème suivant. Nous considérons, d'abord, un système dans le potentiel x^2, et nous connaissons l'ensemble des valeurs propres (« niveaux ») λ_n^0 et des fonctions propres ψ_n^0 :

$$-\psi_n^{0\prime\prime} + x^2\psi_n^0 = \lambda_n^0\psi_n^0.$$

Nous nous intéresserons à l'effet du potentiel perturbatif $v(x,a) - x^2$ sur le niveau λ_n^0 et sur la fonction propre ψ_n^0. On montre facilement que pour a suffisamment grand cette perturbation modifie peu λ_n^0 et ψ_n^0 (pour n fixe et $a \to \infty$) (voir le chapitre 2). A ce fait, on peut donner le sens physique suivant. Le physicien A étudie une particule dans un potentiel x^2 et cherche l'effet sur cette particule d'une perturbation distante. Dans ce cadre toute la discussion mathématique prend un contenu physique tout à fait concret. Supposons maintenant que le physicien B étudie le puits de potentiel « voisin » $(x-a)^4$. Il s'intéresse au changement du niveau $\tilde{\lambda}_n^0$ et de la fonction propre $\tilde{\psi}_n^0$ de l'équation

$$-\tilde{\psi}_n^{0\prime\prime} + (x-a)^4\tilde{\psi}_n^0 = \tilde{\lambda}_n^0\tilde{\psi}_n^0$$

sous l'effet du potentiel perturbatif du physicien A, x^2. Tout le raisonnement par lequel $v(x,a)$ converge vers x^2 lorsque $a \to \infty$ perd son sens pour le physicien B. Pour résoudre le problème nécessaire au physicien B, il faut transporter l'origine des coordonnées au point a.

Notons alors :

$$\tilde{v}(y,a) = v(x,a) = \begin{cases} y^4 & \text{pour} \quad y \geqslant \dfrac{1}{2} - \sqrt{a+1/4} \\ (y+a)^2 & \text{pour} \quad y < \dfrac{1}{2} - \sqrt{a+1/4} \end{cases}$$

Pour $a \to \infty$, l'opérateur $\tilde{v}(y,a)$ tendra vers y^4. Ainsi posé le problème satisfait le physicien B. Nous avons effectué un changement de système de coordonnées, une translation par a. Autrement dit, nous avons effectué la transformation unitaire correspondant à la translation a : on fait agir l'opérateur $e^{-a\frac{d}{dx}}$ Ainsi nous sommes passés à une autre représentation de l'opérateur de Schrödinger. L'équation

$$-\psi'' + \tilde{v}(y, a)\psi = \lambda\psi$$

est l'équation (1.1) dans la nouvelle représentation. Du point de vue de la mécanique quantique les deux représentations sont équivalentes. Cependant, pour $a \to \infty$, les opérateurs de Schrödinger correspondants tendent vers des opérateurs distincts.

3. L'oscillateur anharmonique

Considérons maintenant le cas de l'oscillateur anharmonique

$$-\psi'' + \{x^2 + \varepsilon x^{2k+1}\}\psi = \lambda\psi \tag{1.3}$$

L'opérateur $-\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2 + \varepsilon x^{2k+1}$ n'est pas essentiellement auto-adjoint (*) pour $k \geqslant 1$, de sorte que l'équation (1.3) n'a apparemment pas de sens. Si $k \geqslant 2$, une des solutions de l'équation (1.3) appartiendra à L_2 quel que soit $\lambda < 0$, ce qui n'a pas de sens physique.

Néanmoins les physiciens calculent les premiers termes de la série de perturbation et obtiennent un bon accord avec certaines expériences, mais à partir de certains termes cet accord devient de plus en plus mauvais. Il est aussi possible que, pour d'autres expériences, l'utilisation de la théorie des perturbations soit généralement absurde.

La théorie mathématique des perturbations doit donner une réponse à la question de savoir quelles grandeurs restent invariantes sous l'effet d'une petite perturbation et indiquer avec quelle précision on peut calculer ces grandeurs à l'aide des formules de la théorie des perturbations.

Toutefois, comme on l'a vu, on attend du physicien l'information suivante : il doit indiquer si la perturbation donnée affecte peu son expérience. Le problème de la théorie des perturbations consiste alors à calculer ces petites variations et à en donner les valeurs correspondantes.

4. Stabilité d'un système isolé

Lorsqu'on considère un potentiel $u(x)$, tendant vers ∞ lorsque $|x| \to \infty$, c'est une situation idéalisée. En fait, si le potentiel est assez grand pour les grandes valeurs de x et que l'interaction avec les systèmes voisins est petite, on peut alors « extrapoler » le potentiel de sorte que $\lim_{x \to \infty} u(x) = \infty$. On admet par là que le système considéré est isolé. Ce qui rend possible une telle hypothèse tient au fait que notre système est localisé dans l'espace, c'est-à-dire que

(*) L'opérateur de Schrödinger détermine un opérateur symétrique H sur l'ensemble D' des fonctions à support compact suffisamment différentiable. On dit que l'opérateur de Schrödinger est essentiellement auto-adjoint si la fermeture de H est un opérateur auto-adjoint ([15]).

l'appareil avec l'aide duquel nous observons le système ne nous permet de voir qu'une partie limitée de l'espace (champ d'observation), néanmoins suffisamment grande pour que la particule ne puisse pratiquement pas en sortir. Ceci signifie que, déjà près du bord de cette région, la probabilité de présence de la particule est pratiquement nulle, c'est-à-dire que la précision de notre appareil de mesure ne nous permet plus de la détecter.

Supposons, maintenant, que la perturbation que nous introduisons soit différente de zéro hors du champ de l'appareil, c'est-à-dire agisse sur les systèmes dont nous négligions déjà l'interaction pour pouvoir écrire l'équation non perturbée. Il est évident que l'appareil ne détectera pas de traces de cette perturbation.

Remarquons qu'il n'y a pas de spectre rigoureusement discret puisque dans la nature les systèmes isolés n'existent pas. Cependant, si l'interaction avec les systèmes voisins est très petite, l'expérimentateur ne pourra pas différencier une petite bande du spectre et un seul niveau ; et c'est pourquoi il est légitime de considérer le problème idéalisé d'un système isolé à spectre discret. Ainsi, en écrivant l'équation de Schrödinger pour un système isolé, il faut vérifier la stabilité de ce système relativement à des perturbations éloignées et indiquer les grandeurs qui restent stables. Ces grandeurs sont justement celles observées par les physiciens. Afin de comprendre quelles grandeurs restent stables pour une variation éloignée du potentiel, examinons des exemples. Nous ne formulons que les résultats, les démonstrations étant par ailleurs tout à fait élémentaires.

a) Considérons l'équation de Schrödinger :

$$- \psi_n''(x) + v(x,a)\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x) \tag{1.4}$$

où $v(x,a)$ est le potentiel donné par (1.2) (voir fig. 1).

Cherchons le problème suivant : pour commencer nous avons considéré un système dans un champ de force de potentiel x^2 et nous avons une suite de niveaux $\lambda_n^0 = 2n + 1$ et de fonctions propres

$$\psi_n^0 = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi^{1/2}\,2^n n\,!}} H_n(x)$$

les $H_n(x)$ étant des polynômes d'Hermite.

Nous nous intéresserons à la façon dont le potentiel $v(x,a) - x^2$ perturbe les niveaux λ_n^0 et les fonctions propres ψ_n^0. Comme il a déjà été indiqué, pour a suffisamment grand, cette perturbation a peu d'effet sur λ_n^0 et ψ_n^0 (n étant fixe et $a \to \infty$). On démontre dans ce cas que λ_n^0 et ψ_n^0 varient de la quantité $\sigma_a = O(\psi_n^0[x_0(a)])$, où $x_0(a) = a + \frac{1}{2} - \sqrt{a + 1/4}$. Lorsque $a \to \infty$, cette quantité tend vers zéro comme $e^{-\alpha a^2}$, α étant une certaine constante. Supposons qu'on puisse négliger σ_a, autrement dit que la précision de notre appareil ne permette pas d'observer des grandeurs aussi petites. Dans ce cas, nous pouvons sans dommage pour le résultat, « extrapoler » le potentiel en x^2 au-delà du point $x_0(a)$; autrement dit, considérer au lieu de $v(x, a)$ le potentiel x^2.

Dans cet exemple, les valeurs propres de l'équation (1.4) peuvent être séparées en deux classes.

Une première classe comprend les valeurs propres, proches des valeurs propres $\lambda_n^0 = 2n + 1$ de l'équation de l'oscillateur, et la deuxième celles proches des valeurs propres de l'équation

$$- \tilde{\psi}_n^0 + (x - a)^4 \tilde{\psi}_n^0 = \tilde{\lambda}_n^0 \tilde{\psi}_n^0$$

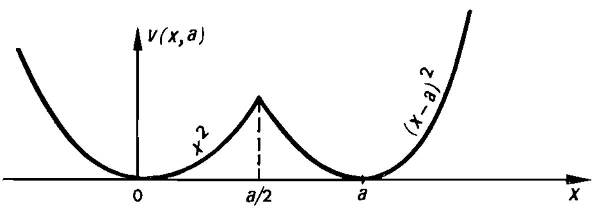
De même, les fonctions propres se divisent en deux classes :

1) celle des fonctions propres, proches de ψ_n^0 ;
2) celle des fonctions propres, proches de $\tilde{\psi}_n^0$.

Ceci signifie que les deux systèmes, l'un avec le potentiel en x^2, l'autre avec le potentiel en $(x - a)^4$, ont une interaction négligeable et que nous pouvons les étudier séparément.

b) Considérons maintenant l'équation (1.4) avec $v(x, a)$ de la forme

$$v(x, a) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x < a/2, \\ (x - a)^2 & \text{pour } x \geqslant a/2. \end{cases}$$



L'opérateur de multiplication par $v(x, a)$ converge à nouveau, pour $a \to \infty$, vers x^2. Pourtant, à la différence du cas précédent, il y aura, pour l'équation perturbée (1.4), deux valeurs propres proches de λ_n^0 : λ_n et $\bar{\lambda}_n$. Elles diffèrent de λ_n^0 de la quantité

$$\sigma_a = O[\psi_n^0(a/2)]$$

Les fonctions propres ψ_n et $\bar{\psi}_n$, correspondant à λ_n et $\bar{\lambda}_n$, différeront de $\psi_n^0 / \sqrt{2}$ dans l'intervalle $- \infty < x < a/2$ de la même quantité σ_a (au signe près).

Dans la mesure où les valeurs propres du puits de « droite » et du puits de « gauche » coïncident, on peut dire qu'il y a « résonance ». C'est pourquoi le niveau λ_n^0 « se divise » en λ_n et $\bar{\lambda}_n$, et les fonctions propres ψ_n et $\bar{\psi}_n$ seront proches, en module, de $\psi_n^0(x - a) / \sqrt{2}$ pour $a/2 \leqslant x < \infty$.

Ainsi, dans la mesure où $\psi_n^0 = O(\mathrm{e}^{-\alpha a^2})$ dans l'intervalle $a/2 \leqslant x < \infty$, la question qu'on doit se poser est de savoir si dans l'intervalle $-\infty \leqslant x \leqslant a/2$ les fonctions propres de l'équation perturbée (1.4) sont proches de celle de l'équation non perturbée. Pourtant remarquons que la probabilité totale de présence des particules sur les niveaux λ_n et $\bar{\lambda}_n$ ne diffère de 1, lorsque $a \to \infty$, que de la quantité σ_a. Si la précision de l'appareil ne permet pas d'observer des grandeurs (de l'ordre de) σ_a, nous ne pouvons pas distinguer l'un de l'autre les niveaux λ_n et $\bar{\lambda}_n$. Nous ne verrons qu'un seul niveau « complexe ».

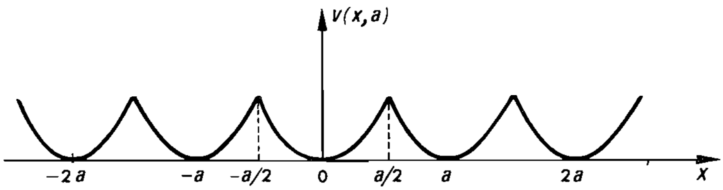
La densité de probabilité de présence des particules sur ce « niveau » vaudra, à σ_a près,

$$\frac{|\psi_n^0(x)|^2}{2} + \frac{|\psi_n^0(x)|^2}{2} = |\psi_n^0(x)|^2.$$

C'est pourquoi dans le deuxième exemple aussi, nous pouvons extrapoler le potentiel x^2 au-delà du point $a/2$ sans danger pour le résultat physique, c'est-à-dire que nous pouvons nous limiter à la considération du potentiel x^2.

c) Considérons maintenant un potentiel $v(x, a)$ de la forme

$$\begin{cases} x^2 & \text{pour} \quad -a/2 \leqslant x \leqslant a/2 \\ (x - ka)^2 & \text{pour} \quad ka - a/2 \leqslant x < a/2 + ka \\ (x - ma)^2 & \text{pour} \quad x \geqslant ma - a/2 \\ (x + ma)^2 & \text{pour} \quad x < -ma + a/2 \end{cases}$$



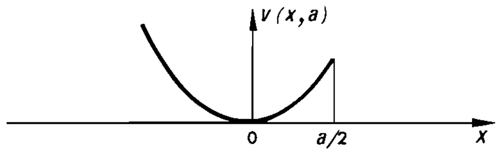
Dans ce cas, le tableau de la situation sera le même que pour l'exemple précédent (cas de la « résonance »), seulement les niveaux voisins de λ_n^0 (c'est-à-dire ne différant que de $\sigma_a = O[\psi_n^0(a/2)]$) seront au nombre de $2m$: $\lambda_n, \bar{\lambda}_n, \bar{\bar{\lambda}}_n, \ldots$. Si le degré de précision de l'appareil n'est pas meilleur que σ_a, nous ne verrons que le niveau « complexe » λ_n^0. La probabilité totale de présence de la particule dans l'intervalle $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$ et pour $\lambda_n - \sigma_a \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n + \sigma_a$ ne diffère de l'unité que de σ_a. Les fonctions propres de l'équation (1.4) ont, dans l'intervalle $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$, leurs modules très peu différents de ψ_n^0.

Par conséquent, si nous ne pouvons pas observer les quantités σ_a, l'image physique ne changera pas en remplaçant le potentiel $v(x, a)$ par x^2.

Supposons maintenant que le nombre m de l'exemple précédant soit égal à ∞. Dans ce cas le spectre sera continu : le carré des fonctions propres (*généralisées*) ne sera déjà plus intégrable. Néanmoins dans $-a/2 \leqslant x \leqslant a/2$ les fonctions propres ψ_n (du spectre continu) coïncideront avec ψ_n^0 à $\sigma_a = O[\psi_n^0(a/2)]$ près, mais le spectre se composera d'une bande autour de λ_n^0 dont la largeur n'excèdera pas σ_a. C'est pourquoi lorsque la précision de l'appareil est inférieure à σ_a, nous ne faisons pas de différence entre le cas de la bande et celui du niveau unique, c'est aussi pourquoi nous pouvons remplacer $v(x, a)$ par x^2.

d) Soit, enfin, un potentiel de la forme suivante :

$$v(x, a) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x < a/2 \\ 0 & \text{pour } x > a/2 \end{cases}$$



Dans ce cas, le spectre sera continu et comprendra tout le demi-axe $\lambda > 0$.

Toutefois, les fonctions propres, correspondant aux points λ situés à l'extérieur d'un σ_a-voisinage du point λ_n^0, où $\sigma_a = O[\psi_n^0(a/2)]$, tendront vers zéro dans la région $x < a/2$ et seront de l'ordre de σ_a.

Les (mêmes) fonctions propres, correspondant au point $\lambda = \lambda_n^0$ ou à un certain voisinage de ce point, ne diffèreront, dans $x < a/2$, de $C_n\psi_n^0(x)$ que de σ_a.

Donc, si notre appareil ne nous permet pas d'observer les quantités σ_a, nous ne pourrons pas observer la largeur des bandes correspondant aux points du spectre qui sont dans un voisinage de λ_n^0 et pour lesquels la probabilité de présence de la particule dans le puits de potentiel sont visiblement différentes de zéro, et nous n'observerons qu'un seul niveau « complexe » λ_n^0. Dans ces conditions le potentiel $v(x, a)$ peut être remplacé par x^2.

Sur ces exemples, le sens avec lequel il faut comprendre la stabilité des systèmes isolés relativement à des perturbations distantes est clair. Si on s'est donné un potentiel non perturbé $u(x)$ et une perturbation $v(x, a)$ égale à zéro dans un intervalle qui s'étend sur tout l'axe pour $a \to \infty$, on peut espérer que les fonctions propres du système avec le potentiel $u(x)$ ne seront stables relativement à une telle perturbation « lointaine » que dans une région finie de la variable x (nous l'avons appelé champ d'observation de l'appareil). Cette région qui dépend de a coïncide dans le cas où $a \to \infty$ avec tout l'axe. Dans ces conditions, il peut apparaître de nouveaux points du spectre, qui ne sont d'aucune façon reliés à l'équation non perturbée. Mais la probabilité de présence de particules sur de tels niveaux est, dans nos exemples, négligeable dans le champ d'observation.

§ 2 THÉORIE DES PERTURBATIONS DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER A UNE DIMENSION

1. Notions fondamentales

Supposons que pour l'opérateur

$$\hat{L}^0 = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

le potentiel $u(x)$ vérifie les conditions $u(\pm\infty) = +\infty$, et que le potentiel perturbatif $\varepsilon v(x, \varepsilon)$ tende vers zéro, pour x fixé lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans l'exemple *a*), n° 4, § 1, $\varepsilon v(x,\varepsilon) = -x^2 + (x - 1/\varepsilon)^4$ pour $x \geqslant x_0(1/\varepsilon)$ et est égal à zéro pour $x \leqslant x_0(1/\varepsilon)$; dans l'exemple *b*) $\varepsilon v(x, \varepsilon) = -x^2 + (x - 1/\varepsilon)^2$ pour $x > 1/2\varepsilon$ et est égal à zéro pour $x \leqslant 1/2\varepsilon$. L'opérateur perturbé est de la forme :

$$\hat{L}\psi = -\psi'' + [u(x) + \varepsilon v(x, \varepsilon)]\psi$$

Nous avons vu dans les exemples *a*) et *d*), n° 4, § 1 que le champ d'observation (de l'appareil) dépendait du paramètre ε et tendait vers $(-\infty, +\infty)$ pour $\varepsilon \to 0$.

Introduisons maintenant une définition générale du champ d'observation. Soit x_ε tel que pour $|x| \leqslant x_\varepsilon$, $\varepsilon|v(x,\varepsilon)| \leqslant \alpha$ et que de plus $\varepsilon|v(x_\varepsilon,\varepsilon)| = \alpha$, α étant une constante ne dépendant pas de ε. Nous désignons par champ de non-visibilité la région $|x| \geqslant x_\varepsilon$. Nous préciserons la constante α plus bas. Elle ne dépend que de l'opérateur non perturbé. Nous appelons champ d'observation la région $|x| \leqslant x_\varepsilon/2$ et $r_\varepsilon = x_\varepsilon/2$ le rayon d'observation. La région $x_\varepsilon/2 \leqslant |x| \leqslant x_\varepsilon$ est intermédiaire entre le champ d'observation, c'est-à-dire de visibilité, et le champ de non visibilité. En accord avec ce qui a été dit plus haut, nous considèrerons que, pour $x_\varepsilon/2 \leqslant |x| \leqslant x_\varepsilon$ il est impossible d'observer une particule dans le champ du potentiel non perturbé au moyen de notre appareil de mesure. Ceci signifie que nous considèrerons comme négligeables des quantités de l'ordre de

$$\int_{x_\varepsilon/2}^{x_\varepsilon} |\psi_n^0(x)|^2 \, dx$$

Comme il est bien connu ([33]), si le potentiel $u(x)$ croît comme x^{2k}, on a les majorations :

$$|\psi_n^0(x)| \leqslant C_n e^{-|x|^{k+1}/(k+1)} \qquad n = 1, \ldots$$

les C_n étant des constantes.

Il en résulte, puisque

$$\frac{x^{k+1}}{k+1} > (1 - \delta) \int \sqrt{|\lambda_n^0 - u(x)|} \, dx \quad \text{pour } x \to \infty$$

que

$$\int_{x_\varepsilon/2}^{x_\varepsilon} |\psi_n^0(x)|^2 \, dx \leqslant \int_{x_\varepsilon/2}^{+\infty} |\psi_n^0(x)|^2 \, dx \leqslant C_n^2 \, e^{-\frac{2}{k+1}\left|\frac{x_\varepsilon}{2}\right|^{k+1}}$$

$$\leqslant C_1 \exp\left\{ - 2(1 - \delta) \int_0^{x_\varepsilon/2} \sqrt{|\lambda_n^0 - u(x)|} \, dx \right\},$$

C_1 et δ étant des constantes indépendantes de ε. Si nous pouvons négliger une quantité de l'ordre de

$$\sigma(\varepsilon) = C \exp\left\{ - (1 - \delta) \int_0^{x_\varepsilon/2} \sqrt{|\lambda_n^0 - u(x)|} \, dx \right\},$$

alors les considérations intuitives exposées plus haut permettent de supposer que la partie du potentiel perturbatif $\varepsilon v(x, \varepsilon)$ située dans le champ de non visibilité n'a pas d'influence sur notre système.

Décomposons le potentiel $v(x, \varepsilon)$ en somme de $\bar{v}(x, \varepsilon)$ et $\bar{\bar{v}}(x, \varepsilon)$: $v(x, \varepsilon) = \bar{v}(x, \varepsilon) + \bar{\bar{v}}(x, \varepsilon)$, où $\bar{v}$ et $\bar{\bar{v}}$ sont de la forme :

$$\bar{v}(x,\varepsilon) = \begin{cases} v(x,\varepsilon) & \text{pour } |x| \leqslant x_\varepsilon \\ 0 & \text{pour } |x| > x_\varepsilon \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\bar{\bar{v}}(x,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leqslant x_\varepsilon \\ v(x,\varepsilon) & \text{pour } |x| > x_\varepsilon \end{cases}$$

Il est bien connu que la série de perturbation converge lorsque la perturbation $\varepsilon v(x, \varepsilon)$ ne dépasse pas en module une certaine constante $\beta > 0$, ne dépendant que de l'opérateur non perturbé. Nous préciserons cette constante dans le lemme suivant.

2. Définition plus précise du rayon d'observation

Lemme 1.1. *Soient A et B des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert H, et d la distance d'un point μ au reste du spectre de l'opérateur A. Soit $\|B\| \leqslant d/(2 + \sigma)$, avec $\sigma > 0$. Alors*

1. *Dans l'intervalle $\Delta = \{ \mu - d/(2 + \sigma), \mu + d/(2 + \sigma) \}$ le spectre de l'opérateur $A + B$ est discret. La dimension du sous-espace du projecteur correspondant E_Δ^{A+B} est nulle si μ appartient à l'ensemble résolvant de l'opérateur A et est égale à la multiplicité de μ, si μ est une valeur propre de l'opérateur A.*
2. *Les séries de perturbation* (*voir* (0.5) *et* (0.6)) *définissant les valeurs propres situées dans l'intervalle Δ et les fonctions propres correspondantes de l'opérateur $A + \varepsilon B$, convergent pour $\varepsilon \leqslant 1$.*

Ainsi, les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur $A + \varepsilon B$, pour $\varepsilon = 1$, peuvent être représentées sous forme de séries convergentes de perturbation.

Démonstration

Prenons le point $\mu + l$, où $0 \leqslant l < d$. Il est évident que :

$$[A + \varepsilon B - \mu - l]^{-1} = [A - \mu - l]^{-1}[1 + \varepsilon B(A - \mu - l)^{-1}]^{-1} \quad (2.2)$$

Comme l'on sait, ([65]) :

$$\| [A - \mu - l]^{-1} \| \leqslant \operatorname{Max}\left\{\frac{1}{l}, \frac{1}{d - l}\right\}$$

Il en résulte

$$\| \varepsilon B(A - \mu - l)^{-1} \| \leqslant \operatorname{Max}\left\{\frac{d}{(2 + \sigma)l}, \frac{d}{(2 + \sigma)(d - l)}\right\} \qquad \text{pour } \varepsilon \leqslant 1.$$

Si T est un opérateur borné quelconque

$$\| 1 + T \| \geqslant 1 - \| T \|.$$

Par conséquent pour $\| T \| < 1$, on a (*)

$$\| [1 + T]^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \| T \|}$$

Soit maintenant l tel que

$$\frac{d}{(2 + \sigma)l} < 1 \quad \text{et} \quad \frac{d}{(2 + \sigma)(d - l)} < 1$$

Alors l'opérateur $T = \varepsilon B[A - \mu - l]^{-1}$ a une norme inférieure à l'unité. D'où :

$$[A + \varepsilon B - \mu - l]^{-1} = [A - \mu - l]^{-1}[1 + T]^{-1}$$

existe et est borné, et par conséquent le point $\mu + 1$ avec

$$\frac{d}{2 + \sigma} < l < \frac{1 + \sigma}{2 + \sigma} d$$

appartient à l'ensemble résolvant de l'opérateur $A + \varepsilon B$.

De façon analogue à ce qui se fait dans le cas analytique ([65]) il est possible d'intégrer la formule (2.2) le long d'un contour fermé entourant le point μ et tout entier contenu dans l'ensemble résolvant de l'opérateur $A + \varepsilon B$.

De là, comme en [65], on peut conclure qu'à l'intérieur du contour, l'opérateur $A + B$ a un spectre constitué de points discrets et que la dimension

(*) En fait, si $\| Ag \| \geqslant \alpha \| g \|$, en supposant que $g = A^{-1}f$, nous obtenons

$$\frac{1}{\alpha}\| f \| \geqslant \| A^{-1}f \|, \text{ c'est-à-dire } \| A^{-1} \| \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

du sous-espace des fonctions propres correspondant à ces points coïncide avec la multiplicité du point μ.

Il en résulte aussi, voir [65], la convergence des séries de perturbation des valeurs propres de l'opérateur A contenues dans un cercle centré au point μ et de rayon $d/(2+\sigma)$, et des fonctions propres correspondantes. Le lemme est ainsi démontré.

Supposons que la constante α de la définition du champ d'observation soit égale à $d/(2+\sigma)$. Alors, puisque, d'après (2.1)

$$\varepsilon\,|\bar{v}(x,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\,|v(x_\varepsilon,\varepsilon)| \leqslant \frac{d}{2+\sigma},$$

les séries de perturbation pour les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur $\hat{L}^0 + \varepsilon\bar{v}(x,\varepsilon)$ convergeront.

3. Assertion fondamentale

On a les propositions suivantes :

1) *L'opérateur*

$$\frac{1}{2\pi i}[\hat{L}^0 + \varepsilon\,\bar{v}(x,\varepsilon)]\oint_\Gamma [\hat{L}^0 - z]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[\bar{v}(x,\varepsilon)(\hat{L}^0 - z)^{-1}]^k\,\mathrm{d}z,$$

où Γ est un cercle, centré au point λ^0, de rayon $d/2$, possède une valeur propre simple $\mu(\varepsilon)$ et une fonction propre $\varphi(x,\varepsilon)$.

2) *Soit une solution ψ_λ de l'équation*

$$[\hat{L}^0 + \varepsilon\,v(x,\varepsilon)]\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

satisfaisant l'inégalité

$$\int_{-x}^{+x}|\psi_\lambda|^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\mathrm{e}^{\frac{\delta}{2}x} \tag{2.3}$$

avec $\delta > 0, C > 0$ ne dépendant pas de ε. Soit aussi λ^0 la valeur propre simple de l'opérateur $\hat{L}^0$ la plus proche de λ (ou n'importe laquelle des deux, s'il y en a deux plus proches de λ).

Les relations suivantes sont alors vérifiées :

$$\int_{-r_\varepsilon}^{+r_\varepsilon}\left|\left\{1 - \frac{1}{2\pi i}\oint[\hat{L}^0 - z]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k \times[\bar{v}(x,\varepsilon)(\hat{L}^0 - z)^{-1}]^k\,\mathrm{d}z\right\}\psi_\lambda\right|^2\mathrm{d}x \leqslant \sigma^2(\varepsilon) \tag{2.4}$$

$$|\lambda - \mu(\varepsilon)|^2\int_{-r_\varepsilon}^{+r_\varepsilon}|\psi_\lambda|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \sigma^2(\varepsilon) \tag{2.5}$$

avec $$\sigma^2(\varepsilon) = C_1 \exp\left[-(2-\delta) \int_0^{x_\varepsilon} \sqrt{|\lambda^0 - u(x)|}\, \mathrm{d}x \right]$$

Ainsi, pour un λ donné, on détermine un point λ^0 du spectre de l'opérateur $\hat{L}_0$ et la distance d de λ^0 jusqu'au point le plus voisin du spectre de $\hat{L}^0$. Ensuite, à partir de d et de $v(x, \varepsilon)$, on définit le rayon d'observation $r_\varepsilon = x_\varepsilon/2$ au moyen de l'inégalité

$$\varepsilon |v(x,\varepsilon)| \leqslant \frac{d}{2+\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \text{pour } x \leqslant x_\varepsilon .$$

Cette affirmation est un cas particulier d'un théorème qui sera démontré dans le deuxième chapitre. Aussi nous ne la démontrerons pas, mais nous allons seulement commenter sa signification physique.

Premièrement, la condition (2.3) qui porte sur la solution ψ_λ détermine la normalisation de ψ_λ de façon à ce que pour $\varepsilon \to 0$ elle ne tende pas vers l'infini. Deuxièmement, elle sélectionne les classes de solutions comprenant en particulier les fonctions propres associées au spectre discret et continu d'un opérateur essentiellement auto-adjoint de la forme $\hat{L}^0 + \varepsilon v(x, \varepsilon)$. Cependant, nous ne demandons pas le remplacement de la condition (2.3) par le fait que la somme $\hat{L}^0 + \varepsilon v(x, \varepsilon)$ soit essentiellement auto-adjointe. Au contraire même, le problème de l'oscillateur anharmonique ne satisfait pas les conditions du théorème. Les relations (2.4) et (2.5) signifient ceci :

1. Si $|\lambda - \mu(\varepsilon)| \geqslant \delta > 0$, δ ne dépendant pas de ε, la probabilité de trouver une particule à l'intérieur du rayon d'observation (i.e. dans la région $|x| \leqslant r_\varepsilon$) est si petite qu'elle ne peut pas être détectée par l'appareil.

2. Si la probabilité de trouver une particule sur le niveau λ dans le rayon d'observation est plus grande que δ et indépendante de ε $\left(\text{c'est-à-dire si } \int_{-r_\varepsilon}^{+r_\varepsilon} |\psi_\lambda(x)|^2 \, \mathrm{d}x \geqslant \delta > 0\right)$, alors au degré de précision de l'appareil, λ est égal à $\mu(\varepsilon)$ et la fonction propre ψ_λ s'exprime, dans le rayon d'observation, en série de perturbation (avec notre degré de précision). Ainsi, si dans notre problème on néglige les quantités d'ordre $\sigma(\varepsilon)$, nous obtenons une solution complète par la méthode des perturbations.

Il est plus commode de reformuler ce résultat en identifiant au préalable toutes les fonctions dont la différence n'excède pas $\sigma(\varepsilon)$. D'ailleurs notre appareil ne peut pas distinguer de telles quantités. Considérons donc l'espace $L_2(\varepsilon)$ des fonctions de x et de ε, de carré intégrable en x pour $-r_\varepsilon < x < r_\varepsilon$ et continues en ε et l'espace quotient $S = L_2(\varepsilon)/\sigma(\varepsilon)$ dans lequel on identifie les éléments dont la différence appartient au domaine de définition de l'opérateur de multiplication par $1/\sigma(\varepsilon)$. L'égalité dans cet espace-quotient sera indiquée par le symbole $\overline{\overline{S}}$. Par exemple, la relation (2.5) pourra s'écrire

$$|\lambda - \mu(\varepsilon)| \sqrt{\int_{-r_\varepsilon}^{+r_\varepsilon} |\psi_n|^2 \,\mathrm{d}x} \underset{S}{=} 0$$

Ainsi, le problème de l'oscillateur anharmonique n'a de sens que dans l'espace-quotient S.

4. Cas de la perturbation positive

Nous montrons dans le second chapitre que si $v(x,\varepsilon) > 0$, alors $\psi_\lambda(x)$ tend vers zéro en dehors du champ d'observation plus vite que

$$C \exp\left\{ - (1 - \delta) \int_0^x \sqrt{|\lambda - u(x)|} \,\mathrm{d}x \right\}.$$

Aussi les intégrales des membres de gauche des inégalités (2.4) et (2.5) peuvent être étendues de $-\infty$ à $+\infty$. Dans ce cas, il est évident qu'au point $\mu(\varepsilon)$ ne correspond pas plus d'une valeur propre de l'équation $[\hat{L}^0 + \varepsilon v(x,\varepsilon)]\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ vérifiant la condition (2.5).

En effet, dans le cas contraire, nous aurions

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |C_2\psi_{\lambda_1} - C_1\psi_{\lambda_2}|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |C_2(\psi_{\lambda_1} - C_1\varphi(x,\varepsilon)) \\
&\qquad - C_1(\psi_{\lambda_2} - C_2\varphi(x,\varepsilon))|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant |C_2|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\lambda_1} - C_1\varphi(x,\varepsilon)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\qquad + |C_1|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\lambda_2} - C_2\varphi(x,\varepsilon)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\sigma^2(\varepsilon)(|C_1|^2 + |C_2|^2)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

si λ_1 et λ_2 étaient deux valeurs propres satisfaisant (2.5) pour le même $\mu(\varepsilon)$.

Comme le système de fonctions ψ_{λ_k} est orthonormé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C_2\psi_{\lambda_1} - C_1\psi_{\lambda_2}|^2 \,\mathrm{d}x = |C_1|^2 + |C_2|^2$$

D'où, avec (2.6) :

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 \leqslant 2\sigma^2(\varepsilon)\{|C_1|^2 + |C_2|^2\},$$

ce qui est impossible.

Les inégalités (2.4) et (2.5) ne disent rien de l'existence, dans l'intervalle $\lambda^0 - d/2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^0 + d/2$, d'un point du spectre de l'opérateur perturbé $\hat{L}^0 + \varepsilon v(x,\varepsilon)$ tel que l'intégrale, étendue au champ d'observation du carré de la fonction propre correspondante, ne tende pas vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. Mais, en vertu du théorème de Rellich (voir chap. 3, § 2, n° 3), la famille spectrale $E_\lambda^{A+\varepsilon B}$ converge fortement pour $\varepsilon \to 0$ vers E_λ^A. Ici $E_\lambda^{A+\varepsilon B}$ est la famille spectrale de l'opérateur perturbé $A + \varepsilon B$ et E_λ^A celle de l'opérateur non perturbé A. D'où, en notant

$$E_\Delta = E_{\lambda^0 + d/2} - E_{\lambda^0 - d/2}; \quad \Delta = \{\lambda^0 - d/2, \lambda^0 + d/2\}$$

nous aurons

$$E_\Delta^{A+\varepsilon B} \to E_\Delta^A .$$

(la flèche $\to$ indique la convergence forte [voir chap. 2, § 1]). Il est évident, puisque par hypothèse il existe dans l'intervalle Δ un point du spectre λ^0 de l'opérateur A, que $E_\Delta^A \psi^0 = \psi^0$, où ψ^0 est la fonction propre normalisée de l'opérateur A correspondant au point λ^0. C'est-à-dire que :

$$(\psi^0, E^A \psi^0) = \| \psi^0 \| = 1$$

Par conséquent en vertu du théorème de Rellich

$$(\psi^0, E^{A+\varepsilon B} \psi^0) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$$

Puisque

$$\left| \int_{|x| \geqslant r_\varepsilon} \psi^0 E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^0 \, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_{|x| \geqslant r_\varepsilon} |\psi^0|^2 \, dx} \sqrt{\int_{|x| \geqslant r_\varepsilon} | E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^0 |^2 \, dx} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

on a donc

$$\int_{|x| \leqslant r_\varepsilon} \psi^0 E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^0 \, dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1 \tag{2.7}$$

Il en résulte, qu'à la valeur propre λ^0 correspond au moins une fonction propre ψ_λ telle que $\lambda \to \lambda^0$ pour $\varepsilon \to 0$ et que

$$\int_{-r_\varepsilon}^{+r_\varepsilon} | \psi_\lambda(x) |^2 \, dx$$

ne tende pas vers zéro pour $\varepsilon \to 0$.
Sinon, on aurait

$$\int_{-r_\varepsilon}^{+r_\varepsilon} | E_\Delta^{A+\varepsilon B} \psi^0 |^2 \, dx \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui contredit (2.7).

En résumé, nous avons démontré un corollaire des inégalités (2.4) et (2.5).

Corollaire. *Soit $v(x, \varepsilon) > 0$, alors à chaque valeur propre λ^0 de l'opérateur L^0 correspond une et une seule valeur propre λ de l'opérateur L telle qu'on ait les relations*

$$|\lambda - \mu(\varepsilon)| \leqslant C \exp\left\{-(1-\delta)\int_0^{r_\varepsilon} \sqrt{|\lambda^0 - u(x)|}\,\mathrm{d}x\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_\lambda - C_\lambda(\varepsilon)\varphi(x, \varepsilon)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant C \exp\left\{-2(1-\delta)\int_0^{r_\varepsilon} \sqrt{|\lambda^0 - u(x)|}\,\mathrm{d}x\right\}$$

Nous obtiendrons un corollaire semblable pour l'analogue à plusieurs dimensions du théorème du paragraphe 3 (voir chap. 2). Il renforce dans ce cas les résultats de Titchmarsh ([76], voir aussi [24, 2]).

§ 3 POUVOIR DE RÉSOLUTION DE L'APPAREIL

Supposons maintenant que dans $L_2(R^1)$, l'opérateur auto-adjoint

$$A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 \tag{3.1}$$

soit perturbé par l'opérateur

$$\mathrm{i}\,\varepsilon \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} = \varepsilon B.$$

Si nous passons à la représentation en p, c'est-à-dire si nous effectuons une transformation de Fourier, nous obtenons

$$A + \varepsilon B = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2} + p^2 + \varepsilon p^3 \tag{3.2}$$

De cette façon nous sommes ramenés au cas déjà considéré plus haut. Le rayon d'observation dans ce cas sera égal à

$$\rho_\varepsilon = \frac{\mathrm{Cte}}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \tag{3.3}$$

La probabilité de présence d'une particule près du bord du champ d'observation est de l'ordre de $O(\mathrm{e}^{-\mathrm{Cte}/\varepsilon^{2/3}})$. Par conséquent, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, notamment sur le degré de précision, nous pouvons exprimer, sous forme de série convergente pour $\mu(\varepsilon)$, le déplacement des niveaux discrets de l'opérateur non perturbé A sous l'effet de la perturbation εB.

L'interprétation physique du cas considéré consiste en ce que notre appareil a un champ d'observation limité en impulsions, i.e. il ne peut pas observer des particules ayant une impulsion de l'ordre de $O(1/\sqrt[3]{\varepsilon})$; car la probabilité pour que des particules possèdent une impulsion de cet ordre est égale à $O(\mathrm{e}^{-c/\varepsilon^{2/3}})$.

Mais, il résulte immédiatement de là, d'après le principe d'incertitude d'Heisenberg, que l'appareil ne peut pas déterminer avec précision la position d'une particule ! Plus précisément, si le rayon d'observation en impulsions est de l'ordre de r_ε, la dispersion en position (ou le pouvoir de résolution de l'appareil) est de l'ordre de $1/r_\varepsilon$. En réalité, si la particule se trouve au point x_0, son état est de la forme $\delta(x - x_0)$. Mais les fréquences élevées (pour $|p| > |p_\varepsilon|$) de la décomposition de $\delta(x - x_0)$ en intégrale de Fourier ne peuvent pas être observées par notre appareil. Par conséquent, notre appareil ne peut pas déterminer exactement la particule au point $x = x_0$.

Dans certaines expériences concrètes, ce fait peut encore être interprété de la façon suivante. Quand nous disons que nous effectuons une mesure au point x, cela signifie que nous « pointons » l'appareil sur le point x. Pourtant, notre appareil, généralement, ne fait pas de mesure juste au point x, mais peut-être, en un point voisin. De ce fait, l'appareil n'effectue de mesure au point x qu'avec une certaine probabilité.

La densité de probabilité pour que l'appareil fasse une mesure au point (*) x est, en principe, symétrique et atteint son maximum au point $\xi = x$.

Le problème, lié à la perturbation d'un opérateur linéaire, admet en règle générale un grand arbitraire dans la construction de la densité de résolution $Y(x - \xi, \sigma)$. Seul est déterminé l'ordre de grandeur du pouvoir de résolution σ (voir chap. 5, lemme 5.4). Dans l'exemple mentionné, il est évident que,

$$Y(x - \xi, 1/r_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(r_\varepsilon, p)\,\mathrm{e}^{-ipx}\,\mathrm{d}p \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ip\xi}\,\delta(x_0 - \xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P(r_\varepsilon, p)\,\mathrm{e}^{ip(x_0 - x)}\,\mathrm{d}p \tag{3.4}$$

où $P(r_\varepsilon, p)$ est une fonction différentiable égale, à $\sigma(\varepsilon)$ près, à un pour $|p| < r_\varepsilon$ et à zéro pour $|p| > 2r_\varepsilon$. La fonction obtenue $Y(x - \xi, 1/r_\varepsilon)$ est le lissage d'une fonction δ sur une largeur de l'ordre de $1/r_\varepsilon$.

Supposons que l'appareil mesure une certaine grandeur $f(x)$. Ceci signifie que, nous fixant le point x, la valeur $f(x)$ que nous donne notre appareil, a pu en fait être mesurée en un autre point. Par conséquent, la valeur moyenne $\overline{f(x)}$ de la grandeur $f(x)$ est la meilleure information que l'on puisse obtenir sur cette grandeur. Dans notre exemple

$$\overline{f(x)} = \text{Cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin C \dfrac{(x - \xi)}{\varepsilon^{1/3}}}{x - \xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-C/\varepsilon^{1/3}}^{+C/\varepsilon^{1/3}} \mathrm{e}^{-ipx}\,\mathrm{d}p \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ip\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{3.5}$$

(*) Cette interprétation a un caractère quelque peu conventionnel. Le traitement physique précis de la fonction $Y(x - \xi, \sigma)$ est analogue à celui de la fonction propre de l'opérateur de position dans l'espace de Klein-Gordon ([86]).

La fonction propre $\psi_\lambda(x)$ de l'opérateur perturbé que nous mesurerons est une quantité dépendant de ε. Pour tout ε fixé, nous effectuons une mesure de la probabilité de présence en x avec la « densité de résolution » $Y(x - \xi, \varepsilon)$ et nous en prenons la valeur moyenne.

Par une régularisation semblable à (3.6), la série de perturbation nous donne à la précision de $O(\mathrm{e}^{-c/\varepsilon^{2/3}})$ une approximation de la fonction $\varphi(x, \varepsilon)$ et une approximation des points λ du spectre de l'opérateur perturbé pour lequel $\varphi(x, \varepsilon)$ ne tend pas vers zéro. Or il résulte de tout ce qui précède, que $\varphi(x, \varepsilon)$ est justement la grandeur que le physicien a besoin de déterminer.

Cette discussion se transporte immédiatement au cas général. Ainsi, si le physicien :

1) décrit le système qu'il perturbe, c'est-à-dire écrit l'équation non perturbée (possédant un spectre discret);

2) définit la perturbation, c'est-à-dire écrit l'équation perturbée;

3) affirme que cette perturbation affecte peu son observation;

alors, à l'aide de la méthode de régularisation décrite, il est possible de calculer quantitativement les variations des résultats de mesures physiques et de donner l'étendue du champ d'observation et le pouvoir de résolution (i.e. la dispersion de la densité de probabilité de la position) de son appareil.

§ 4 FORMULATION DU PROBLÈME POUR UN OPÉRATEUR AUTOADJOINT ARBITRAIRE

Les notions de rayon d'observation et de pouvoir résolvant peuvent être généralisées à un opérateur auto-adjoint quelconque.

Soit A un opérateur auto-adjoint, non borné en général, d'un espace de Hilbert H.

Soient λ^0 un point isolé du spectre de A de multiplicité finie m, et d la distance de λ^0 au reste du spectre.

Considérons l'équation perturbée de la forme :

$$[A + \varepsilon f(\varepsilon, B)]\psi = \lambda\psi$$

B étant un opérateur auto-adjoint, $f(\varepsilon, \mu)$ une fonction bornée pour μ fixé et $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et λ un point situé plus près de λ^0 que le reste des points du spectre de A. Dans ce cas, la régularisation consistera à couper les grandes fréquences de l'opérateur B.

Soit $|\mu| \leqslant \mu(\varepsilon)$ le domaine maximal dans lequel $f(\varepsilon,\mu) \leqslant \dfrac{d}{(2 + \alpha)\varepsilon}$ avec $\alpha > 0$. $\left(\text{En particulier, si } f(\varepsilon,B) = B, \mu(\varepsilon) = \dfrac{d}{(2 + \alpha)\varepsilon}\right)$. On appellera $r_\varepsilon = \mu(\varepsilon)/2$ le rayon d'observation dans le registre de B.

Supposons que l'opérateur $A + \varepsilon f(\varepsilon, B)$ soit auto-adjoint et que ψ_λ en soit une fonction propre généralisée telle que la fonctionnelle

$$(E^B_\Delta g, \psi_\lambda)$$

existe quels que soient $g \in H$ et Δ un intervalle fixe. Ceci définit un élément $f \in H$ tel que

$$(E^B_\Delta g, \psi_\lambda) = (g, f)$$

Par définition $f = E^B_\Delta \psi_\lambda$.

Supposons que ψ_λ soit normalisé de façon à ce que

$$\| E^B_\Delta \psi_\lambda \| \leqslant C(\Delta)$$

$C(\Delta)$ étant une constante indépendante de ε.

Définition. *La famille $\varphi(\varepsilon)$ sera dite faiblement convergente vers zéro dans le registre de l'opérateur B si $E^B_\Delta \varphi(\varepsilon)$ converge fortement vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$ quel que soit l'intervalle donné*

$$\Delta = [\lambda_1, \lambda_2] \qquad (E^B_\Delta = E^B_{\lambda_2} - E^B_{\lambda_1})$$

Nous nous intéresserons au cas où même l'intervalle Δ dépend de ε,

$$\Delta_\varepsilon = \{-r_\varepsilon, r_\varepsilon\},$$

et en plus nous aurons non seulement besoin de la convergence vers zéro de l'expression $\| E^B_\Delta \varphi(\varepsilon) \|$ pour certaines fonctions $\varphi(\varepsilon)$, mais aussi d'une estimation de l'ordre de grandeur de cette quantité.

Désignons par $\mu_j(\varepsilon), 1 \leqslant j \leqslant m$, les valeurs propres de l'opérateur

$$R = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A + \varepsilon E^B_{\Delta_\varepsilon} f(\varepsilon, B))(A - z)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k [(E^B_{\Delta_\varepsilon} f(\varepsilon, B)(A - z)^{-1}]^k dz$$

où Γ est un cercle centré au point λ^0 et de rayon $d/2$. Étant donné que $\varepsilon E^B_{\Delta_\varepsilon} f(\varepsilon, B)$ est par construction inférieur à $\dfrac{d}{2 + \alpha}, \alpha > 0$, alors, d'après le lemme 1.1, les séries considérées convergent et l'opérateur R est un opérateur auto-adjoint complètement continu de dimension m (i.e. ayant en tout m fonctions propres).

Les résultats exposés précédemment et ceux du second chapitre suggèrent une hypothèse : sous les conditions énoncées précédemment, l'inégalité suivante est exacte quel que soit $j (1 \leqslant j \leqslant m)$

$$|\lambda - \mu_j(\varepsilon)| \, \| E^B_{\Delta_\varepsilon} \psi_\lambda \| \leqslant C \| (1 - E^B_{\Delta_\varepsilon(1-\delta)}) E^A_{\lambda^0 - d/2, \lambda^0 + d/2} \psi_\lambda \|$$

C étant une constante indépendante de ε.

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS PROPRES ET THÉORIE DES PERTURBATIONS POUR LES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS OPÉRATEURS

§ 1 CERTAINS RÉSULTATS DE LA THÉORIE DES OPÉRATEURS

Nous allons considérer des opérateurs linéaires, en général non bornés, opérant d'un espace de Banach B_1 dans un autre espace de Banach B_2. Ainsi, par opérateur linéaire A, on entend la fonction

$$V = A(u)$$

définie sur un ensemble linéaire $D(A) \subset B_1$, à valeurs dans B_2 et satisfaisant

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha A(u_1) + \beta A(u_2).$$

Le domaine des valeurs de l'opérateur A, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{ Au ; u \in D(A) \}$$

sera noté $R(A)$. L'opérateur A sera dit continu si $u_n \to u$ entraîne $Au_n \to Au$. L'opérateur A est borné si

$$\sup_{u \in D(A)} \frac{\| Au \|}{\| u \|} < \infty$$

on appellera norme de l'opérateur A (noté $\| A \|$) la quantité $\sup\limits_{u \in D(A)} \dfrac{\| Au \|}{\| u \|}$.

Il est bien connu qu'un opérateur linéaire continu est également borné. Si l'opérateur A est continu, il est possible de le prolonger par continuité sur le sous-espace fermé $\overline{D(A)}$, auquel nous pouvons (au lieu de tout B_1) nous restreindre. Ainsi un opérateur linéaire borné est considéré comme naturellement défini sur tout l'espace.

Nous dirons qu'une famille d'opérateurs $\{A_\alpha\}$ est bornée s'il existe une constante M telle que

$$\| A_\alpha \| \leqslant M$$

quelque soit A_α appartenant à la famille.

Un opérateur A sera dit fermé si $u_n \to u$ et $Au_n \to v$ entraînent $u \in D(A)$ et $Au = v$. Tout opérateur borné est fermé, mais la réciproque est fausse.

L'opérateur $\tilde{A}$ est une extension de l'opérateur A si :

$$D(A) \subset D(\tilde{A})$$

et $Au = \tilde{A}u$ pour tout $u \in D(A)$.

Plus tard nous ne considèrerons, en règle générale, que des opérateurs soit fermés soit tels qu'ils aient des extensions fermées. Si l'opérateur A possède des extensions fermées, il y a parmi elles une extension minimale (c'est-à-dire ayant le plus petit domaine de définition) appelée la *fermeture* de l'opérateur A notée $\bar{A}$.

Si le domaine de définition $D(A)$ de l'opérateur A est partout dense dans B_1, il existe un opérateur A^*, uniquement défini, opérant de B_2^* dans B_1^* (l'étoile indique l'espace adjoint) et vérifiant

$$(Au,\psi) = (u,A^*\psi) \qquad \text{avec } \psi \subset B_2^*$$

quel que soit $u \subset D(A)$.

Il est aisé de vérifier que l'opérateur adjoint est toujours fermé. Si A est tel que $Au = 0$ entraîne $u = 0$, l'opérateur inverse A^{-1} est défini sur $R(A)$ et son domaine de valeurs $R(A^{-1})$ est $D(A)$. De la définition d'un opérateur fermé, on voit que A est fermé si et seulement si A^{-1} est fermé. Un opérateur fermé A, tel que $D(A) = B_1$, est borné.

Soit A un opérateur linéaire fermé dans un espace de Hilbert H, ayant un domaine de définition, $D(A)$, dense. Alors

$$B = [1 + A^* A]^{-1}$$

existe et est un opérateur positif auto-adjoint et borné, et de plus $\| B \| \leqslant 1$. L'opérateur AB est aussi borné : $\| AB \| \leqslant 1$. Les domaines de définition $D(A^*)$ et $D(A^* A)$ des opérateurs A^* et $A^* A$ sont denses dans H. L'opérateur A^{**} existe et est égal à A.

Plus bas nous aurons toujours à utiliser la notion de suites convergentes d'opérateurs. Il est possible de définir différents types de convergences des opérateurs linéaires. Pour nous, les types suivants seront essentiels :

soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs bornés. On dit que cette suite converge uniformément vers l'opérateur A si $\| A_n - A \| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Nous dirons qu'une suite $\{A_n\}$ d'opérateurs linéaires (en général non bornés), ayant tous le même domaine de définition D, converge fortement sur D vers l'opérateur A si quel que soit $u \in D$

$$\| A_n u - Au \| \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty .$$

Enfin, on dira que la suite $\{A_n\}$ converge faiblement vers A si quel que soit $u \in D$, la suite $\{A_n u\}$ converge faiblement vers Au. Autrement dit, cela signifie que $(A_n u, \psi) \to (Au, \psi)$ quels que soient $u \in D$ et $\psi \in B_2^*$. On peut schématiser les relations entre ces trois types de convergence par :

$$\text{uniforme} \Rightarrow \text{forte} \Rightarrow \text{faible.}$$

Pour les transformations linéaires d'un espace de dimension finie, ces trois types de convergence coïncident. Dans le cas infini, ces notions sont distinctes.

Nous allons formuler, pour la commodité de la suite de l'exposé, des résultats bien connus sur la convergence des suites d'opérateurs linéaires, résultats sur lesquels nous nous appuierons dans la suite.

1) **Le théorème de Banach-Steinhaus**

Soit $\{A_n\}$ une suite bornée d'opérateurs linéaires agissant de B_1 dans B_2, c'est-à-dire telles que $\| A_n \| \leqslant M = \text{const.}$ pour tout n. Supposons que $\| A_n f - Af \| \to 0$ quel que soit f appartenant à un ensemble partout dense dans B_1. Alors $\| A_n f - Af \| \to 0$ pour tout $f \in B_1$ et $\| A \| \leqslant M$, ([84]).

2) Si la suite $f_n \in B_1$ converge faiblement, alors elle est bornée ([35], [84]).

3) Dans un espace de Banach réflexif, toute suite bornée est faiblement compacte ([84]).

4) Si dans un espace de Banach f_n converge faiblement vers f et $\| f_n \|$ vers $\| f \|$, alors f_n converge fortement vers f ([35]).

5) **Théorème de Lebesgue.** *Si la suite de fonctions mesurables $f_n(t)$ converge presque partout vers $f(t)$ et est majorée par une fonction intégrable, alors*

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \ \textit{ converge vers } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \ \ ([56]).$$

Dans la suite nous aurons souvent à considérer les opérateurs définis dans un espace de fonctions à valeurs dans un espace de Banach (en particulier un espace de Hilbert). Pour nous seront essentielles les trois variantes d'une certaine construction :

a) Soit B_1 un espace de Banach et $C(B_1)$ l'ensemble des fonctions $u(t)$ à valeurs dans B_1, définies sur le segment $[0, s]$ et continues, i.e. telles que

$\| u(t) - u(t_0) \| \to 0$ lorsque $t \to t_0$. Sur $C(B_1)$, on définit une norme, en posant

$$\| u(t) \|_{C(B_1)} = \sup_t \| u(t) \|_{B_1}$$

ce qui fait de $C(B_1)$ un espace de Banach.

Si $T(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant s)$ est un semi-groupe borné d'opérateurs dans B_1, il est possible de le considérer comme un opérateur appliquant l'espace B_1 dans l'espace $C(B_1)$ ([84]).

b) Soient H un espace de Hilbert et $L_2[H]$ une somme directe continue d'espaces isomorphes à H. Ceci signifie que $L_2[H]$ est l'ensemble des fonctions $h(t)$ à valeurs dans H, mesurables en ce sens que $(h(t), h_0)$ est, quel que soit $h_0 \in H$, une fonction numérique mesurable, et satisfaisant la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| h(t) \|_H^2 \, \mathrm{d}t < \infty.$$

Si dans $L_2[H]$, le produit scalaire des éléments $h(t)$ et $g(t)$ est défini par

$$(h, g) = (h(t), g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (h(t), g(t))_H \, \mathrm{d}t$$

alors $L_2[H]$ est un espace de Hilbert, séparable si H est séparable.

Nous aurons besoin de la propriété suivante : si $h(t), g(t) \in L_2[H]$ tendent vers zéro lorsque $t \to \pm\infty$ et si $h'(t)$ et $g'(t) \in L_2[H]$, on a l'égalité :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(t), g(t) \right) = - \left(h(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) \right).$$

Pour démontrer cette égalité nous réalisons H comme l'espace des suites l_2. Alors tout élément de $L_2[H]$ se représente comme une suite $\{ a_n(t) \}$, les $a_n(t)$ étant des fonctions numériques mesurables et

$$\sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} a_n^2(t) \, \mathrm{d}t < \infty$$

Le produit scalaire de deux éléments a et b de $L_2[H]$ s'écrit dans ce cas

$$(a, b) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t) \, b_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

Si tous les $a_n(t)$ et $b_n(t)$ tendent vers zéro lorsque $|t| \to \infty$ et si $\{ a_n'(t) \}$ et $\{ b_n'(t) \}$ sont des éléments de $L_2[H]$, on a pour tout n

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a_n'(t) \, b_n(t) \, \mathrm{d}t = - \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t) \, b_n'(t) \, \mathrm{d}t$$

et par conséquent

$$\sum \int_{-\infty}^{+\infty} a_n'(t)\, b_n(t)\, dt = -\sum \int_{-\infty}^{+\infty} a_n(t)\, b_n'(t)\, dt .$$

Soient B un espace de Banach et $L_1(B)$ l'ensemble des fonctions $u(t)$ à valeurs dans B, définies sur le segment $[0, s]$ et telles que $\| u(t) \|_B$ soit intégrable en t sur $[0, s]$ et que $(u(t), f(t))$ soit mesurable pour tout $f(t)$, C^∞ à support compact. Dans $L_1(B)$ on définit une norme en posant :

$$\| u(t) \|_{L_1(B)} = \int_0^1 \| u(t) \|_B \, dt,$$

ce qui fait de $L_1(B)$ un espace de Banach. On appelle fonctions intégrables selon Bochner, les fonctions à valeurs dans B et appartenant à $L_1(B)$.

L'ensemble des fonctions prenant deux valeurs est fondamental dans $L_1(B)$, i.e. la fermeture linéaire de cet ensemble est dense dans $L_1(B)$ ([84]).

§ 2 MÉTHODE FONDAMENTALE D'ESTIMATION D'UNE SOLUTION

Exemple. Nous allons d'abord montrer sur un exemple simple quelle est l'idée fondamentale de la méthode qui nous permettra d'obtenir des estimations.

Considérons dans $L_2[R^2]$ l'opérateur

$$L = A \frac{\partial}{\partial x} + B = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B\left(x, y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

où l'opérateur linéaire $B(x, y, \partial / \partial y)$ commute avec x et où $A(x, y)$ est une fonction numérique telle que $|A(x, y)| \leqslant 1$.

Supposons d'abord que $\hat{L}^{-1}$ existe et soit borné

$$\| \hat{L}^{-1} \| \leqslant N .$$

Soit $u \in L_2$ une solution de l'équation

$$\hat{L}u = f(x, y), \quad f \in L_2 \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0 \quad \text{pour } x \geqslant \tilde{x} .$$

Si $\varphi(x)$ est une fonction différentiable par morceau et si $\varphi(x)\, f(x, y) = 0$, alors on a

$$\hat{L}(\varphi u) = \hat{L}(\varphi u) - \varphi f = [\hat{L}, \varphi]\, u = A \varphi_x' u$$

(le crochet dénote le commutateur).

D'où :

$$\| \varphi(x) u \|^2 \leqslant N^2 \| \varphi_x' u \|^2 .$$

Supposant

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x - \xi)^k & \text{pour } x > \xi \\ 0 & \text{pour } x \leqslant \xi \end{cases}$$

k étant un entier et $\xi > \tilde{x}$ nous obtenons

$$\int_{\xi}^{+\infty} (x-\xi)^{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \leqslant N^2 k^2 \int_{\xi}^{\infty} (x-\xi)^{2k-2} \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, \mathrm{d}y \quad (2.1)$$

Pour $k = 1$, les intégrales du membre de droite de l'inégalité convergent, ce qui entraîne la convergence de l'intégrale de gauche. Supposons par induction que l'intégrale

$$\int_{\xi}^{+\infty} (x-\xi)^{2k-2} \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, \mathrm{d}y$$

converge. L'inégalité (2.1) entraînera la convergence de l'intégrale

$$\int_{\xi}^{+\infty} (x-\xi)^{2k} \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, \mathrm{d}y .$$

Il en résulte que toutes les intégrales de (2.1) convergent pour $k = n$, n étant un entier positif quelconque.

Notons

$$\Phi_n(\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} (x-\xi)^{2n} \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \, \mathrm{d}y .$$

De l'inégalité (2.1) on obtient

$$\Phi_n(\xi) \leqslant N^2 \frac{n^2}{2n(2n-1)} \Phi_n''(\xi) .$$

Cette inégalité permet d'estimer l'intégrale

$$\int_{\xi}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,y) \, \mathrm{d}y$$

pour les grandes valeurs de ξ.

Étant donné que n est aussi grand que l'on veut, on a :

$$\Phi_n(\xi) \leqslant \frac{N^2}{4}(1 + \delta_n) \Phi_n'' ,$$

avec $\delta_n \to 0$ pour $n \to \infty$.

Multiplions les deux membres de l'inégalité par Φ_n' et intégrons de ξ à ∞, nous arrivons à l'inégalité

$$\Phi_n^2(\xi) \leqslant \frac{N^2}{4} (1 + \delta_n)(\Phi_n')^2 .$$

D'où, tenant compte de ce que $\Phi_n(\infty) = 0$, nous obtenons :

$$\Phi_n(\xi) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{2}{N}(1-\delta_n/2)(\xi-\xi_0)} \Phi_n(\xi_0) \quad (2.2)$$

Donnons comme exemple le cas d'une équation différentielle usuelle où l'estimation (2.2) est réalisée avec $\delta_n = 0$.

Soit $\hat{L} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$, alors $\| \hat{L}^{-1} \| < 1$.

Soit $\hat{L}u = 0$ pour $x > a$, alors

$$u = C\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad \int_{\xi}^{+\infty} (x-\xi)^{2n} u^2 \,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}} C\mathrm{e}^{-2\xi}$$

pour $x > a$. D'où

$$\Phi_n(\xi) = \mathrm{e}^{-2(\xi-\xi_0)} \Phi_n(\xi_0),$$

ce qu'il fallait démontrer.

De (2.2) on peut tirer une estimation de $\displaystyle\int_{\xi}^{+\infty} u^2 \,\mathrm{d}x$ et en outre :

$$\int_{\xi+1}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \,\mathrm{d}y \leqslant \int_{\xi+1}^{+\infty} (x-\xi)^{2n} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi)^{2n} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \,\mathrm{d}y = \Phi_n(\xi)$$

Remarque 1

Il est facile de voir qu'il est seulement nécessaire que l'opérateur B commute avec $\varphi(x)$ et que l'opérateur A soit borné. Par conséquent, B peut être une matrice, comprenant des dérivées par rapport à tous les arguments excepté x, et à coefficients quelconques dépendant de toutes les variables. L'opérateur A peut être une matrice dont les éléments sont bornés et dépendent de toutes les variables. Autrement dit, $A(x)$ et $B(x)$ sont des opérateurs dans un espace de Hilbert H dépendant de x comme paramètre. On notera $\| g \|_H$ la norme de $g \in H$. Nous considérerons l'opérateur $\hat{L} = A \dfrac{\partial}{\partial x} + B(x)$ dans l'espace de Hilbert $L_2[H]$ des fonctions de carré intégrable en x, à valeurs dans H. Si $A(x)$ et $B(x)$ sont des matrices, l'élément $h \in L_2[H]$ sera un vecteur colonne h_ν et la définition de la norme comportera une sommation sur l'indice ν. Ainsi l'estimation (2.1) reste valable pour un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre en x.

Il est possible d'utiliser une méthode analogue dans les espaces de Banach.

Remarque 2

Pour déduire la formule (2.1) nous avons besoin de l'existence de $\hat{L}^{-1}$ et de son caractère borné. Mais, si on tient compte de ce que $\varphi(x) = 0$ pour $x < \xi$, il devient clair qu'il est suffisant de demander que l'opérateur $\hat{L}_\xi^{-1}$ existe et soit borné, où $\hat{L}_\xi$ est la restriction de l'opérateur $\hat{L}$:

$$\hat{L}_\xi = \hat{L}$$

à l'ensemble des fonctions, s'annulant pour $x < \xi$ $(\hat{L}_\xi \subset \hat{L})$. Alors la norme de l'opérateur inverse $\| L_\xi^{-1} \| = N(\xi)$ dépendra de ξ et dans l'inégalité (2.1) on peut remplacer N par $N(\xi)$.

Cette remarque sera particulièrement importante lorsque nous passerons à des opérateurs de la forme

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + B(x),$$

par exemple et n'ayant pas d'inverse.

Dans ce cas, si $B(x) > 0$ pour $x > a$ et $B(x) > N(\xi)$ pour $x > \xi \geqslant a$, l'opérateur inverse L^{-1} existera sur les fonctions nulles pour $x < \xi$ et

$$\| \hat{L}_\xi^{-1} \| \leqslant N(\xi).$$

§ 3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE A COEFFICIENTS OPÉRATORIELS

Nous appliquons la méthode exposée pour obtenir une estimation des fonctions propres des opérateurs auto-adjoints.

Considérons l'espace $L_2(H)$ des fonctions $g(x)$ à valeurs dans un espace de Hilbert H :

$$\| g \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \| g(x) \|_H^2 \, dx ; \quad (g_1, g_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (g_1(x), g_2(x))_H \, dx .$$

Considérons dans $L_2(H)$, un opérateur auto-adjoint de la forme

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + B(x) \tag{3.0}$$

où $B(x)$ commute avec l'opérateur de multiplication par x et vérifie la condition

$$\int_\xi^{+\infty} (B(x) g(x), g(x))_H \, dx \geqslant \alpha^2 \int_\xi^{+\infty} \| g(x) \|_H^2 \, dx \tag{3.1}$$

pour $\xi \to +\infty$ et $g(x) \in D(B(x))$ ($D(B)$ est le domaine de définition de l'opérateur B).

Théorème 2.1 ([51, 10]). *Soient λ un point du spectre discret de l'opérateur $\hat{L}$; $d < \infty$ la distance du point λ au spectre continu de l'opérateur $\hat{L}$, $a = \alpha^2 - \lambda$. Chaque fonction propre $\psi(x)$ de l'opérateur $\hat{L}$, correspondant à la valeur propre λ, vérifie l'inégalité*

$$\int_\xi^{+\infty} \| \psi(x) \|_H^2 \, dx \leqslant C(\delta) e^{-2(1-\delta) w \xi} \tag{3.2}$$

avec $\delta > 0$ un nombre fixé, $C(\delta)$ une constante dépendant de δ, et où

$$w = [0{,}4\,a + (0{,}16\,a^2 + 0{,}2\,d^2)^{1/2}]^{1/2} \tag{3.3}$$

est une constante précise (*).

Corollaire. Soit $\psi(x,y,z)$ une fonction propre de l'équation de Schrödinger $-\Delta\psi + u(x,y,z)\psi = \lambda\psi$ et soit

$$\operatorname*{Inf}_{x\to\infty} u(x,y,z) \geqslant \alpha^2 .$$

On sait ([23]) que dans ce cas

$$|\psi(x,y,z)|^2 = |\psi(P)|^2 \leqslant C \int_{PQ\leqslant 1} |\psi(Q)|^2\,\mathrm{d}Q \tag{3.4}$$

où PQ est la distance entre les points P et Q.

De (3.2) et (3.4) il résulte

$$|\psi(x,y,z)|^2 \leqslant C \int_{x-1}^{+\infty} \mathrm{d}x' \int\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x',y',z')|^2\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \leqslant \tilde{C}(\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-2(1-\delta)wx}$$

ou w s'exprime par la formule (3.3). De cette estimation on déduit l'estimation donnée par E. E. Schnol ([88]) en 1957, avec $w \sim \ln d$.

Remarque. Supposons que H soit la droite numérique et que

$$B(x) = u(x) \to 0 \text{ pour } |x| \to \infty .$$

Alors $a = \alpha^2 - \lambda = d$ et de (3.3) nous obtenons $w = \sqrt{a}$. En fait dans ce cas $\psi(x) \sim \mathrm{e}^{-ax}$. Ainsi dans cet exemple, la valeur de la constante w est atteinte.

Pour démontrer le théorème nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soit $g(x) \in D(\hat{L})$ avec $g(x) = 0$ et $\hat{L}g(x) = 0$ pour $x \leqslant \xi$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ξ_ε, indépendant de g et tel que pour $\xi > \xi_\varepsilon$*

$$(d-\varepsilon)^2\,\|g(x)\|^2 \leqslant \|[\hat{L}-\lambda]\,g(x)\|^2 . \tag{3.5}$$

Démonstration. Soient λ une valeur propre de multiplicité ρ,

$$\psi_\lambda^i,\ i = 1, \dots, \rho$$

les fonctions propres correspondantes, et ψ_{λ_k} les autres fonctions propres de l'opérateur $\hat{L}$.

Démontrons l'inégalité

$$\|g(x)\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\rho} |(g,\psi_\lambda^i)|^2 + \sum_{\substack{\lambda_k\neq\lambda \\ |\lambda-\lambda_k|\leqslant d-\varepsilon}} \left\{(\psi_{\lambda_k},[\hat{L}-\lambda]\,g)^2\left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2} - \frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\right]\right\} + \frac{1}{(d-\varepsilon)^2}\,\|[\hat{L}-\lambda]\,g\|^2 \tag{3.6}$$

(*) Voir la remarque.

Notant $f = (\hat{L} - \lambda)g$ et R_λ la résolvante de l'opérateur $\hat{L}$ au point λ (sur le sous-espace orthogonal aux $\psi_\lambda^i, i = 1, 2, \dots, \rho$), nous obtenons :

$$\|g\|^2 - \sum_{i=1}^{\rho} |(g, \psi_\lambda^i)|^2 = \left\| g - \sum_{i=1}^{\rho} (g, \psi_\lambda^i)\psi_\lambda^i \right\|^2 = \|R_\lambda f\|^2$$

$$= \left\| \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f) R_\lambda \psi_{\lambda_k} + R_\lambda \left\{ f - \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f)\psi_{\lambda_k} \right\} \right\|^2$$

$$= \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon} \frac{(\psi_{\lambda_k}, f)^2}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \left\| R_\lambda (f - \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f)\psi_{\lambda_k} \right\|^2$$

$$\leqslant \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon} \frac{(\psi_{\lambda_k}, f)^2}{(\lambda - \lambda_k)^2} + \frac{1}{(d - \varepsilon)^2} \left\{ \|f\|^2 - \sum_{|\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon} (\psi_{\lambda_k}, f)^2 \right\}$$

D'où (3.6).

D'après les conditions du lemme, on a

$$(g, \psi_\lambda^i)^2 \leqslant \int_\xi^{+\infty} \|\psi_\lambda^i\|_H^2 \, \mathrm{d}x \cdot \|g\|^2,$$

$$([\hat{L} - \lambda] g, \psi_{\lambda_k})^2 \leqslant \int_\xi^{+\infty} \|\psi_{\lambda_k}\|_H^2 \, \mathrm{d}x \cdot \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

De là, et avec (3.6), on obtient l'inégalité suivante

$$\|g(x)\|^2 \leqslant \|g\|^2 \sum_{i=1}^{\rho} \int_\xi^{+\infty} \|\psi_\lambda^i\|_H^2 \, \mathrm{d}x + \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

$$\sum_{\substack{\lambda_k \neq \lambda \\ |\lambda - \lambda_k| \leqslant d - \varepsilon}} \int_\xi^{+\infty} \|\psi_{\lambda_k}\|_H^2 \, \mathrm{d}x \left\{ \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2} - \frac{1}{(d - \varepsilon)^2} \right\} + \frac{1}{(d - \varepsilon)^2} \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2$$

D'où, pour $\xi > \xi_\varepsilon$:

$$\|g(x)\|^2 \leqslant O_1(\varepsilon)\|g\|^2 + O_2(\varepsilon)\|(\hat{L} - \lambda)g\|^2 + \frac{1}{(d - \varepsilon)^2}\|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

Par conséquent

$$(d - \varepsilon)^2 (1 - O_1(\varepsilon)) \|g(x)\|^2 \leqslant (O_3(\varepsilon) + 1) \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2$$

ou bien

$$(d - O_4(\varepsilon))^2 \|g(x)\|^2 \leqslant \|(\hat{L} - \lambda)g\|^2.$$

En notant $O_4(\varepsilon)$ à nouveau ε, nous obtenons l'affirmation du lemme 2.1.

Démonstration du théorème. Soit $\varphi(x)$ une fonction deux fois différentiable, s'annulant pour $x < \xi$.

On a :

$$\|[\hat{L} - \lambda] \varphi(x)\psi(x)\|^2 = \|\varphi''\psi + 2\varphi'\psi'\|^2$$

$$= \|\varphi''\psi\|^2 + 4(\varphi''\psi, \varphi'\psi') + 4\|\varphi'\psi'\|^2 \quad (3.7)$$

Les identités suivantes sont évidentes :

$$2(\varphi''\psi, \varphi'\psi') = -([\varphi''\varphi']'\psi, \psi),$$

$$0 = ([\varphi']^2\psi, [\hat{L} - \lambda]\psi) = -([\varphi']^2\psi, \psi'') + ([(B-\lambda)]\psi\varphi', \varphi'\psi)$$

$$= 2(\varphi'\varphi''\psi, \psi') + \|\varphi'\psi'\|^2 + ([B-\lambda]\varphi'\psi, \varphi'\psi). \tag{3.8}$$

De (3.8) il résulte en vertu de la condition (3.1) que, pour suffisamment grand,

$$-\|\varphi'\psi'\|^2 - 2(\varphi'\varphi''\psi, \psi') \geqslant a\|\varphi'\psi\|^2 \tag{3.8'}$$

De (3.5), (3.8), (3.8′) et (3.7) il résulte que

$$(d-\varepsilon)^2\|\varphi\psi\|^2 \leqslant \|\varphi''\psi\|^2 + 2([\varphi''\varphi']'\psi, \psi) - 4a\|\varphi'\psi\|^2 \tag{3.9}$$

Supposons maintenant que $\varphi(x) = (x-\xi)^n$ pour $x > \xi$ et zéro pour $x \leqslant \xi$. Par induction sur l'inégalité (3.9) on a que

$$\Phi(\xi) = \|\varphi\psi\|^2 = \int_{\xi}^{+\infty}(x-\xi)^{2n}\|\psi\|_H^2\,\mathrm{d}x$$

existe quel que soit n. L'inégalité (3.9), pour n suffisamment grand $n > n_{\varepsilon_1}$, prend la forme

$$16\,d^2(1-\varepsilon_1)\Phi \leqslant 5\,\Phi^{(\mathrm{IV})} - 16\,a\Phi''.$$

De là, il s'ensuit que $\Phi(\xi)$ vérifie l'inégalité

$$5\,\Phi^{(\mathrm{IV})} - 16\,a\Phi'' - 16\,d^2(1-\varepsilon_1)\Phi \geqslant 0 \tag{3.10}$$

Les racines du polynôme caractéristique correspondant à l'opérateur figurant au membre de gauche de l'inégalité s'écrivent :

$$\beta^2 = \frac{8\,a - \sqrt{64\,a^2 + 80\,d^2(1-\varepsilon_1)}}{5}$$

$$\gamma^2 = \frac{8\,a + \sqrt{64\,a^2 + 80\,d^2(1-\varepsilon_1)}}{5} = 4\,w^2(1-\varepsilon_2).$$

Notant

$$\mathscr{F}(\xi) = \Phi'' - \beta^2\Phi = \Phi'' + |\beta|^2\Phi.$$

Alors (3.10) donne

$$(\mathscr{F}'' - \gamma^2\mathscr{F}) \geqslant 0. \tag{3.11}$$

En multipliant par $\mathscr{F}'$ les deux membres de l'inégalité (3.11) et en intégrant, tenant compte de ce que $\mathscr{F}(\infty) = \mathscr{F}'(\infty) = 0$, nous obtenons

$$(\mathscr{F}'(\xi))^2 \geqslant \gamma^2(\mathscr{F}(\xi))^2.$$

D'où, étant donné que $\mathscr{F}'(\xi) < 0$, on a

$$\mathscr{F}(\xi) \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\gamma\xi},$$

c'est-à-dire

$$\Phi'' + |\beta|^2 \Phi \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\gamma\xi},$$

et comme $\Phi''(\xi) > 0$ et $\Phi(\xi) > 0$, on a l'inégalité

$$\Phi(\xi) \leqslant C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma\xi}. \tag{3.12}$$

Comme d'autre part

$$\int_{\xi}^{+\infty} \|\psi\|_H^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \Phi(\xi - 1) \tag{3.13}$$

on en déduit l'inégalité

$$\int_{\xi}^{+\infty} \|\psi\|_H^2 \,\mathrm{d}x \leqslant C_2(\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-\gamma\xi} = C_2(\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-2w(1-\varepsilon)\xi}$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 4 OPÉRATEUR DU PREMIER ORDRE

La méthode proposée peut aussi être appliquée pour estimer les fonctions propres des opérateurs auto-adjoints du premier ordre en x de la forme

$$\hat{L} = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + B(x) \tag{4.1}$$

avec $\|A\| \leqslant 1$, et en particulier les fonctions propres de l'équation stationnaire de Dirac (*).

Soient λ une valeur propre, ψ la fonction propre de l'opérateur $\hat{L}$ qui lui correspond et $\varphi(x) \in C^2$, nulle pour $x < \xi$, alors

$$\left[A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + B(x) - \lambda\right]\psi\,\varphi(x) = A\varphi'\psi$$

c'est-à-dire

$$[\hat{L} - \lambda]\,\psi\varphi(x) = A\varphi'\psi.$$

D'après le lemme 2.1, pour ξ suffisamment grand : $\xi > \xi_\varepsilon$,

$$(d - \varepsilon)^2 \|\varphi\psi\|^2 \leqslant \|A\varphi'\psi\|^2 \leqslant \|\varphi'\psi\|^2.$$

Comme précédemment, prenons $\varphi(x) = (x - \xi)^n$ pour $x > \xi$ et zéro

(*) Si dans l'équation de Dirac ([10], [86]) les coefficients ne dépendent pas de t, alors en y substituant des fonctions de la forme $\psi = \mathrm{e}^{i\lambda t}\varphi$, nous obtenons pour φ l'équation stationnaire de Dirac.

pour $x < \xi$ et posons $\Phi(\xi) = \| \varphi \psi \|^2$; nous obtenons pour n suffisamment grand, $n > n_{\varepsilon_1}$:

$$\Phi'' \geqslant 4(d - \varepsilon_1)^2 \Phi$$

Comme pour (3.12)

$$\Phi(\xi) \leqslant C_1 e^{-2(d-\varepsilon_1)\xi}.$$

D'où, à cause de (3.13) :

$$\int_{\xi}^{+\infty} \| \psi \|_H^2 \, dx \leqslant C_2(\varepsilon_1) e^{-2(d-\varepsilon_1)\xi}.$$

Il est facile de se convaincre sur l'exemple d'un opérateur différentiel ordinaire que cette estimation est encore valable pour $\varepsilon_1 = 0$. Ce qui démontre le théorème.

Théorème 2.2. *Le théorème* 2.1 *s'applique aux fonctions propres de l'opérateur* (4.1) *avec* $w = d$.

§ 5 INÉGALITÉ FONDAMENTALE POUR LES FONCTIONS PROPRES

Considérons un opérateur auto-adjoint de la forme

$$\hat{L} = A(\eta) \frac{d}{dx} + B(\eta, x), \quad \| A(\eta) \| \leqslant 1,$$

dont les coefficients dépendent d'un paramètre η. Nous rappellerons que si $g \in L_2(H)$ est nul pour $x < \xi$ et tel que $\hat{L}g = 0$ pour $x < \xi$, d'après le lemme 2.1 pour $\varepsilon > 0$, fixé, il existe un ξ_ε, indépendant de g tel que pour $\xi \geqslant \xi_\varepsilon$ on ait l'inégalité

$$(d - \varepsilon)^2 \| g \|^2 \leqslant \| [\hat{L} - \lambda] g \|^2. \tag{5.1}$$

Fixons ξ_ε pour un opérateur $\hat{L}$ donné.

Posons $x_0^\gamma = (\xi_\varepsilon)^\gamma$, γ étant un nombre plus grand que 1. Par une translation, on peut prendre l'origine des coordonnées au point x_0^γ, et considérer dans le nouveau système de coordonnées $y = x - x_0^\gamma$ la fonction

$$\varphi(y, \xi) = \begin{cases} (y^2 - \xi^2)^n & \text{pour } \xi^2 \geqslant y^2, \\ 0 & \text{pour } y^2 > \xi^2. \end{cases}$$

Soit $\xi \leqslant x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$; $x < \xi_\varepsilon$ entraîne $x < x_0^\gamma - \xi$, i.e. $(x - x_0^\gamma)^2 > \xi^2$, donc $y^2 \geqslant \xi^2$. Par conséquent, $\varphi(y, \xi)$ est nulle pour $x < \xi_\varepsilon$.

L'opérateur

$$\hat{L} = A(\eta) \frac{d}{dx} - B(\eta, x)$$

s'écrit, dans le nouveau système de coordonnées :

$$\hat{L} = A(\eta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - B(\eta, y + x_0^\gamma).$$

Supposons que $u(y) \in H$ satisfasse pour $|y| \leqslant x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$ l'équation :

$$A(\eta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - B(\eta, y + x_0^\gamma)u = \lambda u.$$

Il est évident que l'inégalité (5.1) sera satisfaite pour la fonction $g = \varphi(y,\xi)u(y)$, étant donné que pour $x < \xi_\varepsilon, g = 0$ et $\hat{L}g = 0$.

Ainsi

$$(d - \varepsilon)^2 \| \varphi u \|^2 \leqslant \| \varphi'_y u \|^2.$$

Notons

$$\Phi(\xi) = \| \varphi u \|^2 = \int_{-\xi}^{+\xi} (\xi^2 - y^2)^{2n} \| u(y) \|_H^2 \mathrm{d}y.$$

Il est aisé de se convaincre que

$$\| \varphi'_y u \|^2 = \frac{n}{2(2n-1)}\left\{ \Phi'' - \frac{4n-1}{\xi}\Phi' \right\}.$$

Posant $\frac{1}{n} = O(\varepsilon)$, nous obtenons

$$(d - O_1(\varepsilon))^2 \Phi \leqslant \frac{1}{4}\Phi'' - \frac{n - 1/4}{\xi}\Phi' \leqslant \frac{1}{4}\Phi''$$

puisque $\Phi' > 0$ et $\xi \geqslant 0$.

D'où, en remplaçant $O_1(\varepsilon)$ par ε,

$$\Phi' \Phi'' \geqslant 4(d - \varepsilon)^2 \Phi \Phi'$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\Phi') \geqslant 4(d - \varepsilon)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Phi^2.$$

Intégrant de 0 à ξ, on obtient

$$\Phi' \geqslant 2(d - \varepsilon)\Phi$$

ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\ln \Phi \geqslant 2(d - \varepsilon)$.

Intégrant cette inégalité de $a > 1$ à ξ, on obtient

$$\ln \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(a)} \geqslant 2(d - \varepsilon)(\xi - a),$$

c'est-à-dire

$$\Phi(\xi) \geqslant \mathrm{e}^{2(d-\varepsilon)(\xi - a)}\Phi(a).$$

Étant donné que

$$\int_{-a+1}^{a-1} \| u(y) \|_H^2 \mathrm{d}y \leqslant \int_{-a}^{+a} (y^2 - a^2)^{2n} \| u(y) \|_H^2 \mathrm{d}y$$

$$\int_{-\xi}^{+\xi} (y^2 - \xi^2)^{2n} \| u(y) \|_H^2 \mathrm{d}y \leqslant \xi^{4n} \int_{-\xi}^{+\xi} \| u(y) \|_H^2 \mathrm{d}y$$

on obtient, pour $\xi < x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$;

$$\int_{-\xi}^{\xi} \| u(y) \|_H^2 \, dy \geqslant \xi^{-4n} \Phi(\xi) \geqslant \xi^{-4n} e^{2(d-\varepsilon)(\xi - a)} \Phi(a)$$

$$\geqslant C(b,\varepsilon) e^{2(d-2\varepsilon)(\xi - b)} \int_{-b}^{b} \| u(y) \|_H^2 \, dy,$$

puisque $\xi^{-4n} \geqslant C(b,\varepsilon) e^{-2\varepsilon(\xi - b)}$, avec $b = a - 1$.

En revenant à la variable x et en remplaçant 2ε par ε, on trouve :

$$\int_{x_0^\gamma - b}^{x_0^\gamma + b} \| u(x) \|_H^2 \, dx \leqslant C_1(b,\varepsilon) e^{-2(d-\varepsilon)\xi} \int_{x_0^\gamma - \xi}^{x_0^\gamma + \xi} \| u(x) \|_H^2 \, dx .$$

Avec $\xi = x_0^\gamma - \xi_\varepsilon$, cela donne

$$\int_{x_0^\gamma - b}^{x_0^\gamma + b} \| u \|_H^2 \, dx \leqslant C_1(b,\varepsilon) e^{-2(d-\varepsilon)(x_0^\gamma - \xi_\varepsilon)} \int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0^\gamma - \xi_\varepsilon} \| u(x) \|_H^2 \, dx$$

$$\leqslant C_2(b,\varepsilon) e^{-2(d-\varepsilon) x_0^\gamma} \int_{\xi_\varepsilon}^{2x_0^\gamma} \| u(x) \|_H^2 \, dx . \quad (5.2)$$

La constante $C_2(b,\varepsilon) = C_1(b,\varepsilon) e^{2d\xi_\varepsilon}$ ne dépend pas de γ. Ainsi l'inégalité (5.2) est vraie quel que soit $\gamma > 1$.

Posant $\gamma = \dfrac{\ln(\eta/2)}{\ln x_0}$, nous arrivons à la proposition suivante

Lemme 2.2 (*). *Soit η un certain paramètre tendant vers ∞. Soit $u(x) \in H$ quel que soit x, satisfaisant pour $x < \eta$, l'équation*

$$A(\eta) \frac{du}{dx} + B(\eta, x) u = \lambda u \qquad \| A(\eta) \|_H \leqslant 1 .$$

Alors pour $a > 0$ et $\varepsilon > 0$, on trouve $C(a,\varepsilon)$ tel que

$$\int_{\eta/2 - a}^{\eta/2 + a} \| u \|_H^2 \, dx \leqslant C(a,\varepsilon) e^{-d(1-\varepsilon)\eta} \int_0^\eta \| u \|_H^2 \, dx \qquad (5.3)$$

Remarquons que d'une façon générale, $u(x)$ peut ne pas appartenir à $L_2(H)$.

(*) Avec ce lemme, on trouve facilement une classe d'unicité pour l'équation (4.1). A savoir que si $u(x)$ vérifie (4.1) et

$$\int_0^\xi \| u(x) \|_H^2 \, dx \leqslant C(\varepsilon) e^{(1-\varepsilon)\xi},$$

alors $u(x) \in L_2(H)$ et satisfait l'estimation du théorème 2.2.

§ 6 DEUX LEMMES DE LA THÉORIE ABSTRAITE DES PERTURBATIONS

Nous allons démontrer maintenant deux lemmes nécessaires pour la suite (voir [18], [73]).

Lemme 2.3. *Soit A un opérateur auto-adjoint dont le domaine de définition $D(A)$ et le domaine des valeurs sont dans le même espace de Hilbert H.*

Soit μ un point sur la droite réelle et d la distance de ce point au spectre de l'opérateur A. Alors, quel que soit $g \in D(A)$, l'inégalité

$$d\,\|g\| \leqslant \|(A-\mu)g\| \tag{6.1}$$

est vérifiée.

Démonstration. Si le point μ appartient au spectre de l'opérateur A, alors $d = 0$, et l'inégalité (6.1) est évidente.

Supposons que μ n'appartienne pas au spectre de l'opérateur A. L'inégalité (6.1) résulte immédiatement de l'inégalité bien connue :

$$\|(A-\mu)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{d} \qquad \text{(voir [65]).}$$

En fait, en posant $f = (A-\mu)g$, on obtient

$$\|g\| = \|(A-\mu)^{-1}f\| \leqslant \|(A-\mu)^{-1}\|\cdot\|f\| \leqslant \frac{1}{d}\|f\| \leqslant \frac{1}{d}\|(A-\mu)g\|$$

c.q.f.d.

Lemme 2.4. *Soit λ_0 un point isolé du spectre de l'opérateur auto-adjoint A.*

Désignons par M_{λ_0} tout le reste du spectre de l'opérateur A (M_{λ_0} est l'ensemble des valeurs du spectre σ_λ moins le point $\lambda = \lambda_0$). Soit d_{λ_0} la distance d'un point μ à l'ensemble M_{λ_0}.

Notons P_{λ_0} le projecteur sur le sous-espace des fonctions propres correspondant au point λ_0.

Alors, pour $g \in D(A)$ on a l'inégalité

$$d_{\lambda_0}\|(1-P_{\lambda_0})g\| \leqslant \|(A-\mu)g\|.$$

Démonstration. Le complémentaire orthogonal du sous-espace des fonctions propres correspondant à λ_0 est invariant par l'opérateur A. Ainsi l'inégalité (6.1), écrite pour ce complémentaire orthogonal, aura la forme

$$\|(A-\mu)^{-1}(1-P_{\lambda_0})f\| \leqslant \frac{1}{d_{\lambda_0}}\|(1-P_{\lambda_0})f\|$$

où f est un élément arbitraire de H.

D'où posant $f = (A - \mu)g$, on obtient (du fait que P_{λ_0} commute avec A)

$$\|(1 - P_{\lambda_0})g\| = \|(1 - P_{\lambda_0})(A - \mu)^{-1} f\| = \|(A - \mu)^{-1}(1 - P_{\lambda_0}) f\|$$
$$\leqslant \frac{1}{d_{\lambda_0}} \|(1 - P_{\lambda_0})(A - \mu)g\| = \frac{\|(A - \mu)g\|}{d_{\lambda_0}}.$$

§ 7 THÉORIE DES PERTURBATIONS POUR UN OPÉRATEUR DU PREMIER ORDRE

Lemme 2.5. *Soit u une solution de l'équation*

$$[\hat{L} - \lambda]u = A(\eta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + B(\eta,x)u + v(\eta,x)u - \lambda u = 0 \qquad (7.1)$$

satisfaisant la condition $\int_0^x \|u\|_H^2 \,\mathrm{d}x \leqslant C\,\mathrm{e}^{\varepsilon x}$, *où* $C = C(\varepsilon)$ *ne dépend pas de* η, *quel que soit* ε *positif et supposons que* $v(\eta, x) = 0$ *pour* $|x| < \eta$ *et que* d *soit la distance du point* λ *au spectre continu de l'opérateur* $\hat{L}_0$:

$$\hat{L}_0\psi = A(\eta)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + B(\eta, x)\psi,$$

alors

I) $$\int_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 \,\mathrm{d}x \leqslant C(a,\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta} \qquad \text{avec } a > 0.$$

II) *Il existe une valeur propre μ de l'opérateur $\hat{L}_0$ telle que*

1) $$|\mu - \lambda| \leqslant \frac{C(\varepsilon)\mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta/2}}{\left(\int_0^{\eta/2} \|u\|_H^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}$$

2) $$\int_0^{\eta/2} \left\| u - \sum_{i=1}^{p} \left[\int_0^{\eta/2} (u,\psi_\mu^i)_H \,\mathrm{d}x\right]\psi_\mu^i \right\|_H^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{d_\mu^2}\ \mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta}$$

où d_μ est la distance du point μ au reste du spectre de $\hat{L}_0, \psi_\mu^i, i = 1, \dots, p$, une base orthonormée du sous-espace propre de $\hat{L}^0$ correspondant au point μ.

Démonstration. Il est évident que pour $|x| < \eta$

$$\hat{L}_0 u = A(\eta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + B(\eta, x)u = \lambda u.$$

D'où, d'après l'estimation (5.3) et les conditions du lemme, on a pour η suffisamment grand

$$\int_{\eta/2-a}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 \,\mathrm{d}x \leqslant C(a, \varepsilon) \int_0^{\eta} \|u\|_H^2 \,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta}.$$

De cette inégalité et de (7.1) résulte l'affirmation 1) du lemme 2.5.

Considérons une fonction $\varphi(x)$, égale à un pour $|x| < \eta/2$, égale à zéro pour $|x| > \frac{\eta}{2} + a$, et linéaire dans l'intervalle $\frac{\eta}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{\eta}{2} + a$:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{a}\left(\frac{\eta}{2} - x\right).$$

Comme alors $\varphi(x)v(\eta, x) = 0$ et $\hat{L}u = \lambda u$ nous avons

$$\varphi(x)\hat{L}_0 = \varphi(x)\hat{L} \quad \text{et} \quad \varphi(x)[\hat{L} - \lambda]u = 0.$$

D'où

$$[\hat{L} - \lambda]\varphi(x)u = A(\eta)\varphi'(x)u.$$

Du lemme 2.3 de la théorie abstraite des perturbations il résulte qu'il existe une valeur propre μ de l'opérateur $\hat{L}_0$ telle que

$$|\mu - \lambda| \leqslant \frac{\|A(\eta)\varphi' u\|}{\|\varphi(x)u\|} \leqslant \frac{\left(\int_{\eta/2}^{\eta/2+a} \|u\|_H^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}{\|\varphi(x)u\|} \leqslant \frac{C(a,\varepsilon)^{1/2}\,\mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta/2}}{\left(\int_0^{\eta/2} \|u\|_H^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}.$$

De plus, à partir du lemme 2.4 de la théorie abstraite des perturbations nous obtenons

$$\|\varphi(x)u - \sum_{i=1}^{p} (\varphi(x)u, \psi_\mu^i)\psi_\mu^i\|^2 \leqslant \frac{C(a,\varepsilon)}{d_\mu^2}\mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{\eta/2} \|u - \sum_{i=1}^{p} (\varphi(x)u, \psi_\mu^i)\psi_\mu^i\|_H^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C(a,\varepsilon)}{d_\mu^2}\mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta}.$$

Le lemme résulte alors de ce que d'après le théorème 2.2

$$(\varphi(x)u, \psi_\mu^i) - \int_0^{\eta/2} (u, \psi_\mu^i)_H\,\mathrm{d}x \leqslant C(\varepsilon)\mathrm{e}^{-d(1-\varepsilon)\eta/2}.$$

Considérons maintenant l'opérateur auto-adjoint

$$\hat{L}(\varepsilon) = A(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + B(r) + \varepsilon v(r,\varepsilon),$$

où $v(r,\varepsilon)$ est un opérateur dans H borné et continu en r. Soit μ un point isolé du spectre de l'opérateur

$$\hat{L}(0) = A(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + B(r)$$

et d_μ la distance du point μ au reste du spectre de l'opérateur $\hat{L}(0)$. Soit

$$\bar{v}(r,\varepsilon) = \begin{cases} v(r,\varepsilon) & \text{pour } r < 2r_\varepsilon, \\ 0 & \text{pour } r > 2r_\varepsilon, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\|\varepsilon\bar{v}(r,\varepsilon)\| \leqslant \frac{d_\mu}{2+\alpha}, \quad \alpha > 0$$

et posons $\bar{\bar{v}} = v(r,\varepsilon) - \bar{v}(r,\varepsilon)$.

On peut alors écrire $\hat{L}$ sous la forme

$$\hat{L} = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + B + \varepsilon\bar{v}(r,\varepsilon) = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + B + \varepsilon\,\bar{v}(r,\varepsilon) + \varepsilon\,\bar{\bar{v}}(r,\varepsilon)$$
$$= \hat{L}^0 + \varepsilon\,\bar{\bar{v}}(r,\varepsilon).$$

Posant, dans le lemme précédent, $\eta = 2r_\varepsilon$ et $v(r,\eta) = \varepsilon\bar{\bar{v}}(r,\varepsilon)$, nous arrivons en vertu des lemmes de la théorie abstraite des perturbations au théorème suivant.

Considérons pour cela l'espace C des fonctions continues en $\varepsilon, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et identifions dans C les fonctions dont la différence est inférieure à $\sigma(\varepsilon) = C\exp\{-d(1-\delta)r_\varepsilon\}$. Notons S l'espace quotient ainsi obtenu. On notera $L_2[H,S]$ l'espace des fonctions de $L_2(H)$ à valeurs dans S. L'égalité $a = b$ sera indiquée dans cet espace par le symbole $a \underset{S}{=} b$.

Supposons que l'opérateur

$$\hat{L}(0) = A(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + B(r)$$

soit auto-adjoint dans $L_2(H)$ et que $B(r)$ commute avec r. L'opérateur $\varepsilon v(r,\varepsilon)$ commute avec r et tend vers zéro dans la norme de H pour r quelconque fixé.

Théorème 2.3. *Supposons que la solution ψ_λ de l'équation*

$$[\hat{L}(0) + \varepsilon v(r,\varepsilon)]\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

satisfasse la condition

$$\int_{-x}^{+x} \|\psi_\lambda\|_H^2\,\mathrm{d}r \leqslant C(\delta)\,\mathrm{e}^{\delta x}, \tag{7.2}$$

δ étant quelconque et $C(\delta)$ une constante indépendante de ε, et que le point du spectre de l'opérateur $\hat{L}(0)$ le plus proche de λ soit la valeur propre μ de cet opérateur de multiplicité finie m.

Alors

1) *l'opérateur*

$$[\hat{L}_0 + \varepsilon\bar{v}(r,\varepsilon)]\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma [\hat{L}^0 - z]^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k[\bar{v}(r,\varepsilon)(\hat{L}^0 - z)^{-1}]^k\,\mathrm{d}z,$$

où Γ est un cercle centré en μ et de rayon $d/2$, possède $l \leqslant m$ valeurs propres distinctes $\mu_i = \mu_i(\varepsilon)\ (i = 1,2,\ldots,l)$ et l'ensemble des projecteurs

$$P_i(\varepsilon)\quad, i = 1,2,\ldots,l$$

sur le sous-espace des fonctions propres leur correspondant est de dimension m ;

2) *on a la relation*

$$\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon}\left\|\left(1 - \sum_{i=1}^{l}P_i(\varepsilon)\right)\psi_\lambda\right\|_H^2\mathrm{d}r \underset{S}{=} 0$$

3) *il existe* $0 \leqslant i \leqslant l$ *tel que*

$$\operatorname{Min}\left(|\mu_i - \mu_{i+1}|, |\mu_i - \mu_{i-1}|\right) \sqrt{\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon} \|(1 - P_i)\psi_\lambda\|_H^2 \,\mathrm{d}r}\ \underset{S}{=}\ 0$$

$$|\lambda - \mu_i(\varepsilon)| \sqrt{\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H^2 \,\mathrm{d}r}\ \underset{S}{=}\ 0.$$

Remarque 1. S'il y a deux valeurs propres μ_1 et μ_2 de l'opérateur $L(0)$ les plus proches du point λ, c'est-à-dire si le point λ est entre μ_1 et μ_2, alors

$$\int_{-r_\varepsilon}^{r_\varepsilon} \|\psi_\lambda\|_H^2 \,\mathrm{d}r\ \underset{S}{=}\ 0.$$

Remarque 2. Pour λ réel, seules les solutions satisfaisant la condition (7.2) ont un sens physique. Il est bien connu que les fonctions propres du spectre continu d'une large classe d'opérateurs différentiels aux dérivées partielles satisfont cette condition.

Pour un opérateur différentiel du second ordre de la forme (3.0) satisfaisant les conditions du théorème 2.1, le théorème précédent sera vrai si on pose

$$\sigma(\varepsilon) = \exp\{-(1 - \delta)\, w r_\varepsilon\},$$

où w est défini par la formule (3.3).

Cette assertion se démontre comme le théorème précédent. En outre, il est possible de considérer de la même façon le cas où α dans la formule (3.1) dépend de ξ (voir Remarque 2, § 2). C'est ce qui aura lieu lorsque, par exemple, dans l'équation de Schrödinger, le potentiel à l'infini tend vers l'infini et le spectre est purement discret. Toutefois, dans ce dernier cas il est possible d'utiliser les estimations données dans le travail de Tosio Kato « Propriétés de croissance des solutions de l'équation d'onde réduite à coefficients variables » (1959) (voir la revue *Matematika*, 1961, **5**, n° 1, 115-135).

CHAPITRE 3

CONVERGENCE FORTE DES ÉQUATIONS OPÉRATORIELLES

§ 1 CONVERGENCE FAIBLE DES SOLUTIONS

Considérons le problème suivant : soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires opérant de B_1 dans B_2 (B_1 et B_2 sont des espaces de Banach) et possédant un domaine de définition commun $D(A_n) = D$.

Considérons la suite d'équation

$$A_n x_n = v_n \tag{1.1}$$

et supposons que la suite d'opérateurs et la suite $\{v_n\}$ des membres de droite convergent, dans un sens à préciser, respectivement vers : un opérateur A et un élément v. Examinons outre ces équations l'équation suivante :

$$Ax = v. \tag{1.2}$$

On demande quelles conditions doivent être imposées à la suite d'équations opératorielles (1.1) pour que la suite de ses solutions $\{x_n\}$ converge (dans tel ou tel sens) vers la solution de l'équation limite (1.2).

Établissons d'abord les conditions pour lesquelles on a la convergence faible des solutions et ensuite nous passerons aux conditions entraînant la convergence forte. Pour l'étude de la convergence faible nous allons nous restreindre au cas d'opérateurs dans un espace de Hilbert.

Théorème 3.1 ([51, 11]). *Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert H ayant le même domaine de définition D, partout dense dans H. Supposons que $\{A_n\}$ converge fortement vers A et qu'une suite $\{f_n\}$ d'éléments de H converge faiblement vers f. S'il existe une suite bornée $\{x_n\}$ de solutions de la suite d'équations*

$$A_n^* x_n = f_n \tag{1.3}$$

il existe une suite $\{ y_n \}$ *de solutions de l'équation limite*

$$A^* x_n = f \tag{1.4}$$

telle que la suite $\{ x_n - y_n \}$ *converge faiblement vers zéro.*

Démonstration. Comme la suite $\{ x_n \}$ est bornée, nous pouvons en extraire une sous-suite faiblement convergente $\{ x_{n_k} \}$. Soit v la limite de cette sous-suite. Montrons que v est une solution de l'équation limite (1.4). En fait, pour tout $g \in D$:

$$(Ag, x_{n_k}) = ([A - A_{n_k}] g, x_{n_k}) + (g, f_{n_k}) \to (g, f)$$

et en même temps

$$(Ag, x_{n_k}) \to (Ag, v)$$

d'où

$$(Ag, v) = (g, f) \tag{1.5}$$

pour tout $g \in D$. Puisque D est partout dense dans H, (1.5) signifie que

$$A^* v = f .$$

Désignons par H_1 le sous-espace de toutes les solutions de l'équation homogène $A^* x = 0$ et par H_2 son complémentaire orthogonal, et soient P_1 et P_2 les projecteurs sur ces espaces. Posons

$$z_n = P_2(v - x_n) \tag{1.6}$$
$$y_n = z_n + x_n .$$

Chacun des éléments y_n sera solution de l'équation (1.4); en effet :

$$\begin{aligned} A^* y_n &= A^*(z_n + x_n) = A^*(P_2 v + P_1 x_n) = A^* P_2 v \\ &= A^*(P_1 + P_2) v = A^* v = f . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Pour achever la démonstration du théorème il reste à montrer que la suite $\{ z_n \}$ converge faiblement vers zéro. Cette suite est bornée, car

$$\| z_n \| \leqslant \| x_n \| + \| v \|$$

et la suite $\| x_n \|$ est bornée par hypothèse.

Ensuite, comme $z_n \in H_2$, on a, pour tout $x \in H_1$

$$(z_n, x) = 0 . \tag{1.8}$$

De plus si $g \in D, Ag \in H$, d'où

$$\begin{aligned} (Ag, z_n) &= (Ag, y_n - x_n) = ([A_n - A] g, x_n) + (Ag, y_n) - (A_n g, x_n) \\ &= ([A_n - A] g, x_n) + (g, f - f_n) \to 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

quand $n \to \infty$ pour tout $g \in D$. De (1.8) et (1.9) on déduit que la relation

$$(z_n, u) \to 0 \qquad \text{pour} \qquad n \to \infty \tag{1.10}$$

est satisfaite pour tout $u \in H_1 \oplus R(A)$.

Mais $R(A)$ est partout dense dans H_2, car sinon il y aurait dans H_2 un élément y_0, non nul, orthogonal à $R(A)$ et nous aurions pour tout $x \in D$

$$o = (y_0, Ax) = (A^* y_0, x)$$

d'où $A^* y_0 = 0$, c'est-à-dire que $y_0 \in H_1$ ce qui est absurde. Ainsi la relation (1.10) est satisfaite sur un ensemble dont l'enveloppe fermée linéaire est tout H. D'où il résulte que la suite bornée $\{z_n\}$ converge en fait faiblement vers zéro. Le théorème est démontré.

Remarque. Si l'opérateur A^{*-1} existe (c'est-à-dire si l'équation $A^* x = 0$ n'a que la solution triviale) on peut reformuler ainsi la conclusion du théorème (3.1) : toute suite bornée $\{x_n\}$ de solutions des équations (1.3) converge vers une solution de l'équation limite (1.4). De plus, si A^{*-1} existe, le théorème 3.1 est vrai pour des opérateurs, opérant d'un espace de Banach réflexif dans un autre, étant donné que l'unique endroit de la démonstration qui utilise le fait que H est un espace de Hilbert est la possibilité de le représenter comme somme directe des sous-espaces H_1 et H_2.

Corollaire 1. *Supposons que les hypothèses du théorème* 3.1 *soient réalisées et qu'en plus* $(x_n, y_n - x_n) \to 0$. *Alors*

$$\| y_n - x_n \| \to 0.$$

En effet

$$(y_n - x_n, y_n - x_n) \to (y_n, y_n - x_n) = (y_n, z_n) = (v, z_n) \to 0$$

puisque $y_n - v \in H_1$ qui est orthogonal à z_n.

Exemple. Considérons le problème

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \Delta \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon + K^2(x,y)\, u_\varepsilon = \mathscr{F}(x,y) \tag{1.11}$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0 \quad K^2(x,y) \geqslant \alpha > 0$$

avec Δ l'opérateur de Laplace, Γ, un contour différentiable et $u_\varepsilon \in L_2[\Omega]$, Ω étant un domaine limité par Γ.

Montrons que $u_\varepsilon(x, y)$ converge faiblement pour $\varepsilon \to 0$ vers

$$\mathscr{F}(x, y) / K^2(x, y)$$

dans Ω.

Il est évident que l'opérateur adjoint L_ε^* converge pour $\varepsilon \to 0$ vers l'opérateur de multiplication par $K^2(x, y)$. Pour pouvoir appliquer le théorème 3.1 il reste à montrer que $\| u_\varepsilon \|$ est borné lorsque $\varepsilon \to 0$.

Multiplions (1.11) par $\left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon$ et intégrons en x, y dans Ω. En intégrant par parties on obtient

$$\varepsilon \iint_\Omega \left[\nabla\left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon\right]^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_\Omega K^2\left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Omega \mathscr{F} u_\varepsilon \left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \left\| \mathscr{F}\left(1 + \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\| \| u_\varepsilon \| \leqslant C \| \mathscr{F} \| \, \| u_\varepsilon \| .$$

Par conséquent

$$\iint_\Omega K^2 u_\varepsilon^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant C \| \mathscr{F} \| \, \| u_\varepsilon \|$$

donc

$$\| u_\varepsilon \| \leqslant \frac{C}{\alpha} \| \mathscr{F} \|$$

c.q.f.d.

§ 2 CRITÈRE DE CONVERGENCE FORTE DES SOLUTIONS

Passons maintenant à l'établissement des conditions pour lesquelles une suite de solutions d'équations de la forme (1.1) converge non seulement faiblement, mais aussi fortement vers une solution de l'équation limite (1.2). Comme la solution de l'équation

$$Ax = f$$

est équivalente à l'inversion de l'opérateur A, il nous sera facile de formuler et de démontrer le résultat correspondant non pas en termes d'équations, mais en termes d'opérateurs inverses. Ici, nous considèrerons le cas général d'opérateurs, opérant d'un espace de Banach dans un autre.

1. Théorème sur la convergence forte des solutions

Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs linéaires appliquant un espace de Banach B_1 dans un espace de Banach B_2 et ayant le même domaine de définition D et soit A un opérateur de B_1 dans B_2, possédant le même domaine de définition D et tel que

$$Ag = \lim_{n \to \infty} A_n g \qquad \text{quel que soit } g \in D .$$

Nous supposerons que les opérateurs $\{A_n\}$ ont des extensions fermées. On notera par $\bar{A}_n$ la fermeture (i.e. l'extension fermée minimale) de l'opérateur A_n.

Théorème 3.2 [61, 12)]. *Supposons que la suite* $\{A_n^{-1}\}$ *existe et soit uniformément bornée*

$$\| A_n^{-1} \| \leqslant C.$$

Alors

1) *Il existe un opérateur inverse* A^{-1}, *borné sur l'ensemble* $\overline{R(A)}$, *où* $\overline{R(A)}$ *est la fermeture du domaine de définition de l'opérateur* A^{-1}

2) $\overline{A^{-1}} f = \lim\limits_{n \to \gamma} A_n^{-1} f$

avec $f \in \overline{R(A)}$.

Démonstration (*). 1) Pour démontrer l'existence de A^{-1} il suffit de montrer que l'équation $Aq_0 = 0$ a une solution unique $q_0 = 0$. Supposons donc que $Aq_0 = 0$, avec $q_0 \in D(A)$. Évaluons $\| q_0 \|$.

Nous avons d'après les hypothèses du théorème

$$\lim_{n \to \infty} A_n q_0 = A q_0$$

donc $\| A_n q_0 \| \leqslant \| A q_0 \| + \varepsilon = \varepsilon$ pour $n > N_\varepsilon$.

D'où, puisque $\{A_n^{-1}\}$ est bornée,

$$\| q_0 \| = \| A_n^{-1} A_n q_0 \| \leqslant \| A_n^{-1} \| \, \| A_n q_0 \| \leqslant \varepsilon C.$$

Comme ε est quelconque, alors $\| q_0 \| = 0$ et $q_0 = 0$

2) Soient $\hat{A}_n^{-1}$ des extensions arbitraires des opérateurs bornés fermables A_n^{-1} telles que

$$\|\hat{A}_n^{-1}\| \leqslant C.$$

On a $\hat{A}_n^{-1} A_n = 1$ sur le domaine D.

Soit g tel que $Ag = f$, $f \in R(A)$.

On a

$$\begin{aligned} \|\hat{A}_n^{-1} f - A^{-1} f\| &= \|\hat{A}_n^{-1} A g - g\| \\ &= \|\hat{A}_n^{-1}(A_n g) - \hat{A}_n^{-1}(A_n - A) g - g\| \\ &= \|\hat{A}_n^{-1}(A_n - A) g\| \leqslant C \, \|(A_n - A) g\| \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} \hat{A}_n^{-1} f = A^{-1} f.$$

D'où d'après le théorème de Banach-Steinhaus (chap. 2, 1) $\hat{A}_n^{-1}$ converge vers $\overline{A^{-1}}$ sur $\overline{R(A)}$ et $\| \overline{A^{-1}} \| \leqslant C$.

On vérifie facilement que $\lim\limits_{n \to \infty} \hat{A}_n^{-1} f$ est indépendant des extensions choisies pour $f \in R(A)$. D'où la forme quelque peu abusive de l'énoncé du théorème.

(*) Voir chapitre 5, § 1, théorème 5.1.

2. Exemple

Considérons le problème aux limites

$$\hat{L}u = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + C^2(x)u = \mathscr{F}(x,t,\varepsilon) \qquad (x = x_1, x_2, x_3)$$

$$u\Big|_{t=0} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad C^2(x) \geqslant \alpha > 0 \tag{2.1}$$

et $u|_\Gamma = 0$ ou bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2\,\mathrm{d}x < \infty$

et étudions le comportement de la solution lorsque $\varepsilon \to 0$. (C'est à ce cas que se réduit le problème du comportement asymptotique des solutions de l'équation de Klein-Gordon pour $t \to 0$. Il faut pour cela, dans l'équation (2.1), faire le changement de variable $\tau = t/\varepsilon$ et poser $\mathscr{F}(x,t,\varepsilon) = \mathscr{F}(x,t/\varepsilon)$).

a) Pour comprendre comment peut se comporter la solution de l'équation (2.1) lorsque $\varepsilon \to 0$, considérons un cas particulier : l'équation différentielle ordinaire

$$\varepsilon^2\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u = \mathscr{F}(t)$$

avec les conditions initiales

$$u|_{t=0} = 0 \qquad u'|_{t=0} = 0.$$

Si $\mathscr{F}(t)$ est une fonction continuement différentiable, la solution $u_\varepsilon(t)$ peut être représentée sous la forme

$$u_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \sin\frac{t-\tau}{\varepsilon}\mathscr{F}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathscr{F}(\tau)\,\mathrm{d}\left(\cos\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)$$

$$= \mathscr{F}(t) - \mathscr{F}(0)\cos\frac{t}{\varepsilon} - \int_0^t \mathscr{F}'(\tau)\cos\frac{t-\tau}{\varepsilon}\mathrm{d}\tau.$$

Par conséquent, si $\mathscr{F}(0) = 0$ et $\mathscr{F}'(\tau) \in L_2$, la convergence de $u_\varepsilon(t)$ vers $\mathscr{F}(t)$ pour $\varepsilon \to 0$ sera la convergence forte dans L_2 ; si $\mathscr{F}(0) \neq 0$ la convergence sera faible.

b) Retournons maintenant à l'équation générale (2.1). Considérons-la dans l'espace L_2 des fonctions de x (dans un domaine limité par Γ, si $u|_\Gamma = 0$, ou bien si $\|u\|^2 = \displaystyle\int |u|^2\,\mathrm{d}x < \infty$, dans tout l'espace).

Soit $\hat{L}u = \mathscr{F}(x,t)$.

Multiplions (2.1) scalairement par $\partial u/\partial t$.
On trouve

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|Cu\| = \left(\mathscr{F}(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Intégrant par rapport à t, nous obtenons, à cause des conditions

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \|\nabla u\|\Big|_{t=0} = 0,$$

que :

$$\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}(\|\nabla u\|^2 + \|Cu\|^2) = \int_0^t \left(\mathscr{F}(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t.$$

Intégrant encore une fois par rapport à t, de 0 à 1, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \|\nabla u\|^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \|Cu\|^2\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \left(\mathscr{F}(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \leqslant \left|\int_0^1 (1-t)\left(\mathscr{F}(x,t),\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^1 \|\mathscr{F}(x,t)\|^2\,\mathrm{d}t}\cdot\sqrt{\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\,\mathrm{d}t} \tag{2.2}$$

par conséquent

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|\mathscr{F}(x,t)\|^2\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire que

$$\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \mathrm{d}t$$

n'existe seulement que si $\int_0^1 \|\mathscr{F}(x,t)\|^2\,\mathrm{d}t$ existe.

Supposons que $\int_0^1 \|\mathscr{F}'_t(x,t)\|^2\,\mathrm{d}t$ existe, c'est-à-dire que $\mathscr{F}$ appartienne à l'espace de Banach W^0 de norme

$$\|\mathscr{F}(x,t)\|_W = \sqrt{\int_0^1 \left(\left\|\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t}\right\|^2 + \|\mathscr{F}\|^2\right)\mathrm{d}t}.$$

Alors, intégrant $\int_0^1 \mathrm{d}t \int_0^t \left(\mathscr{F}(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}t$ par parties on déduit de (2.1)

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 \|Cu\|^2 \mathrm{d}t\right)$$

$$= \int_0^1 (\mathscr{F}(x,t),u)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{d}t\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t}, u\right)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \sqrt{\int_0^1 \|\mathscr{F}(x,t)\|^2 \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 \mathrm{d}t} + \sqrt{\int_0^1 \left\|\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial t}\right\| \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 \mathrm{d}t}.$$

D'où

$$\int_0^1 \|u\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \|Cu\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\alpha}\sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 \mathrm{d}t}\,\|\mathscr{F}\|_W.$$

Par conséquent, l'opérateur L_ε^{-1}, opérant de W dans l'espace de Hilbert L_2' des fonctions de x,t, muni de la norme

$$\|u\|_{L_2'} = \sqrt{\int_0^1 \|u\|^2 \mathrm{d}t}$$

est uniformément borné pour $\varepsilon \to 0$

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2'} \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\mathscr{F}\|_W. \tag{2.3}$$

L'opérateur limite a la forme

$$\hat{L}^0 v = -\Delta v + C^2(x)v = \mathscr{F}(x,t).$$

D'après le théorème 3.3, u_ε converge fortement vers v si le membre de droite $\mathscr{F}(x,t)$ appartient à $R(\hat{L}^0)$. Le domaine $R(\hat{L}^0)$ est constitué par les fonctions deux fois différentiables en t, s'annulant ainsi que leurs dérivées premières pour $t = 0$. La fermeture de $R(\hat{L}^0)$ dans l'espace W ne conserve qu'une condition initiale

$$\mathscr{F}(x,0) = 0.$$

Ainsi dans le cas général de l'équation (2.1), comme dans l'exemple *a*), $\int_0^1 \|u_\varepsilon - v\|^2 \mathrm{d}t$ tend vers zéro si le membre de droite appartient à $R(\hat{L}^0)$ et s'annule pour $t = 0$. On peut le démontrer aussi dans le cas où le membre de droite dépend de ε et converge fortement dans W vers une fonction $\mathscr{F}_0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Supposons maintenant que le membre de droite $\mathscr{F}(x,t) \in W$ mais que $\mathscr{F}(x,0) \neq 0$. Nous allons montrer que dans ce cas

$$\int_0^1 \|\varphi(t)(u_\varepsilon - v)\|\,\mathrm{d}t \to 0$$

quel que soit $\varphi(t)$ de carré intégrable sur $[0,1]$, c'est-à-dire qu'il y a convergence mixte, faible par rapport à t et forte par rapport à x.

Pour le démontrer, multiplions l'équation (2.1) par une fonction deux fois différentiable $\varphi(t)$ nulle ainsi que sa dérivée aux extrémités du segment $[0,1]$ et intégrons en t

$$\int_0^1 \varphi(t)\mathscr{F}(x,t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon \int_0^1 \varphi(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t + \hat{L}^0 \int_0^1 \varphi(t)u\,\mathrm{d}t$$

$$= \varepsilon \int_0^1 \varphi''(t)u\,\mathrm{d}t + \hat{L}^0 \int_0^1 \varphi(t)u\,\mathrm{d}t. \qquad (2.4)$$

Comme, d'après (2.3),

$$\varepsilon \left\| \int_0^1 \varphi''(t)u\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \varepsilon \sqrt{\int_0^1 (\varphi''(t))^2\,\mathrm{d}t}\; \| u \|_{L_2'}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha} \sqrt{\int_0^1 (\varphi''(t))^2\,\mathrm{d}t}\; \| \mathscr{F} \|_W \to 0$$

pour $\varepsilon \to 0$ et en tant qu'inverse de l'opérateur elliptique $\hat{L}^0$, l'opérateur $\{\hat{L}^0\}^{-1}$ existe et est borné (voir l'exemple précédent); on obtient à partir de (2.4) (*) l'égalité

$$\int_0^1 \varphi(t)u_\varepsilon\,\mathrm{d}t - \{\hat{L}^0\}^{-1} \int_0^1 \varphi(t)\mathscr{F}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\varepsilon\{\hat{L}^0\}^{-1} \int_0^1 \varphi''(t)u_\varepsilon\,\mathrm{d}t.$$

D'où étant donné que

$$\{\hat{L}^0\}^{-1} \int_0^1 \varphi(t)\mathscr{F}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\{\hat{L}^0\}^{-1}\mathscr{F}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 v\varphi(t)\,\mathrm{d}t :$$

$$\left\| \int_0^1 \varphi(t)[u_\varepsilon - v]\,\mathrm{d}t \right\| \to 0 \text{ pour } \varepsilon \to 0.$$

Puisque l'ensemble $\{|u_\varepsilon - v|\}$ est borné dans L_2' cette relation sera vérifiée par passage à la fermeture pour tous les $\varphi(t)$ de carré intégrable, ce qu'il fallait démontrer.

3. Le théorème de Rellich (une nouvelle démonstration)

Nous allons maintenant donner une application du théorème 3.2 à la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints. Plus précisément, nous allons en déduire, par une discussion élémentaire, le théorème suivant de Rellich ([64], [65], [70]).

(*) $\mathscr{F}(x,t)$ doit être assez régulier pour que $u(x,t) \in D(-\Delta + C^2)$.

Théorème 3.3 (Rellich). *Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert H, convergeant vers l'opérateur auto-adjoint A au sens suivant : A est la fermeture de l'opérateur $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Si $\{E_\lambda^{(n)}\}$ et $\{E_\lambda\}$ sont les familles spectrales correspondant à A^n et A, alors $E_\lambda^{(n)}$ converge fortement vers E_λ pour $n \to \infty$ et pour tout point λ n'appartenant pas à la partie ponctuelle du spectre de A.*

La démonstration est élémentaire dans le cas où la suite d'opérateurs $\{A_n\}$ est uniformément bornée en norme. En fait, il est possible, dans ce cas, de supposer, sans restreindre la généralité, que $\|A_n\| \leqslant 1$. Pour tout polynôme $P(t)$ on a :

$$P(A_n) \to P(A).$$

A l'aide du théorème de Weierstrass cette propriété s'étend aux fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$.

Considérons en particulier la fonction

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0. \end{cases}$$

La fonction correspondante de l'opérateur A sera

$$E_0 A.$$

Ainsi nous obtenons

$$E_0^{(n)} A_n \to E_0 A.$$

D'où :

$$E_0^{(n)} A \to E_0 A. \tag{2.5}$$

En effet, quel que soit $f \in H$, on a

$$\| E_0^{(n)} Af - E_0 Af \| \leqslant \| E_0^{(n)} (A - A_n) f \| + \| E_0^{(n)} A_n f - E_0 Af \|$$

$$\leqslant \| (A - A_n) f \| + \| E_0^{(n)} Af - E_0 Af \| \to 0.$$

Si zéro n'est pas une valeur propre de l'opérateur A, $R(A)$ est partout dense dans H et l'opérateur inverse A^{-1} (généralement non borné) est défini sur $R(A)$.

Pour tout $f \in R(A)$, d'après (2.5), on a :

$$E_0^{(n)} f = E_0^{(n)} A A^{-1} f \to E_0 f$$

et puisque $R(A)$ est partout dense dans H, la propriété

$$E_0^n f \to E_0 f$$

est réalisée pour tous les $f \in H$, i.e. $E_0^{(n)} \to E_0$. Si maintenant λ est un point arbitraire qui ne soit pas une valeur propre de l'opérateur A, il suffit d'appliquer le même raisonnement à l'opérateur $(A - \lambda)$ et on obtient $E_\lambda^{(n)} \to E_\lambda$ ([65]). Ainsi, pour une suite uniformément bornée $\{A_n\}$ le théorème est démontré.

Passons maintenant au cas général. De ce que, par hypothèse

$$A_n \to A \quad \text{sur } D = D(A)$$

suit que

$$A_n \pm i \to A \pm i \quad \text{sur } D.$$

Les opérateurs $[A_n \pm i]^{-1}$ existent et sont uniformément bornés (leur norme est $\leqslant 1$). D'après le théorème 3.3

$$[A_n + i]^{-1} \to [A + i]^{-1}.$$

De même

$$[A_n - i]^{-1} \to [A - i]^{-1}.$$

Et par conséquent

$$\frac{1}{A_n + i} + \frac{1}{A_n - i} = \frac{2A_n}{A_n^2 + 1} \to \frac{2A}{A^2 + 1}.$$

Comme les projecteurs E_0 et $E_0^{(n)}$ associés aux opérateurs A_n et A coïncident avec les opérateurs correspondants associés à

$$\frac{A}{A^2 + 1} \quad \text{et} \quad \frac{A_n}{A_n^2 + 1}$$

le cas général du théorème de Rellich se réduit à l'aide du théorème du § 2 au cas particulier déjà considéré d'une suite bornée d'opérateurs.

4. Passage du spectre discret au spectre continu*

Dans ce paragraphe, nous allons considérer une suite d'opérateurs auto-adjoints $\{A_n\}$, à spectres discrets, définis sur un domaine commun D partout dense dans l'espace L_2, qui converge vers un opérateur auto-adjoint A dont le spectre est continu : A est la fermeture de l'opérateur $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ défini sur D.

Nous utiliserons les notations suivantes : $g^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, \ldots)$ est une base de définition de l'opérateur A, E_λ et $E_\lambda^{(n)}$ sont les fonctions spectrales des opérateurs A et A_n, f est une fonction d'essai de Schwartz; f^α est sa projection sur le sous-espace engendré par les vecteurs $E_\lambda g^{(\alpha)}$.

Supposons que l'opérateur A satisfasse les hypothèses du théorème du Guelfand et Kostiuchenko, et par conséquent ([22,2]) ait des fonctions propres généralisées qui sont définies comme des fonctionnelles de la forme

$$\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}. \tag{2.6}$$

(*) Ce paragraphe nécessite des connaissances spéciales en théorie spectrale des opérateurs et peut être omis. Il suffit de se limiter à l'exemple qui y est exposé.

Théorème 3.4 ([51, 13]). *Supposons que les fonctionnelles* (2.6) *dépendent continuement de* λ *; il existe alors un nombre infini de suites* $\{\lambda_i^k\}$ *de valeurs propres des opérateurs* A_k *convergeant vers une valeur donnée de* λ *telle que les suites correspondantes de fonctions propres convenablement normalisées, convergent en tant que fonctionnelles sur les fonctions d'essai vers une fonction propre généralisée de l'opérateur* A.

La démonstration du théorème consistera à prouver deux lemmes. Au préalable nous introduisons les définitions :

Définition 1. Si $\int (f_n - f)^2 \, d\mu_n \to 0$, f_n converge vers f en moyenne

Définition 2. Si quels que soient δ et ε, il existe $N_{\varepsilon,\delta}$ tel que pour tout $n > N_{\varepsilon,\delta}$ la mesure μ_n de l'ensemble sur lequel $|f_n - f| > \delta$ est inférieure à ε, alors f_n converge vers f selon la mesure variable μ_n.

Lemme 3.1a. *Supposons que* f_n *converge vers* f *en moyenne selon la mesure variable* μ_n : $\int (f - f_n)^2 \, d\mu_n \to 0$, *alors* f_n *converge vers* f *selon la mesure variable* μ_n.

Il nous faut démontrer que quel que soit $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $N_{\varepsilon\delta}$ tel que pour tout $n \geqslant N_{\varepsilon\delta}$ la μ_n-mesure de l'ensemble sur lequel $|f_n - f| \geqslant \delta$ est inférieure à ε.

Supposons qu'il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ tels que $|f_{n_k} - f|$ soit supérieur à δ sur une suite d'ensembles S_{n_k} dont les μ_{n_k}-mesures sont plus grandes que ε.

Cela conduit aux inégalités

$$\int (f - f_{n_k})^2 \, d\mu_{n_k} \geqslant \int_{Sn_k} (f - f_{n_k})^2 \, d\mu_n \geqslant \varepsilon\delta^2 .$$

Il y a contradiction puisque, par hypothèse, le terme de gauche tend vers zéro pour $n \to \infty$. Ce qui démontre le lemme.

Si $\mu_n(\Delta) \to \mu(\Delta)$ ($\mu_n(\Delta)$ est la mesure de l'intervalle Δ) pour tout Δ, μ étant la mesure de Lebesgue et si $f(x)$ est une fonction continue, alors du lemme suit que pour tout x_0 il existe un ensemble infini de suites de points de croissance de la fonction monotone $\mu_n(-\infty, x)$, $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, pour lesquels $f_n(x_n) \to f(x_0)$. En effet, donnons-nous δ, Δ et un nombre entier P. D'après le lemme il est possible de choisir $N_{\Delta\,\delta}$ tel que pour $n > N_{\Delta,\delta}$ le nombre des points de croissance de la fonction monotone $\mu_n(-\infty, x)$ se trouvant dans l'intervalle $\{x_0 - \Delta, x_0 + \Delta\}$ et vérifiant la condition

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \delta \tag{2.7}$$

est plus grand que P. On choisit Δ de façon à ce que $|f(x_0 - \Delta) - f(x_0 + \Delta)|$ soit inférieur à δ. Alors d'après la condition (2.7) il est possible de remplacer $f(x_n)$ par $f(x_0)$ et δ par 2δ.

Lemme 3.1. *Supposons que les fonctions propres généralisées de l'opérateur A, au sens de Guelfand et Kostiuchenko* [22,2]

$$\frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \tag{1}$$

dépendent continuement de λ.

Alors les fonctions propres généralisées des opérateurs A_n convergent en moyenne selon la mesure spectrale variable vers la fonction propre généralisée de l'opérateur A.

Démonstration. Considérons l'expression :

$$\begin{aligned}\int \left\{ \frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} - \frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}) \\ = \int \left\{ \frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}) \\ - 2 \int \frac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)}) \\ + \int \left\{ \frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Les deux premiers termes du membre de droite de l'égalité (2.8) tendent respectivement vers $(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$ et $2(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$ puisque par hypothèse $\dfrac{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})}$ dépend continuement de λ et que $E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)} \to E_\lambda g^{(\alpha)}$ d'après le théorème de Rellich. Il reste à montrer que le dernier terme converge vers $(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})$. Soit donc $\varepsilon > 0$ donné. Par définition, pour $f^{(\alpha)}$ et $g^{(\alpha)}$, et $N > N_\varepsilon$ il existe $\Delta_i > 0$ tel que

$$\left\| f^{(\alpha)} - \sum_{i=1}^{n} C_i E_{\Delta_i} g^{(\alpha)} \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où, étant donné que pour $n > n_0$

$$\max_i \| E_{\Delta_i}^{(n)} g^{(\alpha)} - E_{\Delta_i} g^{(\alpha)} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2N}$$

il s'ensuit que

$$\left\| f^{(\alpha)} - \sum_{i=1}^{n} C_i E_{\Delta_i}^{(n)} g^{(\alpha)} \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Le terme restant de (2.8) est le carré de la projection $f^{(\alpha)}$ sur le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}$ quel que soit λ.

Par conséquent :

$$\left|(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)}) - \int \left\{ \frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} \right\}^2 d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})\right.$$

$$= \left| \left(f^{(\alpha)}, f^{(\alpha)} - \int \frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} dE_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)} \right) \right|$$

$$\leqslant \| f^{(\alpha)} \| \left\| f^{(\alpha)} - \int \frac{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, f^{(\alpha)})}{d(E_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})} dE_\lambda^{(n)} g^{(\alpha)} \right\|$$

$$\leqslant \| f^{(\alpha)} \| \; \| f^{(\alpha)} - \sum_i C_i E_{\Delta_i}^{(n)} g^{(\alpha)} \| \leqslant \varepsilon \| f^{(\alpha)} \|$$

et le théorème est démontré.

Du lemme il résulte que si le spectre de A_n est discret et si les hypothèses du théorème 3.4 sont vérifiées, alors pour chaque fonction propre généralisée de l'opérateur A, associée à un λ donné, il existe une infinité de suites $\{ \lambda_n \}$ de valeurs propres des opérateurs A_n qui convergent vers λ et telles que la suite des fonctions propres correspondantes considérées comme fonctionnelles sur $f^{(\alpha)}$ converge vers cette fonction propre généralisée.

Exemple ([51,8])

Considérons l'équation de Schrödinger avec le potentiel $u(x)$ pour une particule à un degré de liberté,

$$\frac{h^2}{2m} y_n'' + (\lambda - u(x)) y_n = 0. \tag{2.9}$$

Chacune de ses fonctions propres caractérise un certain état stationnaire de la particule correspondant à un niveau donné d'énergie.

Nous allons considérer le cas où $u(x)$ représente un puits de potentiel général, c'est-à-dire que nous supposons que $u(x)$ est continu, a un nombre fini de maxima et de minima et que $u(-\infty) = u(\infty) = +\infty$.

Il en résulte que pour tous les λ, à l'exclusion d'un nombre fini de valeurs qui correspondent aux extrémas de $u(x)$, l'expression $\lambda - u(x)$ a un nombre pair de zéros simples. Le spectre de l'équation différentielle est, sous les restrictions imposées à $u(x)$, purement ponctuel. En faisant dans l'équation $h = 0$, nous obtenons à la place de l'opérateur différentiel

$$\frac{h^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - u(x)$$

l'opérateur de multiplication par la fonction $- u(x)$. Ce dernier opérateur a un spectre continu, ses fonctions propres correspondant à un λ donné sont des fonctions δ (ou des combinaisons linéaires de fonctions δ) concentrées aux points où $\lambda - u(x)$ s'annule. Le nombre des racines de l'équation $u(x) - \lambda = 0$ est la multiplicité de ce spectre au point λ.

Soit λ_n^i une valeur propre, telle que la fonction $u(x) - \lambda_n^i$ ait $2k$ zéros $x_1, \ldots, x_{2k}$ et supposons que les fonctions propres de l'équation (2.9) soient normalisées à l'unité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

alors λ_n^i vérifiera une des équations :

$$\sqrt{\frac{2m}{h^2}} \int_{x_{2j-1}}^{x_{2j}} \sqrt{\lambda_n^i - u(x)} \, \mathrm{d}x = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + 0(h), j = 1, \ldots, k \quad (2.10)$$

et en outre, la fonction propre, correspondant à λ_n^i, vérifiant modulo $0(h)$ la i-ème équation (2.10) et aucune autre des équations (2.10), sera exponentiellement décroissante lorsque $h \to 0$ en dehors de $x_{2i-1} - \alpha \leqslant x \leqslant x_{2i} + \alpha$, α étant aussi petit que l'on veut et indépendant de h. Nous notons $\{\lambda_n^i\}$ la suite de ces valeurs propres et $\{y_{in}\}$ la suite des fonctions propres correspondantes. De même $\{\lambda_{n_\nu}^i\}$ désigne une sous-suite de la suite des valeurs propres $\{\lambda_n^i\}$ convergeant pour $h \to 0$ vers un nombre λ fixé et $\{y_{in_\nu}\}$ la suite des fonctions propres correspondantes. Les zéros de la fonction $\lambda - u(x)$ qui encadrent le i-ème minimum de la fonction $u(x)$ sont notés x_{2i-1} et x'_{2i}.

Supposons que les fonctions propres de l'équation (2.9) soient normalisées à $1/\sqrt{h}$ c'est-à-dire telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{h}.$$

Alors la suite des fonctions propres satisfait à la limite, pour n_k pair, la relation

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \lambda_{n_k}^i \to \lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_{in_k} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\varphi(x'_{2i-1})}{\sqrt{u'(x'_{2i-1})}} - \frac{\varphi(x'_{2i})}{\sqrt{u'(x'_{2i})}}$$

et pour n_k impair

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \lambda_{n_k}^i \to \lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_{in_k} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\varphi(x'_{2i-1})}{\sqrt{u'(x'_{2i-1})}} + \frac{\varphi(x'_{2i})}{\sqrt{u'(x'_{2i})}}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire intégrable sur tout l'axe et dont la dérivée première est continue. Ainsi on aura la description suivante du comportement des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur (2.9) pour $h \to 0$.

Toutes les fonctions propres et valeurs propres correspondantes peuvent être classées par les minimas isolés (« cuvettes ») de l'énergie potentielle $u(x)$ (car chaque fonction propre tend vers zéro dans toutes les cuvettes sauf une), et dans chaque cuvette les fonctions propres peuvent être divisées en deux classes : dans la première, on met les fonctions propres et les valeurs propres correspondant à n impair se réduisant pour $h \to 0$ à la somme des fonctions δ, prises aux points de rebroussement; dans la deuxième, celles correspondant à n pair se réduisant à la différence des fonctions δ. Cette séparation des fonctions propres en classes différentes éclaire la façon dont le spectre simple de l'opérateur (2.9) devient à la limite le spectre multiple de l'opérateur de multiplication par $u(x)$.

Les affirmations émises dans cet exemple peuvent être facilement prouvées, si on utilise la forme asymptotique des fonctions propres de l'équation de Schrödinger donnée au chapitre 2. Cet exemple montre qu'en un sens le théorème indiqué plus haut ne peut pas être amélioré, qu'il est impossible d'espérer que dans le cas général une suite quelconque de fonctions propres convenablement normalisées converge au sens généralisé vers une fonction propre généralisée de l'opérateur limite. Par conséquent, on peut seulement dire qu'il existe une sous-suite convergeant au sens généralisé vers une fonction propre généralisée donnée à l'avance de l'opérateur limite.

5. **Régularisation des problèmes incorrectement posés au sens de Tychonov**

1. Un grand nombre de problèmes concernant la solution de l'équation opératorielle

$$Tz = u,$$

où T applique le groupe topologique $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}_2$ sont incorrectement posés, en ce sens que, si $u_n \to u$ dans $\mathscr{H}_1$, les solutions z_n des équations

$$Tz_n = u_n$$

ne convergent pas dans $\mathscr{H}_2$ vers z.

La notion de problème correctement posé introduite par A. N. Tychonov a permis à M. M. Lavrentiev d'étudier l'ensemble des méthodes de résolution des problèmes « correctement posés » au sens de Tychonov. Il les a exposés dans sa monographie ([42]). A. N. Tychonov a introduit une notion plus générale de régularisabilité des problèmes incorrects et démontré la régularisabilité d'une vaste classe de problèmes comprenant des équations intégrales non linéaires. Les méthodes spéciales de régularisation de A. N. Tychonov s'avèrent en outre très efficaces pour la résolution sur machine à calculer de problèmes concrets.

La régularisation des problèmes incorrects consiste à remplacer par des suites d'opérateurs bornés l'opérateur inverse non borné $R = T^{-1}$. Nous donnons à titre d'exemple la démonstration de la proposition suivante qui concerne la régularisation « à l'ordre zéro » au sens de A. N. Tychonov ([77, 1 et 2]).

Théorème 3.5. *Supposons que R soit une transformation linéaire fermée dont le domaine de définition $D(R)$ est dense dans l'espace de Hilbert H.*

Alors le problème $Ru = z, z \in H$ est régularisable au sens de Tychonov et l'opérateur

$$R_\delta = \overline{[1 + \delta RR^*]^{-1} R}$$

(la barre indique la fermeture) est régularisant : ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon, z)$ tel que l'inégalité $\| u - \tilde{u} \| < \delta$ pour $\delta < \delta(\varepsilon, z)$ entraîne l'inégalité $\| R_\delta \tilde{u} - z \| < \varepsilon$.

Démonstration. D'après les hypothèses faites, les opérateurs R^* et R^{**} existent, de plus $R^{**} = R$, le domaine de définition de R^* est dense dans H et les opérateurs $B_\delta = [1 + \delta RR^*]^{-1}$ et $C_\delta = \sqrt{\delta}\, R^*[1 + \delta RR^*]^{-1}$ sont définis partout et majorés par 1. L'opérateur RR^* est auto-adjoint et défini positif et a un domaine dense de définition (voir § 1, chap. 2). De ce que $1 + \delta RR^* \to 1$ sur $D(RR^*)$, qui est dense dans H, il résulte du théorème 3.2 que B_δ converge fortement vers 1 sur tous les éléments de H.

Il est évident que $R_\delta = \delta^{-1/2} C_\delta^*$, aussi

$$\| R_\delta \| = \delta^{-1/2} \| C_\delta^* \| = \delta^{-1/2} \| C_\delta \| \leqslant \delta^{-1/2}.$$

Passons maintenant à la démonstration de la proposition énoncée.

Supposons que $\| u - \tilde{u} \| < \delta$. Il nous faut montrer que $R_\delta \tilde{u} - z \to 0$ pour $\delta \to 0$.

On a

$$R_\delta \tilde{u} - z = R_\delta \tilde{u} - Ru = R_\delta \tilde{u} - R_\delta u + (R_\delta - R) u = R_\delta (\tilde{u} - u) + (B_\delta - 1) z.$$

D'où

$$\| R_\delta \tilde{u} - z \| \leqslant \| R_\delta \| \, \| \tilde{u} - u \| + \| (B_\delta - 1) z \| \leqslant \sqrt{\delta} + \| (B_\delta - 1) z \| \to 0 \quad (2.11)$$

puisque $\| R_\delta \| \leqslant \delta^{-1/2}$.

Ce qui démontre le théorème.

2. Corollaire. *Supposons que $z \in D(R^*)$,* i.e. *que $u \in D(R^* R)$, alors $\| R_\delta \tilde{u} - z \| \leqslant \sqrt{\delta}$.*

En fait

$$\| [B_\delta - 1] z \| = \| \{ [1 + \delta RR^*]^{-1} - 1 \} z \| = \delta \left\| \overline{\left(\frac{RR^*}{1 + \delta RR^*} \right)} z \right\|$$

$$= \delta \left\| \overline{\frac{1}{1 + \delta RR^*}} RR^* z \right\| = \delta \| R_\delta R^* z \| \leqslant \sqrt{\delta}\, R^* z.$$

Ce qui, avec (2.11), démontre le corollaire.

Si $R = T^{-1}$, nous avons

$$R_\delta = \overline{[1 + \delta T^{-1}[T^*]^{-1}]^{-1}T^{-1}} = \overline{[(T^*T)^{-1}(T^*T + \delta)]^{-1}T^{-1}}$$
$$= \overline{(T^*T + \delta)^{-1}T^*} \quad \text{et on pose } R_\delta \tilde{u} = z_\delta.$$

Supposant que $\tilde{u} \in D(T^*)$, nous obtenons (*) d'après la définition de z_δ l'équation

$$(\delta + T^*T)z_\delta = T^*\tilde{u}.$$

Remarque. Si l'opérateur R satisfait la condition

$$\left\| \frac{1}{1 - \delta R} \right\| \leqslant a$$

pour $|\delta| \to 0$ sur un certain chemin du plan complexe en δ, en posant

$$R_\delta = R \frac{1}{1 - \dfrac{\delta}{|\delta|^{1/2}} R}$$

nous obtenons tous les résultats du théorème précédent. Si $z \in D(R)$, i.e. $u \in D(R^2)$ alors $\|z - R_\delta \tilde{u}\| \leqslant \sqrt{|\delta|}$.

Si $R = T^{-1}$ alors

$$R_\delta = T^{-1} \frac{1}{1 - \dfrac{\delta}{\sqrt{|\delta|}} T^{-1}} = \frac{1}{T - \dfrac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}}.$$

Ainsi z_δ s'obtient à partir de l'équation :

$$\left(T - \frac{\delta}{\sqrt{|\delta|}}\right) z_\delta = \tilde{u}.$$

Cette dernière méthode de régularisation est un cas particulier de la méthode « spéciale » de régularisation due à A. N. Tychonov (dite « régularisation à l'ordre zéro »).

§ 3 SÉRIES DE PERTURBATION DE L'OPÉRATEUR INVERSE

Nous allons démontrer maintenant un théorème relatif au développement en série de perturbation de l'opérateur inverse.

Théorème 3.6. *Soient A et B des opérateurs linéaires allant de l'espace de Banach $\mathscr{B}$ à l'espace de Banach $\mathscr{B}'$ et vérifiant les hypothèses suivantes :*

1) *la fermeture de $A + \varepsilon B$ existe*

(*) Sinon on peut prendre $\tilde{\tilde{u}} \in D(T^*)$ tel que $\|\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}\| = \delta^2$.

2) *le domaine* $D(A + \varepsilon B)$ *est dense dans* $\mathscr{B}$

3) $A = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{(A + \varepsilon B)}$

4) *l'opérateur* $\overline{[A + \varepsilon B]^{-1}}$ *est uniformément borné lorsque* $\varepsilon \to 0$

5) *les éléments*

$$A^{-1}(BA^{-1})^k f \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{3.1}$$

existent.

La relation suivante est alors vraie :

$$\| \overline{[A + \varepsilon B]}^{-1} f - A^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k f \| = 0(\varepsilon^n).$$

Démonstration. Notons d'abord que puisque les n éléments de la forme (3.1) existent les $(n - 1)$ premiers éléments appartiennent à $D(A)$ et $D(B)$ et par conséquent à $D(A + \varepsilon B) \subset D(\overline{A + \varepsilon B})$.

Montrons l'identité

$$\overline{(A + \varepsilon B)}^{-1} f = A^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f + (\overline{A + \varepsilon B})^{-1} (-\varepsilon)^n (BA^{-1})^n f.$$

En effet, faisant agir l'opérateur $\overline{A + \varepsilon B}$ sur chacun des membres de l'égalité (c'est possible d'après la remarque du début), nous obtenons

$$\begin{aligned} f = \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f &+ \varepsilon BA^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-\varepsilon)^k (BA^{-1})^k f \\ &+ (-\varepsilon)^n (BA^{-1})^n f \equiv f. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur $(\overline{A + \varepsilon B})^{-1}$ existe et est borné, l'identité est démontrée.

On a alors

$$\begin{aligned} \| (A + \varepsilon B)^{-1} f - A^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varepsilon^k (BA^{-1})^k f \| \\ = \varepsilon^n \| \{ (A + \varepsilon B)^{-1} - A^{-1} \} (BA^{-1})^n f \|. \end{aligned}$$

Par hypothèse

$$A^{-1}(BA^{-1})^n f$$

existe, c'est-à-dire

$$(BA^{-1})^n f \in R(A).$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.2 :

$$\| \{ [\overline{A + \varepsilon B}]^{-1} - A^{-1} \} (BA^{-1})^n f \| \to 0$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

CHAPITRE 4

PERTURBATIONS DES SEMI-GROUPES A UN PARAMÈTRE

§ 1 INTRODUCTION

1. Dans ce chapitre, nous allons considérer les semi-groupes à un paramètre d'opérateurs

$$T_t \qquad 0 \leqslant t < \infty$$

définis dans un espace de Banach B et satisfaisant les conditions suivantes :

1) ils sont bornés :

$$\| T_t \| \leqslant K \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant s$$

(la constante K dépend généralement de s);

2) ils sont continus, i.e.

$$\| T_{t+\varepsilon} - T_t \| \to 0 \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon \to 0$$

pour tout t, y compris $t = 0$.

Dans ces conditions la limite

$$A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon - I)$$

(ici I est l'opérateur identité, et la limite s'entend au sens de la convergence forte des opérateurs) existe et définit un opérateur fermé dont le domaine de définition (*) est partout dense dans B. On appelle cet opérateur le générateur du semi-groupe T_t.

Nous nous intéresserons au lien entre la convergence des générateurs et la convergence des semi-groupes correspondant à ces générateurs. Pour cela, afin que la question ainsi posée ait un sens bien défini. il est d'abord nécessaire d'établir que le semi-groupe T_t se reconstruit de façon unique à partir de son générateur A. Si l'opérateur A est borné, il est tout de suite clair que

$$T_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \mathrm{e}^{At} \tag{1.1}$$

(*) Voir par exemple [65], [84].

où la série converge pour tout t. Si par contre A n'est pas borné, la série (1.1) n'a pas de sens à première vue, néanmoins, un semi-groupe T_t borné et fortement continu se reconstruit de façon unique à partir de A. Il existe plusieurs formules explicites exprimant T_t à l'aide de A, par exemple

$$T_t = \lim_{k \to \infty} \left(I - \frac{t}{k} A \right)^{-k}$$

ou bien

$$T_t = \lim_{n \to \infty} e^{A_n t}$$

où les A_n bornés commutent entre eux et où $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$. On trouve par exemple dans le livre de E. Hille et R. Phillips [84, 28] un résumé des formules de ce genre. Une généralisation de ces formules est donnée dans § 4, 2°.

Les semi-groupes d'opérateurs, opérant dans un espace de Banach, sont étroitement liés aux équations différentielles à coefficients opératoriels.

Si A est le générateur borné du semi-groupe fortement continu T_t et si $f_0 \in D(A)$, la fonction

$$f(t) = T_t f_0$$

à valeurs dans B, vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = Af$$

au sens suivant :

$$\left\| \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon} - Af(t) \right\| \to 0 \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0 .$$

Nous allons considérer une équation plus générale de la forme

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} - A(t)\,u(t) = \mathscr{F}(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant a \tag{1.2}$$

où l'inconnue $u(t)$ appartient à un espace de Banach complexe B et dépend du paramètre réel t, où $\mathscr{F}(t)$ est un élément donné de B et $A(t)$ un opérateur linéaire donné de B dépendant de t et généralement non borné.

Si l'opérateur $A(t)$ est indépendant de t et si $\mathscr{F} = 0$, la solution de l'équation (1.2) est formellement donnée par $e^{At}u(0)$, avec $u(0) \in B$. La définition rigoureuse et les propriétés de l'exponentielle sont données par la théorie des semi-groupes. On y obtient des conditions nécessaires et suffisantes sur le générateur A, de domaine de définition partout dense, pour que le semi-groupe $T_t = e^{At}$ soit fortement continu. Il est nécessaire qu'il existe deux nombres réels ω et M tels que tout $\lambda > \omega$ appartienne à l'ensemble résolvant de l'opérateur A et que

$$\| (A - \lambda)^{-n} \| \leqslant M(\lambda - \omega)^n \qquad n = 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

(voir [28], le théorème de Hille-Phillips-Yosida).

Nous généraliserons cette condition (en tant que condition suffisante mais non nécessaire!) au cas où l'opérateur A dépend de t. Dans la suite, nous aurons besoin de la condition nécessaire moins générale : si le semi-groupe $T_t = e^{At}$ est borné par un, pour tout ε positif l'opérateur $(1 - \varepsilon A)^{-1}$ est partout défini dans B et borné par un.

§ 2 INÉGALITÉ FONDAMENTALE POUR LES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION D'ÉVOLUTION

Introduisons la définition suivante :

Nous dirons que l'opérateur $A(t)$ de B possède la propriété P si les conditions qui suivent sont réalisées :

1) l'opérateur $A(t)$ est fermé et a un domaine de définition dense $D(A(t)) \subset B$.

2) Il existe un nombre ω tel que tout $\lambda > \omega$ appartienne à l'ensemble résolvant de l'opérateur $A(t)$.

3) La fonction $[A(t) - \lambda]^{-1}h$, avec $\lambda > \omega$ *et* $h \in B$ est intégrable au sens de Bochner.

4) Il existe un nombre positif M tel que quelle que soit la partition $s \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant \dots \geqslant t_n \geqslant 0$

$$\| [A(t_1) - \lambda]^{-1}[A(t_2) - \lambda]^{-1} \dots [A(t_n) - \lambda]^{-1} \|_B \leqslant M(\lambda - \omega)^n.$$

Lemme 4.1. *Supposons que $A(t)$ possède la propriété P. Il existe alors $u(t)$ une fonction continue du paramètre t à valeurs dans $D(A(t)) \subset B$ et telle que les fonctions* $\dfrac{du}{dt}$ et $\mathscr{F}(t) = \dfrac{du}{dt} - A(t)u$ *soient intégrables au sens de Bochner.*

On a l'inégalité

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| u(t) \|_B \leqslant M\, e^{\omega_1 s} \left\{ \| u(0) \|_B + \int_0^s \| \mathscr{F}(t) \|_B \, dt \right\} \tag{2.1}$$

pour $\omega_1 \geqslant \omega$.

Corollaire 1. Dans les hypothèses du lemme, la solution $u(t)$ de l'équation (1.2) est uniquement déterminée par sa valeur initiale et le terme de droite $\mathscr{F}(t)$.

Lorsque $\mathscr{F}(t) = 0$ et $M = 1$ ce théorème est un corollaire du théorème de Kato ([34, 1]). La méthode exposée plus bas est différente de celle de T. Kato et proche de celle de Yosida ([65]) et Elliot ([89]). Pour l'unicité du théorème voir aussi [16], [44, 1].

Démonstration 1. Introduisons les notations suivantes : on désigne par $C(B)$ l'espace des fonctions continues, définies sur $[0 \leqslant t \leqslant s]$ et à valeurs dans B. La norme pour cet espace est donnée par :

$$\varphi \in C(B) \qquad \| \varphi(t) \|_{C(B)} = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| \varphi(t) \|_B .$$

$L_1(B)$ est l'espace de Banach des fonctions absolument intégrables (au sens de Bochner) à valeurs dans B. La norme est définie par :

$$f(t) \in L_1(B) \qquad \| f(t) \|_{L_1(B)} = \int_0^s \| f(t) \|_B \, \mathrm{d}t .$$

On note par $L_1 \oplus B$ l'espace de Banach des couples de fonction $\{g, f\}$, où $f(t) \in L_1(B)$ et $g \in B$, muni de la norme

$$\| \{g, f(t)\} \|_{L_1 \oplus B} = \| g \|_B + \int_0^s \| f(t) \|_B \, \mathrm{d}t$$

L désignera un opérateur envoyant les éléments de $C(B)$ dans $L_1 \oplus B$ (on indiquera cette action de la façon suivante

$$L \in (C(B) \to L_1(B) \oplus B) .$$

De plus si $u(t) \in D(L) \subset C(B)$ alors

$$Lu = \left\{ u(0), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - A(t) u \right\} .$$

De cette façon, le domaine de définition de l'opérateur L est égal à l'intersection des domaines de définition des opérateurs

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in (C(B) \to L_1(B)) \qquad \text{et} \qquad A(t) \in (C(B) \to L_1(B)) .$$

Introduisons les opérateurs suivants

$$I_\delta(t) = (1 - \delta A(t))^{-1} \qquad B_\delta(t) = A(t) I_\delta(t) .$$

L'opérateur $I_\delta(t)$ est borné. En effet,

$$I_\delta(t) = \left[\frac{1}{\delta} - A(t) \right]^{-1} \cdot \frac{1}{\delta}$$

$$\text{et comme } \| [\lambda - A(t)]^{-1} \| \leqslant \frac{M}{\lambda - \omega}, \ \| I_\delta \| \leqslant \frac{M}{\delta \left(\frac{1}{\delta} - \omega \right)} .$$

Nous supposons dorénavant que $\delta \leqslant \dfrac{1}{2\omega}$, alors

$$\| I_\delta(t) \| \leqslant 2M .$$

L'opérateur $B_\delta(t)$ est aussi borné car

$$B_\delta(t) = A(t)\, I_\delta(t) = A(t)\frac{1}{1 - \delta A(t)} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{1 - \delta A(t)} - 1\right)$$
$$= \frac{I_\delta(t)}{\delta} - \frac{1}{\delta}.$$

Donc

$$\| B_\delta(t) \| \leqslant \frac{2M + 1}{\delta}.$$

Il résulte du théorème 3.2 que $I_\delta(t) \to 1$ pour $\delta \to 0$ sur $D(A(t)) \subset B$ et donc que $B_\delta(t) \to A(t)$ sur $D(A(t)) \subset B$.

Notons de plus par $L_\delta(t) \in (C(B) \to L_1 \oplus B)$ l'opérateur, agissant de la façon suivante :

pour $u(t) \in D\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \subset C(B)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \in (C(B) \to L_1(B)),$$

$$L_\delta(t)\, u(t) = \left\{ u(0), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - B_\delta(t)\, u \right\}.$$

Montrons que $L_\delta \to L$ pour la norme de $L_1 \oplus B$ sur $D(L) \subset C(B)$. Par définition :

$$L_\delta(t)\, u(t) = \left\{ u(0), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - B_\delta(t)\, u \right\}$$

$$L(t)\, u(t) = \left\{ u(0), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - A(t)\, u \right\}. \tag{2.2}$$

En soustrayant ces deux égalités et en prenant la norme, on obtient

$$\| L_\delta u - Lu \|_{L_1 \oplus B} = \| \{0, B_\delta(t)\, u - A(t)\, u\} \|_{L_1 \oplus B} = \int_0^s \| [B_\delta(t) - A(t)]\, u \|_B \,\mathrm{d}t.$$

Montrons que cette intégrale tend vers 0 pour $\delta \to 0$. La quantité sous le signe somme tend vers zéro, ainsi qu'il l'a été démontré plus haut, lorsque $\delta \to 0$. Il reste à montrer que cette expression (voir § 1, chap. 2) est bornée par une fonction intégrable. Mais $A(t) - B_\delta(t) = [1 - I_\delta(t)]\, A(t)$ et comme $\| I_\delta \| \leqslant 2M$, $\| 1 - I_\delta(t) \| \leqslant 2M + 1$ et par conséquent

$$\| [1 - I_\delta(t)]\, A(t) u(t) \|_B \leqslant (2M + 1) \| A(t) u(t) \|_B.$$

Et puisque $u(t) \in D(L) \subset D(A(t))$, où $A(t) \in (C(B) \to L_1(B))$, $\| A(t) u(t) \|_B$ est intégrable. D'après le théorème d'Osgood, on peut affirmer que

$$\int_0^s \| [A(t) - B_\delta(t)]\, u(t) \|_B \,\mathrm{d}t \to 0 \quad \text{pour } \delta \to 0.$$

Ainsi dans $L_1 \oplus B, L_\delta \to L$ sur $D(L) \subset C(B)$. Montrons que les opérateurs $L_\delta^{-1} \in (L_1 \oplus B \to C(B))$ ont une borne uniforme, c'est-à-dire que

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| u_\delta(t) \|_B \leqslant C \left\{ \| u(0) \|_B + \int_0^s \| \mathscr{F}(t) \|_B \, \mathrm{d}t \right\} \tag{2.3}$$

si $L_\delta u_\delta = \{u(0), \mathscr{F}(t)\}$.

Ceci signifiera que $\| L_\delta^{-1} \| \leqslant C$.

Pour démontrer (2.3) nous considérons le problème

$$\frac{\mathrm{d}u_\delta(t)}{\mathrm{d}t} - B_\delta(t) u_\delta(t) = \mathscr{F}(t). \tag{2.4}$$

Effectuons le changement $u_\delta = \mathrm{e}^{-t/\delta} v$. Le problème (2.4) s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\delta} v - B_\delta(t) v = \mathscr{F}(t) \mathrm{e}^{t/\delta}$$

$$v|_{t=0} = u_0 = u(0)$$

Tenant compte de ce que $B_\delta(t) + \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{1}{\delta} I_\delta(t)$ nous avons

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\delta} I_\delta(t) v = \mathscr{F}(t) \mathrm{e}^{t/\delta} \tag{2.5}$$

$$v|_{t=0} = u_0$$

Montrons alors que la solution de cette équation peut s'écrire sous forme de la série :

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_0^t I_\delta(t_1) \, \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} I_\delta(t_2) \, \mathrm{d}t_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n) u_0 \, \mathrm{d}t_n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \int_0^t \mathrm{e}^{\tau/\delta} \, \mathrm{d}\tau \int_\tau^t I_\delta(t_1) \, \mathrm{d}t_1 \int_\tau^{t_1} I_\delta(t_2) \, \mathrm{d}t_2 \dots \int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n) \mathscr{F}(\tau) \, \mathrm{d}t_n \tag{2.6}$$

On voit facilement que la substitution formelle de (2.6) dans (2.5) vérifie identiquement l'équation (2.5). Il reste à montrer que la série (2.6) et la série des dérivées de ses termes, par rapport à t, convergent.

D'après la condition 4)

$$\left\| \int_\tau^t I_\delta(t_1) \, \mathrm{d}t_1 \int_\tau^{t_1} I_\delta(t_2) \, \mathrm{d}t_2 \dots \int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n) \mathscr{F}(\tau) \, \mathrm{d}t_n \right\|_B \leqslant \frac{M(t-\tau)^n}{(1-\delta\omega)^n n!} \| \mathscr{F}(\tau) \|_B . \tag{2.7}$$

De façon analogue à (2.7) on a

$$\left\| \int_0^t I_\delta(t_1) \, \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} I_\delta(t_2) \, \mathrm{d}t_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n) u_0 \, \mathrm{d}t_n \right\|_B \leqslant \frac{M t^n}{(1-\delta\omega)^n n!} \| u_0 \|_B .$$

Il résulte de ceci que la série (2.6) converge et en outre

$$\| v \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} \left\{ \left\| \int_0^t I_\delta(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)\,\mathrm{d}t_n\, u_0 \right\|_B \right.$$

$$\left. + \int_0^t \mathrm{e}^{\tau/\delta}\,\mathrm{d}\tau \left\| \int_\tau^t I_\delta(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \dots \int_\tau^{t_{n-1}} I_\delta(t_n)\,\mathscr{F}(\tau)\,\mathrm{d}t_n \right\|_B \right\}$$

$$\leqslant M \| u_0 \|_B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\delta^n(1 - \delta\omega)^n n\,!} + M \int_0^t \mathrm{e}^{\tau/\delta} \| \mathscr{F}(\tau) \|_B\,\mathrm{d}\tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - \tau)^n}{\delta^n(1 - \delta\omega)^n n\,!}$$

$$= M\,\mathrm{e}^{\frac{t}{\delta(1-\omega\delta)}} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^t \mathrm{e}^{\tau/\delta\left(1 - \frac{1}{1-\omega\delta}\right)} \|\mathscr{F}(\tau)\|_B\,\mathrm{d}\tau \right\}$$

$$\leqslant M\,\mathrm{e}^{\frac{t}{\delta(1-\omega\delta)}} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^t \| \mathscr{F}(\tau) \|_B\,\mathrm{d}\tau \right\}.$$

On démontre de façon semblable la convergence de la série des dérivées. Ainsi la série (2.6) satisfait réellement l'équation (2.5). L'unicité de cette solution résulte de l'équation intégrale :

$$v(t) = u_0 + \int_0^t \mathscr{F}(\tau)\,\mathrm{e}^{\tau/\delta}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\delta} \int_0^t I_\delta(\tau)\,v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

correspondant à (2.5) et se démontre par la méthode des applications contractantes.

Nous allons obtenir maintenant l'évaluation requise pour $u_\delta(t)$.

En se rappelant que $u_\delta(t) = \mathrm{e}^{-t/\delta} v(t)$ on peut écrire :

$$\| u_\delta(t) \|_B = \mathrm{e}^{-t/\delta} \| v(t) \|_B \leqslant M\,\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{1-\omega\delta} - 1\right)t/\delta} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^t \| \mathscr{F}(\tau) \|_B\,\mathrm{d}\tau \right\}$$

$$= M\mathrm{e}^{\frac{\omega}{1-\delta\omega}t} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^t \| \mathscr{F}(\tau) \|_B\,\mathrm{d}\tau \right\} \tag{2.8}$$

Prenons $\omega_1 > \omega$. Alors pour tout δ suffisamment petit, $\omega_1 > \dfrac{\omega}{1 - \delta\omega}$. Tenant compte de ceci, on peut écrire :

$$\| u_\delta(t) \|_B \leqslant M\,\mathrm{e}^{\omega_1 t} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^t \| \mathscr{F}(\tau) \|_B\,\mathrm{d}\tau \right\}$$

$$\leqslant M\,\mathrm{e}^{\omega_1 s} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^s \| \mathscr{F}(t) \|_B\,\mathrm{d}t \right\}.$$

Comme l'expression du membre de droite de la dernière égalité est indépendante de t, on aura la même inégalité pour

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| u_\delta(t) \|_B .$$

On a ainsi l'estimation

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| u_\delta(t) \|_B \leqslant M \, \mathrm{e}^{\omega_1 s} \left\{ \| u_0 \|_B + \int_0^s \| \mathscr{F}(t) \|_B \, \mathrm{d}t \right\}$$

c'est-à-dire que nous arrivons à

$$\| L_\delta^{-1} \| \leqslant M \, \mathrm{e}^{\omega_1 s} .$$

Ainsi les opérateurs L_δ et L vérifient toutes les hypothèses du théorème 3.2 sur les opérateurs inverses, en vertu duquel nous pouvons affirmer que $\lim_{\delta \to 0} L_\delta^{-1} = L^{-1}$ existe et est majoré par la même quantité.

Ainsi, la solution du problème

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - A(t) u = \mathscr{F}(t) \quad u(0) = u_0 ;$$

qui correspond à $Lu = \{ u_0, \mathscr{F}(t) \}$, est unique et satisfait l'inégalité (2.1). Le lemme est démontré.

§ 3 THÉORIE DES PERTURBATIONS POUR L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION

1. Un théorème « abstrait »

Théorème 4.1. *Soit $A(t), 0 \leqslant t \leqslant t_0$, une famille d'opérateurs d'un espace de Banach B dans un espace de Banach B' ayant un domaine commun de définition, dense dans B.*

Supposons que

$$\| [1 - \varepsilon A(t)]^{-1} \| \leqslant 1 \tag{A}$$

pour tout t et $\varepsilon < \varepsilon_0$. Considérons une suite de telles familles $A_n(t)$, satisfaisant

$$\int_0^t \| [A_n(t) - A(t)] g(t) \| \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{3.1}$$

sur un ensemble D_t, dense dans $C(B)$, de fonctions $g(t)$ différentiables dans $L_1(B)$.

Alors, la solution $u_n(t)$ de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} - A_n(t) u_n(t) = \mathscr{F}_n(t)$$

satisfaisant la condition $u_n(0) = g_n$, où $g_n \to g$ dans B et

$$\int_0^t \| \mathscr{F}_n(t) - \mathscr{F}(t) \|_B \, \mathrm{d}t \to 0 , \tag{3.2}$$

converge fortement dans B et uniformément en t vers la solution $u(t)$ du problème

$$Lu(t) = \mathscr{F}(t) \qquad u(0) = g$$

si elle existe; L étant la fermeture de l'opérateur $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A(t)$, *défini sur l'ensemble* D_t.

Démonstration. Considérons les opérateurs L_n et $\tilde{L}$ de $C(B)$ dans $L_1 \oplus B$ de la forme

$$L_n u_n(t) = \left\{ u_n(0), \frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t} - A_n(t)\, u_n(t) \right\},$$

$$\tilde{L}\, u(t) = \{ u(0), L\, u(t) \}.$$

Il résulte de la condition (3.1) que la suite $\{ L_n \}$ converge vers l'opérateur $\tilde{L}$.

Comme, d'après le lemme 4.1, $\| L_n^{-1} \| \leqslant 1$, la proposition énoncée découle du théorème 3.2.

2. Un exemple tiré de la théorie des équations différentielles

Considérons le problème

$$i \frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t} - n^{1-\delta} t^n \Delta u_n(t,x) + C^2(x,t)\, u_n(t,x) = \mathscr{F}_n(t,x),$$

$$x = x_1, \dots, x_n \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 .$$

$C^2(x,t) \leqslant 1$ étant une fonction continue, $u_n(0) = 0, \delta > 0$ et $\mathscr{F}_n(x,t) \in C(L_2)$.

Il est évident que pour une fonction $v(x,t)$ deux fois différentiable par rapport à x et une fois différentiable par rapport à t,

$$\int_0^1 \| n^{1-\delta} t^n \Delta v(t) \|_{L_2} \mathrm{d}t \to 0$$

pour $n \to \infty$.

En outre, l'opérateur $n^{1-\delta} t^n \Delta$ vérifie la condition (A). Toutes les conditions du théorème 4.1 étant remplies, la solution $u_n(t,x)$ converge donc en moyenne en x et *uniformément* en t pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ vers la fonction

$$\int_0^t \exp\left(-i \int_\tau^t C^2(x,\tau')\mathrm{d}\tau' \right) \mathscr{F}(x,\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

avec

$$\mathscr{F}(x,\tau) = \lim_{n \to \infty} \mathscr{F}_n(x,\tau).$$

§ 4 THÉORIE DES PERTURBATIONS DES SEMI-GROUPES D'OPÉRATEURS*

1. Lemme fondamental

Soit $A(t)$ une famille à un paramètre $(0 \leqslant t \leqslant s)$ d'opérateurs d'un espace de Banach B, ayant le même domaine de définition $D \subset B$ dense dans B.

Supposons que $A(t)$ dépende continuement du paramètre t, c'est-à-dire que

$$\lim_{t \to t_1} A(t) g = A(t_1) g$$

pour tout $g \in D$.

Soit $\mathscr{F}(t)$ une fonction de t, intégrable au sens de Bochner, à valeurs dans B.

Considérons l'équation

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - A(t) u = \mathscr{F}(t). \tag{4.1}$$

Nous exigeons de la solution $u(t)$ de cette équation qu'elle soit une fonction continue de t, à valeurs dans l'espace de Banach B et vérifie la condition initiale

$$u(0) \in B \tag{4.2}$$

Autrement dit, nous considérons un opérateur L opérant de l'espace de Banach $C(B)$ des fonctions continues $g(t)$ à valeurs dans B dans l'espace de Banach $V = L_1(B) \oplus B$ et tel que :

$$Lu(t) = \left\{ u(0), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - A(t) u \right\} \in V.$$

Par solution classique $u(t)$ nous entendrons une fonction $u(t)$, appartenant à l'intersection $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cap D$ et satisfaisant l'équation (4.1) et la condition initiale (4.2). On dira que la fonction $u(t)$ est une solution de l'équation (4.1) s'il existe une suite $u_n(t)$ de solutions classiques des équations

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} - A(t) u_n = \mathscr{F}_n(t)$$

qui converge dans $C(B)$ vers $u(t)$, c'est-à-dire que

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| u(t) - u_n(t) \|_B \to 0$$

avec le membre de droite convergeant dans $L_1(B)$ et la condition initiale convergeant dans B : $u_n(0) \to u(0)$.

(*) On pourra consulter le petit livre d'E. Nelson, *Topics in Dynamics*, I. Princeton University Press (*N.d.T.*).

Nous dirons que l'opérateur $A(t)$ satisfait la condition (P) si :

1) $A(t_1)$ commute avec $A(t_2)$ pour tous les $t_1, t_2 \in (0, s)$;

2) l'opérateur $\dfrac{1}{1 - \varepsilon A(t)}$ existe, est borné par l'unité et est partout défini.

Nous écrirons $A(t) \in (P)$ si $A(t)$ vérifie la condition (P). On sait que, dans ces conditions, si u_0 et $\mathscr{F}(t) \in D$, la solution classique de l'équation (4.1) existe [34, 1].

Lemme 4.2. *Soient* $A_n(t), A(t) \in (P), \mathscr{F}_n(t), \mathscr{F}(t) \in L_1(B), g_n, g \in B, D$ *un domaine dense dans* B *et supposons que*

$$\int_0^s \| \mathscr{F}_n(t) - \mathscr{F}(t) \|_B \, dt \to 0 \tag{4.3}$$

$$g_n \to g \tag{4.4}$$

$$\int_0^s \| [1 - \varepsilon A_n(t)]^{-1} g - [1 - \varepsilon A(t)]^{-1} g \|_B \, dt \to 0 \tag{4.5}$$

lorsque $n \to \infty$, *pour tous les* $g \in B$ *et pour un* ε_0 *arbitraire fixe,* $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, *alors la suite des solutions* $u_n(t)$ *des systèmes*

$$\frac{du_n(t)}{dt} - A_n(t) u_n(t) = \mathscr{F}_n(t) \qquad u_n(0) = g_n$$

converge vers la solution $u(t)$ *de*

$$\frac{du(t)}{dt} - A(t) u(t) = \mathscr{F}(t),$$

$$u(0) = g,$$

uniformément en t, *c'est-à-dire que*

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| u_n(t) - u(t) \|_B \to 0 \qquad \textit{pour } n \to \infty.$$

Démonstration. En vertu des hypothèses du lemme, $I_{n\varepsilon}(t) = (1 - \varepsilon A_n(t))^{-1}$ converge dans $L_1(B)$ vers $I_\varepsilon(t) = (1 - \varepsilon A(t))^{-1}$. Par conséquent,

$$B_{n\varepsilon} = A_n I_{n\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(1 - I_{n\varepsilon})$$

converge aussi vers $B_\varepsilon = A I_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon}(1 - I_\varepsilon)$ sur tous les éléments de $L_1(B)$ (c'est-à-dire fortement dans $L_1(B)$). D'où, vu que $C(B) \subset L_1(B)$, il résulte que les opérateurs $L_\varepsilon^{(n)}$ de $C(B)$ dans V de la forme

$$L_\varepsilon^{(n)} u(t) = \left\{ u(0), \frac{du}{dt} - B_{n\varepsilon} u \right\}$$

convergent vers l'opérateur L_ε de $C(B)$ dans V de la forme

$$L_\varepsilon u(t) = \left\{u(0), \frac{du}{dt} - B_\varepsilon u\right\}$$

sur l'ensemble des fonctions différentiables dans $L_1(B)$, appartenant à $C(B)$ (c'est-à-dire des fonctions continues dont les dérivées appartiennent à $L_1(B)$). Ceci constitue aussi le domaine de définition de l'opérateur L_ε dans l'espace $C(B)$. D'après la formule (2.1)

$$\| [L_\varepsilon^{(n)}]^{-1} \| \leqslant 1.$$

Par conséquent, sur le domaine des valeurs de l'opérateur L_ε, domaine qui coïncide avec V, on a, d'après le théorème 3.2,

$$[L_\varepsilon^{(n)}]^{-1} \to L_\varepsilon^{-1}$$

lorsque $n \to \infty$.

Autrement dit, pour $\delta > 0$, on peut trouver $n_{\delta,\varphi}(\varepsilon)$ tel que pour $n > n_{\delta,\varphi}(\varepsilon)$ et quel que soit $\varphi \in V$ on ait l'inégalité

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| [L_\varepsilon^{(n)}]^{-1}\varphi - L_\varepsilon^{-1}\varphi \|_B \leqslant \delta \tag{4.6}$$

De plus, comme cela a déjà été démontré dans le lemme 4.1,

$$\operatorname{Max} \| L_\varepsilon^{-1}\varphi - L^{-1}\varphi \|_B \leqslant \delta \tag{4.7}$$

pour $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\delta$.

Comme l'on sait, l'ensemble des fonctions ne prenant que deux valeurs est fondamental dans $L_1(B)$ (c'est-à-dire son enveloppe linéaire est dense) (voir chap. 2; § 1).

Posons $\varphi = \{g, f(t)\}$
avec $f(t)$ une fonction prenant ses deux valeurs dans D.

$$f(t) = \begin{cases} f_1 & \text{pour } t < t_0 \\ f_2 & \text{pour } t > t_0 \end{cases} \qquad (f_1 \text{ et } f_2 \in D).$$

Considérons l'opérateur $L^{(n)} \in (C(B) \to V)$ de la forme suivante :

$$L^{(n)}u(t) = \left\{u(0), \frac{du}{dt} - A_n(t)u\right\} \in V.$$

Notons

$$[L_\varepsilon^{(n)}]^{-1}\{g, f(t)\} - [L^{(n)}]^{-1}\{g, f(t)\} = u_{n\varepsilon} - u_n.$$

Il s'ensuit que $u_{n\varepsilon}$ et u_n appartiennent à

$$D\left(\frac{d}{dt}\right) \cap D(A_n(t)).$$

On a

$$L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) = \left\{0, \frac{\mathrm{d}u_{n\varepsilon}}{\mathrm{d}t} - A_n(t)u_{n\varepsilon} - f - B_{n\varepsilon}(t)u_{n\varepsilon} + B_{n\varepsilon}(t)u_{n\varepsilon}\right\}$$

$$= \{0, [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]u_{n\varepsilon}\}$$

$$= \left\{0, [B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\int_0^t \exp\left(\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\right) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$= \left\{0, \int_0^t \exp\left[\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\right][B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}.$$

C'est pourquoi :

$$\| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n)\| \leqslant \int_0^t \left\|\exp\left[\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\right][B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\,f(\tau)\right\|_B \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_0^t \left\|\exp\left[\int_\tau^t B_{n\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x\right]\right\|_B \|[B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\,f(\tau)\|_B\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \int_0^s \|[B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\,f(\tau)\|_B\,\mathrm{d}\tau,$$

(dans (2.1) on a posé $M = 1, \omega = 0$).

Par conséquent

$$\int_0^s \| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n)\|_B\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^s \mathrm{d}t \int_0^s \|[B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\,f(\tau)\|_B\,\mathrm{d}\tau$$

$$= t_0 \int_0^s \mathrm{d}t\,\|[B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]\,f_1\|_B + (s - t_0)\int_0^s \|[B_{n\varepsilon}(t) - A_n(t)]$$

$$\cdot f_2\|_B\,\mathrm{d}t \leqslant s\int_0^s \|[I_{n\varepsilon}(t) - 1]\,A_n(t)\,f_1\|_B\,\mathrm{d}t$$

$$+ s\int_0^s \|[I_{n\varepsilon}(t) - 1]\,A_n(t)\,f_2\|_B\,\mathrm{d}t. \tag{4.8}$$

Considérons séparément

$$\mathscr{I} = \int_0^s \|[I_{n\varepsilon}(t) - 1]\,A_n(t)\,f\|_B\,\mathrm{d}t,$$

où $f \in D$.

On a

$$\mathscr{I} = \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A_n(t) - A(t) + A(t)] f \|_B \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A_n(t) - A(t)] f \|_B \mathrm{d}t + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \|_B \mathrm{d}t .$$

Le premier terme de la partie de droite de l'inégalité n'excède pas

$$2 \int_0^s \| [A_n(t) - A(t)] f \|_B \mathrm{d}t$$

et par conséquent, pour $n > n_\delta$, peut être rendu inférieur à δ (car $A_n(t) \to A(t)$).

Donc pour $n > n_\delta$

$$\mathscr{I} \leqslant \delta + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \|_B \mathrm{d}t .$$

Estimons le second terme.

Soit $q(t)$ une fonction en escalier telle que

$$\int_0^s \| q(t) - A(t) f \|_B \mathrm{d}t \leqslant \delta$$

et soient q_k les valeurs qu'elle prend :

$$q(t) = q_k \quad \text{pour} \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots, k_\delta .$$

Prenons maintenant $r_k \in D$ tels que

$$\| r_k - q_k \| \leqslant \delta.$$

Posant $r_\delta(t) = r_k$ pour $t_k \leqslant t < t_{k+1}$ on aura

$$\int_0^s \| r_\delta(t) - q(t) \| \, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{k_\delta} \| (r_k - q_k) \| (t_{k+1} - t_k) \leqslant \delta \cdot s .$$

Donc

$$\int_0^s \| r_\delta(t) - A(t) f \| \, \mathrm{d}t \leqslant \delta(1 + s). \tag{4.9}$$

On a

$$\mathscr{I} \leqslant \delta + \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] A(t) f \| \, \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] [A f - r_\delta(t)] \| \, \mathrm{d}t$$

$$+ \int_0^s \| [I_{n\varepsilon}(t) - 1] r_\delta(t) \| \, \mathrm{d}t + \delta . \tag{4.10}$$

Remarquons que

$$[I_{n\varepsilon}(t) - 1]\, r_\delta(t) = \{\, I_{n\varepsilon}(t) - I_{n\varepsilon}(t)(1 - \varepsilon A_n(t))\,\}\, r_\delta(t)$$
$$= \varepsilon I_{n\varepsilon} A_n(t)\, r_\delta(t).$$

Par conséquent

$$\| [I_{n\varepsilon}(t) - 1]\, r_\delta(t) \| \leqslant \varepsilon \| A_n(t) r_\delta(t) \|.$$

D'où, à cause de (4.10)

$$\mathscr{I} \leqslant \delta + 2 \int_0^s \| A(t) f - r_\delta(t) \| \,\mathrm{d}t + \varepsilon \int_0^s \| A_n(t) r_\delta(t) \| \,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \delta + 2\delta(1 + s) + \varepsilon \int_0^s \| A_n(t) r_\delta(t) \| \,\mathrm{d}t$$

Donc, pour $n > n'_\delta$ et $\varepsilon \leqslant \varepsilon'_\delta = \dfrac{\delta}{2 \displaystyle\int_0^s \| A(t) r_\delta(t) \| \,\mathrm{d}t} \leqslant \dfrac{\delta}{\displaystyle\int_0^s \| A_n(t) r_\delta(t) \| \,\mathrm{d}t}$,

$$\mathscr{I} \leqslant 4\delta + 2\delta s;$$

d'où il résulte, en vertu de (4.8),

$$\int_0^s \| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) \| \,\mathrm{d}t \leqslant 2s(4\delta + 2\delta s) = 4\delta s(2 + s).$$

Étant donné que $\| [L^{(n)}]^{-1} \| \leqslant 1$, pour $n > n'_\delta, \varepsilon \leqslant \varepsilon'_\delta$

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}} \| u_{n\varepsilon} - u_n \| = \underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}}\, [L^{(n)}]^{-1} \{ L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) \}$$
$$\leqslant \int_0^s \| L^{(n)}(u_{n\varepsilon} - u_n) \| \,\mathrm{d}t \leqslant 4\delta s(2 + s),$$

c'est-à-dire que pour $n > n'_\delta$ et $\varepsilon \leqslant \varepsilon'_\delta$:

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}} \| [\, [L_\varepsilon^{(n)}]^{-1} - [L^{(n)}]^{-1} \,] \{ f(t) \} \| \leqslant \delta\, \mathrm{const.}$$

Par conséquent de (4.6) et (4.7) résulte que pour $n > n'_\delta$ et $n > n_{\delta,\varphi}(\varepsilon_0)$, avec $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_\delta, \varepsilon'_\delta\}$, on a

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}} \| [\, (L^{(n)})^{-1} - L^{-1}] \{ f(t), g \} \| \leqslant \underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}} \| [\, (L^{(n)})^{-1} - (L_{\varepsilon_0}^{(n)})^{-1} \,]$$
$$+ \underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}} \| [\, (L_{\varepsilon_0}^{(n)})^{-1} - L_{\varepsilon_0}^{-1}] \{ g, f(t) \} \|$$
$$+ \underset{0 \leqslant t \leqslant s}{\mathrm{Max}} \| [L_{\varepsilon_0}^{-1} - L^{-1}] \{ g, f(t) \} \| \leqslant \delta\, \mathrm{const.}$$

Comme δ est un nombre quelconque donné à l'avance, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Max} \| [(L^{(n)})^{-1} - L^{-1}] \{ g, f(t) \} \| = 0 \tag{4.11}$$

pour n'importe quelles fonctions $f(t)$ à deux valeurs, valeurs appartenant à D. Comme D est dense dans B pour n'importe quelle fonction $g(t)$ à deux valeurs dans B et pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $f(t)$ à deux valeurs dans D telle que

$$\int_0^s \| g(t) - f(t) \| \, dt \leqslant \varepsilon .$$

Donc, puisque l'ensemble des fonctions à deux valeurs est fondamental pour $L_1(B)$, l'ensemble des fonctions à deux valeurs dans D est fondamental pour $L_1(B)$.

La relation (4.11) aura évidemment lieu sur la variété linéaire sous-tendue par cet ensemble, c'est-à-dire sur un ensemble dense dans $L_1(B)$. Comme $\| (L^{(n)})^{-1} \| \leqslant 1$ pour tout n, d'après le théorème de Banach-Steinhaus (voir chap. 2, § 1), la relation (4.11) sera réalisée pour tous les

$$\mathscr{F}(t) \in L_1(B).$$

Soit enfin $\{ g_n, \mathscr{F}_n(t) \}$ une suite convergeant dans V vers $\{ g, \mathscr{F}(t) \}$. On a

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| (L^{(n)})^{-1} \{ g_n, \mathscr{F}_n(t) \} - (L^{(n)})^{-1} \{ g, \mathscr{F}(t) \} \| \leqslant \int_0^s \| \mathscr{F}_n(t) - \mathscr{F}(t) \| \, dt + \| g_n - g \| \to 0 .$$

D'où résulte finalement, en vertu de (4.11) :

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant s} \| \overline{(L^{(n)})^{-1}} \{ \mathscr{F}_n(t), g_n \} - \overline{(L)^{-1}} \{ \mathscr{F}(t), g \} \| = 0 .$$

Ce qui démontre le lemme.

2. Théorème généralisé de Hille

Théorème 4.2. *Soit $T(t)$ un semi-groupe fortement continu vérifiant la condition*

$$\| T(t) \| \leqslant 1 \tag{4.12}$$

et soit A le générateur du semi-groupe. Soit ensuite $\{ A_n \}$ une suite d'opérateurs convergeant sur un domaine commun D, dense, tels que $A = \lim A_n$ et satisfaisant la propriété (P). *Alors $\left(1 - \dfrac{A_n t}{n} \right)^{-n}$ converge fortement sur tout B vers $T(t)$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. Considérons l'élément

$$u_n = \left(1 - \frac{A_n t}{n} \right)^{-n} u_0 \qquad (u_0 \in D)$$

et formons l'équation différentielle que vérifie u_n. Ce sera, dans l'espace de Banach B, une équation de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} - \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n u_n = 0, \qquad u_n(0) = u_0. \tag{4.13}$$

D'après la condition (P) l'opérateur $\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1}$ existe sur tout B et est borné par l'unité; il résulte donc du théorème (3.2) que :

$$\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} \to 1.$$

C'est pourquoi, pour $g \in D$:

$$\left\| \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n g - Ag \right\|_B \leqslant \left\| \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} (A_n - A) g \right\|_B$$
$$+ \left\| \left\{ \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} - 1 \right\} Ag \right\|_B \leqslant \| (A_n - A) g \|_B$$
$$+ \left\| \left\{ \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} - 1 \right\} Ag \right\|_B \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty .$$

C'est-à-dire l'opérateur $\left(1 - \frac{A_n t}{n}\right)^{-1} A_n \to A$.

Comme, à cause de (2.1), $\| \mathrm{e}^{B_\varepsilon t} \| \leqslant 1$, alors (voir § 1) $\| [1 - \delta B_\varepsilon]^{-1} \| \leqslant 1$ et donc

$$\left[1 - \delta A_n \left(1 - \frac{A_n t}{n}\right) \right]^{-1} = [1 - \delta B_{t/n}]^{-1} \leqslant 1 .$$

Ainsi, les hypothèses du lemme (4.2) sont vérifiés pour le problème (4.13). Il en résulte que la solution $u_n(t)$ de l'équation (4.13) tend vers la solution $u(t)$ du problème

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au, \qquad u(0) = u_0$$

c.q.f.d.

Remarquons que, dans le cas où les opérateurs A_n sont bornés, le théorème (4.2) a été démontré par Hille [84].

3. Convergence des générateurs et convergence des semi-groupes

Théorème 4.3. *Supposons que A_n converge vers A sur un domaine dense D et que la suite $\{ (1 - \varepsilon A_n)^{-1} \}$ soit bornée par 1, définie partout et converge fortement pour $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0$ vers $(1 - \varepsilon A)^{-1}$. Alors $\mathrm{e}^{A_n t}$ converge fortement vers e^{At}.*

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement du lemme 4.2, où l'on pose $A_n(t) = A_n$, $A(t) = A$, $\mathscr{F}(t) = 0$, $g_n = g$.
Le théorème 4.3 implique la proposition suivante :

Théorème 4.4 [51, 12]. *Soient* $\{T_t^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *et* $\{T_t\}$ *des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires dans B avec* $A_n, (n = 1, 2, \ldots,)$ *et A pour générateurs. Si* $\| T_t^{(n)} \| \leqslant 1$, *et si A est la fermeture de l'opérateur* $\lim A_n$ $(D(\lim A_n) = D(A_n))$, *alors* $\{T_t^{(n)}\}$ *converge fortement vers* T_t *pour* $n \to \infty$, *uniformément en t dans l'intervalle* $0 \leqslant t \leqslant s$.

En fait (voir chap. 1, § 2), de $\| T_t^{(n)} \| \leqslant 1$, il résulte que $\| [1 - \varepsilon A_n]^{-1} \| \leqslant 1$. C'est pourquoi du théorème 3.2 il résulte que $(1 - \varepsilon A_n)^{-1} \to (1 - \varepsilon A)^{-1}$ pour tous les $\varepsilon > 0$. Les hypothèses du théorème 4.3 sont satisfaites. La proposition est démontrée.

Exemple. Considérons le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - h\Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} + C^2 u = \mathscr{F}(x, y)$$

$$u|_{t=0} = 0 \qquad u_\Gamma = u|_{x^2+y^2=1} = 0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{4.14}$$

dans la classe des fonctions continues en t pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ de carrés intégrables en x, y dans le domaine délimité par le contour Γ.

Notons

$$A_h(t)u = h\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} - C^2 u,$$

$$Au = -C^2 u + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Les opérateurs $\dfrac{1}{1 - A_h(t)}$ sont majorés par l'unité (voir § 2, point 2). En outre, il est bien connu que la solution du problème

$$u + h\varepsilon\Delta u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon C^2 u = \mathscr{F}(x, y),$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

converge, pour $h \to 0$, vers la solution du problème

$$v + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x} - \varepsilon C^2 v = \mathscr{F}(x, y)$$

$$v|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Ce qui signifie, en vertu du théorème 4.3, que la solution de l'équation (4.14) converge uniformément en t et fortement dans L_2 vers la solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + C^2 u = \mathscr{F},$$

$$u|_{x=\sqrt{1-y^2}} = 0 \qquad u|_{t=0} = 0.$$

CHAPITRE 5

CONVERGENCE FAIBLE DES OPÉRATEURS

§ 1 THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE DES HOMOMORPHISMES DE GROUPES TOPOLOGIQUES

Nous allons d'abord rappeler certaines définitions de la théorie des groupes topologiques [61, 1].

On appelle groupe un ensemble G d'éléments, muni d'une opération qui associe à tout couple d'éléments a, b de G, un élément c de G, et qui vérifie les conditions (1, 2, 3) formulées plus loin et dites « axiomes des groupes ». Cette opération est en général appelée multiplication et on note le résultat par ab, $c = ab$ (le produit ab peut dépendre de l'ordre des facteurs a et b; autrement dit ab n'est pas égal à ba).

1) associativité : pour tout triple a, b, c d'éléments de G on a $(ab)c = a(bc)$;

2) dans G il y a une unité à gauche, commune à tous les éléments du groupe, c'est-à-dire un élément e tel que $ea = a$ quel que soit l'élément a de G;

3) tout élément a de G a un inverse à gauche, c'est-à-dire un élément a^{-1} tel que $a^{-1}a = e$.

Si A et B sont deux sous-ensembles du groupe G, on désigne par AB le sous-ensemble formé de tous les éléments du type xy, où $x \in A, y \in B$. On note par A^{-1} le sous-ensemble composé de tous les éléments de la forme x^{-1}, avec $x \in A$. On définit inductivement le sous-ensemble A^{m+1}, m étant positif, en posant $A^1 = A$ et $A^{m+1} = A^m A$. On définit le sous-ensemble A^{-m} par $A^{-m} = (A^{-1})^m$. Avec ces notations on peut former le produit d'un nombre arbitraire d'ensembles, chacun élevé à une certaine puissance. Dans la suite, nous ne ferons pas la différence entre un ensemble réduit à un élément, et cet élément lui-même. Ainsi le symbole $Ab, A \subset G$ et $b \in G$ est défini.

Remarquons que si A n'est pas vide

$$AG = GA = G,$$
$$G^{-1} = G,$$
$$Ae = eA = A.$$

On appelle sous-groupe ou diviseur d'un groupe G, un ensemble H d'éléments de G tel que H soit un groupe sous l'effet de la loi de multiplication de G.

Une application g d'un groupe G dans un groupe G^* est un homomorphisme si elle préserve la multiplication, c'est-à-dire si

$$g(xy) = g(x)\,g(y)$$

pour tout couple d'éléments x et y de G. On appelle noyau de l'homomorphisme g l'ensemble $g^{-1}(e)$ de tous les éléments de G envoyés par l'homomorphisme g sur l'unité e du groupe G^*.

Un ensemble R d'éléments de nature quelconque est appelé espace topologique si, à chaque ensemble M d'éléments de l'espace R, on fait correspondre un ensemble $\bar{M}$, appelé adhérence de l'ensemble M, ayant les propriétés suivantes :

1) si M est réduit à un élément $a, M = \bar{M}$ ou, ce qui revient au même, $\bar{a} = a$.

2) si M et N sont deux ensembles d'éléments de l'espace R, alors $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$, c'est-à-dire l'adhérence de la somme est égale à la somme des adhérences;

3) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$, c'est-à-dire prendre successivement deux fois l'adhérence donne le même résultat que la prendre une seule fois.

Un ensemble F d'éléments de l'espace topologique R est dit fermé si $\bar{F} = F$. Un ensemble G d'éléments de R est dit ouvert (ou « domaine ») si $R \setminus G$ est fermé.

L'ensemble G de l'espace R sera dit partout dense si $\bar{G} = R$.

Un système Σ d'ouverts de l'espace R est une base de l'espace R si chaque ouvert non vide de R peut s'écrire comme union d'ouverts appartenant à Σ. Dit autrement : une base Σ de l'espace R est aussi un système complet de voisinages de l'espace et chaque ouvert du système Σ est un voisinage de chacun de ses points.

Un système Σ' de voisinages du point a sera dit fondamental au point a, ou « système complet de voisinages » du point a, si pour tout ouvert G contenant le point a, il existe un voisinage $U \in \Sigma'$ tel que $U \subset G$. La donnée d'un système complet de voisinages de l'espace R permet de définir de façon unique la notion d'adhérence dans cet espace.

Une application f d'un espace topologique R sur un espace topologique R' est un homéomorphisme ou « application topologique » si 1) elle est biunivoque 2) elle conserve « l'adhérence » : $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$ pour tout $M \subset R$.

Il est facile de voir que si l'application f est un homéomorphisme, l'application inverse f^{-1} est aussi un homéomorphisme. Deux espaces topologiques R et R' sont homéomorphes si l'un d'entre eux peut être appliqué sur l'autre par un homéomorphisme.

Une application g d'un espace topologique R dans l'espace topologique R' est dite continue si pour tout ensemble $M \subset R$ on a la relation

$$g(\bar{M}) \subset \overline{g(M)}.$$

Un ensemble G est un groupe topologique si

1) G est un groupe,

2) G est un espace topologique,

3) Les opérations de groupe de G sont des applications continues pour la topologie de G. On peut le formuler plus en détail.

a) Si a et b sont deux éléments de l'ensemble G, pour tout voisinage W de l'élément ab on peut trouver des voisinages U et V des éléments a et b tels que $UV \subset W$.

b) Si a est un élément de l'ensemble G, pour tout voisinage V de l'élément a^{-1} on peut trouver un voisinage U de l'élément a tel que $U^{-1} \subset V$.

Soient G un groupe topologique, Σ^* un système complet de voisinages de l'unité e et M un ensemble partout dense dans G. Alors l'ensemble Σ formé de tous les ensembles Ux où $U \in \Sigma^*$ et $x \in M$ est un système complet de voisinages de G et le système Σ^* satisfait la condition suivante :

pour tout ensemble U du système Σ^* il existe un ensemble V de ce système tel que $VV^{-1} \subset U$.

Une application g du groupe topologique G dans le groupe topologique G^* est un homomorphisme si :

1) g est un homomorphisme du groupe algébrique G dans le groupe algébrique G^*;

2) g est une application continue de l'espace topologique G dans l'espace topologique G^*. L'homomorphisme g est appelé monomorphisme si son noyau est réduit à l'identité.

Définition. *Une suite g_n d'homomorphismes du groupe topologique $\mathscr{H}_1$ dans le groupe topologique $\mathscr{H}_2$ est dite asymptotiquement continue s'il existe, pour tout voisinage ε de l'identité e^* du groupe $\mathscr{H}_2$, un nombre n_ε et un voisinage δ de l'identité e du groupe $\mathscr{H}_1$ tels que pour $n > n_\varepsilon$ et $x \in \delta$, $g_n x \in \varepsilon$.*

En particulier si $x_k \to e$, alors

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ k \to \infty}} g_n x_k = e^* .$$

Théorème 5.1. *Soit g_n une suite asymptotiquement continue de monomorphismes du groupe topologique $\mathscr{H}_1$ dans le groupe topologique $\mathscr{H}_2$. Posons*

$$R = \bigcap_n g_n(\mathscr{H}_1).$$

Supposons que $D = \lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(R)$ *existe**.

Alors $\lim_{n\to\infty} g_n(\bar{D})$ *existe et définit un homomorphisme* g *du sous-groupe* $\bar{D} \subset \mathscr{H}_1$ *dans* $\mathscr{H}_2$, *tel que :*

1) $\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x^*) \in g^{-1}(x^*)$ *pour* $x^* \in R$,

2) *si* $a_k \in \mathscr{H}_1$, $x_i \in \bar{D}$ *et* $\lim_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}} a_k x_i = e$, *alors*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ k\to\infty\\ i\to\infty}} g_n(a_k)\, g(x_i) = e^*.$$

Démonstration. Notons par T l'opérateur défini sur R et tel que

$$Tx^* = \lim_{n\to\infty} g_n^{-1}x^*.$$

L'opérateur T est un homomorphisme du groupe algébrique R. En effet,

$$T(x_1^* x_2^*) = \lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(x_1^* x_2^*) = (\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}x_1^*)(\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}x_2^*) = Tx_1^* \cdot Tx_2^*,$$

pour $x_1^*, x_2^* \in R$, en vertu de la continuité dans $\mathscr{H}_1$ de la loi de groupe. Montrons que le noyau de l'homomorphisme algébrique T ne contient que l'identité. Supposons $Tx^* = e$. C'est-à-dire que $\lim g_n^{-1}(x^*) = e$. Pour $k > K(\delta[\varepsilon]), x_k = g_k^{-1}(x^*) \in \delta[\varepsilon]$ et pour $n > N(\varepsilon, \delta[\varepsilon]), g_n(x_k) \in \varepsilon$ et, donc, pour $n > (K, N), g_n(x_n) \in \varepsilon$, c'est-à-dire $x^* = g_n(x_n) \in \varepsilon$ et par conséquent $x^* = e^*$. c.q.f.d.

Montrons que, pour $x \in D$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = T^{-1}(x)$. En effet, puisque $T^{-1}x \in R$,

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{-1}(T^{-1}(x)) = x.$$

Par conséquent, pour $k > K(\delta[\varepsilon])$,

$$y_k = g_k^{-1}(T^{-1}(x))x^{-1} = g_k^{-1}(T^{-1}(x)[g_k(x)]^{-1}) \in \delta[\varepsilon]$$

et pour $n > N(\varepsilon, \delta[\varepsilon])$, $g_n y_k \in \varepsilon$. C'est donc que, pour $n > (N, K)$,

$$g_n y_n = T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1} \in \varepsilon$$

par conséquent, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = T^{-1}(x)$, c.q.f.d.

Montrons que l'opérateur T^{-1} est continu. Soit $\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$.

Pour $n > N(\varepsilon_1, \delta_1[\varepsilon_1])$, $g_n x \in \varepsilon$ si $x \in \delta_1[\varepsilon_1]$. De plus, pour $n > N_1(\varepsilon_1^{-1}, \delta[\varepsilon_1^{-1}], x)$,

$$T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1} \in \varepsilon_1^{-1}.$$

* C'est-à-dire que $\lim g_n^{-1}(x^*)$ existe, x^* étant un élément quelconque de R.

Par conséquent pour $n > (N, N_1)$,

$$T^{-1}(x)[g_n(x)]^{-1}g_n(x) \in \varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon.$$

Donc, pour $x \in \delta_1[\varepsilon_1]$, on a : $T^{-1}(x) \in \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer. Soit g un homomorphisme de $\bar{D}$ dans $\mathscr{H}_2$, qui coïncide avec T^{-1} sur D. Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} g_n D = g\bar{D}.$$

Soient $y \in \bar{D}, x \in \bar{D}, x^{-1}y \in \delta$. Puisque

$g_n(yx^{-1}) = g_n(y)[g_n(x)]^{-1}$ et que $g(yx^{-1}) = g(y)[g(x)]^{-1} = g(y)[T^{-1}(x)]^{-1}$, on a

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} = g_n(yx^{-1})g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1}[g(yx^{-1})]^{-1}.$$

Soient $\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon$, $\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1} \subset \varepsilon_1^{-1}$; pour $n > N[\varepsilon_1, \delta[\varepsilon_1]]$, $\delta \subset \delta[\varepsilon_1]$, on a $g_n(yx^{-1}) \in \varepsilon_1$; pour $n > N_1(x, \varepsilon_2)$, on a $g_n(x)[T^{-1}(x)]^{-1} \in \varepsilon_2$; enfin pour $\delta \subset \delta[\varepsilon_2], g(yx^{-1}) \in \varepsilon_2$. Par conséquent pour $n > (N(\varepsilon_1, \delta[\varepsilon_1]), N_1(x, \varepsilon_2))$ et $\delta \subset \delta[\varepsilon_1] \cap \delta[\varepsilon_2]$, on obtient

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} \in \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_2^{-1} \subset \varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon.$$

Ainsi pour $n > N(\varepsilon)$ on a l'inclusion

$$g_n(y)[g(y)]^{-1} \in \varepsilon \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démontrons maintenant la deuxième partie de l'énoncé.

Notons d'abord que d'après l'hypothèse $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}} a_k x_i = e$, il résulte que $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}} x_i^{-1}x_k = e$.

En effet, soit $\delta_1^{-1}\delta_1 \subset \delta$. Pour $n > N(\delta_1), k, k' > K(\delta_1)$, on a $a_n x_k \in \delta_1$ et $a_n x_{k'} \in \delta_1$. D'où

$$(a_n x_k)^{-1} a_n x_{k'} \in \delta_1^{-1}\delta_1 \subset \delta,$$

c'est-à-dire que pour $k, k' > K(\delta_1)$ $x_k^{-1}x_{k'} \in \delta$ et donc

$$\lim_{\substack{i\to\infty\\ k\to\infty}} x_i^{-1}x_k = e.$$

Supposons que $x_i \in \bar{D}, a_k \in \mathscr{H}_1$ et que $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ i\to\infty}} a_k x_i = e$. On a

$$g_n(a_k)g(x_m) = g_n(a_k x_i)[g_n(x_i)]^{-1}g(x_i)g(x_i^{-1}x_m).$$

Pour $k > K(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1), i > I(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1), n > N(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1)$ on a $g_n(a_k x_i) \in \varepsilon_i$. Pour $n > N_1(\varepsilon_2, i)$ on a $g_n(x_i)[g(x_i)]^{-1} \in \varepsilon_1$. D'où pour

$$n > N = \mathrm{Max}[N(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1), N_1(\varepsilon_2, i)], k > K(\delta[\varepsilon_1], \varepsilon_1), m > M(\varepsilon_2),$$

on obtient

$$g_n(a_k)g(x_m) \in \varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_2 \subset \varepsilon_1\varepsilon_1^{-1} \subset \varepsilon.$$

De cette façon, N, K et M sont indépendants les uns des autres et ne dépendent que de ε. C'est donc que $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ k\to\infty}} g_n(a_k)\, g(x_m) = e$, c.q.f.d.

§ 2 CONTINUITÉ ASYMPTOTIQUE FAIBLE

1. Borne uniforme d'une suite faiblement continue d'opérateurs

Soient B, B' des espaces de Banach. Considérons une famille d'opérateurs fermés $\mathscr{T} = \{T_n\}$ appliquant B dans B'.

On indiquera la convergence faible par le symbole $\Rightarrow$.

Définition *La famille $\mathscr{T}$ est faiblement asymptotiquement convergente si, quelle que soit la suite $B \ni f_k \Rightarrow 0$, la suite $T_{n_k} f_k \Rightarrow 0$.*

Ici, n_k est une suite arbitraire d'indices tendant vers ∞.

Lemme 5.1. *Si $\mathscr{T}$ est faiblement asymptotiquement convergente sur un espace réflexif B, elle est uniformément bornée en norme.*

Démonstration. Nous allons le démontrer par l'absurde. Puisque les opérateurs T_n sont définis sur tout B, ils sont bornés (voir chap. 2, § 1). Supposons qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour tout n, $\| T_n \| \leqslant C$. On peut donc extraire de $\mathscr{F}$ une sous-suite $\{T_m\}$ telle que

$$\lim_{m\to\infty} \| T_m \| = \infty .$$

Puisque $\| T_m \| = \| T_m^* \|$, on a de même

$$\lim_{m\to\infty} \| T_m^* \| = \infty .$$

Introduisons une famille de fonctionnelles semi-additives continues sur B'^* de la façon suivante :

$$F_m(\varphi) = \| T_m^* \varphi \| .$$

Par hypothèse :

$$\sup_{\|\varphi\| \leqslant 1} F_m(\varphi) = \| T_m^* \| \to \infty \quad \text{pour } m \to \infty \tag{2.1}$$

Si $\sup\limits_{1 \leqslant m < \infty} F_m(\varphi)$ est fini quel que soit φ, alors, d'après un théorème connu [15], $\sup\limits_{\|\varphi\| \leqslant 1} F_m(\varphi)$ est borné (pour tout m) ce qui contredirait (2.1).

On a en effet la propriété suivante des espaces de Banach réflexifs : étant donné $b^* \in B^*$, il existe $b \in B$ tel que

$$(b^*, b) = \|b^*\|^2 = \|b\|^2 .$$

On note $b = (b^*)^*$.

Donc, étant donné $T^*_{m'}\varphi_0 \in B^*$, il existe $g_{m'} \in B$ tel que

$$(T^*_{m'}\varphi_0, g_{m'}) = \|g_{m'}\|^2 = \|T^*_{m'}\varphi_0\|$$

c'est-à-dire tel que

$$(\varphi_0, T_{m'}g_{m'}) = \|g_{m'}\|^2 \to \infty.$$

Si l'on note $f_{m'} = g_{m'}/\|g_{m'}\|^2$, on a donc

$$(\varphi_0, T_{m'}f_{m'}) = 1 \quad \text{et} \quad f_{m'} \to 0$$

donc

$$T_{m'}f_{m'} \not\Rightarrow 0 \quad \text{et} \quad f_{m'} \Rightarrow 0.$$

C'est la contraction énoncée.

2. Condition nécessaire et suffisante pour la continuité faiblement asymptotique d'une suite d'opérateurs

Lemme 5.2. *Pour que $\mathcal{T}$ soit faiblement asymptotiquement convergente sur un espace de Banach réflexif B il faut et il suffit que $\mathcal{T}^* = \{T^*_n\}$ soit compacte sur tout élément $\varphi \in B'^*$. Si $\mathcal{T}$ est faiblement asymptotiquement continue, de la convergence faible de $\{T^*_n\varphi\}$ résulte la convergence forte de la suite.*

Démonstration

1) *Nécessaire.*

B étant réflexif, on a

$$\|(T^*_{n'}\varphi)^*\| = \|T^*_{n'}\varphi\| \leqslant C\,\|\varphi\|.$$

L'ensemble $\{(T^*_{n'}\varphi)^*\}$ est donc faiblement compact dans B.

Soit $(T^*_{n''}\varphi)^*$ une sous-suite faiblement convergente $(T^*_{n''}\varphi)^* \Rightarrow h$. Rappelons que $T^*_{n''}\varphi \Rightarrow g$ et que

$$(1) \quad \|(T^*_{n''}\varphi)^*\|^2 = \|T^*_{n''}\varphi\|^2 = (T^*_{n''}\varphi, (T^*_{n''}\varphi)^*) = (\varphi, T_{n''}(T^*_{n''}\varphi)^*).$$

De la convergence asymptotique faible de $\mathcal{T}$ résulte que

$$\lim\,(\varphi, T_{n''}[(T^*_{n''}\varphi) - h]) = 0$$

c'est-à-dire que

$$\lim\,(\varphi, T_{n''}h) = \lim\,(\varphi, T_{n''}(T^*_{n''}\varphi)^*)$$

si l'une de ces limites existe.

Or :

$$(2) \qquad (g, h) = \lim\,(T^*_{n''}\varphi, h) = \lim\,(\varphi, T_{n''}h)$$

donc

$$(g, h) = \lim (\varphi, T_{n''}(T^*_{n''}\varphi)^*)$$

D'où, vu (1)

$$(g, h) \geqslant \|h\|^2, \quad (g, h) \geqslant \|g\|^2$$

Or

$$|(g,h)| \leqslant \|g\| \, \|h\|$$

donc

$$\|g\|^2 = \|h\|^2 = (g, h)$$

donc, vu (1) et (2),

$$\|g\| = \lim \|T^*_{n''}\varphi\|.$$

Or $T^*_n\varphi \Rightarrow g$, donc $T^*_{n''}\varphi \to g$ (cf. chap. 2, § 1).

De toute suite $T_n^*\varphi$, on peut donc extraire une suite fortement convergente: $\{ T^*_n\varphi \}$ est donc compact.

2) *Suffisant.* On démontre la suffisance par l'absurde. Supposons que $\mathcal{T}^*$ soit compacte sur chaque élément $\varphi \in B'^*$. Supposons aussi que $\mathcal{T}$ ne soit pas faiblement asymptotiquement continue. Ceci signifie qu'il existe $\varphi \in B'^*$ et $\alpha > 0$ tels que $|(\varphi, T_{n_{k'}} f_{k'})| \geqslant \alpha$, où $\{k'\}$ est une sous-suite d'indices et où $\{f_k\}$ est une suite faiblement convergente.

Supposons que $T^*_{n_{k''}}\varphi$ soit une sous-suite fortement convergente :

$$T^*_{n_{k''}}\varphi \to g \quad \text{pour } k'' \to \infty, \{k''\} \subset \{k'\}.$$

Alors

$$(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''}) = (T^*_{n_{k''}}\varphi, f_{k''}) = (T^*_{n_{k''}}\varphi - g, f_{k''}) + (g, f_{k''})$$
$$\leqslant \|T^*_{n_{k''}}\varphi - g\| \, \|f_{k''}\| + (g, f_{k''}). \quad (2.3)$$

Comme $T^*_{n_{k''}}\varphi \to g, \|T^*_{n_{k''}}\varphi - g\| \to 0$.

Les normes $\|f_{k''}\|$ sont bornées (voir chap. 2, § 1) et donc

$$\|T_{n_{k''}}\varphi - g\| \, \|f_{k''}\| \to 0 \text{ pour } k'' \to \infty.$$

D'après la convergence faible de $f_{k''}$, $(g, f_{k''}) \to 0$. En résultat de (2.3), nous obtenons $(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''}) \to 0$ pour $k \to \infty$, ce qui est contraire à

$$|(\varphi, T_{n_{k''}} f_{k''})| > \alpha.$$

La suffisance est démontrée.

§ 3 UN THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE FORTE DES OPÉRATEURS INVERSES ET UNE APPLICATION

Théorème 5.2. *Soit $\{ T_n \}$ une suite d'opérateurs fermés ayant un domaine commun de définition $D \subset B$ et un domaine des valeurs $R(T_n) = B', B'$ étant réflexif. Supposons que la suite, $T_n g$ converge pour $g \in D$ faiblement vers un élément Tg. Supposons ensuite que T_n^{-1} et T_n^{-1*} existent et que les suites $\{ T_n^{-1} \}$ et $\{ T_n^{-1*} \}$ soient faiblement asymptotiquement continues.*

Alors, l'opérateur T^{-1} existe et est borné sur le domaine de définition $\bar{R} = \overline{TD}$ et la suite T_n^{-1} est fortement convergente sur $\bar{R}$ vers T^{-1}.

Démonstration. D'après le théorème 5.1, l'opérateur T^{-1} existe et T_n^{-1} converge faiblement sur $\bar{R}$ vers T^{-1}. D'après le lemme 5.2 puisque la suite $\{T_n^{-1*}\}$ est faiblement asymptotiquement continue, la convergence faible de $\{T_n^{-1}\}$ entraîne la convergence forte de cette suite d'opérateurs.

Exemple. Considérons l'équation :

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} + \sin^2\frac{z}{\varepsilon} C^2(x,y,z)\, u_\varepsilon(x,y,z)$$
$$= \mathscr{F}(x,y,z)$$
$$u|_\Gamma = 0 \quad C^2 \geqslant \alpha > 0, \quad C \in W_2^1 \tag{3.1}$$

où Γ est une surface convexe. Considérons l'espace $L_2[\Omega]$ des fonctions du domaine Ω, limité par Γ.

Il est évident que l'opérateur L_ε converge faiblement vers l'opérateur

$$L_0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{C^2}{2}(x,y,z)$$

qui est défini sur les fonctions s'annulant sur Γ.

Montrons que le théorème 5.2 entraîne la convergence forte de $\{u_\varepsilon\}$ vers la solution du problème $L_0 w = \mathscr{F}(x,y,z)$; $w|_\Gamma = 0$. Remarquons d'abord que l'opérateur inverse L_ε^{-1} est borné. En effet, multipliant (3.1) par u_ε et intégrant en x, y, z on obtient :

$$\int\left\{\varepsilon\left[\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z}\right)^2\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \int \sin^2\frac{z}{\varepsilon} C^2 u_\varepsilon^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int \mathscr{F}(x,y,z)\, u_\varepsilon\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \leqslant \sqrt{\int \mathscr{F}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}\sqrt{\int u_\varepsilon^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

D'où, puisque $\|u\| \leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|$ ($\|\cdot\|$ étant la norme dans $L_2(\Omega)$, voir [72,2]) on a :

$$\|u\|^2 \leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|^2 \leqslant C\|\mathscr{F}\|\,\|u\|$$

et par conséquent, $\|u\| \leqslant C\|\mathscr{F}\|$ et $\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\| \leqslant C\|\mathscr{F}\|$. Montrons que l'opérateur inverse L_ε^{-1} est faiblement asymptotique continu.

Supposons que le membre de droite $\mathscr{F}_n(x,y,z)$ de l'équation

$$L_\varepsilon u_{\varepsilon n} = \mathscr{F}_n(x,y,z) \qquad u_{\varepsilon n}|_\Gamma = 0$$

converge faiblement vers zéro. Il est nécessaire alors de prouver que $u_{\varepsilon n}$ converge faiblement vers zéro pour $\varepsilon \to 0$ et $n \to \infty$. Multiplions (3.1) par une fonction C^∞, $\varphi(x, y, z)$, s'annulant sur Γ, et intégrons sur le domaine Ω_Γ limité par Γ.

$$- \varepsilon \iiint_{\Omega_\Gamma} \varphi \, \Delta_2 u_{\varepsilon n} \, \mathrm{d}\Omega - \iiint_{\Omega_\Gamma} \varphi \frac{\partial^2 u_{\varepsilon n}}{\partial z^2} \mathrm{d}\Omega + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_\Gamma} C^2 \varphi u_{\varepsilon n} \, \mathrm{d}\Omega$$

$$- \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_\Gamma} C^2 \cos 2 \frac{z}{\varepsilon} \varphi u_{\varepsilon n} \, \mathrm{d}\Omega = \iiint_{\Omega_\Gamma} \mathscr{F}_n(x, y, z) \, \varphi \, \mathrm{d}\Omega .$$

On a :

$$\varepsilon \iiint \varphi \, \Delta_2 u_{\varepsilon n} \, \mathrm{d}\Omega = \varepsilon \iiint (\Delta_2 \varphi) \, u_{\varepsilon n} \, \mathrm{d}\Omega \to 0$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, uniformément en n, puisque $u_{\varepsilon n}$ est borné en norme. Comme $\partial u_{\varepsilon n} / \partial z$ est borné dans L_2 :

$$\int C^2 \cos 2 \frac{z}{\varepsilon} \varphi \, u_{\varepsilon n} \, \mathrm{d}\Omega = - \frac{\varepsilon}{2} \int \sin \frac{2z}{\varepsilon} \frac{\partial (u_{\varepsilon n} C^2 \varphi)}{\partial z} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \to 0$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, uniformément en n.

D'où

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int \varphi(x, y, z) \left\{ \frac{\partial^2 u_{\varepsilon n}}{\partial z^2} - \frac{C^2(x, y, z)}{2} u_{\varepsilon n} \right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0 .$$

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int u_{\varepsilon n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{C^2}{2} \varphi \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 0 .$$

L'adjoint de l'opérateur $A = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dfrac{C^2(x, y, z)}{2}$ défini sur les fonctions C^∞, nulles sur Γ, est évidemment l'opérateur auto-adjoint $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - \dfrac{1}{2} C^2(x, y, z)$ défini dans Ω. Il n'a pas de valeur propre égale à zéro. Ainsi, le domaine des valeurs de l'opérateur initial A est partout dense. Par conséquent, $u_{u\varepsilon}$ converge vers zéro sur un ensemble partout dense. Puisque $u_{n\varepsilon}$ est borné en norme, il en résulte la convergence faible de $u_{n\varepsilon}$ vers zéro. Nous savons ainsi que l'opérateur L_ε^{-1} était faiblement asymptotiquement continu. D'après le théorème, ceci entraîne la convergence forte de L_ε^{-1} vers L_0^{-1}.

c.q.f.d.

§ 4 RÉGULARISATION EN THÉORIE DES PERTURBATIONS DES OPÉRATEURS FAIBLEMENT CONVERGENTS

Il est possible d'utiliser la méthode de régularisation développée dans le chapitre 1 (voir spécialement chap. 1, § 3, deuxième partie) pour les problèmes de la théorie des perturbations pour lesquels on a pu établir que la solution de l'équation perturbée convergeait, dans une certaine topologie faible, vers la solution du problème limite.

Considérons l'espace L_2 des fonctions de $x \in R^n$ et l'espace de Banach $W_P^N[\rho^2]$ des fonctions $g(x), x \in R^n$ muni de la norme

$$\| g \|_{W_P^N[\rho^2]}^P = \int_{-\infty}^{+\infty} | D^N g(x) |^P \rho^2(x) \, dx$$

$\rho(x) \geqslant 1$ et continue.

Nous allons considérer dans L_2 une famille d'opérateurs linéaires L_ε ayant un domaine de définition dense, telle que L_ε^{-1*} existe avec un domaine de définition qui contient $W_P^N[\rho^2]$ et que la restriction de L_ε^{-1*} comme famille d'opérateurs allant de $W_P^N[\rho^2]$ à L_2 soit uniformément bornée.

Considérons comme au § 3 du chap. 1, première partie, une densité de probabilité $\mathscr{G}(y) = \mathscr{G}\left(\frac{x - \xi}{\sigma}\right)$ qui est une fonction positive de y, telle que

$$\int \mathscr{G}(y) \, dy = 1 .$$

On fait sur $\mathscr{G}(y)$ les hypothèses supplémentaires suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{G}(y) | y |^2 \, dy < \infty ,$

2) $\mathscr{G}(y) \in W_P^N[\rho^2]$,

3) $| \xi |^{n+1} \rho^2(x - \xi) | D^N \mathscr{G}(\xi) |^P \leqslant C_0(x)$ pour $| \xi | > 1$,

4) $\displaystyle\frac{A^{nP} | D^N \mathscr{G}(A\xi) |}{| D^N \mathscr{G}(\xi) |} \leqslant C_1 \qquad$ pour $A \to \infty$.

Si $\rho(x) = \text{const.}$, les conditions 3) et 4) peuvent être omises.

Considérons dans l'espace de Hilbert $L_2[R^n]$ l'opérateur $L_\varepsilon = A + \varepsilon B_\varepsilon$ et une famille d'éléments $f_\varepsilon \in L_2[R^n]$, convergeant fortement vers $f \in L_2[R^n]$. Notons $\delta(\varepsilon) = \| f_\varepsilon - f \|_{L_2}$.

Théorème 5.3. *Supposons que*

1) L_ε^{-1} *existe,*

2) $A^{-1} f$ *est une fonction continûment différentiable,*

3) *les opérateurs* $A^{-1*} \cdot B_\varepsilon^* \cdot L_\varepsilon^{-1*}$ *et* L_ε^{-1*}, *en tant qu'opérateurs de* $W_P^N[\rho^2]$ *dans* $L_2[R^n]$, *sont bornés, c'est-à-dire*

$$\| L_\varepsilon^{-1*} g \|_{L_2} \leqslant C_1 \| g \|_{W_P^N[\rho^2]}$$

$$\| A^{-1*} B_\varepsilon^* L_\varepsilon^{-1*} g \|_{L_2} \leqslant C_2 \| g \|_{W_P^N[\rho^2]}$$

alors

$$\left| \frac{1}{(\delta(\varepsilon)+\varepsilon)^{n\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{G}\left(\frac{x-\xi}{[\delta(\varepsilon)+\varepsilon]^{\alpha}}\right) L_{\varepsilon}^{-1} f_{\varepsilon}(\xi)\, \mathrm{d}\xi - A^{-1} f(x) \right| \leqslant c(x)[\delta(\varepsilon)+\varepsilon]^{2\alpha}$$

où $\alpha = \left(2 + N + \frac{n}{q}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P} = 1\right)$ *et* $c(x)$ *est une fonction continue de* x, *indépendante de* ε.

Démonstration. On a pour $\varphi \in W_P^N[\rho^2]$

$$\begin{aligned}(\varphi, L_{\varepsilon}^{-1} f_{\varepsilon} - A^{-1} f) &= (\varphi, L_{\varepsilon}^{-1} f_{\varepsilon} - L_{\varepsilon}^{-1}(A + \varepsilon B_{\varepsilon}) A^{-1} f) \\ &= (L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi, f_{\varepsilon}) - (A^{-1*}(A + \varepsilon B_{\varepsilon})^* L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi, f) \\ &= (L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi, f_{\varepsilon} - f) - \varepsilon (A^{-1*} B_{\varepsilon}^* L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi, f) \\ &\leqslant \| L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi \| \, \| f_{\varepsilon} - f \| + \varepsilon \| A^{-1*} B_{\varepsilon}^* L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi \| \, \| f \| \end{aligned}$$

et tenant compte de ce que

$$\| L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi \| \leqslant C_1 \| \varphi \|_{W_P^N[\rho^2]} \qquad \| A^{-1*} B_{\varepsilon}^* L_{\varepsilon}^{-1*}\varphi \| \leqslant C_2 \| \varphi \|_{W_P^N[\rho^2]},$$

on obtient

$$(\varphi, L_{\varepsilon}^{-1} f_{\varepsilon} - A^{-1} f) \leqslant C(\delta(\varepsilon) + \varepsilon) \| \varphi \|_{W_P^N[\rho^2]}.$$

Le théorème résultera alors du lemme suivant :

Lemme 5.4. *Soit* $f_{\varepsilon}(x)$ *une famille de fonctions généralisées qui soit une famille de fonctionnelles sur* $W_P^N[\rho^2]$ *telles que*

$$(f_{\varepsilon}(x) - f(x), \varphi(x))_{L_2} \leqslant \varepsilon \| \varphi \|_{W_P^N[\rho^2]}$$

où (*) $f(x)$ *est une fonction deux fois continûment différentiable, on a alors, en tout point* x, *la relation suivante :*

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) f_{\varepsilon}(\xi)\, \mathrm{d}\xi + O(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Démonstration. Faisons dans l'intégrale

$$\left\| \mathscr{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_P^N[\rho^2]}^{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| D^N \mathscr{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right|^{P} \rho^2(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

le changement de variable $\eta = \dfrac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}$. Nous obtenons

$$\left\| \mathscr{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^{\alpha}}\right) \right\|_{W_P^N[\rho^2]}^{P} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha(NP-n)}} \int_{-\infty}^{\infty} | D^N \mathscr{G}(\eta) |^{P} \rho^2(x - \eta\varepsilon^{\alpha})\, \mathrm{d}\eta.$$

(*) C'est-à-dire $\| f_{\varepsilon} - f \|_{W_P^{-N}} \leqslant \varepsilon$, puisque c'est précisément ainsi que se définit la norme dans W_P^{-N}.

Représentons cette dernière intégrale comme la somme de trois intégrales

$$I_1(\varepsilon^\alpha, x) = \int_{-\infty}^{-1/\varepsilon^\alpha} |D^N \mathscr{G}(\eta)|^P \rho^2(x - \eta\varepsilon^\alpha)\,\mathrm{d}\eta\,,$$

$$I_2(\varepsilon^\alpha, x) = \int_{-1/\varepsilon^\alpha}^{1/\varepsilon^\alpha} |D^N \mathscr{G}(\eta)|^P \rho^2(x - \eta\varepsilon^\alpha)\,\mathrm{d}\eta\,,$$

$$I_3(\varepsilon^\alpha, x) = \int_{1/\varepsilon^\alpha}^{+\infty} |D^N \mathscr{G}(\eta)|^P \rho^2(x - \eta\varepsilon^\alpha)\,\mathrm{d}\eta\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon^\alpha, x) &\leqslant \operatorname*{Max}_{|\xi| \leqslant 1} \rho^2(x - \xi) \int_{-1/\varepsilon^\alpha}^{1/\varepsilon^\alpha} |D^N \mathscr{G}(\eta)|^P \,\mathrm{d}\eta \\ &\leqslant \operatorname*{Max}_{|\xi| \leqslant 1} \rho^2(x - \xi) \, \| \mathscr{G}(\xi) \|^P_{W^N_P[\rho^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(\varepsilon^\alpha, x) &= \int_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} |D^N \mathscr{G}(\eta)|^P \rho^2(x - \eta\varepsilon^\alpha)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} |D^N \mathscr{G}(\xi)|^P \rho^2(x - \varepsilon^\alpha\eta)(|\eta|\varepsilon^\alpha)^{n+1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha(n+1)}} \left|\frac{D^N \mathscr{G}(\eta)}{D^N \mathscr{G}(\xi)}\right|^P \frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{n+1}} \\ &\leqslant \frac{C_0(x) C_1^P}{\varepsilon^\alpha} \int_{1/\varepsilon^\alpha}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{n+1}} \leqslant C_2(x) \end{aligned}$$

avec $\xi = \eta\varepsilon^\alpha$.

On a évidemment une inégalité semblable pour $I_1(\varepsilon^\alpha, x)$.
Ainsi

$$\left\| \mathscr{G}\left(\frac{x - \xi}{\varepsilon^\alpha}\right) \right\|_{W^N_P[\rho^2]} \leqslant \frac{C_3(x)}{\varepsilon^{\alpha(N - n/P)}}. \tag{4.1}$$

Il est aussi évident que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}\left(\frac{x - \xi}{\varepsilon^\alpha}\right)(x - \xi)^2 \,\mathrm{d}\xi = \varepsilon^{\alpha(n+2)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}(\eta)\eta^2 \,\mathrm{d}\eta = C\varepsilon^{\alpha(n+2)}. \tag{4.2}$$

Posons

$$f^\alpha_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}\left(\frac{x - \xi}{\varepsilon^\alpha}\right) f_\varepsilon(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad M = \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{\substack{1 \leqslant i,\, j \leqslant n \\ 0 \leqslant |\xi| \leqslant \infty}} \left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\xi_i \partial\xi_j}\right|.$$

On a

$$|f(x) - f_\varepsilon^\alpha(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) |f(x) - f(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) |f(\xi) - f_\varepsilon(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \right.$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \left\{ M \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) (x-\xi)^2 \, \mathrm{d}\xi + \varepsilon \left\| \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) \right\|_{W_P^N[\rho^2]} \right.$$

D'où, avec 4.1 et 4.2

$$|f(x) - f_\varepsilon^\alpha(x)| \leqslant C\varepsilon^{2\alpha} + C_3(x)\,\varepsilon^{[1-\alpha(N+n/4)]} \tag{4.3}$$

En posant dans (4.3) $\alpha^{-1} = 2 + N + \dfrac{n}{q}$ nous obtenons

$$|f(x) - f_\varepsilon^\alpha(x)| \leqslant C(x)\,\varepsilon^{2\alpha}, \qquad f_\varepsilon^\alpha = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha n}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon^\alpha}\right) f_\varepsilon(\xi) \, \mathrm{d}\xi \,.$$

c.q.f.d.

Ce théorème peut être appliqué aux équations intégro-différentielles avec paramètre, par exemple, celles qui apparaissent dans la théorie spéciale de la régularisation de certains problèmes incorrects de A. N. Tychonnov. De plus, pour $B_\varepsilon = 0$, elle peut être utilisée pour résoudre des problèmes inconcrets du type

$$Tu = f$$

si T^{-1*} est borné en tant qu'opérateur de $W_P^N[\rho^2]$ à L_2.

A l'aide de ce lemme on peut « améliorer » la convergence faible et forte des solutions démontrée dans ce chapitre. En particulier si

$$\| f_k - f \|_{L_2} = \sigma_k \to 0 \quad \text{pour } k \to \infty \text{, et } f(x) \in C^2$$

alors

$$\left| f(x) - \frac{1}{\sigma_k^{2n/(4+n)}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}\left(\frac{x-\xi}{\sigma_k^{2/(4+n)}}\right) f_k(\xi) \, \mathrm{d}\xi \right| \cong \sigma_k^{4/(4+n)} .$$

DEUXIÈME PARTIE

THÉORIE GLOBALE DES CARACTÉRISTIQUES ET MÉTHODES ASYMPTOTIQUES EN THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A COEFFICIENTS OPÉRATORIELS

Avertissement pour la lecture de la seconde partie. Les démonstrations des principaux théorèmes formulés dans les chapitres 2, 3 et 4 sont rassemblées dans le chapitre 7. Le chapitre 6 contient l'exposé de la méthode de la phase stationnaire qui est fondamentale pour obtenir le développement asymptotique local selon la méthode de l'auteur.

CHAPITRE 1

FORMULATION DU PROBLÈME

§ 1 LES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Les équations de la mécanique quantique n'occupent encore pas la place qui leur revient dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les équations de la mécanique quantique décrivent les propriétés ondulatoires des particules élémentaires, de même que l'équation d'onde hyperbolique ordinaire décrit les propriétés ondulatoires du photon (de lumière).

Les propriétés ondulatoires du photon avaient été observées depuis déjà longtemps, bien avant celles de l'électron. L'équation d'onde a été étudiée dans la littérature mathématique. Ses propriétés ont servi de base à la définition d'une des classes fondamentales d'équations aux dérivées partielles : celle des systèmes hyperboliques d'équations. Au contraire, l'équation de Schrodinger n'appartient en général ni aux équations hyperboliques, ni aux elliptiques, ni aux paraboliques, mais est simplement « correcte » au sens de Petrowsky, et, même de ce point de vue, apparaît comme un cas particulier un peu singulier. Mais, à l'inverse, du point de vue de la physique quantique, c'est l'équation d'onde, en tant qu'équation décrivant un photon, qui est un cas limite singulier, car elle décrit le comportement d'une particule de masse nulle. C'est précisément sous cet angle que nous allons considérer dans la suite l'équation d'onde et l'équation de Maxwell.

Pour les équations de la mécanique quantique, ce qui est essentiel du point de vue physique est l'espace fonctionnel dans lequel on les considère. Nous introduirons plus bas une classification des équations en fonction des espaces fonctionnels associés. Si cet espace est un espace de fonctions continues, la classification introduite coïncidera avec la classification habituelle.

A la correspondance physique entre optique ondulatoire et géométrique répond une notion mathématique aussi profonde que celle de caractéristique et de bicaractéristique d'une équation hyperbolique. Il se trouve cependant que les caractéristiques et bicaractéristiques des équations quantiques, construites de façon formelle, ne coïncident pas avec les trajectoires et les surfaces d'action constante de la mécanique classique. En même temps, les physiciens considèrent en fait comme bicaractéristiques pour l'équation de Schrödinger les solutions des équations d'Hamilton qui lui correspondent.

Il se trouve que la formulation spécifique des problèmes de la mécanique quantique conduit à une généralisation de la notion usuelle de caractéristique.

1. Propagation des discontinuités des solutions de certains problèmes concrets

1. Comme l'on sait, il est possible d'arriver au concept de caractéristique pour un système hyperbolique à l'aide du problème suivant de propagation des discontinuités.

Supposons qu'il existe une solution, généralisée en un sens quelconque, *discontinue*, $u(x, t)$ d'un système hyperbolique. On cherche à définir de manière constructive une fonction $\varphi(x, t)$ (qui n'est pas, en général, une solution de cette équation) telle que la différence $u(x, t) - \varphi(x, t)$ soit suffisamment régulière. La fonction $\varphi(x, t)$ caractériserait alors la structure de la discontinuité ([38]).

On sait que, pour t suffisamment petit, le problème de la construction de la fonction $\varphi(x, t)$ peut être réduit à un problème plus simple : trouver les solutions de l'équation des caractéristiques.

Considérons, comme exemple, l'équation d'onde :

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(x, t)\,\Delta u \\ c^2(x, t) \neq 0 \qquad x = (x_1, \dots, x_n)\end{gathered} \tag{1.1}$$

où $u(x, t)$ satisfait les conditions initiales discontinues (*)

$$\begin{gathered}u(x, 0) = \varphi(x)\, f^+(x) \qquad u'_t(x, 0) = 0 \\ (f^+(x) = f(x) \text{ pour } f(x) > 0;\;\; f^+(x) = 0 \text{ pour } f(x) < 0).\end{gathered} \tag{1.1a}$$

Toutes ces fonctions : $\varphi(x), f(x), c(x, t)$ sont supposées suffisamment différentiables et de plus $\varphi(x)$ est à support compact Ω.

L'équation caractéristique pour (1.1) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = c^2(x, t)(\nabla S)^2$$

(*) Ici, on considère une discontinuité faible, c'est-à-dire une discontinuité de la dérivée.

Posons $S(x,0) = f(x)$. Pour choisir une des déterminations de la solution de l'équation caractéristique, on se donne

$$\left.\frac{\partial S_\nu}{\partial t}\right|_{t=0} = (-1)^\nu c(x,0)\left|\nabla S_\nu(x,t)\right|_{t=0} = (-1)^\nu c(x,0)\left|\operatorname{grad} f(x)\right|$$

Aux deux déterminations de la solution de l'équation caractéristique

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial t} = (-1)^\nu H(x, \nabla S_\nu, t), \qquad H(x,p,t) = c(x,t)|p|$$

$$\nu = 1,2 \qquad p = (p_1, \dots, p_n)$$

correspondent les solutions $p^\nu(t), x^\nu(t), \nu = 1,2$ des deux systèmes d'équations bicaractéristiques :

$$\dot{p}_i^\nu = (-1)^{\nu+1}\frac{\partial H(x^\nu, p^\nu, t)}{\partial x_i^\nu} \qquad \dot{x}_i^\nu = (-1)^\nu \frac{\partial H(x^\nu, p^\nu, t)}{\partial p_i^\nu}$$

$$\frac{\mathrm{d}S_\nu}{\mathrm{d}t} = (-1)^\nu\left(H(x^\nu, p^\nu, t) - \sum_i p_i^\nu H_{p_i^\nu}(x^\nu, p^\nu, t)\right) = 0, \qquad \nu = 1,2 \tag{1.2}$$

satisfaisant les conditions initiales :

$$x^\nu(0) = x_0, \qquad p^\nu(0) = \nabla f(x_0)$$
$$x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \Omega$$

où Ω est le domaine de définition (le support) de $\varphi(x)$.

Notons $x^\nu(t) = X^\nu(t, x_0), p^\nu(t) = P^\nu(t, x_0)$.

Pour t suffisamment petit, $t \leqslant t_0$, les courbes $X^\nu(t, x_0)$ forment, pour ν fixé et x_0 quelconque dans Ω, une famille dépendant de n paramètres, de plus

$$Y^\nu(t, x_0) = \det\left\|\frac{\partial X_k^\nu(t, x_0)}{\partial x_{0j}}\right\| > 0,$$

puisque

$$Y^\nu(0, x_0) = 1 .$$

C'est pourquoi l'équation implicite

$$X^\nu(t, x_0) = x \qquad x_0 \in \Omega$$

n'a pas plus d'une solution $x_0^\nu(x,t)$ pour tout $t \leqslant t_0$.

Il est facile de voir que la solution du problème initial peut être représentée comme la demi-somme de deux solutions $u(x,t) = \frac{1}{2}[u_1(x,t) + u_2(x,t)]$ de l'équation d'onde qui vérifient les conditions initiales suivantes :

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \varphi(x) f^+(x),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = -\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = c(x,0)|\operatorname{grad} f(x)|\varphi(x)\theta(f(x)) \tag{1.3}$$

où $\theta(\xi) = 0$ pour $\xi < 0$, $\theta(\xi) = 1$ pour $\xi > 0$.

Chacune des solutions $u_\nu(x,t), \nu = 1,2$ correspond à l'une des déterminations $S_\nu(x,t)$ de la solution de l'équation caractéristique. Sous les hypothèses énoncées, on a la proposition suivante [38] :

La solution $u_\nu(x,t)$ $(\nu = 1,2)$ *du problème* (1.1), (1.3) *peut être représentée sous la forme :*

$$\frac{c(x_0^\nu,0)}{c(x_0^\nu,t)}u_\nu(x,t) = \frac{\varphi[x_0^\nu(x,t)]}{\sqrt{Y^\nu[t,x_0^\nu(x,t)]}} f^+[x_0^\nu(x,t)] + \mathscr{F}^\nu(x,t)$$

$$x_0^\nu = x_0^\nu(x,t), \qquad \nu = 1,2$$

où $\mathscr{F}^\nu(x,t)$ *est une fonction continûment différentiable.*

Corollaire. *Puisque la solution du problème* (1.1)-(1.1a) *est représentée par* $u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{2} u_\nu(x,t)$, $u(x,t)$ *est continûment différentiable en dehors de l'union des deux régions* $\Omega_t^\nu = X^\nu(t,\Omega), \nu = 1,2.$

En effet, si $x \notin \Omega_t^\nu, x_0^\nu \notin \Omega$, et par conséquent $\varphi(x_0^\nu) = 0$.

2. Considérons maintenant un problème de type mixte. Supposons que $u(x,y,t)$ satisfasse l'équation linéaire du quatrième ordre

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial y^2} + a(x,y,t)\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial y^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

les conditions aux limites

$$u\big|_{y=0} = u\big|_{y=\pi} = 0$$

et les conditions initiales discontinues

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)\, f^+(x)\sin y \qquad u'\big|_{t=0} = 0$$

(où φ est une fonction à support sompact).

Si le coefficient $a(x,y,t)$ ne dépendait pas de y :

$$a(x,y,t) = c(x,t)$$

on pourrait appliquer la méthode de séparation des variables. Dans ce cas, la substitution $u(x,y,t) = v(x,t)\sin y$ conduirait à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(1 + b_i^2(x,t)) - c(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_1}$$

dont les caractéristiques satisfont l'équation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2(1 + b_i^2(x,t)) \tag{1.4}$$

Si $a(x,y,t)$ dépend de y, une telle méthode, évidemment, n'est pas applicable. Néanmoins dans ce cas, comme nous le verrons, la propagation de la discontinuité de la solution de la solution $u(x, y, t)$ est déterminée par la solution de l'équation (1.4) que nous considérerons (*) comme caractéristique.

Nous donnons (chap. 4) une formule générale, gouvernant la propagation de la discontinuité des solutions d'une large classe de problèmes. En utilisant cette formule, la solution du problème initial peut être représentée comme :

$$u = \frac{1}{2}(u_+(x, y, t) + u_-(x, y, t))$$

$$u_\pm = 2H_\pm(x, P[x_0^\pm(x, t), t], t)\,\varphi[x_0^\pm(x, t)]\left|\frac{\partial x_0^\pm}{\partial x}\right|^{1/2} \sin y$$

$$\times \exp\left\{\int_0^t dt \frac{P_1(x_0^\pm, t)}{2H_\pm(X(x_0^\pm, t), P(x_0^\pm, t), t)}\right.$$

$$\left.\int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin^2 y . a(x, y, t)\, dy\right\} f^+(x_0^\pm) + \mathscr{F}(x, y, t)$$

où

$$x_0^\pm = x_0^\pm(x, t),$$

et $\quad H_\pm(x, p, t) = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(1 + b_i^2(x, t))P_i^2}, \qquad X_\pm(x_0, t), P_\pm(x_0, t)$

sont solutions du système

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_\pm}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_\pm}{\partial x_i}, \quad x(0) = x_0, \quad p_0 = \nabla f(x_0)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$x_0^\pm(x, t)$ étant solution de $X^\pm(x_0, t) = x$, et $\mathscr{F}(x, y, t)$ une fonction continûment différentiable.

3. Considérons maintenant un deuxième exemple, pour lequel la discontinuité ne se propage pas selon les caractéristiques au sens usuel.

Soit $u(x, y, z, t)$ une solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + tz^2)\frac{\partial u}{\partial x} + z^2\frac{\partial u}{\partial y} + xz^4 u = \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y},$$

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x)\theta(y)\mathrm{e}^{-z^2/4}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction indéfiniment différentiable à support compact.

(*) Rappelons que l'équation ordinaire des caractéristiques est formée seulement par les termes qui contiennent les dérivées d'ordre quatre.

Dans ce cas, ainsi que nous le verrons dans la suite, la solution $u(x, y, z, t)$ peut être représentée par

$$u(x, y, z, t) = \varphi\left[x - t - \frac{t^2}{4}\right]\theta(y + t)$$

$$\times \exp\left[-\frac{z^2}{4} + \sqrt{3\pi}\left(xt - \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{6}\right)\right] + \mathscr{F}(xyzt),$$

où $\mathscr{F}(x, y, z, t)$ est une fonction continue.

Ici la discontinuité se propage selon des surfaces définies par l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \sqrt{t\frac{\partial S}{\partial x} + 1} = 0$$

qu'il est naturel de considérer, dans le cas présent, comme caractéristique.

4. Nous nous posons un problème analogue pour des équations plus générales, en modifiant légèrement nos conditions sur la différence des fonctions $u(x, t) - \varphi(x, t)$. Demandons qu'un certain nombre de dérivées de cette différence appartiennent à un certain espace de Banach B, mais qui n'est pas obligatoirement C.

Considérons la solution $u(x, y, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2(x, t)\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$$

$$a^2(x, t) + b^2(x, t) \neq 0 \tag{1.5}$$

satisfaisant les conditions

$$u(x, y, 0) = \varphi(x)\,\delta(y - y_0)$$

$$u'_t(x, y, 0) \neq 0 \tag{1.5a}$$

Supposons les coefficients de l'équation suffisamment réguliers et $\varphi(x)$ à support compact Ω. Il faut trouver une fonction $\varphi(x, y, t)$ telle que la différence $u(x, y, t) - \varphi(x, y, t)$ appartienne à $L_2[R^2]$ (R^n est l'espace euclidien n-dimensionnel). On verra, plus bas, que la classe des fonctions $\varphi(x, y, t)$ peut être construite à l'aide des solutions de l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left[a^2(x, t)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + b^2(x, t)\right]^{1/2}$$

que nous appellerons, dans ce cas, caractéristique. (On donnera, plus tard, une définition générale des caractéristiques.)

Lui correspondant, nous avons le système d'Hamilton

$$\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad H = \sqrt{a^2p^2 + b^2},$$

$$\frac{dS}{dt} = (H - pH_p).$$

Les solutions $x(t), p(t), S(t)$ de ces équations, pour $t \leqslant t_0$ suffisamment petit et pour les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \qquad p(0) = 0, \qquad S(0) = 0$$

forment une famille à un paramètre.

Nous notons, comme auparavant,

$$x(t) = X(t, x_0), \qquad p(t) = P(t, x_0), \qquad S(t) = S(t, x_0)$$

Pour $t \leqslant t_0$ suffisamment petit, la dérivée

$$Y(t, x_0) = \frac{\partial X(t, x_0)}{\partial x_0} > 0$$

et la solution de l'équation $X(t, x_0) = x$ est unique : $x_0 = x_0(x, t)$. On a la proposition suivante :

La solution $u(x, y, t)$ du problème (1.5), (1.5a) *peut être, pour $t \leqslant t_0$, représentée sous la forme*

$$u(x, y, t) = \frac{\varphi(x_0) \cos (y - y_0)^2 / 2S(t, x_0)}{\sqrt{S(t, x_0)\, Y(t, x_0)}} + \mathscr{F}(x, y, t),$$

$$x = x_0(x, t),$$

où $\mathscr{F}(x, y, t) \in L_2(R^2)$ pour t fixé, $t \leqslant t_0$.

Corollaire. *La restriction de la solution du problème* (1.5)-(1.5*a*) *sur le domaine $R^2 \setminus \Omega_t$, où $\Omega_t = X(t, \Omega) \times (-\infty \leqslant y \leqslant \infty)$ appartient à $L_2[R^2 \setminus \Omega_t]$.*

5. L'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste — l'équation de Schrödinger — a la forme

$$\mathrm{i}h \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu} \Delta \psi + v(x, t)\, \psi \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \quad (1.6)$$

où h et μ sont des constantes (h est la constante de Planck, μ la masse des particules).

Supposons que $\psi(x, t)$ satisfasse la condition

$$\psi(x, 0) = \delta(x - x_0) \quad (1.7)$$

Si $v(x, t)$ est borné et indéfiniment différentiable ($v(x, t) \in C^\infty$), la solution $\psi(x, t)$ à n'importe quel temps $t > 0$ est une fonction indéfiniment différentiable en chaque point x. Toutefois, cette solution $\psi(x, t)$ elle-même pour t fixé, ainsi que sa dérivée en x, n'appartient pas à $L_2[R^n]$. Par conséquent, le problème de trouver une fonction $\psi_0(x, t)$, telle que la différence $\psi(x, t) - \psi_0(x, t)$ soit différentiable dans $L_2[R^n]$ n'est pas trivial.

Nous allons même imposer une condition plus restrictive sur la différence

$$\psi(x, t) - \psi_0(x, t)$$

En anticipant sur la suite, notons que la manière dont la solution de l'équation de Schrodinger dépend du paramètre h sera importante pour nous, de sorte que nous allons considérer ψ comme une fonction, non seulement de x et de t, mais encore de h: $\psi = \psi(x, t, h)$. Supposons que la solution ψ appartienne pour chaque t fixé à l'espace $L_2[R^{n+1}]$ des fonctions $\mathscr{F}(x, h)$ de norme

$$\left(\int_0^1 \mathrm{d}h \int |\mathscr{F}(x, h)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \tag{1.8}$$

Une fonction de la forme

$$\mathscr{F}(x, h) = \varphi(x) \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{h} f(x) \right\} \tag{1.9}$$

(où comme précédemment $\varphi(x) \in C^\infty$ et est à support compact, $\Omega = D[\varphi(x)]$ et $f(x) \in C^\infty$) n'est pas différentiable dans $L_2[R^{n+1}]$.

La solution de l'équation (1.6), satisfaisant la condition initiale

$$\psi(x, 0, h) = \mathscr{F}(x, h) \tag{1.10}$$

pour $t > 0$ ne sera pas, non plus, différentiable dans $L_2[R^{n+1}]$.

C'est pourquoi, il est légitime de se poser le problème de la construction d'une fonction $\psi_0(x, t, h)$ telle que la différence $\psi - \psi_0$ soit différentiable dans $L_2[R^{n+1}]$. L'équation avec l'aide de laquelle il est possible de construire $\psi_0(x, t, h)$ est l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}(\nabla S)^2 + v(x, t) = 0$$

Les solutions du système de Hamilton lui servent de caractéristiques

$$\mu \dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{p^2}{2\mu} - v(x, t). \tag{1.11}$$

Prenons les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = x_0, \qquad p(0) = \nabla f(x_0), \qquad S(0) = f(x_0).$$

Notons, comme précédemment,

$$x(t) = X(t, x_0), \qquad p(t) = P(t, x_0), \qquad s(t) = S(t, x_0).$$

Pour $t \leqslant t_0$ la solution de l'équation $X(t, x_0) = x_0$ pour $x \in D[\varphi(x)] = \Omega$ est unique et le jacobien

$$Y(t, x_0) = \det \left\| \frac{\partial X_i(t, x_0)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

est différent de zéro.

On a la proposition suivante :

La solution du problème (1.6), (1.9), (1.10) *peut être représentée par :*

$$\varphi(x, t, h) = \frac{\varphi[x_0(x, t)]}{\sqrt{|Y[t, x_0(x, t)]|}} \exp\{ih^{-1} S[t, x_0(x, t)]\} + \Phi(x, t, h) \tag{1.12}$$

où $\Phi(x, t, h), h^{-1}\Phi(x, t, h)$ et $\partial\Phi(x, t, h)/\partial x_i$ *appartiennent à* $L_2[R^{n+1}]$. Remarquons que dans $L_2[R^{n+1}]$ l'opérateur de multiplication par $1/h$ est non borné et est équivalent en un certain sens à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$.

Corollaire. *La solution du problème* (1.6), (1.10) *est différentiable en dehors du domaine* $X(t, \Omega)$, *dans*

$$L_2[R^{n+1} \backslash X(t, \Omega) \times (0 \leqslant h \leqslant 1)]$$

Considérons maintenant l'espace $\mathscr{G}[R^{n+1}]$ des fonctions continues en h $(0 \leqslant h \leqslant 1)$ et de carré intégrable en x. Prenons pour $g(x, h) \in \mathscr{G}[R^{n+1}]$ la norme

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant h \leqslant 1} \sqrt{\int |g(x, h)|^2 \, dx}$$

On peut démontrer que la fonction $\Phi(x, t, h)$ de la formule (1.12) est telle que $\Phi(x, t, h), h^{-1}\Phi(x, t, h)$ et $\partial\Phi(x, t, h)/\partial x_i, i = 1, \ldots, n$ appartiennent à $\mathscr{G}[R^{n+1}]$.

2. Généralisation du problème de la propagation de la discontinuité pour une équation à coefficients opérateurs

1. Supposons que la fonction $u(t)$, à valeurs dans l'espace d'Hilbert H, satisfasse l'équation d'évolution

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) \tag{1.13}$$

où A est un opérateur non borné dans l'espace d'Hilbert H tel que les domaines de définitions $D(A^N)$ et $D(A^{*N})$ soient denses dans H (N étant un nombre entier quelconque).

Supposons que

$$u(t) \notin D(A^2) \tag{1.14}$$

Le problème analogue à celui de la propagation de la discontinuité d'une solution d'une équation hyperbolique, consiste ici à construire un élément $u_N(t)$ tel que

$$u(t) - u_N(t) \in D(A^N) \tag{1.15}$$

La solution généralisée de l'équation (1.13) sera une fonctionnelle (ou fonction généralisée) $W(t) = A^N u(t)$ sur l'ensemble $D(A^{*N})$, à savoir

$$(W(t), g) = (u(t), A^{*N} g)$$

où $g \in D(A^{*N})$ et $u(t)$ satisfait (1.13). Il est évident que $A^N u_N(t)$ est aussi une fonctionnelle sur $D(A^{*N})$. De (1.15) il résulte :

$$W(t) - A^N u_N(t) \in H$$

Soit $W(t)$ une solution généralisée de l'équation (1.13) définie en tant que fonctionnelle sur $D(A^{*N})$. Le problème d'extraire la « partie singulière » de $W(t)$ consiste en ceci : on demande de construire une distribution $W_0(t)$ telle que la différence $W(t) - W_0(t)$ appartienne à H.

Il est évident, que, sans restreindre la généralité nous pouvons nous poser le problème (1.14)-(1.15) et ne considérer que les solutions classiques $u(t) \in D(A)$ de l'équation (1.13).

Afin de repasser au problème général, il faut faire agir sur les deux parties de l'égalité une certaine puissance de l'opérateur A. Si iA est un opérateur auto-adjoint, E_λ sa fonction spectrale, alors, il est évident que

$$\begin{aligned} u(t) = \mathrm{e}^{At} u(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda t}\, \mathrm{d}E_\lambda u(0) \\ &= \int_{\lambda_0}^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda t}\, \mathrm{d}E_\lambda u(0) + \int_{-\infty}^{-\lambda_0} \mathrm{e}^{i\lambda t}\, \mathrm{d}E_\lambda u(0) + \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \mathrm{e}^{i\lambda t}\, \mathrm{d}E_\lambda u(0) \end{aligned}$$

La dernière intégrale, pour tout λ_0 fini appartient à $D(A^N)$, c'est-à-dire

$$u(t) - \int_{\lambda_0}^{\infty} [\mathrm{e}^{i\lambda t}\, \mathrm{d}E_\lambda - \mathrm{e}^{-i\lambda t}\, \mathrm{d}E_{-\lambda}] u(0) \in D(A^N)$$

Ainsi, ce problème est lié au problème du comportement asymptotique de E_λ pour $\lambda \to \infty$.

3. Classification des équations du second ordre

Les propriétés générales des solutions des équations (1.1), (1.5), (1.6) peuvent servir à la classification d'une large classe d'équations à coefficients opératoriels dans un espace d'Hilbert. Nous allons considérer ici le cas le plus simple, qui englobe, toutefois, toutes les équations de la mécanique quantique.

Considérons l'espace des fonctions vectorielles $\psi(x,t), x = (x_1, \dots, x_n)$, $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_s(x,t)\}$ à valeurs dans l'espace d'Hilbert H.

Soient $B_i(x,t)$, $i = 1,\dots,n$ et $R(x,t)$ des matrices d'ordre $s \times s$ bornées indéfiniment différentiables, dépendant des paramètres x,t; $a_k(x,t)$, $k = 1,2,3$, $b(x,t) = \{ b_1(x,t),\dots,b_n(x,t) \}$ des fonctions complexes données de x et t, indéfiniment différentiables ($b(x,t)$ est une fonction vectorielle) à valeurs sur l'axe réel, A un opérateur auto-adjoint non borné de l'espace de Hilbert H, ne dépendant pas de x et de t. Notons R^s l'espace vectoriel de dimension s.

Considérons l'équation

$$\left[a_1(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathrm{i}Aa_2(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + A^2 a_3(x,t) + (\nabla + \mathrm{i}Ab(x,t))^2 + \sum_{k=1}^{n} B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{i}AR(x,t)\right]\psi(x,t) = 0 \quad (1.16)$$

Après la substitution $\psi = \mathrm{e}^{iAS(x,t)}$, en annulant le coefficient de A^2, nous obtenons une équation que nous appellerons caractéristique :

$$a_1(x,t)\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + a_2(x,t)\frac{\partial S}{\partial t} - a_3(x,t) + [\nabla S + b(x,t)]^2 = 0 \quad (1.17)$$

$\Bigg($On peut également l'obtenir en partant de ce que l'opérateur A est équivalent à l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigg)$.

Si les racines du polynôme caractéristique

$$Q(P_0) = a_1 P_0^2 + a_2 P_0 + \sum_{i=1}^{n} (p_i + b_i)^2 - a_3 \quad (1.18)$$

sont réelles quels que soient $p_1, p_2, \dots, p_n, x$, on dira alors que l'équation (1.16) est de type onde; si elles sont imaginaires pures, de type tunnel; et si dans un domaine elles sont réelles et dans le reste imaginaires pures on dira que l'équation est de type mixte. Nous ne considérerons pas d'autres types d'équations.

4. Transformation de type Fourier pour des fonctions abstraites

1. Définissons ce qu'est la représentation d'impulsion (p-représentation). Dans le cas où l'opérateur A est défini non négatif, le passage à la représentation d'impulsion s'effectue à l'aide d'un opérateur unitaire $\Phi_A^{x_n}$ de la forme

$$\tilde{\psi}(p) = \Phi_A^{x_n}\psi(x) = \frac{A^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ip\cdot xA}\psi(x)\,\mathrm{d}x \quad (1.19)$$

Inversement :

$$\psi(x) = \Phi_A^{p_n}\tilde{\psi}(p) = \frac{A^{n/2}}{(-2\pi i)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ip\cdot xA}\tilde{\psi}(p)\,\mathrm{d}p \quad (1.20)$$

Si l'opérateur $-A$ est défini non négatif, alors

$$\psi(x) = \Phi_A^{p_n} \tilde{\psi}(p) = \frac{(-A)^{n/2}}{(2\pi i)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip \cdot xA} \tilde{\psi}(p) \, dp \qquad (1.21)$$

Si l'opérateur A n'a pas un signe défini, décomposons l'espace H en somme $H = H^+ + H^-$ de sous-espaces tels que la restriction de l'opérateur A à H^+ soit un opérateur défini non négatif que nous noterons A^+ et la restriction de l'opérateur $-A$ à H^- est un opérateur défini non négatif que nous noterons $-A^-$.

Soit $\tilde{\psi}(p)$ une fonction à valeurs dans H.

Posons $\tilde{\psi}(p) = \tilde{\psi}^+(p) + \tilde{\psi}^-(p)$; $\tilde{\psi}^+(p) \in H^+, \tilde{\psi}^-(p) \in H^-$.

Alors, par définition

$$\Phi_A^{p_n} \tilde{\psi}(p) = \Phi_{A^+}^{p_n} \tilde{\psi}^+(p) + \Phi_{A^-}^{p_n} \tilde{\psi}^-(p) \qquad (1.22)$$

On définit de façon analogue l'opérateur $\Phi_A^{x_n}$.

2. Introduisons maintenant un opérateur analogue dans l'espace des fonctions de x à valeurs dans un espace de Banach B.

Considérons dans l'espace de Banach B un opérateur A ayant un domaine de définition $D(A)$ partout dense, et possédant un inverse.

Supposons que $(1 + \varepsilon A)^{-1}$ existe et soit partout défini dans B, et de plus, $\|(1 + \varepsilon A)^{-1}\| \leqslant 1$ à la fois pour $\varepsilon > 0$ et ε imaginaire pur. Considérons l'opérateur

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi/4} A \int_0^{\infty} e^{iAx^2} \, dx$$

défini sur $D(A)$. Cet opérateur possède les propriétés suivantes (voir chap. 6, § 1) :

a) $T^2 = A$ sur $D(A)$,

b) $T = \bar{T}$, où $\bar{T}$ désigne l'opérateur complexe conjugué et a la forme

$$\bar{T} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} A \int_0^{\infty} e^{-iAx^2} \, dx$$

De cette façon T existe en tant qu'opérateur dans un espace de Banach réel. En posant $T = \sqrt{A}$ nous définissons une transformation de type Fourier par les formules (*) (1.19)-(1.20) pour les fonctions à valeurs dans B.

Il est également possible de considérer un opérateur A tel que $-A$ possède les propriétés énumérées plus haut. Dans ce cas, nous introduisons une transformation de type Fourier par la formule (1.21).

(*) La détermination de la racine est nécessaire pour donner un sens à l'opérateur $A^{n/2}$ à l'aide de l'égalité $A^{n/2} = T^n$.

5. Invariance du type d'une équation par passage à la p-représentation

Le type de l'équation (1.16) est invariant par passage à la p-représentation à l'aide de la transformation $\Phi_A^{x_n}$.

En effet, après la substitution $e^{iAS(p,t)}$, dans l'équation (1.16), écrite dans la p-représentation (c'est-à-dire dans l'équation pour la fonction $\psi(p,t)$), nous obtenons, en annulant le coefficient de A^2, à nouveau l'équation de Hamilton-Jacobi

$$a_1(x,t)\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t}\right)^2 + a_2(x,t)\frac{\partial\tilde{S}}{\partial t} - a_3(x,t) + |p + b(x,t)|^2 = 0$$

où $\tilde{S} = S(p,t)$, $x_i = \dfrac{\partial\tilde{S}}{\partial p_i}$

6. Équation de la mécanique ondulatoire et de l'optique

1. Nous donnons un tableau des valeurs particulières des coefficients de l'équation (1.16) duquel on tire les équations de la mécanique ondulatoire et de l'optique. Remarquons que la majorité des applications concrètes de la théorie développée par la suite se rapporte précisément à ces équations. Il est facile de vérifier qu'elles appartiennent toutes au type onde au sens admis avant cette classification.

Ici $\bar{E} = \bar{E}(x,t)$ est le champ électrique, $\bar{H} = \bar{H}(x,t)$ le champ magnétique. $\Phi_0 = \Phi_0(x,t)$ est le potentiel scalaire, $A_\mu = A_\mu(x,t), \mu = (1,2,3)$ sont les composantes d'un potentiel vecteur, $\varepsilon = \varepsilon(x,t)$ et $\mu = \mu(x,t)$ sont les perméabilités diélectriques et magnétiques du milieu, c la vitesse de la lumière dans le vide, m la masse d'une particule, e la charge ([13]), h la constante de Planck, σ_2 les matrices 2 de par 2 de Pauli : $\sigma_2 = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$

$$\sigma_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\bar{\sigma}, \bar{\alpha}$ les matrices de Dirac 4×4 [40] :

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{2k} \\ \sigma_{2k} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_{2k} & 0 \\ 0 & \sigma_{2k} \end{pmatrix}.$$

2. En outre, si $a_1 = a_2 = 0, b = 0, B_k = 0, R = 0$ nous obtenons l'équation d'Hermholtz. Pour $A = \omega$ on a une équation de type tunnel avec des caractéristiques imaginaires pures : si on fait le changement $S \to iS'$, on obtient des solutions réelles pour S'. Nous appellerons système bicaractéristique de l'équation tunnel donnée le système caractéristique de l'équation définissant S'.

3. L'équation (1.5) est obtenue à partir de l'équation (1.16) en posant

$$a_1 = \frac{1}{a^2(x, t)}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{b^2(x, t)}{a^2(x, t)}, \quad A = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et en annulant les autres coefficients de l'équation (1.16).

4. Les données initiales pour les équations 2 et 3 du tableau 1 (équations de Maxwell et de Dirac) ne sont pas arbitraires mais vérifient des relations déterminées. Ces relations ont la propriété d'invariance, c'est-à-dire que, si elles sont réalisées à l'instant initial, la solution de l'équation les vérifiera à n'importe quel instant.

Soient $\bar{E}(x,0) = \bar{E}_0(x), \bar{H}(x,0) = \bar{H}_0(x)$:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}(x,0) = \bar{E}'_0(x), \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}(x,0) = \bar{H}'_0(x),$$

les conditions initiales de la solution de l'équation de Maxwell (ligne 2, tableau 1). Les relations indiquées entre ces quantités sont :

$$\operatorname{div} \varepsilon \bar{E}_0 = 0, \qquad \operatorname{div} \mu \bar{H}_0 = 0 \tag{Ia}$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \bar{E}'_0 = \operatorname{rot} \bar{H}_0, \qquad \frac{\mu}{c} \bar{H}'_0 = -\operatorname{rot} \bar{E}_0. \tag{Ib}$$

Soit $\psi(x,t)$ une solution des équations de Dirac satisfaisant les conditions initiales

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = \psi'_0(x).$$

Les relations imposées à ces conditions initiales sont

$$\frac{ih}{c}\psi'_0 + \frac{e}{c}\Phi_0(x,0)\psi_0 = -ih\left(\bar{\alpha}, \left(\operatorname{grad}\psi_0 - \frac{e}{c}A\psi_0\right)\right) + mc\alpha_4\psi_0 \tag{II}$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque les relations I et II sont invariantes et sont réalisées à n'importe quel instant, on peut écrire les équations de Dirac et de Maxwell, comme d'habitude, sous forme d'un système d'équations du premier ordre. Il est alors possible d'imposer directement la condition Ia aux solutions de l'équation Ib.

5. Remarquons qu'en général l'équation d'onde scalaire et l'équation de Maxwell ne dépendent pas de l'opérateur A. Néanmoins la condition initiale peut, elle, dépendre de l'opérateur A. En effet, dans le premier exemple, (1.1), la condition initiale (1.2) peut être représentée par

$$\begin{aligned} u(x) = \varphi(x) f^+(x) &= \varphi(x)\left[\xi + f(x)\right]^+_{\xi=0} \\ &= \varphi(x)\left[\mathrm{e}^{(f(x)\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi)}\xi^+\right]_{\xi=0} \end{aligned}$$

Ainsi, on a ici $u(x,0) = \mathrm{e}^{-iAf(x)}g$, où $A = \mathrm{i}\partial/\partial\xi$ et $g = \xi^+$.

De plus, on peut poser une condition initiale « oscillante » :

$$u(x,0) = \varphi(x)\,e^{i\omega f(x)}$$

(c'est-à-dire $g = 1, A = \omega$).

Dans tous les exemples considérés, les conditions initiales dépendent de A de façon particulière. Nous verrons dans le prochain paragraphe que cette forme particulière des conditions initiales n'est pas accidentelle. Elle est dictée par l'origine physique même du problème.

§ 2 FORMULATION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR LES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

La mécanique quantique, comme l'on sait, est fondée sur toute une série de principes physiques. Nous ne nous occuperons pas de ceux d'entre eux qui postulent le rapport de l'appareil mathématique avec l'expérience. Nous ne nous occuperons pas non plus des règles qui servent à écrire les équations.

Tout l'appareil mathématique connu de la mécanique quantique peut être construit sur la base de certaines équations d'évolution (non-stationnaires) aux dérivées partielles, figurant au tableau 1. C'est pourquoi, afin d'axiomatiser la théorie mathématique de la mécanique quantique, il faut encore savoir quelles conditions doivent satisfaire les valeurs initiales des solutions de ces équations. Aussi nous ne formulerons que les postulats de la mécanique quantique qui pourraient être employés pour déterminer la forme des conditions initiales. Des postulats de cette nature sont le principe d'identité des particules et le principe de « correspondance entre les mécaniques quantique et classique ». Ce ne sont pas toutes les solutions des équations avec des données initiales arbitraires dans L_2 qui les vérifient.

1. Formulons un axiome qui peut remplacer le principe « d'identité ». *Supposons que l'équation de Schrödinger dépende de deux triples de variables* x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 *de telle façon que l'équation ne change pas par permutation des indices. Alors la condition initiale peut seulement changer de signe par permutation des indices.* On montre facilement que la solution de l'équation possédera cette propriété, non seulement à l'instant initial mais à n'importe quel instant t; ce qui signifie que le principe d'identité est vérifié sous sa formulation ordinaire ([47], [87]).

2. Une autre restriction imposée aux conditions initiales, est formulée aussi dans le livre de L. Schiff, *Mécanique quantique* : « nous devons toujours exiger que par un passage à la limite convenable, les résultats de tout calcul coïncident avec les expressions classiques. Cette exigence exprime le principe de correspondance de Bohr »... [87].

TABLEAU 1

Équations	Notation usuelle pour la solution ψ	a_1	a_2	a_3	b	$B_k\,\partial\psi/\partial x_k$	R	A
Équation d'onde scalaire	u	$\frac{1}{c^2(x,t)}$ vitesse de la lumière dans le milieu	0	0	0	0	0	$\mathrm{i}\,\partial/\partial\tau$ ou ω
Maxwell	$\bar{E}$ $\bar{H}$	$\varepsilon\mu/c^2$	0	0	0	$(\operatorname{grad}\ln\mu)\operatorname{rot}\bar{E} + \operatorname{grad}(\bar{E}\operatorname{grad}\ln\varepsilon)$ $(\operatorname{grad}\ln\varepsilon)\operatorname{rot}\bar{H} + \operatorname{grad}(\bar{H}\operatorname{grad}\ln\mu)$	0	$\mathrm{i}\,\partial/\partial\tau$ ou ω
Dirac	ψ	1	$2\Phi_0$	$\Phi_0^2 + m^2c^4$	A_μ $\mu = 1, 2, 3$	0	$\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + \frac{e}{c}\times$ $\{(\bar{\sigma},\bar{H}) - \mathrm{i}(\bar{\alpha},\bar{E})\}$	$1/h$
Klein-Gordon-Fock	ψ	1	$2\Phi_0$	$\Phi_0^2 + m^2c^4$	A_μ $\mu = 1, 2, 3$	0	$\partial\Phi_0/\partial t$	$1/h$
Pauli	ψ	0	1	Φ_0	A_μ $\mu = 1, 2, 3$	0	$e(\bar{\sigma}_2, \bar{H})$	$1/h$
Schrödinger	ψ	0	1	Φ_0	A_μ $\mu = 1, 2, 3$	0	0	$1/h$

3. Expliquons ce que signifie le terme de « passage à la limite ».

Soient $l_0, t_0, v_0 = l_0/t_0, V_0$ des constantes de longueur, temps, vitesse et potentiel caractéristiques pour le système quantique donné. Le passage-limite des grandeurs de la mécanique quantique à celles de la mécanique classique est réalisé par une variation de ces paramètres telle que la constante sans dimension

$$\nu = \frac{h}{l_0 m v_0}$$

tende vers zéro. Cela signifie que ce qu'on appelle la longueur d'onde de de Broglie h/mv_0 est petite en comparaison de la longueur caractéristique du système. Les autres paramètres sans dimension

$$\eta = \frac{c}{v_0} \qquad \kappa = \frac{eV_0}{mv_0^2}$$

(c étant la vitesse de la lumière, e la charge et V_0 le potentiel caractéristique) ne dépendant pas de h et de l_0. Mais puisque h est constant, ν ne peut tendre vers zéro que par sa dépendance de la quantité l_0 (ou si V_0 et v_0 tendent simultanément vers ∞ et que $eV_0 \sim v_0^2 m$). Cependant, par commodité, on suppose d'ordinaire que $h \to 0$, au lieu de $\nu \to 0$ ou $l_0 \to \infty$.

Ainsi, le principe de correspondance ne peut être appliqué qu'aux systèmes qui contiennent le petit paramètre h. Il diffère en cela du principe d'identité.

4. Élucidons maintenant de quel problème de mécanique classique il s'agit.

Chaque problème concret de mécanique quantique qui contient le paramètre h et a un sens physique, correspond en mécanique classique à un problème bien déterminé. Ce problème peut être considéré comme un problème, variationnel ordinaire : on cherchera les extremas d'une fonctionnelle dont l'extrémité de droite est fixée et dont l'extrémité de gauche est transverse à une variété de dimension $k \leqslant n$ (en particulier pour $k = 0$, elle est aussi fixée). Considérons, par exemple, l'équation de Schrödinger. Les équations d'Euler du problème variationnel classique qui lui est associé seront les équations de Newton :

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

Considérons une variété, k-dimensionnelle, $x_0 = x_0(\alpha), \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_k$ $k \leqslant n$, plongée dans R^n. Une généralisation de la condition de transversalité peut s'écrire ([53]) sous la forme

$$\frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \dot{x}_0(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial x_0(\alpha)}{\partial \alpha_j}\frac{\partial \dot{x}_0(\alpha)}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i, j \leqslant k$$

$$p_0(\alpha) = \mu \dot{x}_0(\alpha) \tag{2.1}$$

Il est plus commode de considérer dans l'espace de phase $q = x$ $p = \mu\dot{x}$ la variété différentiable non-singulière de dimension n $q = q(\alpha), p = \mu\dot{q}(\alpha)$, $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. La condition (2.1) peut s'écrire

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha_i}\frac{\partial p}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial q}{\partial \alpha_j}\frac{\partial p}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i, j \leqslant n \tag{2.2}$$

c'est-à-dire que dans n'importe quel système de coordonnées locales de la variété les crochets de Lagrange sont nuls. Une telle variété est appelée lagrangienne.

4.1. La transition quantique d'un système de l'état $\psi_1(x)$ pour $t = 0$ à l'état $\psi_2(x)$ pour $t = \tau$ est décrit par la formule

$$c_{12}(\tau) = \int \psi_2(x)\,K(x, \xi, \tau)\,\psi_1(\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \tag{2.3}$$

où $K(x, \xi, \tau)$ est une solution fondamentale (fonction de Green) de l'équation de Schrödinger (1.6).

La probabilité de cette transition est égale à $|c_{12}(\tau)|^2$.

La solution du problème de Cauchy pour (1.6) s'obtient à partir de la formule (2.3) si on pose $\psi_2(x) = \delta(x - x')$ ce qui correspond au problème avec l'extrémité de droite fixée.

La solution fondamentale elle-même peut être obtenue à partir de cette formule en posant $\psi_1(x) = \delta(x - \xi')$, $\psi_2(x) = \delta(x - x')$. Par conséquent, la solution fondamentale décrit la transition quantique au cours du temps τ d'une particule du point $x = \xi'$ au point $x = x'$, ce qui correspond à un problème variationnel avec extrémités fixées.

Dans ce cas la variété lagrangienne initiale est de la forme $x = \xi'$ et représente une surface parallèle au plan de coordonnée $x = 0$. A une condition initiale de la forme

$$\psi(x, 0) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{p_0 x}{h}\right)$$

($p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0n})$ étant des constantes) correspond la variété lagrangienne $p = p_0$; à une condition indépendante de h correspond la variété $p = 0$.

5. A l'aide du principe de correspondance, Bohr obtenait une quantification de la mécanique classique, qui, comme il est apparu ensuite, ne donne que le premier terme asymptotique lorsque $h \to 0$ de la solution de la véritable équation quantique de Schrödinger. La quantification de Schrödinger consistait à faire correspondre à l'impulsion classique l'opérateur $-\,\mathrm{i}h\partial/\partial x$, à l'énergie E l'opérateur $\mathrm{i}h\partial/\partial t$, ce qui faisait correspondre, par cela même, à l'équation de Hamilton-Jacobi, une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. La quantification ainsi est étroitement liée au principe de correspondance. Le principe de correspondance dans la formulation déjà mentionnée de Schiff est le concept inverse de la quantification. La quantification met en correspondance avec un objet classique, un objet quantique dépendant de h, et le principe de correspondance exige que les résultats du calcul aient des limites classiques lorsque $h \to 0$. On pourrait assez naturellement appeler le principe de correspondance « l'auxiliaire de la quantification ».

Il se trouve cependant que le principe de correspondance n'est pas vérifié pour une solution arbitraire de l'équation de Schrödinger.

Par exemple, soit $\psi(x,t)$ une solution de l'équation de Schrödinger satisfaisant la condition initiale $\psi(x,0) = \varphi(x)\exp(ix/h^2)$; la valeur moyenne de l'impulsion qui est égale à (voir [87])

$$-\int \bar{\psi}(x,t)\, ih\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\,dx$$

tendra vers l'infini lorsque $h \to 0$. Cela signifie que, pour satisfaire le principe de correspondance, il faut, avant tout, préquantifier la condition initiale des équations de Newton qui est une condition de transversalité, c'est-à-dire qu'à chaque variété lagrangienne, on fait correspondre une fonction de x et de h qui sera la condition initiale pour la solution de l'équation de Schrödinger [autrement dit, préquantifier les crochets de Lagrange (2.2)]. Et seulement après cela, prouver le principe de correspondance.

6. Ainsi, le problème consiste à trouver une classe K de fonctions de x et de h, satisfaisant les conditions suivantes :

1. *Condition asymptotique.* Deux fonctions de x et de h appartenant à K sont considérées comme équivalentes si leur différence tend vers zéro en moyenne (c'est-à-dire en norme dans $L_2[R^n]$) lorsque $h \to 0$.

2. *Réalisation du principe de correspondance.* Si à l'instant initial la solution appartient à la classe K, alors *à n'importe quel instant*, le principe de correspondance est vérifié, c'est-à-dire que toutes les grandeurs de la mécanique quantique, qui ont un sens physique, ont pour limite, lorsque $h \to 0$, les grandeurs classiques.

3. *Invariance.* Si, à l'instant initial, une solution $\psi(x,0)$ appartient à la classe K, alors à n'importe quel instant, elle appartient à la même classe.

4. *Caractère complet.* A chaque variété de la forme $\dot{x}_0 = \dot{x}_0(\alpha)$, $x_0 = x_0(\alpha)$ satisfaisant la condition (2.2) correspond une fonction $\varphi_0 \in K$. Les grandeurs de la mécanique quantique, associées à la solution $\psi(x,t)$ de l'équation (1.6)

qui est telle que $\psi(x,0) = \varphi_0$, convergent lorsque $h \to 0$ vers les grandeurs classiques correspondant au problème

$$\ddot{x}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad x_i(0) = x_{0i}(\alpha), \quad \dot{x}_i(0) = p_{0i}(\alpha) \tag{2.4}$$

6.1. Ainsi, il est suffisant pour notre but, de quantifier les crochets de Lagrange dans le cadre de l'approximation semi-classique, qui est l'approximation de la vieille mécanique quantique de Bohr. En anticipant, remarquons que les conditions de quantification des crochets de Lagrange coïncideront avec les conditions de Bohr-Sommerfeld de la vieille théorie quantique dans le cas où la variété lagrangienne reste invariante relativement au système dynamique (2.4). Nous allons remplacer la propriété asymptotique de la classe K par une condition plus forte qui tient compte de « l'équivalence » entre l'opérateur de multiplication par $1/h$ et l'opérateur de différentiation en x. Considérons dans l'espace $L_2(R^{n+1})$ le domaine D qui est l'intersection des domaines de définition de l'opérateur de multiplication par $1/h$ et l'opérateur de différentiation en x. Le domaine D n'est pas fermé en norme dans $L_2(R^{n+1})$. Identifions les éléments de $L_2(R^{n+1})$ dont la différence appartient à D. On désigne par $S = L_2/D$ l'espace (espace-quotient (*)) obtenu de cette façon. La condition asymptotique sera remplie si la classe K appartient à S. Dans la suite nous indiquerons l'égalité dans l'espace S par $f_1 \underset{S}{=} f_2$, c'est-à-dire l'égalité à un élément appartenant à D près. Ainsi, par exemple, $\psi(x,t) \underset{S}{=} \psi_0(x,t)$.

7. La question de la construction d'une classe invariante de fonctions peut être aussi posée pour le problème des discontinuités de l'équation d'onde scalaire. Si on considère une solution du problème (1.1) pour $t > t_0$, le jacobien $Y(t,x_0)$ peut s'annuler en un certain point $t = t'$. Le comportement de la discontinuité au point $t = t'$ a été examiné pour $n = 2$ lorsque les coefficients de l'équation (1.1) sont analytiques et dans le cas le plus simple (caustique simple). On a montré ([6, 2, 3)]) que la discontinuité de la solution se décrivait par une intégrale très compliquée.

La question est de construire une classe invariante de discontinuités K, c'est-à-dire une classe telle que si $\psi(x,0) \in K$, alors $\psi(x,t) \in K$ à n'importe quel instant t. Ainsi, il s'agit ici, en particulier, de résoudre le problème (1.1) globalement pour n'importe quel temps t.

8. Considérons l'espace $L_2[R^n, H]$ des fonctions de $x_1, \dots, x_n \in R^n$ à valeurs dans l'espace d'Hilbert H (voir 1re partie, ch. 2, § 1). Soit A un opé-

(*) L'espace $L_2[R^n]$ est un groupe pour l'addition et D un sous-groupe. Soit $[L_2/D]$ les classes d'équivalence dans L_2 par rapport au sous-groupe D. L'ensemble des classes d'équivalence est un ensemble fondamental d'éléments de l'espace linéaire S. L'espace-quotient L_2/D n'est pas fermé.

rateur auto-adjoint de H tel que le domaine $D(A^N)$ soit dense dans H, quel que soit N. Nous considérerons dans $L_2[R^n, H]$ des fonctions généralisées au sens du paragraphe (1.4 1), c'est-à-dire des fonctions de la forme $A^N f(x)$ où $f(x) \in L_2[R^n, H]$. Comme on l'a indiqué en (1.4 1), on peut, sans restreindre la généralité, considérer que

$$f(x) \notin D(A).$$

C'est pourquoi, tout en restant dans $L_2[R^n, H]$, nous choisissons une classe de fonctions qui n'appartienne pas à l'intersection des domaines de définition des opérateurs A et $\partial/\partial x_i, i = 1, \ldots, n$. Dans la suite nous formulerons tous nos résultats pour des fonctions de l'espace $L_2[R^n, H]$. Mais si on fait agir l'opérateur A^N ou $(\partial/\partial x_i)^N$ sur ces fonctions, nous passerons aux fonctions généralisées.

Tous les théorèmes du chapitre 2 s'étendent trivialement aux fonctions généralisées ; c'est pourquoi, dans une partie des exemples utilisés pour illustrer les théorèmes, nous nous servirons de fonctions généralisées. Pour extraire la « partie singulière » d'une fonction $f(x) \notin D$, nous considérons l'espace-quotient $S = L_2[R^n, H]/D$, (c'est-à-dire identifions les éléments de l'espace $L_2[R^n, H]$ dont la différence appartient à $D = D(\partial/\partial x) \cap D(A)$.

Pour l'équation générale (1.16), le problème consiste ainsi à construire une classe $K \subset S$, invariante par rapport à l'équation (1.16), c'est-à-dire telle que si $\psi(x, 0) \in K, \psi(x, t) \in K$ à tout instant.

§ 3 DÉFINITION GÉNÉRALE DES CARACTÉRISTIQUES POUR UNE ÉQUATION A COEFFICIENTS OPÉRATORIELS

1. Soit $\mathscr{X}(B)$ un certain espace de Banach de fonctions de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ à valeurs dans un espace de Banach abstrait (par exemple, $C^N(B)$ ou $W_P^N(B)$).

Considérons l'espace $\mathscr{X}'(B)$ muni de la normé

$$\| g(x) \|_{\mathscr{X}'(B)} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \right\|_{\mathscr{X}(B)} + \| g(x) \|_{\mathscr{X}(B)}$$

Désignons par S l'espace-quotient

$$\mathscr{X}(B)/\mathscr{X}'(B)$$

Soit L un opérateur linéaire borné appliquant l'espace de Banach $\mathscr{X}_1(B_1)$ dans l'espace de Banach $\mathscr{X}_2(B_2)$. Supposons que L applique $\mathscr{X}'_1(B_1)$ dans $\mathscr{X}'_2(B_2)$. Soient

$$S_1 = \mathscr{X}_1(B_1)/\mathscr{X}'_1(B_1) \qquad S_2 = \mathscr{X}_2(B_2)/\mathscr{X}'_2(B_2)$$

L'opérateur L induit, de façon évidente, un opérateur linéaire appliquant l'espace-quotient S_1 dans l'espace-quotient S_2. Nous appellerons l'opérateur L_S induit par L, appliquant l'espace-quotient S_1 dans l'espace quotient S_2 l'opérateur caractéristique. Supposons que pour une fonction $X(x_1) \in S_1$, qui ne dépend que du seul argument x_1, l'équation $L_S X(\varphi(x)) = 0$ n'a de solutions que si et seulement si $\varphi(x) \in C^1$ vérifie une équation du type Hamilton-Jacobi. On dira alors que l'opérateur L admet des caractéristiques; l'équation du premier ordre qui détermine la fonction $\varphi(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ est dite caractéristique de l'opérateur L et peut en général ne pas être unique.

Dans le cas où l'opérateur L est un opérateur hyperbolique du k-ième ordre, opérant de C^k dans C, la définition donnée des caractéristiques coïncide avec celle généralement admise.

2. Soit iA un opérateur, non borné dans B, qui engendre un groupe. Si la fonction $X(x_1)$ déjà mentionnée a la forme

$$X_g(x_1) = \mathrm{e}^{iAx_1} g$$

où $g \in B$, nous appellerons l'équation associée équation A-caractéristique et nous dirons que l'opérateur L a des A-caractéristiques. Si, en plus, l'équation caractéristique a une seule et même forme pour tous les opérateurs non bornés iA, qui engendrent un groupe, nous l'appellerons fortement caractéristique et nous dirons que l'opérateur L a des caractéristiques fortes. On voit facilement que les équations caractéristiques classiques pour les systèmes hyperboliques sont fortement caractéristiques, si l'on suppose que la solution de l'équation est une fonction à valeurs dans un certain espace de Banach (par exemple si la solution dépend d'un paramètre).

Pour l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2(x)\,\Delta u$$

l'équation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = C^2(x)\,(\nabla S)^2 \tag{3.1}$$

est fortement caractéristique et l'équation

$$C^2(x)\,(\nabla S)^2 = 1 \tag{3.2}$$

est i $\partial/\partial t$ – caractéristique. Si la condition initiale pour l'équation (3.1) vérifie l'équation (3.2), dans ce cas, les caractéristiques fortes coïncideront avec les i $\partial/\partial t$ – caractéristiques.

Passons maintenant à une définition constructive des A-caractéristiques.

3. Soit $\mathscr{L}(x, p, t, h)$ un opérateur auto-adjoint (généralement non-borné) d'un espace de Hilbert H, dépendant des paramètres x, p, t et h, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $0 \leqslant |x| \leqslant \infty$, $0 \leqslant |p| \leqslant \infty$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$,

$0 \leqslant h \leqslant h_0$ et indéfiniment différentiable par rapport à tous ces paramètres. Soit $\lambda(x,p,t)$ un point du spectre de l'opérateur $\mathscr{L}(x,p,t,0)$ qui soit isolé uniformément par rapport à tous les paramètres. Soit $L_2[R^{n+1},H]$ l'espace des fonctions de $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et de h à valeurs dans H. La norme de $\mathscr{F}(x,h) \in L_2[R^{n+1},H]$ est donnée par

$$\| \mathscr{F} \|_{L_2[R^{n+1},H]} = \sqrt{\int_0^{h_0} \mathrm{d}h \int_{-\infty}^{\infty} \| \mathscr{F}(x,h) \|_H^2 \, \mathrm{d}x}$$

Considérons dans $L_2[R^{n+1},H]$ un opérateur de la forme $\mathscr{L}(x,\hat{p},t,h)$ où $\hat{p}_j = -\mathrm{i}h\,\partial/\partial x_j$, et où t est un paramètre. De plus, dans l'opérateur $\mathscr{L}$, $\hat{p}_j$ agit d'abord et ensuite x_j, autrement dit

$$\mathscr{L}(x,\hat{p},t,h)\mathscr{F}(x,h) = \frac{1}{(2\pi\mathrm{i}h)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-ipx/h} \mathscr{L}(x,p,t,h) \int \mathrm{e}^{ip\xi/h} \mathscr{F}(\xi,h)\, \mathrm{d}\xi .$$

Considérons dans l'espace des fonctions continues en t à valeurs dans $L_2[R^{n+1},H]$ l'opérateur

$$\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial t} - \mathscr{L}(x,\hat{p},t,h). \tag{3.3}$$

Pour cet opérateur, une des (i/h)-caractéristiques de l'équation a la forme

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \lambda\left(x,\frac{\partial S}{\partial x},t\right) = 0 \tag{3.4}$$

Elle correspond à la valeur propre $\lambda(x,p,t)$. Au lieu du $1/h$ dans cet exemple on peut prendre la résolvante de l'opérateur auto-adjoint A, agissant dans l'espace L_2 des fonctions de τ. Dans ce cas, la norme de $\mathscr{F}(x,\tau) \in L_2[R^{n+1},H]$ doit avoir la forme

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}(x,\tau)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

L'équation (3.4) sera alors A-caractéristique pour l'opérateur (3.3) où $h = (A - z)^{-1}$, $z \in \rho(A)(\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de l'opérateur A). Cette définition des A-caractéristiques est, ainsi que nous le montrons plus bas, compatible avec la définition donnée plus haut.

4. Dans ce paragraphe nous allons donner une définition constructive générale des caractéristiques des équations différentielles à coefficients opératoriels; à l'aide de cette définition nous donnerons une classification de ces équations.

Considérons l'opérateur fermé $\mathscr{L}$ ayant un domaine de définition partout dense, dans l'espace de Hilbert H et un domaine de valeurs, dans le même espace. $\mathscr{L}$ dépend de $2n + 3$ paramètres $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_0, x_1, \ldots, x_n, t, \omega$ et est un polynôme de degré m dans le paramètre p_0:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathrm{i}\omega p, \mathrm{i}\omega p_0, x, t, \omega) = \sum_{j=0}^{m} \mathscr{L}_j(\mathrm{i}\omega p, x, t, \omega)(\mathrm{i}\omega p_0)^j \tag{3.5}$$

Supposons que la limite forte existe :

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^l \mathscr{L}(\mathrm{i}\omega p, \mathrm{i}\omega p_0, x, t, \omega) = \mathscr{L}^0(p, p_0, x, t) = \sum_{i=0}^{m} \mathscr{L}_i^0(p, x, t) p_0^i \quad (3.6)$$

où l est un nombre réel. Supposons que le point $\lambda(p, p_0, x, t)$ soit un point isolé uniformément par rapport à tous les paramètres $a \leqslant p \leqslant b$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $c \leqslant p_0 \leqslant d$, $0 \leqslant t \leqslant T$, du spectre (*) des opérateurs $\mathscr{L}^0(p, p_0, x, t)$ et $[\mathscr{L}^0(p, p_0, x, t)]^*$ et de multiplicité m. Soit A un opérateur auto-adjoint non borné de H qui commute avec l'opérateur $\mathscr{L}$.

Considérons dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables de x et t, et à valeurs dans H, un opérateur $\hat{\mathscr{L}}$ de la forme

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{L}} &= \mathscr{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right) = \sum_{i=0}^{m} \mathscr{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} \hat{\mathscr{L}}_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\end{aligned}$$

où l'opérateur $\hat{\mathscr{L}}_j$ agit comme suit

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{L}}_j \varphi &= \mathscr{L}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, x, t, A\right)\varphi \\ &= \frac{A^n}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px A}\, \mathscr{L}_j(-\mathrm{i}pA, x, t, A) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\xi A} \varphi(\xi, t)\, \mathrm{d}\xi \quad (3.8)\end{aligned}$$

L'équation

$$\lambda(p, p_0, x, t) = 0, \quad p_i = \partial S/\partial x_i, \quad p_0 = \partial S/\partial t, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$a \leqslant p \leqslant b, \quad c \leqslant p_0 \leqslant d; \qquad \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

sera appelé équation caractéristique (ce sera une des équations caractéristiques, puisque le spectre de l'opérateur $\hat{\mathscr{L}}$ peut avoir beaucoup de points isolés) pour l'équation

$$\begin{aligned}&\hat{\mathscr{L}}\psi(x, t) = \mathscr{F}(x, t) \\ &\psi(x, t), \quad \mathscr{F}(x, t) \in C^\infty[H].\end{aligned} \quad (3.9)$$

Si l'équation a m racines réelles en p_0, nous dirons que l'équation (3.9) a une caractéristique de type onde. Si toutes les m racines sont imaginaires pures alors elle est dite de type tunnel.

Nous verrons dans la suite que la définition constructive que nous venons de donner pour les A-caractéristiques coïncide avec la définition donnée au

(*) Nous appellerons la fonction $\lambda(p, p_0, x, t)$ le terme.

début de ce paragraphe (voir théorèmes 4.1*a* et 4.2). Il est facile de voir que la définition des caractéristiques, donnée dans les exemples du § 1 résulte de la définition générale exposée ici.

§ 4 PROBLÈME DU CHOIX DE LA REPRÉSENTATION POUR LE PASSAGE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE A LA MÉCANIQUE CLASSIQUE

1. Dans la partie précédente, nous avons étudié une famille d'opérateurs A_ε, convergeant, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers un opérateur A_0 et construit une théorie des perturbations pour l'opérateur A_0, en un sens très général. Nous avions cependant remarqué dès le début même du ch. 1, § 1, 2° l'absence de signification d'une telle formulation dans le cas général, si on ne sait par avance, à partir de considérations *a priori* (par exemple, physiques) que l'opérateur A_0 est précisément la limite. Sinon, nous pourrions passer à une autre représentation $\tilde{A}_\varepsilon$ de l'opérateur A_ε à l'aide d'une transformation unitaire dépendant de ε et alors la limite de A_ε pourrait être un tout autre opérateur $\tilde{A}_0 \neq A_0$.

2. Considérons, par exemple, l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$-\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + v(x)\psi = \lambda\psi \qquad v(0) = 0. \tag{4.1}$$

Il est connu que pour $h \to 0$, la mécanique quantique doit se transformer en mécanique classique. Il serait important d'obtenir en première approximation une grandeur classique et, ensuite, ses corrections quantiques. L'opérateur de Schrödinger

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + v(x)$$

converge pour $h \to 0$ vers l'opérateur de multiplication par $v(x)$. Nous avons déjà dit auparavant qu'une fonction propre de cet opérateur pouvait être normalisée de sorte que, lorsque $h \to 0, \lambda_n \to \lambda$, elle converge (en tant que fonction généralisée) vers une combinaison linéaire de fonctions propres de l'opérateur de multiplication par $v(x)$ (δ-fonction, ch. 3, § 2, 4° ; l'exemple). Passons, pour cet opérateur, à la représentation de Fourier (représentation d'impulsion) : alors

$$\frac{p^2}{2}\psi(p) + v\left(\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi(p) = \lambda\psi(p) \tag{4.2}$$

L'opérateur $\hat{H}$ coïncidera, dans cette représentation, avec l'opérateur de multiplication par $p^2/2$. Les fonctions propres convergeront vers des combinaisons de $\delta(p - \sqrt{2\lambda})$ et $\delta(p + \sqrt{2\lambda})$.

Les deux problèmes n'ont aucun rapport avec le problème initial. Il nous faut obtenir une représentation de l'opérateur $\hat{H}$, telle que les grandeurs quantiques deviennent, pour $h \to 0$, des grandeurs classiques. En particulier l'opérateur énergie totale $\hat{H}$ doit tendre, à la limite, vers l'énergie classique totale et non vers l'énergie potentielle comme dans le cas (4.1), ou l'énergie cinétique comme en (4.2).

3. Revenons avant tout à la mécanique classique. Supposons-nous donné le niveau d'énergie E et l'énergie potentielle $v(x)$. Considérons le système dynamique pour l'énergie E

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = p, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{p^2}{2} + v(x) = E$$

D'où

$$\tau = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - v(x))}}$$

Il est évident que l'intervalle $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ ne sera pas changé par un déplacement invariant le long de la trajectoire. C'est pourquoi nous prenons comme mesure pour le temps, invariante par déplacement le long d'une trajectoire, la quantité

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - v(x))}}$$

Soit $\tilde{L}_2$ l'espace de Hilbert des fonctions de τ muni de la norme :

$$\| f \|^2 = \int_0^T |f(\tau)|^2 \, \mathrm{d}\tau,$$

où T est la demi-période :

$$T = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\tau = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - v(x))}}$$

Les points x_1 et x_2 étant des racines de l'équation $E = v(x)$ (points de « rebroussement »). Par conséquent :

$$\| f \|^2 = \int_{x_1}^{x_2} |f(\tau(x))|^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - v(x))}}$$

L'opérateur unitaire Q_t du système dynamique sera le déplacement dans le temps :

$$Q_t f(\tau) = f(\tau + t).$$

L'opérateur auto-adjoint qui lui correspond aura la forme $\mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$.

Supposons que $v(x)$ soit borné : $|v(x)| < 1$ et que $E > 1$. Dans ce cas l'équation $v(x) = E$ n'aura pas de racines et il faut prendre les intégrales de $\tilde{L}_2$ étendues de $-\infty$ à $+\infty$.

Introduisons un opérateur unitaire $S(t)$ appliquant L_2 sur $\tilde{L}_2$.

Par exemple, nous pouvons prendre l'opérateur de multiplication par la fonction

$$(2(E - v(x)))^{1/4} \cdot \exp\left\{ - \mathrm{i}/h\left[\int^x \sqrt{2(E - v(x))}\, \mathrm{d}x + Et\right]\right\}.$$

Soient $f_1(x)$ et $f_2(x) \in \tilde{L}_2$, alors $S^{-1}(t) f_1(x)$ et $S^{-1}(x) f_2(x) \in L_2$, et, en outre

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) f_2(x) S^*(t) f_1(x)^* \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(E - v(x))}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)^* f_2(x)\, \mathrm{d}x$$

Il résulte de là qu'en effet l'opérateur $S(t)$ applique bien unitairement L_2 sur $\tilde{L}_2$.

Dans la nouvelle représentation l'opérateur $\hat{H}$ est de la forme

$$\tilde{H} = S(t)\hat{H}S^{-1}(t) = E - \mathrm{i}h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{h^2}{2}\sqrt[4]{2(E - v(x))}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt[4]{2(E - v(x))}}$$

et est un opérateur dans $\tilde{L}_2$.

Ainsi, nous voyons que lorsque $h \to 0$, en première approximation l'opérateur $\tilde{H}$ dans la représentation « quasi-classique » devient l'énergie totale E. En seconde approximation, l'opérateur $\tilde{H}$ devient un opérateur auto-adjoint du système dynamique classique.

Dans la représentation quasi-classique, l'opérateur unitaire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\hat{H}t}$ est de la forme

$$\begin{aligned} S(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\hat{H}t}S^{-1}(0) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\{S(t)\hat{H}S^{-1}(t) - E\}t} \\ &= \exp\left[\mathrm{i}\left(- \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{h}{2}\sqrt[4]{2E - v(x)}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{\sqrt[4]{2(E - v(x))}}\right]t \end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème 4.4 du ch. 4 :

$$S(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}\hat{H}t}S^{-1}(0) \to \mathrm{e}^{t\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau} = Q_t$$

Ainsi l'opérateur unitaire de Schrödinger converge, dans la représentation quasi-classique, vers l'opérateur unitaire du système dynamique. En outre, dans la représentation quasi-classique, la solution de l'équation

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v(x)\psi$$

peut être représentée en vertu du théorème 3.6 comme une série asymptotique en puissance de h.

4. La solution de l'équation de Schrödinger

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi + v(x)\psi \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

obtenue au § 1 [voir (1.12)] peut s'obtenir à l'aide de la théorie des perturbations, si on passe à la représentation quasi-classique.

Supposons qu'il existe une famille à n paramètres de solutions $x(\alpha, t)$ $(\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ des équations de Newton

$$\mu \ddot{x}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \mathrm{i} = (1, \dots, n).$$

Après le changement

$$\psi = \varphi \sqrt{Y}\, \mathrm{e}^{ih^{-1}S}$$

où Y est le jacobien des α par rapport aux x $(Y = \partial(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/(\partial(x_1, \dots, x_n))$ et S une fonction qui joue en mécanique le rôle de l'action, l'équation de Schrödinger devient

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad} \varphi = \frac{ih}{2\mu} Y^{-1/2} \Delta(Y^{1/2}\varphi)$$

Ici, le terme de gauche est la dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire classique. Pour $h = 0$ la solution de l'équation sera constante le long de la trajectoire classique. Dans cette représentation, l'opérateur $\exp(\mathrm{i}h^{-1}\hat{H}t)$ devient lui aussi pour $h \to 0$ l'opérateur de déplacement le long de la trajectoire classique. Cela résulte du théorème 3.2, partie I.

Si on passe aux variables α et t, alors

$$\varphi(x, t) = \varphi(x(\alpha, t), t) = \tilde{\varphi}(\alpha, t)$$

et l'équation prend la forme

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{ih}{2\mu} Y^{-1/2} \Delta_\alpha(Y^{1/2}\tilde{\varphi}(\alpha, t)) \tag{4.3}$$

où Δ_α est le laplacien dans les coordonnées α. La transformation envoyant $\psi(x, t)$ en $\tilde{\varphi}(\alpha, t)$ est unitaire car

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\varphi}(\alpha, t)|^2\, \mathrm{d}\alpha.$$

Elle réalise le passage de la représentation de configuration à la représentation quasi-classique. Nous pouvons appliquer la théorie des perturbations à l'équation (4.3).

Une telle représentation n'est généralement possible que localement (pour t suffisamment petit) et sous la condition que

$$\left|\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant C$$

Nous étudierons en détail cette représentation quasi-classique locale dans le chapitre 2 de cette partie.

Des résultats du chapitre 3, il découlera que, dans le cas général, le rôle de l'opérateur unitaire appliquant l'espace $\tilde{L}_2$ des fonctions de α, données sur une variété lagrangienne Γ, dans l'espace L_2 des fonctions de x, est joué par l'opérateur canonique qui est introduit dans ce chapitre. Ainsi, à l'aide de l'opérateur canonique, on obtient une représentation dans laquelle le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique se fait globalement, quel que soit le temps t.

Dans le cas de l'équation générale (1.16), nous appellerons caractéristique une représentation dans laquelle on obtient la solution sous forme d'une série asymptotique en puissances de R_z.

CHAPITRE 2

L'OPÉRATEUR CANONIQUE

§ 1 LE CAS A UNE DIMENSION

Nous commencerons par présenter dans le cas à une dimension l'essentiel des idées. Notre plan sera le suivant :

Pour obtenir une classe K de formules asymptotiques, uniformes en x sur tout l'axe des x, nous devrons d'abord construire un opérateur, dépendant du paramètre h, qui transforme l'espace des fonctions sur une courbe donnée Γ de l'espace de phase (p,q) dans l'espace des fonctions sur la droite (q).

Pour construire cet opérateur, appelé opérateur canonique, on introduit d'abord la notion d'indice d'un arc sur la courbe, et l'on recouvre la courbe par des intervalles qui se projettent biunivoquement (*) sur l'un des axes de coordonnées (p ou q).

L'opérateur canonique est alors défini localement pour chacun de ces intervalles ; puis, au moyen d'une partition de l'unité, on construit l'opérateur pour toute la courbe Γ. En général, l'opérateur canonique dépend du recouvrement choisi de la courbe Γ par les intervalles et de la partition de l'unité. Mais on peut montrer que, si la courbe n'est pas fermée, cette dépendance ne se manifeste que par des termes petits, du premier ordre par rapport au paramètre h. Il en est de même aussi pour une courbe fermée à condition que l'aire de la courbe satisfasse une certaine relation qui s'appelle condition de quantification de Bohr dans la littérature physique. A l'aide de l'opérateur canonique, nous donnerons une expression connue de l'asymptotique de la fonction propre de l'équation stationnaire de Schrödinger ainsi que de l'asymptotique de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

Les théorèmes présentés dans ce paragraphe seront des cas particuliers de théorèmes plus généraux se rapportant au cas d'un nombre quelconque de dimensions. Ces théorèmes sont formulés dans §§ 2-4.

(*) C'est-à-dire que la projection est un difféomorphisme (application différentiable biunivoque de jacobien non dégénéré).

1. Notions topologiques

Considérons une courbe lisse Γ bornée et ne se recoupant pas (non nécessairement fermée) dans le plan de phase (*), et définie par les équations $q = q(\alpha)$, $p = p(\alpha)$. Comme paramètre α, on peut prendre, par exemple, la longueur d'arc, mesurée à partir d'un point fixe.

Un point de la courbe Γ, où l'on a $dq/d\alpha \neq 0$ est dit régulier, ou, plus précisément, non-singulier par rapport à la projection de Γ sur l'axe (q) parallèlement à l'axe (p).

Les autres points sont dits singuliers. Supposons d'abord que l'ensemble M des points singuliers soit fini et que les points singuliers soient tels que dq/dp change de signe le long de Γ à leurs traversées. Faisons correspondre à chacun de ces points $\alpha \in \Gamma$ un vecteur tangent unité $\bar{e}_\alpha$ dans la direction de croissance de dq/dp (i.e. du côté des valeurs positives de dq/dp). Définissons alors l'indice de l'arc $l[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma$ d'origine le point régulier α^1 et d'extrémité le point régulier α^2 de la manière suivante : chaque fois que l'arc traverse le point singulier α dans la direction du vecteur e_α, alors on ajoute 1 à l'indice; sinon, on retranche 1 (fig. 5). L'indice de l'arc $l[\alpha^1, \alpha^2]$ est noté Ind $l[\alpha^1, \alpha^2]$.

Nous avons ainsi défini l'indice d'un arc sous certaines restrictions imposées à l'ensemble M et aux points α^1, α^2, restrictions qui sont remplies quand la courbe et l'arc sont « en position générale » [62], [1].

Définissons maintenant l'indice d'un arc quelconque sur une courbe quelconque Γ, en la mettant (ainsi que l'arc) en position générale par une petite rotation des axes dans le sens positif.

On a l'importante proposition suivante dont la démonstration est presque évidente.

« *L'indice d'un arc fermé (cycle), parcouru dans le sens positif est un invariant par difféomorphisme.* »

Considérons le système hamiltonien

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q} \tag{1.1}$$

où $H(q,p,t)$ est une fonction suffisamment différentiable.

Supposons que $\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ soit une courbe Γ, lisse et ne se recoupant pas, dans le plan de phase, et soit

$$Q(\alpha, t) = q(t), \qquad P(\alpha, t) = p(t)$$

la solution du système (1.1) avec les conditions initiales $(q^0(\alpha), p^0(\alpha))$ situés sur notre courbe.

(*) Plus précisément, une variété lisse à une dimension (éventuellement ouverte).

Les fonctions $Q(\alpha, t), P(\alpha, t)$ définissent une application $\mathscr{U}_t$ de la courbe Γ en une certaine courbe $\Gamma_t : \mathscr{U}_t \Gamma = \Gamma_t$.

Tout arc $l[\alpha^1, \alpha^2]$ se transforme alors en un certain arc

$$\mathscr{U}_t l[\alpha^1, \alpha^2] = l_t[\alpha^1, \alpha^2] \subset \Gamma_t .$$

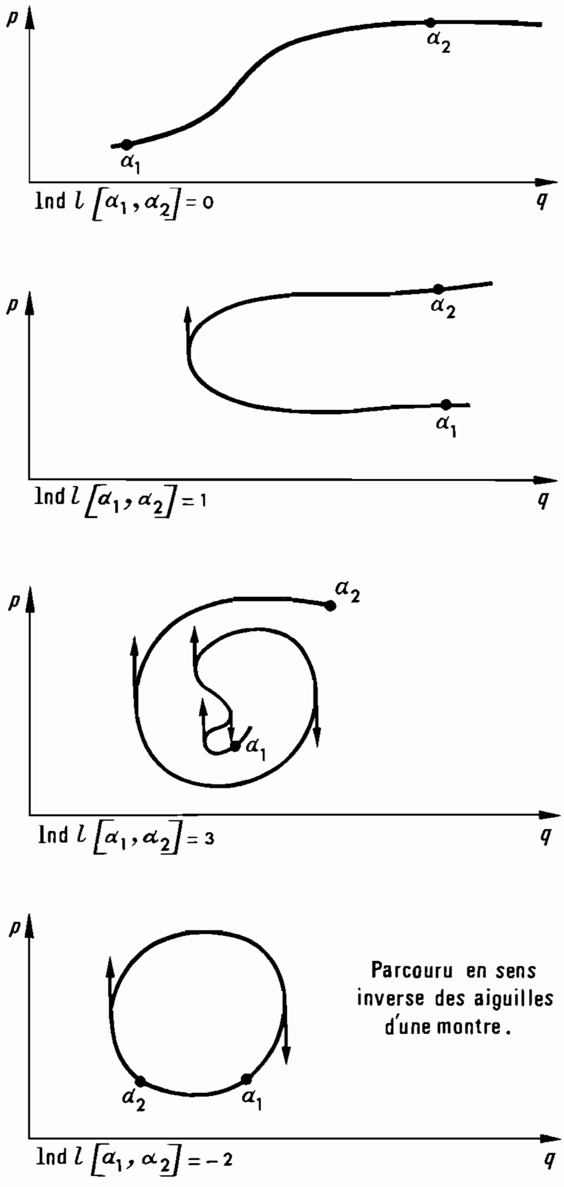


Fig. 5.

Problème. *Comment s'exprime* $\operatorname{Ind} l_t[\alpha_1, \alpha_2]$ *au moyen de* $\operatorname{Ind} l[\alpha_1, \alpha_2]$?

Dans le but de répondre à cette question, rappelons certaines définitions se rapportant aux solutions du système (1.1).

(1) L'ensemble des points $Q(\alpha^0, \tau)$ pour τ variant entre 0 et t est appelé trajectoire et noté $Q(\alpha^0; 0, t)$.

(2) Le point $Q(\alpha^0, \tau)$ de la trajectoire $Q(\alpha^0; 0, t)$ est dit focal si

$$\frac{\partial Q(\alpha^0; \tau)}{\partial \alpha^0} = 0$$

(3) Soit $\partial^2 H/\partial p^2 > 0$. On appelle indice de la trajectoire $Q(\alpha^0; 0, t)$, le nombre de points focaux sur le demi-intervalle $0 < \tau \leqslant t$ (aussi appelé indice de Morse [43], [53]).

On a la relation suivante qui résout la question de la variation de l'indice d'un arc sous l'effet de l'application $\mathscr{U}_t$

$$\operatorname{Ind} l[\alpha^1, \alpha^2] + \operatorname{Ind} Q(\alpha^2; 0, t) = \operatorname{Ind} l_t[\alpha^1, \alpha^2] + \operatorname{Ind} Q(\alpha^1; 0, t) \quad (1.2)$$

Lorsque $H = p^2/2$, cette relation a une interprétation géométrique simple. Il est suffisant de considérer un temps t petit et le voisinage d'un point singulier (i.e. d'un point appartenant à la sous-variété M).

Considérons les deux cas de points singuliers correspondant aux deux orientations du vecteur $\bar{e}_\alpha$ (cf. fig. 6).

Sur la figure 6*a*, l'arc $p = p^0$ traverse le point focal. Aussi l'indice de l'arc $Q(\alpha, \tau) = p^0\tau + q^0, 0 \leqslant \tau \leqslant t$, est égal à 1.

Comme on le voit sur la figure, l'indice de l'arc l_t sur Γ_t est aussi égal à 1. Posons $H = p^2/2 + v(q)$, où $v(q)$ est une fonction deux fois différentiable. Alors, pour t suffisamment petit on a

$$Q(\alpha, t) \cong p^0(\alpha)t + q^0(\alpha)$$
$$P(\alpha, t) \cong p^0(\alpha) - v'(q^0(\alpha))t$$

Effectuons d'abord la déformation

$$p_1 = p^0(\alpha), \quad q_1 = p^0(\alpha)\tau + q^0(\alpha) \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t$$

Soit Γ_t' l'image de la courbe Γ par cette déformation.

Ensuite, laissant $q = q_1$ constant, effectuons la déformation

$$p = p^0(\alpha) - v'(q^0(\alpha))\tau \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t.$$

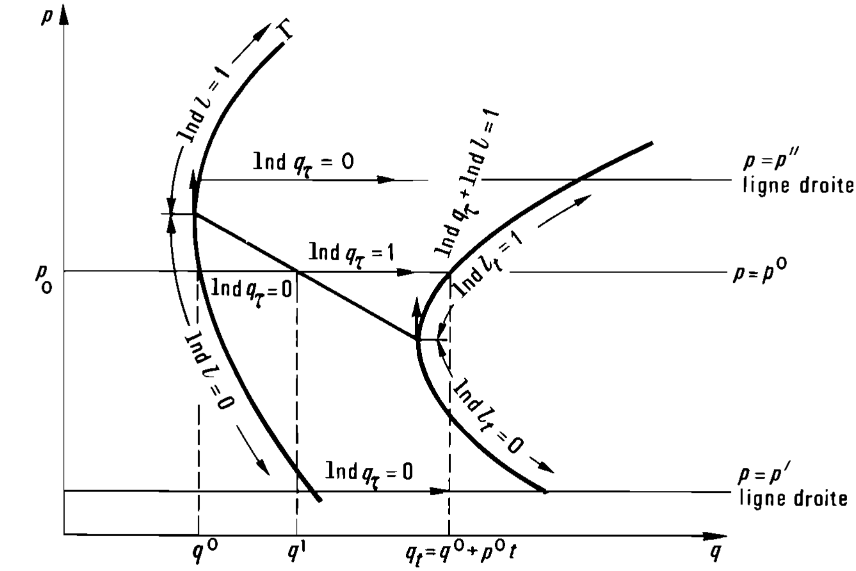
Ainsi Γ_t' se transforme en Γ_t.

Mais cette dernière transformation ne change évidemment pas la relation (1.2) entre les indices.

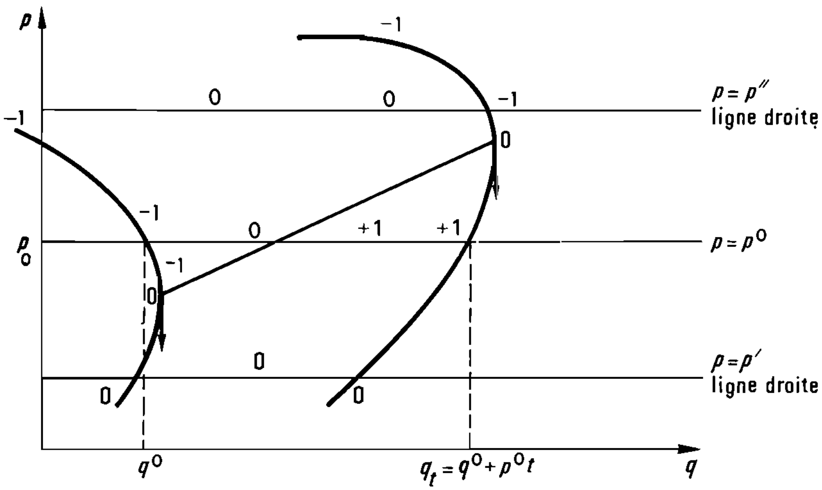
Ce genre de raisonnement s'étend au cas général.

2. L'opérateur canonique

Considérons l'espace $L_2[\Gamma, H]$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $d\alpha$ sur la courbe Γ, à valeurs dans l'espace d'Hilbert H, et l'espace $L_2[R^1, H]$ des fonctions de x de carré intégrable sur la droite $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$, à valeurs dans l'espace d'Hilbert H.



(a) $\operatorname{Ind} q_t + \operatorname{Ind} l = \operatorname{Ind} l_t$



(b) $\operatorname{Ind} q_t + \operatorname{Ind} l = \operatorname{Ind} l_t$ $+1$, $0, -1$ sont les indices des arcs l, l_t, q_τ.

Fig. 6.

Soit A un opérateur auto-adjoint non borné et défini positif, tel que ∞ soit point limite du spectre de l'opérateur A. Nous ne nous intéresserons qu'aux valeurs des fonctions de $L_2[\Gamma, H]$ dans l'espace quotient

$$S = L_2[\Gamma, H]/D(A) \cap D\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right)$$

et nous considérerons des opérateurs linéaires dont le domaine de définition est dans S.

Considérons d'abord le cas où la courbe Γ se projette biunivoquement sur l'axe q. De l'équation $q = q(\alpha)$ on tire $\alpha = \alpha(q)$. Soit $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ l'opérateur linéaire agissant sur les fonctions indéfiniment différentiables à support compact, $\varphi(\alpha) \in L_2[\Gamma, H]$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi)(x) &= K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) \\ &= \left\{ \mathrm{e}^{i\gamma} \left|\frac{\mathrm{d}q(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(q)}^{-1/2} \exp\left[\mathrm{i}A\int_{\alpha^0}^{\alpha(q)} p\,\mathrm{d}q\right]\varphi(\alpha(q))\right\}_{q=x} \qquad (1.3)\end{aligned}$$

où γ est une constante indépendante de α et α_0 un point de Γ.

Supposons maintenant que la courbe Γ ne se projette pas biunivoqument sur la droite (q) mais qu'elle le fasse sur la droite (p). Alors de $p = p(\alpha)$, il résulte $\alpha = \alpha(p)$. Dans ce cas on note $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ l'opérateur qui agit sur $\varphi(\alpha)$ de la façon suivante

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{i(\gamma-\pi/4)}\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{ipxA}\left|\frac{\mathrm{d}p(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha(p)}^{-1/2} \exp\left[-\mathrm{i}A\int_{\alpha^0}^{\alpha(p)} q\,\mathrm{d}p\right]\varphi(\alpha(p))\,\mathrm{d}p \qquad (1.4)$$

avec γ une certaine constante et α^0 un point de Γ où $\mathrm{d}q(\alpha)/\mathrm{d}\alpha = 0$. L'intégrale est étendue à l'intervalle sur lequel $\varphi(\alpha(p))$ est différent de 0. Si x n'appartient pas au segment d de l'axe (q) sur lequel se projette le support de $\varphi(\alpha)$ alors

$$(K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi)(x) \underset{S}{=} 0 \qquad (1.41)$$

Considérons maintenant une courbe Γ quelconque du type décrit plus haut. Recouvrons la courbe Γ par un nombre fini d'intervalles ouverts Ω^i tels que dans chaque intervalle Ω^i soit satisfaite l'une des inégalités : ou $\mathrm{d}q(\alpha)/\mathrm{d}\alpha \neq 0$ pour tous les points de l'intervalle, ou $\mathrm{d}p(\alpha)/\mathrm{d}\alpha \neq 0$ pour tous ces points, mais $\mathrm{d}q(\alpha)/\mathrm{d}\alpha$ s'annule en un certain point. Les intervalles du premier type sont dits réguliers, ceux du second type singuliers.

Dans un intervalle régulier, on prend comme coordonnée locale $q(\alpha)$; dans un intervalle singulier, on prend $p(\alpha)$.

Notons par $\Omega_0^{j'}$ un intervalle régulier $\Omega^{j'}$ et sa coordonnée locale $q(\alpha)$ [carte locale régulière] et par Ω_1^j un intervalle singulier Ω^j, de coordonnée $p(\alpha)$ [carte locale singulière].

Soit $\Omega_1^j, j = j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots,$ l'ensemble des cartes singulières, et

$$\Omega_0^j, \qquad j = j_1, j_2 \ldots$$

l'ensemble des cartes régulières.

Un des points α^j, appartenant à l'intervalle singulier Ω^j, dans lequel $dq(\alpha)/d\alpha = 0$, sera appelé centre de la carte singulière (*).

Pour une carte régulière $\Omega_0^{j'}$, on prendra un point quelconque $\alpha^{j'}$ de la carte. L'ensemble des cartes $\Omega_1^j, \Omega_0^{j'}$ constitue un atlas $\mathscr{X}$ de la courbe.

Nous associerons un nombre réel γ^0 au centre d'une des cartes de l'atlas $\mathscr{X}$. Ce centre sera dit initial et noté α^0.

Supposons que le support R de la fonction $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ soit contenu dans l'intervalle Ω^j. On définit l'action de l'opérateur canonique sur la fonction $\varphi(\alpha)$ par la formule (1.3) si Ω^j est régulier, par la formule (1.4) si Ω^j est singulier, en prenant dans ces formules $\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^j]$, où γ^0 est un nombre indépendant de j ; α^j est le centre de la carte, et $l[\alpha^0, \alpha^j]$ est un certain arc de α^0 à α^j.

Dans le cas général, on peut définir l'opérateur canonique au moyen d'une partition de l'unité adaptée aux cartes locales.

Soit $e^i(\alpha)$ $(i = 1, \ldots, N)$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{\Omega^i\}$ du compact R. Ceci signifie que $e^i(\alpha)$ satisfait les conditions

(i) $e^i(\alpha) \in C^\infty$ et est nul en dehors de Ω^i

(ii) $\sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha) = 1 \quad \forall\, \alpha \in R.$

Pour une fonction à support compact $\varphi(\alpha)$ on a

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha)\, \varphi(\alpha).$$

Le support de chaque terme de la somme appartient à une seule carte locale, de sorte que sur chacune des fonctions $e^i(\alpha)\, \varphi(\alpha)$, $(i = 1, \ldots, N)$, l'opérateur canonique est déjà défini. Par linéarité, et en tenant compte de (1.4.1) on obtient la forme générale de l'opérateur canonique, agissant sur la fonction à support compact $\varphi(\alpha)$.

Donnons cette forme.

Soit d'abord $j(x)$ l'ensemble des indices de toutes les cartes de l'atlas $\mathscr{X}$ contenant l'ensemble des points d'intersection de la droite $q = x$ et de l'intervalle $R \subset \Gamma$. L'intervalle R est recouvert par un nombre fini de cartes de l'atlas $\mathscr{X} : \Omega^1, \ldots, \Omega^N$.

(*) S'il y en a plusieurs, on peut prendre n'importe lequel.

Dans ce cas général, l'opérateur canonique $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ est alors de la forme :

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) = e^{i\gamma} \sum_{j,\,j' \in j(x)} \left[\exp\left\{ - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0,\alpha^{j'}] \right\} e^{j'}(\alpha(q)) \right.$$

$$\left. \cdot \left| \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha(q)] \right|^{-1/2} \exp\left\{ \mathrm{i}A \int_{l[\alpha^0,\,\alpha(q)]} p\,\mathrm{d}q \right\} \varphi(\alpha(q)) \right]_{q=x}$$

$$+ \left[\exp\left\{ - i\frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^j] \right\} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2\pi \mathrm{i}}} \int \mathrm{e}^{ipqA}\, e^j(\alpha(p)) \left| \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\alpha}[\alpha(p)] \right|_{\alpha=\alpha(p)}^{-1/2} \right.$$

$$\left. \exp\left\{ - \mathrm{i}A \int_{l[\alpha^0,\,\alpha(p)]} q\,\mathrm{d}p \right\} \varphi(\alpha(p))\,\mathrm{d}p \right]_{q=x} \qquad (1.5)$$

où $l[\alpha^0,\alpha^k]$ est un arc entre α^0 et α^k.

Remarque. Lorsque Γ est une courbe non bornée et que $A = 1/h$, en changeant dans la formule (1.5) $\varphi(\alpha)$ par $\xi(\alpha,h)\varphi(\alpha)$ où $\xi(\alpha,h)$ est une fonction régularisante, égale à 1 à l'ordre $O(h^\infty)$ près dans tout domaine borné et tendant suffisamment vite vers 0 quand $\alpha \to \infty$ (par exemple :

$$\xi(\alpha,h) = \exp\{ - \alpha^2 \exp[- 1/h] \},$$

nous obtenons que les séries dans (1.5) convergent pour toute fonction bornée $\varphi(\alpha)$. Il n'est pas difficile de se convaincre que pour l'opérateur canonique ainsi défini tous les résultats des théorèmes formulés plus tard resteront valables sous certaines restrictions dans n'importe quel domaine borné.

La même affirmation sera valable dans le cas à plusieurs dimensions.

Explication de la fig. 7

La courbe Γ de la figure 7 est le cercle :

$$p = a\cos\alpha \qquad q = a\sin\alpha, \qquad - 5/2\pi \leqslant \alpha \leqslant - \pi/2,$$

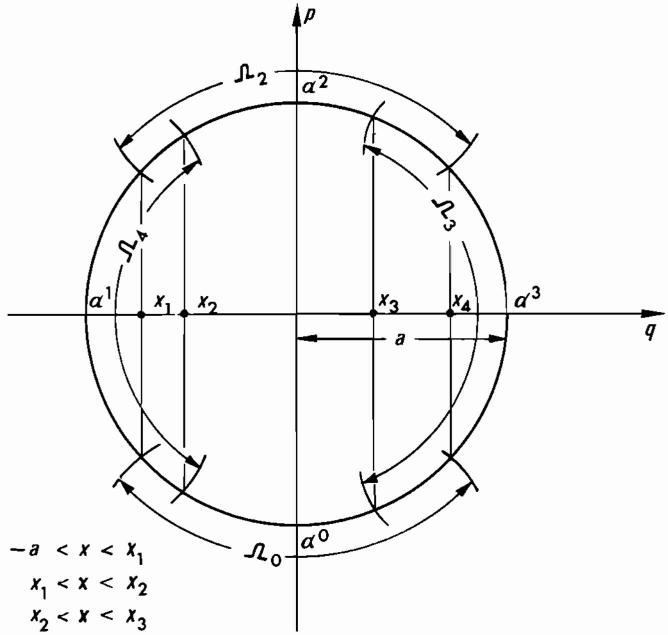
les valeurs extrêmes de α étant identifiées. De plus $\varphi(\alpha) \equiv 1$.

Soient $\alpha^0 = - \pi/2, \gamma = 0$ et $l[\alpha^0,\alpha]$ un arc de cercle, inférieur à 2π, orienté dans le sens des aiguilles d'une montre, reliant le point $- \pi/2$ au point α. Introduisons des cartes Ω_i comme indiqué sur la figure 7*a*. Les points centraux de ces cartes seront :

$$\alpha^0 = - \frac{\pi}{2}, \alpha^1 = - \pi, \alpha^2 = - \frac{3\pi}{2}, \alpha^3 = - 2\pi.$$

Par définition

$$\operatorname{Ind} l[\alpha^0,\alpha^1] = 0, \qquad \operatorname{Ind} l[\alpha^0,\alpha^2] = 1, \qquad \operatorname{Ind} l[\alpha^0,\alpha^3] = 1.$$

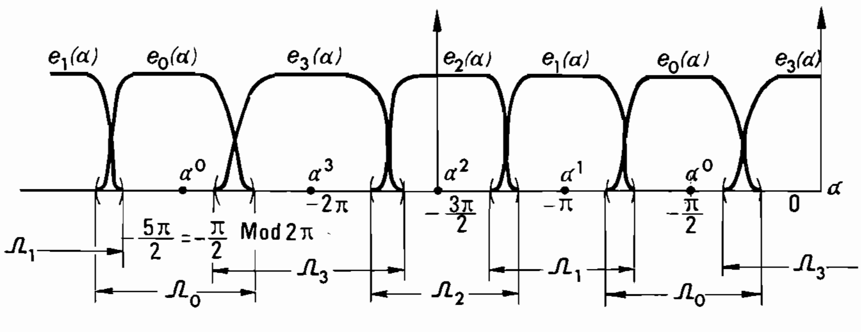


$$j(x) = \begin{cases} 1 & -a < x < x_1 \\ 0,1,2 & x_1 < x < x_2 \\ 0,2 & x_2 < x < x_3 \\ 0,2,3 & x_3 < x < x_4 \\ 3 & x_4 < x < a \end{cases}$$

$\varphi(\alpha) = 1$, $R = \Gamma$, $q = a\cos\alpha$, $p = a \sin\alpha$

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ sont les cartes.

Fig. 7 *a*.



$$\sum_{i=0}^{3} e_i(\alpha) \equiv 1 \quad , \quad e_i(\alpha) \in C^\infty \quad , \quad e_i(\alpha) \equiv 0 \text{ pour } \alpha \notin \Omega_i$$

Fig. 7 *b*.

La partition de l'unité $e_i(\alpha)\,(i = 1, \ldots, 4)$ associée à ce recouvrement est représentée sur la figure 7*b*. Soit $x \in [x_2, x_3]$. L'opérateur canonique, appliqué sur 1, est, dans le cas présent, égal à

$$K^{0,\,-\pi/2}_{p^2+q^2=a^2}1 = (a^2 - x^2)^{-1/4}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{h}\left[-\frac{a^2}{2}\arccos\frac{|x|}{a}\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{h}\left[\frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{\pi a^2}{4}\right]\right\}$$

$$+\ \mathrm{i}(a^2 - x^2)^{-1/4}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{h}\left[\frac{a^2}{2}\arccos\frac{|x|}{a} - \frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{\pi a^2}{4}\right\}\right. \quad (1.5\ bis)$$

Cette expression coïncide avec l'asymptotique quasi classique de l'oscillateur (cas (1.8) lorsque $v(x) = x^2$).

3. Invariance de l'opérateur canonique

Supposons la courbe Γ non fermée. Alors l'opérateur canonique $K^{\gamma,\,\alpha^0}_{A,\,\Gamma}$ ne dépend pas de la forme de l'atlas et de la partition de l'unité, c'est-à-dire les expressions $K^{\gamma,\,\alpha^0}_{A,\,\Gamma}\varphi(\alpha)$, pour les différents atlas et partitions de l'unité ne diffèrent que par des fonctions de la forme

$$K^{\gamma,\,\alpha^0}_{A,\,\Gamma}\mathscr{F}(\alpha),\ \text{où}\ \mathscr{F}(\alpha) \in D(A) \cap D(\partial/\partial\alpha).$$

Il est entendu que dans une nouvelle partition le point α^0 reste le point initial de l'atlas, c'est-à-dire reste le centre d'une carte.

Si le point $\alpha = \alpha^0$ ne reste pas, dans une nouvelle partition, le centre d'une carte mais appartient à une carte de centre α^0_1, alors, on doit prendre comme point initial du nouvel atlas n'importe quel autre point, par exemple α^0_1. L'ancien opérateur canonique (pour cette nouvelle subdivision) est alors égal (dans S) à $K^{\tilde{\gamma},\,\alpha^0}_{A,\,\Gamma}$, où

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^0_1] + A\int_{l[\alpha^0,\,\alpha^1]} p\,\mathrm{d}q$$

Si la courbe Γ est fermée, l'opérateur canonique $K^{\gamma,\,\alpha^0}_{A,\,\Gamma}$ ne dépend pas de la partition de l'unité, mais dépend, en général du choix de l'arc $l[\alpha^0, \alpha^k]$ allant du point initial au centre de la carte.

Dans ce cas, afin que l'opérateur canonique $K^{\gamma,\,\alpha^0}_{A,\,\Gamma}$ ne dépende pas du choix de l'atlas canonique et des arcs $l[\alpha^0, \alpha^k]$, il est nécessaire et suffisant que les points du spectre de l'opérateur A vérifient les relations

$$\lambda = \frac{2\pi(n + 1/2)}{\oint p\,\mathrm{d}q} + O(1/\lambda) \qquad (1.6)$$

Notons que, si on pose $\lambda = 1/h$, cette expression coïncide formellement avec la condition de quantification de Bohr, bien connue en physique.

La remarque relative au point initial d'un atlas reste valable aussi pour le cas d'une courbe fermée.

La condition (1.6) et, par conséquent, aussi l'invariance de l'opérateur canonique, se conservent pour les transformations qui conservent les aires (transformations canoniques).

4. L'asymptotique quasi-classique

1. Considérons sur la droite le problème aux valeurs propres pour l'équation

$$y'' + \nu^2 Q(x) y = 0, \qquad (Q(x) = \lambda - v(x)) \tag{1.7}$$

où $Q(x) \in C^\infty, Q(\pm \infty) = -\infty$ en imposant la condition

$$\int y^2 \, \mathrm{d}x < \infty \tag{1.7a}$$

Considérons dans le plan de phase (p, q) la courbe $\frac{p^2}{2} - Q(q) = 0$. On sait que les valeurs propres $\nu = \nu_n$ du problème (1.7a)-(1.7) satisferont la condition (1.6) ([33], [76]).

Considérons l'équation de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{2\mu}\psi'' + v(x)\psi = \lambda\psi, \qquad \int |\psi|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \tag{1.8}$$

Pour un $v(x)$ quelconque, $v(x) \in C^\infty$, tel que $v(\pm \infty) = \infty$, on a la proposition suivante :

Soit $\Gamma_n = \{ q_n(\alpha), p_n(\alpha) \}$ une suite de courbes fermées, satisfaisant les équations

$$\mu \frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}\alpha} = p_n(\alpha), \qquad \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\partial v(q_n)}{\partial q_n},$$

$$\frac{p_n^2}{2\mu} + v(q_n) = E_n,$$

où $\{ E_n \} \subset [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$, est l'ensemble dépendant de h, défini par les conditions

$$\oint p \, \mathrm{d}q = 2\pi(n + 1/2) h$$

Il existe un ensemble, qui dépend de h, de valeurs propres $\lambda = \lambda_n$ de l'équation (1.8) *considérée dans l'espace L_2 de la droite tel que*

$$\lambda_n - E_n = O(h^2)$$

$$\| \psi_n - K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma_n} 1 \| = O(h)$$

où ψ_n est la fonction propre correspondant à λ_n. L'asymptotique décrite ici se réduit à la forme ordinaire à l'aide des formules données en [79,1].

L'écriture que nous avons proposée pour le premier terme de l'asymptotique de la fonction propre est, dans un sens précis, invariante par passage à la p-représentation.

2. Relativement à la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger (1.6) du chapitre I, on a la proposition suivante :

Soient $v(x,t) \in C^3$, $\varphi(\alpha) \in C^2$. La solution $\psi(x,t)$ de l'équation (1.6), *chapitre I satisfaisant les conditions initiales*

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\,\varphi(\alpha), \qquad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\} \tag{1.9}$$

a la forme

$$\begin{gathered}\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t}\,\varphi(\alpha) + Z_h(x,t)\\ \Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}\end{gathered} \tag{1.10}$$

où $Q(\alpha, t)$, $P(\alpha, t)$ sont les solutions du problème de Cauchy pour les équations d'Hamilton

$$\mu\dot{Q}(\alpha,t) = P(\alpha,t), \qquad Q(\alpha,0) = q^0(\alpha),$$

$$\dot{P}(\alpha,t) = -\frac{\partial v(Q,t)}{\partial Q}, \qquad P(\alpha,0) = p^0(\alpha),$$

$$\gamma = \frac{1}{h}\int_0^t \left\{\frac{\mu\dot{Q}^2(\alpha^0,\tau)}{2} - v[Q(\alpha^0,\tau)]\right\}\mathrm{d}\tau - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q(\alpha^0;0,t),$$

$$\int |Z_h(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{1.11}$$

On voit ainsi, qu'à tout instant t, les solutions de l'équation (1.6) du chapitre I, appartiennent, à des fonctions du type $Z_h(x,t)$ près, à une même classe de fonctions de la forme $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\varphi(\alpha)$, où γ et Γ sont variables. Cela signifie que la condition d'invariance est satisfaite à l'intérieur d'une classe K (cf. § 2, ch. 1).

Le principe de correspondance est également valable pour les solutions de cette forme.

3. Conséquences

Supposons que le support R de la fonction $\varphi(\alpha)$ soit assez petit : $R = \{\alpha_0 - \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 + \varepsilon\}$, et que toutes les conditions de la proposition précédente soient remplies. Alors, si l'image de R sur Γ_t, notée R_t, est constituée de points réguliers,

$$\int_{\alpha(x)\in R_t} |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_R \varphi^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \tag{1.12}$$

et tend vers 0 en dehors de ce domaine. Si R_t est contenu entièrement dans une carte singulière, alors

$$\int_{\alpha(p)\in R} |\bar{\psi}(p,t)|^2 \, \mathrm{d}p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_R \varphi^2(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

et tend vers 0 hors de ce domaine.

Cela signifie que l'intégrale de $|\psi|^2$ soit par rapport à x, soit par rapport à p, se comporte quand $h \to 0$ comme la probabilité classique $\int \varphi^2(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$, devenant à la limite constante le long des trajectoires classiques. De manière analogue, on peut montrer que toutes les grandeurs quanto-mécaniques se transforment à la limite, lorsque $h \to 0$, en grandeurs classiques, c'est-à-dire que le principe de correspondance est satisfait. Ainsi, toutes les conditions exigées sur la classe K dans le pt. 6, § 2, ch. 1, sont satisfaites pour $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma}\varphi(\alpha)$

On obtient de cette façon, en n'importe quel point (x,t) le passage à la mécanique classique ; ce qui signifie que le passage à la limite est aussi valable aux points focaux (points de rebroussement); seulement en ces points, il faut considérer la fonction ψ dans la représentation des (p). Remarquons que dans la littérature physique (par exemple, dans le livre bien connu de Landau et Lifschitz, *Mécanique quantique*), on affirme qu'aux points de rebroussement la condition quasi-classique est violée et que, près de ces points, quand $h \to 0$, il n'y a pas de passage à la mécanique classique. Une affirmation analogue est faite en physique à propos du passage, au voisinage d'un foyer, de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique.

En fait, comme nous l'avons vu (et on s'en persuadera plus encore dans le cas multidimensionnel) le passage à la mécanique classique (et de même à l'optique géométrique) est réalisé en un point quelconque. Pour s'en convaincre, il faut seulement passer à la représentation adéquate de la fonction ψ.

5. **Les séries asymptotiques**

Dans la mesure où il s'agira toujours dans ce qui suit de séries asymptotiques, nous conviendrons d'utiliser le signe d'égalité en un sens « asymptotique » que nous allons définir maintenant.

Nous dirons qu'une fonction $\mathscr{F}(x,t)$ à valeurs dans H est équivalente à 0 si, quels que soient les entiers N_1 et N_2 et N_3, la fonction

$$A^{N_1-N_2-N_3}\frac{\partial^{N_2+N_3}\mathscr{F}(x,\tau)}{\partial x^{N_2}\,\partial\tau^{N_3}}$$

est bornée en norme dans H, uniformément pour

$$x \in R^n, \qquad \tau \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon], \qquad \varepsilon > 0$$

Nous identifierons entre elles les fonctions dont la différence est équivalente à 0.

Ainsi les fonctions de x et t sont factorisées par le sous-espace des fonctions ayant un nombre infini de dérivées bornées et appartenant à $D(A^\infty)$.

Nous considérerons également des fonctions à valeurs dans des espaces de Banach ou dans des espaces dénombrablement normés.

Dans ce cas aussi, il y a la factorisation, i.e. les fonctions appartenant à $D(A^N)$, quel que soit N, et indéfiniment différentiables, sont considérées comme équivalentes à 0.

Rappelons que toutes les égalités qui dans ce qui suit seront écrites pour des fonctions de x à valeurs dans un espace de Banach ou dans un espace dénombrablement normé, ne sont valables qu'à des fonctions équivalentes à 0 près.

D'autre part, par : *la fonction $f(x,t,h)$ est N-fois différentiable,* nous voulons dire que ses dérivées en x et t jusqu'à l'ordre N *sont bornées* pour $h \to 0$.

Si $f(x,t,h)$ est une fonction à valeurs dans un espace de Banach (ou dénombrablement normé), dire qu'elle est N-fois différentiable signifie que ses N-premières dérivées sont bornées en norme dans cet espace (ou, respectivement, toutes les normes de l'espace dénombrablement normé sont bornées) uniformément en h, pour $h \to 0$. Considérons une fonction de $\alpha \in \Gamma$ et de h, $e^i(\alpha,h)$, qui appartient à $C^\infty(\alpha,h)$ au voisinage du point $h = 0$. Autrement dit :

$$\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^i(\alpha,h) = \sum_{j=0}^{\infty} h^j \frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} e^i_j(\alpha) + O(h^\infty) \tag{1.13}$$

Le terme $O(h^\infty)$ signifie que les séries écrites sont asymptotiques pour $h \to 0$. Supposons en outre que $e^i(\alpha,0) = e^i(\alpha)$, $i = 1,\dots,N$ où $e^i(\alpha)$ appartient à la partition de l'unité de l'atlas $\mathscr{X}$. Substituons maintenant dans l'expression $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\varphi(\alpha)$ les fonctions $e^i(\alpha,h)$ aux fonctions $e^i(\alpha)$. On obtient une famille d'opérateurs dépendant de $e^i(\alpha,h)$. Nous les désignerons par

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h},\ \tilde{K}^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h},\ \tilde{\tilde{K}}^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h},\dots$$

Ainsi l'écriture $K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)$ ne détermine pas la forme de $e^i(\alpha,h)$ pour $h \neq 0$.

Remarquons que deux termes de la famille indiquée ne sont égaux, en général, qu'à des termes d'ordre $O(h)$ près :

$$\tilde{K}^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\,\varphi(\alpha) = \tilde{\tilde{K}}^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\,\varphi(\alpha)[1 + O(h)]$$

De la même manière, on définit un opérateur $K^{\alpha^0,\gamma}_{A,\Gamma,R}$ où A est un opérateur défini positif et R_z sa résolvante. Dans ce cas il faut changer dans les formules (1.13) h en R_z. Alors, $e^i(\alpha, R_z)$ et toutes ses dérivées par rapport à α sont des opérateurs bornés dans H dépendant du paramètre α. De la même manière, si $\varphi(\alpha)$ est une fonction à valeurs dans un espace dénombrablement normé qui soit une intersection d'espaces de Banach

$$B_1, \dots, B_N \dots, B_{i+1} \subseteq B_i$$

et si A est un opérateur vérifiant dans chacun de ces espaces les conditions de la section 4°, § 1, ch. I, alors $e^i(\alpha, R_z)$, où $R_z = (A - z)^{-1}$, est un opérateur continu dans B^∞, et en outre, les $e^i(\alpha, 0)$ sont des fonctions numériques appartenant à une partition de l'unité.

6. L'asymptotique quasi-classique de la solution du problème de Cauchy

Soient $v(x,t) \in C^\infty$, $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ et à support compact, et supposons que la solution $\psi(x,t)$ de l'équation de Schrödinger

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + v(x,t)\right]\psi = \hat{H}\psi \tag{1.14}$$

satisfasse la condition initiale

$$\psi(x,0) = K^{\gamma^0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma, h}\varphi(\alpha) \tag{1.14'}$$

alors on peut représenter $\psi(x,t)$ sous la forme

$$\psi(x,t) = \tilde{K}^{\gamma, \alpha^0}_{1/h, \Gamma_t, h}\varphi(\alpha), \qquad \Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\} \tag{1.15}$$

où $\Gamma_0 = \Gamma$, $\mu\dot{Q} = P$, $\dot{P} = -\dfrac{\partial v}{\partial Q}$,

$$\gamma = \gamma^0 - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q(\alpha^0; 0, t) + \frac{1}{h}\int_0^t \left\{\frac{P^2(\alpha^0,\tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha^0,\tau),\tau]\right\}d\tau,$$

6.1 *Exemples*

Nous allons montrer dans des cas concrets la forme que prend pour les solutions de l'équation de Schrödinger l'asymptotique décrite précédemment.

Supposons que la condition initiale pour l'équation (1.14) ait la forme

$$\psi(x,0) = \varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}f(x)\right] \tag{1.16}$$

où $\varphi(x)$ est à support compact,

$$\operatorname{Supp}\varphi \subset [-1, +1], \qquad f(x) \in C^2, \qquad f(0) = 0.$$

La condition initiale (1.16) est de la forme (1.14)' pour

$$\Gamma = \{q^0(\alpha) = \alpha, p^0(\alpha) = f'(\alpha)\}, \alpha \in [-1 - \varepsilon, +1 + \varepsilon],$$

$$\varepsilon > 0 \qquad \alpha^0 = 0 \qquad \gamma^0 = 0$$

L'atlas canonique consiste en une seule carte régulière

$$e^1(\alpha, h) = 1 \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant \alpha \leqslant +1$$

Supposons que l'intersection de la droite $q = x$ avec la courbe

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$$

pour tous les $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$ ne contienne pas de points singuliers; alors cette intersection ne comprend qu'un nombre fini de points $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$. En effet, s'il y en avait un nombre infini, ces points auraient une limite et ce serait un point focal. Soit γ^j l'indice de l'arc $Q(\alpha^j; 0, t)$ c'est-à-dire le nombre de zéros de la fonction $\partial Q(\alpha^j, \tau)/\partial\alpha^j$ pour $0 < \tau \leqslant t$. Soit $S(\alpha^j, t)$ la solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu \dot{Q}^2}{2} - v(Q, t)$$

satisfaisant la condition $S(\alpha^j, 0) = f(\alpha^j)$.

Puisque $f(\alpha) = \int_{l_0[0,\alpha]} p\,\mathrm{d}q$ et que

$$S(\alpha, t) = \int_{l_0[0,\alpha]} p\,\mathrm{d}q + \int_0^t \left\{\frac{P^2(\alpha, \tau)}{2\mu} - v[Q(\alpha, \tau), \tau]\right\}\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t \left\{\frac{P^2(0, \tau)}{2\mu} - v[Q(0, \tau), \tau]\right\}\mathrm{d}\tau + \int_{l_t[0,\alpha]} p\,\mathrm{d}q$$

On peut écrire la solution sous la forme

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{e}^{-i(\pi/2)\gamma^j} \varphi[\alpha^j(x, t)] \left|\frac{\partial Q}{\partial \alpha^j}[\alpha^j(x, t), t]\right|^{-1/2} \mathrm{e}^{ih^{-1}S[\alpha^j(x,t),t]} + h\Phi(x, t, h) \tag{1.17}$$

où $\Phi(x, t, h)$ est bornée pour $h \to 0$ dans un voisinage du point $x = x'$.

Ce résultat peut être encore formulé de deux façons différentes.

1) Supposons que le point (x, t) ne soit focal pour aucune des extrémales de la fonctionnelle

$$\Phi(q) = f(q^0) + \int_0^t \left\{\frac{\dot{q}^2}{2\mu} - v(q, t)\right\}\mathrm{d}t \tag{1.18}$$

c'est-à-dire que toutes les solutions du problème

$$\mu\ddot{q} = -\frac{\partial v(q, t)}{\partial q}, \qquad \mu\dot{q}(0) = f'(q(0)) \qquad q(t) = x \tag{1.19}$$

satisfont la condition, $\mathrm{d}q(0)/\mathrm{d}x \neq \infty$.

Alors le problème (1.19) admet seulement un nombre fini de solutions

$$q_1(\tau), \ldots, q_k(\tau) \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t$$

$$\psi(x, t) = \sum_{\nu=1}^{k} \mathrm{e}^{-i\gamma_\nu\pi/2} \varphi(q_\nu(0)) \left|\frac{\mathrm{d}q_\nu(0)}{\mathrm{d}x}\right|^{-1/2} \mathrm{e}^{ih^{-1}\Phi(q_\nu(t))} + O(h) \tag{1.20}$$

où γ_ν est le nombre de points focaux sur l'arc $q_\nu(\tau)$ pour $0 < \tau \leqslant t$

2) Supposons que la solution des équations $\mu \ddot{X} = -\dfrac{\partial v}{\partial X}(X, t)$ satisfasse les conditions

$$X(0) = x_0, \qquad \mu \dot{X}(0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Considérons l'ensemble $M(x)$ des solutions de l'équation $X(x_0, t) = x$. Si $M(x)$ ne contient pas de points focaux (i.e. de points où $\partial X(x_0, t)/\partial x_0 = 0$) alors il consiste seulement en un nombre fini de points $(x_0^1, \ldots, x_0^k)$, qui sont des fonctions de x et t

$$x_0^1 = x_0^1(x, t), \ldots, x_0^k = x_0^k(x, t) \text{ (cf. fig. 8).}$$

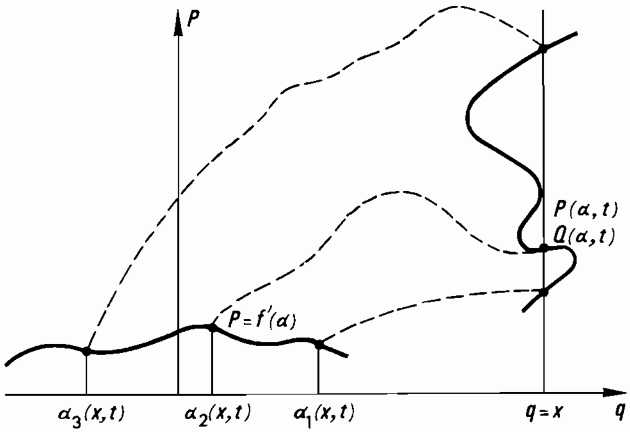


Fig. 8.

Soit γ^j l'indice de l'arc $X(x_0^j; 0, t)$ i.e. le nombre de zéros de la dérivée $\dfrac{\partial X}{\partial x_0^j}(x_0^j, \tau)$ pour $0 < \tau \leqslant t$.

Soit $S(x_0, t)$ la solution de l'équation $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu \dot{X}^2}{2} - v(X, t)$,

avec la condition $S(x_0, 0) = f(x_0)$. Alors

$$\psi(x, t) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{e}^{-i(\pi/2)\gamma^j} \varphi(x_0^j(x, t)) \left| \frac{\partial X}{\partial x_0}(x_0^j(x, t), t) \right|^{-1/2} \mathrm{e}^{ih^{-1}S(x_0^j(x, t), t)} + O(h) \tag{1.21}$$

Supposons maintenant que l'intersection de la droite $q = x'$ avec la courbe $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$ soit le segment $p' \leqslant p \leqslant p''$. D'où, pour $p \in \{p' - \varepsilon, p'' + \varepsilon\}$, de l'équation $P(\alpha, t) = p$ on tire $\alpha = \alpha(p, t)$. Alors la solution $\psi(x, t)$ se représente sous la forme

$$\psi(x, t) = \frac{\mathrm{e}^{-i(\pi/2)(\gamma - 1/2)}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{p'-\varepsilon}^{p''+\varepsilon} \mathscr{F}(p) \exp\left\{\frac{ip}{h}[x - Q(\alpha(p, t), t)]\right\}$$

$$\times \left| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha(p, t), t) \right|^{-1/2} \exp\{ih^{-1} S[\alpha(p, t), t]\}\,\mathrm{d}p + \sqrt{h}\,\Phi(x, t, h) \tag{1.22}$$

où $\mathscr{F}(p)$ est une fonction régulière, égale à 1 pour $p' \leqslant p \leqslant p''$, et nulle en dehors de $p' - \varepsilon \leqslant p \leqslant p'' + \varepsilon$, γ le nombre de points focaux sur une trajectoire quelconque $Q(\alpha(p,t);\, 0,t)$ pour $p \in [p', p'']$ et où $\Phi(x,t,h)$ est uniformément bornée pour $h \to 0$ dans un voisinage de $x = x'$.

Notons que si $p' = p''$, et le point $q = x'$ singulier, l'intégrale (1.22) peut être facilement simplifiée en développant en série l'intégrant au voisinage de $p = p'$ et en se restreignant aux premiers termes (cf. [79,1]).

7. L'asymptotique des solutions d'un système d'équations

Dans le cas général, on peut considérer que la fonction $\varphi(\alpha)$ sur la variété Γ est une fonction sommable au sens de Bochner, à valeurs dans un espace de Banach B. (D'ailleurs, dans tous les cas concrets du tableau I, $\varphi(\alpha)$ est simplement à valeurs vectorielles, c'est-à-dire B est de dimension finie.)

En guise d'exemple, considérons l'équation

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + hR(x,t)\psi + v(x,t)\psi \tag{1.23}$$

où $R(x,t)$ est une matrice $(r \times r)$ bornée indéfiniment différentiable et $v(x,t) \in C^\infty$.

Soit

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)\, l(\alpha) \tag{1.24}$$

où $\varphi(\alpha)$ est une fonction sommable à support compact et $l(\alpha) = \{l_1(\alpha),\dots,l_r(\alpha)\}$ une fonction vectorielle telle que $|l(\alpha)| = 1$.

Alors

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t,h}\varphi(\alpha)\exp\left[\mathrm{i}\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]\,\mathrm{d}\tau\right]l(\alpha) \tag{1.25}$$

où l'expression $\exp\left[\mathrm{i}\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]\,\mathrm{d}\tau\right]l(\alpha)$ désigne une fonction $f(\alpha,t)$ à valeurs dans B et vérifiant l'équation

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}R[Q(\alpha,t),t]\,f(\alpha,t) \qquad f(\alpha,0) = l(\alpha) \in B \tag{1.26}$$

où Γ_t, Q, P sont comme dans le théorème qui précède, et

$$\gamma = \frac{1}{h}\int_0^t \left\{\mu\frac{\dot{Q}^2(\alpha^0,\tau)}{2} - v(Q(\alpha^0,\tau),\tau)\right\}\mathrm{d}\tau - \frac{\pi}{2}\mathrm{Ind}\,Q(\alpha^0\,;\,0,t)$$

8. Comportement des discontinuités des solutions d'une équation hyperbolique

1. Afin d'obtenir le développement asymptotique de la discontinuité d'une solution d'une équation hyperbolique, il nous faut définir l'opérateur canonique $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,h}$ dans le cas où l'opérateur A est égal à $\mathrm{i}\partial/\partial\tau$ (cf. 6°, § 1, ch. 1), i.e. n'est pas défini positif. Considérons ici le cas où l'opérateur A est défini négatif. Dans ce cas posons

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma} = (K^{\gamma,\alpha^0}_{-A,\Gamma})^*$$

Si l'opérateur A n'est pas semi-défini, décomposons l'espace H en une somme $H = H^+ + H^-$ telle que la restriction A^+ de A à H^+ et A^- de $-A$ à H^- soient des opérateurs définis positifs. Soit

$$\varphi(\alpha) = \varphi^+(\alpha) + \varphi^-(\alpha), \qquad \varphi^+(\alpha) \in H^+, \quad \varphi^-(\alpha) \in H^-.$$

Par définition on pose

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha) = K^{\gamma,\alpha^0}_{A^+,\Gamma}\ \varphi^+(\alpha) + K^{\gamma,\alpha^0}_{A^-,\Gamma}\ \varphi^-(\alpha).$$

Par exemple, quand $A = \mathrm{i}d/d\tau$ est un opérateur dans l'espace

$$H = \mathscr{L}_2[-\infty, +\infty]$$

des fonctions de τ, Γ est la droite $p = 0$, et $\varphi(\alpha) = \delta(\tau) f(q)$, alors

$$\delta(\tau) = \delta_+(\tau) + \delta_-(\tau)$$

où
$$\delta_+(\tau) = \int_0^\infty e^{i\lambda\tau}\, d\lambda \ \text{ et } \ \delta_-(\tau) = \delta_+(\tau)^*.$$

D'où :

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{\mathrm{i}d/d\tau,\, p=0} f(q)\delta(\tau) = 2f(x)\,\mathrm{Re}\, e^{i\gamma}\delta_+(\tau)$$

2. Passons maintenant à l'étude de l'allure d'une discontinuité d'une solution d'une équation hyperbolique. Considérons la solution $u(x, y, t)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2(x,t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (1.27)$$

vérifiant les conditions

$$u(x,y,0) = \delta(y - y_0)\,\varphi(x), \qquad u_t'(x,y,0) = 0 \qquad (1.28)$$

Supposons que les coefficients de l'équation soient assez réguliers et $\varphi(x)$ à support compact. Posons $A = \mathrm{i}\partial/\partial y$. Alors l'équation A-caractéristique a la forme

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - C^2(x,t)\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + 1\right) = 0$$

Elle se décompose en deux équations

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = (-1)^\nu C(x,t)\sqrt{\left(\frac{\partial S^\nu}{\partial x}\right)^2 + 1}, \qquad \nu = 1,2$$

Soient $Q^\nu(\alpha,t), P^\nu(\alpha,t), S^\nu(\alpha,t)$, $\nu = 1,2$, les solutions du système

$$\dot{p} = (-1)^\nu \frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = (-1)^{\nu+1}\frac{\partial H}{\partial p}, \qquad H = C(q,t)\sqrt{p^2+1}$$

$$\frac{\mathrm{d}S^\nu}{\mathrm{d}t} = (-1)^\nu [H - p^\nu H_{p^\nu}] = (-1)^\nu \frac{C(q,t)}{\sqrt{p^2+1}} \tag{1.29}$$

vérifiant les conditions

$$q^\nu(0) = \alpha, \qquad p^\nu(0) = 0, \qquad S(0) = 0$$

La solution du problème (1.27-1.28) peut se représenter sous la forme

$$u(x,y,t) = \sum_{\nu=1}^{2} K^{\gamma^\nu,\alpha^0}_{\mathrm{i}\partial/\partial y,\,\Gamma_t^\nu}\,\varphi(\alpha)\,\delta(y - y_0) + \mathscr{F}(x,y,t)$$

où $\mathscr{F}(x,y,t) \in L_2$, Γ_0^ν $(\nu = 1,2)$ est la variété $p = 0$ et Γ_t^ν $(\nu = 1,2)$ la variété correspondante déplacée le long des trajectoires du système (1.29) et

$$\gamma^\nu(t) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y} S^\nu(\alpha^0,t) - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q^\nu[\alpha^0\,;\,0,t)$$

En outre, si le point (x,t) n'est focal pour aucune des trajectoires $Q^\nu(\alpha;0,t)$ $(\nu = 1,2)$, il existe un nombre fini de solutions $\alpha_j^\nu(x,t)$ $(j = 1,\dots,k^\nu)$ de l'équation $Q^\nu(\alpha,t) = x$ et la solution $u(x,y,t)$ peut être représenté sous la forme

$$u(x,y,t) = \sum_{\nu=1,2}\sum_{j=1}^{k^\nu} \frac{\varphi(\alpha_j^\nu)}{\sqrt{\left|\dfrac{\partial Q^\nu(\alpha_j^\nu,t)}{\partial \alpha_j^\nu}\right|}}\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{-i(\pi/2)\gamma_j^\nu}$$
$$\cdot\,\delta_+(y - y_0 + S(\alpha_j^\nu,t)))\big|_{\alpha_j^\nu = \alpha_j^\nu(x,t)} + \mathscr{F}(x,y,t)$$

où $\mathscr{F}(x,y,t) \in L_2$. Ainsi, on voit que si le nombre de points focaux sur la trajectoire $Q^\nu(\alpha_j^\nu;0,t)$ est impair, la discontinuité de la solution a la forme d'un pôle du premier ordre ; si ce nombre est pair, la discontinuité a la forme d'une fonction δ.

§ 2 LE CAS MULTIDIMENSIONNEL

Nous allons suivre le plan du paragraphe précédent.

1. Notions topologiques

1. Nous considérerons une variété lisse de dimension n :

$$q = q(\alpha), \qquad p = p(\alpha), \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

dans l'espace de phase à $2n$ dimensions (q, p) ou, plus précisément une sous-variété lisse (peut-être ouverte) $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ de l'espace euclidien de dimension $2n$, pour laquelle, dans chaque système local de coordonnées (α), la condition (2.2), ch. 1, est vérifiée.

Une telle variété Γ sera dite sous-variété lagrangienne. La condition (2.2), ch. I signifie que localement $\oint p\,\mathrm{d}q$ sur Γ ne dépend pas du chemin.

Nous appellerons ensemble singulier (pour la projection sur le plan $p = 0$) l'ensemble M des points de la variété Γ pour lesquels $\mathrm{D}q/\mathrm{D}\alpha = 0$ (comme à l'ordinaire, $\mathrm{D}q/\mathrm{D}\alpha$ désigne $\det \| \partial q_i / \partial \alpha_j \|$). Une sous-variété lagrangienne $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ possède une propriété remarquable qui permet de généraliser le concept d'opérateur canonique au cas multidimensionnel. Cette propriété est une conséquence du lemme suivant relatif aux coordonnées locales.

Lemme 2.1. *Pour un point quelconque α^0 de la sous-variété lagrangienne Γ, il existe une rotation des axes $\tilde{q} = Aq, \tilde{p} = Ap$ telle qu'un certain voisinage du point α^0 se projette biunivoquement sur un des n-plans de coordonnées de la forme*

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \ldots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \ldots = \tilde{p}_n = 0$$

Notons qu'une transformation de la forme

$$\tilde{q} = Aq, \qquad \tilde{p} = Ap \tag{2.1}$$

où A est une matrice unitaire, est une transformation canonique. Rappelons qu'une transformation canonique est une transformation qui laisse invariante la condition (2.2), ch. 1.

Nous dirons que les coordonnées $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$, pour lesquelles $\mathrm{D}\tilde{y}_k/\mathrm{D}\alpha \neq 0$, sont les coordonnées focales du point α. Par exemple, dans le cas à 2 dimensions, l'assertion du lemme signifie que, si le rang de $\| \partial q_i / \partial \alpha_j \|$ est égal à 0, alors

$$\det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0$$

Si le rang de $\| \partial q_i / \partial \alpha_j \|$ est égal à 1, et si la variété Γ se trouve en position générale ([1]), alors la projection de la sous-variété singulière M sur le plan (q) peut avoir la forme d'une courbe γ, comme sur les figures 9*a* et 9*b*. Dans ce cas, $\tilde{q}_1$ est orthogonal à γ et $\tilde{q}_2$ est dirigé le long de la tangente à γ.

Le lemme affirme dans ce cas qu'on a une application biunivoque d'un voisinage du point $\alpha \in M$ sur le plan $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_2)$.

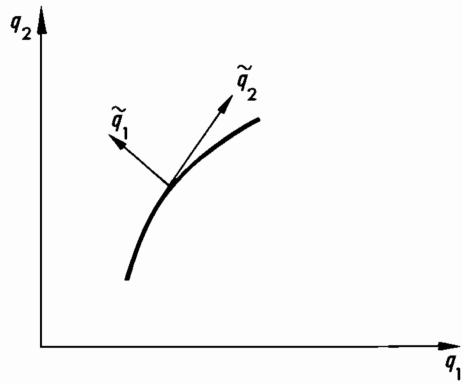


Fig. 9*a*.

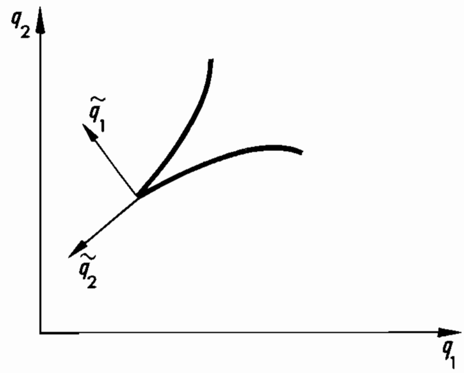


Fig. 9*b*.

Fig. 9.

2. Ce lemme peut être utilisé pour choisir des coordonnées locales (cartes locales pour la sous-variété lagrangienne). En fait, au lieu de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nous pouvons toujours prendre comme système local de coordonnées d'un voisinage de $\alpha \in \Gamma$ les coordonnées focales $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$ de ce point. (Pour une sous-variété quelconque, cela n'est pas vrai.) Tout compact sur la sous-variété peut être recouvert par un nombre fini de domaines qui se projettent biunivoquement sur un des plans de coordonnées de la forme $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k\ \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$. Comme coordonnées locales dans un tel domaine, on peut prendre $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$ [carte locale $\tilde{\Omega}_k$]. Dans chaque carte locale $\tilde{\Omega}_k$, il existe un point pour lequel $\partial \tilde{q}_1 / \partial \alpha_i = \ldots = \partial \tilde{q}_k / \partial \alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (si $k = 0$, le point est arbitraire).

Choisissant arbitrairement un de ces points, nous l'appellerons « le centre de la carte locale ». Un système de cartes locales de ce type recouvrant un compact R constitue un atlas canonique $\mathscr{X}$ du compact R.

On appellera réguliers les points où le jacobien

$$J\left(\frac{q_1 \dots q_n}{\alpha_1 \dots \alpha_n}\right) \neq 0$$

De même, on appellera régulières les cartes pour lesquelles $k = 0$.

Introduisons la notion d'indice d'un arc $l[\alpha^1, \alpha^2]$ sur une variété lagrangienne.

Considérons une variété lagrangienne en position générale relativement à la projection parallèlement aux coordonnées (p). On démontre que, dans ce cas, la sous-variété singulière M a une dimension inférieure ou égale à $n - 1$ et que le rang de la matrice $\| \partial q_i(\alpha) / \partial \alpha_j \|$ pour $\alpha \in M$ est plus petit (*) que $n - 1$ pour une dimension inférieure à $n - 2$. Fixons un point $\alpha^0 \in M$. Effectuons une rotation canonique de la forme (2.1) et comme coordonnées locales utilisons les coordonnées focales $\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n$. Autrement dit, prenons une carte canonique de centre α^0. Ainsi, localement, on a $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_1(\tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_n)$ sur la sous-variété. Traçons en ce point un vecteur unité $\vec{e}$, tangent à la variété et parallèle à $\tilde{p}_1$, orienté dans la direction de croissance de $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$, c'est-à-dire dans le sens de variation des valeurs négatives de $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$ aux valeurs positives. Notons que lorsqu'il y a position générale ([1]) la dérivée $\partial \tilde{q}_1 / \partial \tilde{p}_1$ change de signe le long de $\tilde{q}_1$ lors de la traversée de α^0 (**).

Supposons les points α^1 et α^2 réguliers. Comme l'indice d'un arc $l[\alpha^1, \alpha^2]$, nous prendrons l'indice d'intersection de cet arc avec la sous-variété M. Ainsi si l'arc coupe la sous-variété M dans la direction du vecteur $\vec{e}$, la valeur de l'indice de l'arc augmente d'une unité. Si l'arc coupe M dans la direction opposée, il diminue d'une unité.

Introduisons maintenant une autre définition de l'indice d'un arc, qui utilise seulement le fait qu'en position générale la dimension de M n'est pas supérieure à $n - 1$.

Supposons que les points α^1 et α^2 appartenant à une même carte sont réguliers. Nous définissons l'indice de l'arc $l[\alpha^1, \alpha^2]$ comme la différence de l'indice d'inertie de la matrice.

$$\tilde{B}_k = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{p}_j} \right\|_{i, j \leqslant k} = \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \, \partial \tilde{q}_j} \right\|_{i, j \leqslant k}^{-1} \tag{2.1}$$

au point $\alpha = \alpha^1$ et de l'indice d'inertie de la même matrice au point $\alpha = \alpha^2$.

(*) Si le rang de la matrice $\| \partial q_i(\alpha) / \partial \alpha_j \|$ est égal à $n - r$, alors de ([1]), résulte que, si M se trouve en position générale, $\dim M = n - r^2$. Dans la démonstration du théorème, cependant, on utilisera seulement le fait que $\dim M \leqslant n - 1$. Toutes les autres propriétés d'une sous-variété en position générale ne seront employées qu'à titre d'illustration.

(**) Anosov et Novikov m'ont indiqué ce fait et la possibilité qui s'y rattache d'interpréter géométriquement et simplement l'indice.

L'indice de l'arc $l[\alpha', \alpha'']$, où α'' est le centre de la carte $\tilde{\Omega}_k^i$, et où α' est un point régulier de cette carte, est l'indice d'inertie de la matrice $\tilde{B}_k$ au point α'.

Théorème 2.1. *Ind $l[\alpha', \alpha'']$, où $l[\alpha', \alpha''] \subset \tilde{\Omega}_{k_1}$ ne dépend pas de la carte $\tilde{\Omega}_{k_1}$, c'est-à-dire que si $l[\alpha', \alpha'']$ appartient aussi à $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$, avec α' et α'' réguliers, alors*

$$\operatorname{Ind} \tilde{B}_{k_1}(\alpha') - \operatorname{Ind} \tilde{B}_{k_1}(\alpha'') = \operatorname{Ind} \tilde{\tilde{B}}_{k_2}(\alpha') - \operatorname{Ind} \tilde{\tilde{B}}_{k_2}(\alpha'') \qquad (2.2)$$

On peut donc recouvrir un arc arbitraire $l[\alpha'\alpha'']$ par des cartes. Dans chaque carte, l'indice du morceau de l'arc est défini (*). L'indice de $l[\alpha', \alpha'']$ est alors défini par additivité. Du théorème 2.1 résulte que Ind $l[\alpha', \alpha'']$ ne dépend pas du recouvrement et ne change pas pour une déformation continue de l'arc $l[\alpha'\alpha'']$, c'est-à-dire Ind $l[\alpha', \alpha'']$ est un invariant homotopique.

Théorème 2.2. *L'indice d'un cycle de dimension un est un entier invariant par des transformations canoniques infinitésimales.*

Soient $q(t), p(t)$ les solutions du système hamiltonien $\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q$ qui vérifient les conditions $q(0) = q^0(\alpha), p(0) = p^0(\alpha)$, où $q^0(\alpha), p^0(\alpha)$ définissent la sous-variété lagrangienne Γ_0. Posons $q(t) = Q(\alpha, t), p(t) = P(\alpha, t)$. La sous-variété $\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\}$, où t est fixé, est une sous-variété lagrangienne de l'espace de phase. Tout arc $l[\alpha', \alpha''] \subset \Gamma$ s'applique sur l'arc $l_t[\alpha', \alpha''] \subset \Gamma_t$. Définissons l'indice d'une trajectoire $Q(\alpha; 0, t)$.

Supposons d'abord que la forme $\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j$ soit strictement positive. On sait que dans ce cas le nombre de zéros du jacobien $DQ(\alpha, \tau)/D\alpha$ pour $0 < \tau \leqslant t$ en tenant compte de leurs multiplicités est fini. Nous appellerons ce nombre l'indice de la trajectoire $Q(\alpha; 0, t)$ (indice de Morse).

Nous allons définir l'indice d'un arc pour un hamiltonien H arbitraire ne satisfaisant pas la condition

$$\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0.$$

Considérons dans l'espace à $2n + 1$ dimensions (p, q, t) un film de dimension $n + 1$, R_t défini comme l'union d'une famille de variétés de dimension n, Γ_τ, pour τ variant de 0 à t. En chaque point du film R_t, en vertu du lemme, on a une matrice non dégénérée du type $\tilde{B}_k$. Ainsi nous pouvons recouvrir le film R_t par des cartes canoniques $\tilde{\Omega}_k$ de dimension $n + 1$. On définit d'une façon générale en même temps que l'indice d'une trajectoire $Q(\alpha; 0, t)$, l'indice d'un arc situé dans le film. Considérons une partie de l'arc $l[\alpha^1, \alpha^2]$ qui soit entièrement contenu dans une carte canonique $\tilde{\Omega}_k$ de coordonnées locales canoniques $\tilde{y}_k, t$, et dont les extrémités sont des

(*) Sous la condition que la sous-variété singulière soit de dimension plus petite que n ; par exemple, si la variété Γ est en position générale par rapport à la projection. Cela est suffisant, puisque l'on peut se mettre en position générale par une rotation canonique aussi petite qu'on le veut.

points réguliers. Comme pour une variété lagrangienne, on définit l'indice de l'arc $\operatorname{Ind} l[\alpha^1, \alpha^2]$ comme la différence des indices d'inertie de la matrice $\tilde{B}_k$, calculés successivement aux points α^1 et α^2. Comme précédemment, on définit le centre d'une carte et l'indice d'un arc $\operatorname{Ind} l[\alpha^2, \alpha_k^1]$, où α^2 est régulier et α_k^1 le centre, comme étant l'indice d'inertie de la matrice $\tilde{B}_k$ au point α^2.

La démonstration du théorème d'invariance sera donnée au chapitre VII. Nous y définirons aussi l'indice d'un arc unissant deux points arbitraires. Pour un film, on a l'analogue du théorème 2.1 et l'indice d'un arc quelconque dans R_t se définit par additivité.

Nous montrerons que lorsque l'arc est une trajectoire $Q(\alpha; 0,t)$ et que la condition

$$\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_j p_i} z_j z_i > 0$$

pour $z_i \neq 0$ est vérifiée, l'indice ainsi défini coïncide avec l'indice de Morse.

On en déduira la relation (1.2) donnée dans le cas à une dimension.

2. **Définition de l'opérateur canonique**

Soit sur une variété lagrangienne Γ une fonction $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ à support compact R et à valeurs dans un espace de Hilbert. Désignons encore par $\varphi(\alpha)$ la classe d'équivalence de $\varphi(\alpha)$ dans l'espace quotient S.

Soit $\mathscr{X}$ l'atlas canonique correspondant au recouvrement fini $\{\Omega_i\}$, $i = 1, \ldots, N$ du compact R, et soit $e^i(\alpha), i = 1, \ldots, N$ une partition de l'unité correspondant au recouvrement $\{\Omega_i\}$ ($e^i(\alpha) \in C^\infty$ $\sum_{i=1}^{N} e^i(\alpha) = 1$ pour $\alpha \in R$, $e^i(\alpha) = 0$ si $\alpha \notin \Omega_i$).

Rappelons qu'une carte locale $\tilde{\Omega}_k^i$ correspond à $\alpha = a^i(y_k)$ où

$$(\tilde{y}_k) = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n).$$

Soit $\sigma(\alpha)$ une mesure sur la variété Γ et $\mathrm{D}\sigma(\alpha)/\mathrm{D}\tilde{y}_k$ sa dérivée par rapport à la mesure $\mathrm{d}\tilde{p}_1 \ldots \mathrm{d}\tilde{p}_k \mathrm{d}\tilde{q}_{k+1} \ldots \mathrm{d}\tilde{q}_n$. Si, en particulier, on peut introduire sur Γ des coordonnées globales α, alors on peut poser, par exemple, $\sigma(\alpha) = \mathrm{d}\alpha_1 \ldots \mathrm{d}\alpha_n$ et

$$\frac{\mathrm{D}\sigma(\alpha)}{\mathrm{D}\tilde{y}_k} = \frac{\mathrm{D}\alpha}{\mathrm{D}\tilde{y}_k} \equiv \det \left\| \frac{\partial \alpha_i}{\partial (\tilde{y}_k)} \right\|.$$

Désignons par α_k^i le centre de la carte $\tilde{\Omega}_k^j$. Un des centres sera dit initial et noté α^0. Soit $j(x)$ l'ensemble des indices des cartes de l'atlas $\mathscr{X}$ qui contiennent des points du plan $q = x$. Soit A un opérateur défini positif, auto-adjoint, non borné dans l'espace d'Hilbert H.

Soit S l'espace-quotient $L_2(\Gamma^n, H)/\mathrm{D}(A)$ et S' l'espace-quotient

$$L_2(R^n, H)/\mathrm{D}(\partial/\partial x) \cap \mathrm{D}(A).$$

Définissons un opérateur canonique $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ de S dans S'. On peut aussi le considérer comme un opérateur de $L_2(\Gamma, H)$ (espace des fonctions de carré intégrable sur Γ à valeurs dans H) dans l'espace-quotient S'. Autrement dit, nous allons définir $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha)$, où $\varphi(\alpha) \in L_2(\Gamma, H)$ est définie à des fonctions différentiables près appartenant à $\mathrm{D}(A)$.

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}\varphi(\alpha) = e^{i\gamma} \sum_{j \in j(x)} e^{-i(\pi/2)\,\mathrm{Ind}\, l[\alpha^0, \alpha^j_k]}\, \Phi^{\tilde{p}_k}_A e^j(a^j(\tilde{y}_k))$$

$$\times \left|\frac{\mathrm{D}(\sigma)}{\mathrm{D}\tilde{y}_k}\right|^{1/2} \exp\left\{ iA\left[\int_{l[\alpha^0, a^j(\tilde{y}_k)]} \tilde{p}\,\mathrm{d}\tilde{q} - \sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \tilde{q}_i[a^j(\tilde{y}_k)]\right]\right\} \varphi(a^j(\tilde{y}_k))\big|_{q=x} \quad (2.3)$$

où $\Phi^{\tilde{p}_k}_A$ est la transformation de Fourier par rapport aux k premières variables d'une fonction à support compact R (dans ces variables), i.e.

$$\Phi^{\tilde{p}_k}_A \psi(\tilde{y}_k) = \frac{e^{i\pi k/4} A^{k/2}}{(2\pi)^{k/2}} \int_R \exp\left(iA \sum_{j=1}^{k} \tilde{p}_j \tilde{q}_j \right) \psi(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n)\, \mathrm{d}\tilde{p}_1, \dots, \mathrm{d}\tilde{p}_k$$

et où γ est une fonction linéaire de l'opérateur A.

Si A est défini négatif, on pose

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma} = (K^{\gamma,\alpha^0}_{-A,\Gamma})^* \quad (2.4)$$

Si l'opérateur A n'est pas de signe défini, et si A^{-1} existe, on procède comme au paragraphe 1, 8°, ch. 2(*).

Théorème 2.3. *Afin que l'opérateur canonique $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ ne dépende pas du choix de l'atlas canonique, de l'arc $l[\alpha^0, \alpha^j_k]$ et de la partition de l'unité, il est nécessaire et suffisant que pour les points λ du spectre de l'opérateur A on ait la relation*

$$\frac{2\lambda}{\pi} \oint_{\kappa} p\,\mathrm{d}q = l_k \,(\mathrm{mod}\, 4) + O(1/\lambda) \qquad k = 1, \dots, k_0 \quad (2.5)$$

où l'intégrale est étendue au k-ième cycle de base à une dimension de la variété Γ, où l_k est l'indice du cycle k et où k_0 est le premier nombre de Betti de la variété Γ.

Remarquons que la condition (2.5) impose des restrictions aux valeurs de $I_k = \oint_{\kappa} p\,\mathrm{d}q$. Pour $k_0 = 2$, pour l'existence d'un tel opérateur A, il suffit que I_1 et I_2 soient incommensurables. Puisque $\oint_{\kappa} p\,\mathrm{d}q$ et l_k sont invariants par rapport aux transformations canoniques, il est évident que cette propriété de l'opérateur se conserve aussi par transformations canoniques.

(*) Dans le théorème 2.4 qui va suivre, il sera possible de considérer à la place de l'espace de Hilbert H un espace de Banach B et un opérateur A possédant les propriétés 1) 2) 3) du § 1, Ch. 6. Si A possède les propriétés 1), 2a), 3) on définit $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ par la formule (2.4), s'il possède les propriétés 1) 3) et si $B = B^+ \oplus B^-$, $R_A B^\pm \subset B^\pm$ avec A vérifiant 1), 2), 3) dans B^+ et 1), 2a), 3) dans B^-, alors $K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma}$ se définit comme au point 1, section 8°, § 1, Ch. 2.

L'opérateur canonique reste inchangé si on change le point initial α^0 de l'atlas en un autre point $\tilde{\alpha}^0$ et simultanément γ par

$$\tilde{\gamma} = \gamma + A \int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} p\,\mathrm{d}q - \frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]$$

Remarque. Pour calculer la valeur de l'expression $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)$ au voisinage du point $x = \bar{x}$, il sera commode d'utiliser l'atlas spécial suivant $\mathscr{X}(\bar{x})$: supposons que l'intersection du plan $q = \bar{x}$ et de Γ consiste en un nombre fini de points $\alpha^i(\bar{x}), i = 1, \dots, i_0$. On choisit l'atlas $\mathscr{X}(\bar{x})$ de façon que chacun de ces points soit le centre d'une certaine carte $\tilde{\Omega}_k^i(\bar{x})$. L'opérateur canonique, correspondant à l'atlas $\mathscr{X}(\bar{x})$ dans le voisinage du point $x = \bar{x}$, consistera en la somme de i_0 termes.

Notons en outre que si la condition (2.5) est vérifiée

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha) = K_{A,\Gamma}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}\varphi(\alpha), \qquad \tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + A \int_{\alpha^0}^{\tilde{\alpha}^0} p\,\mathrm{d}q.$$

Les conditions (2.5) d'indépendance de l'opérateur $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ par rapport à la forme de l'atlas canonique dans l'espace S restent valables en vertu du théorème 2.1 et de l'invariance des I_k, pour un déplacement le long des trajectoires du système dynamique hamiltonien : $\Gamma \to \Gamma_t$. Nous supposerons toujours que $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ ne dépend pas de la subdivision en cartes canoniques dans l'espace S c'est-à-dire que les relations (2.5) sont satisfaites.

Supposons alors que $\varphi(\alpha), \alpha \in \Gamma$ soit une fonction indéfiniment différentiable de α à valeurs dans un certain espace démontrablement normé.

Considérons dans cet espace des opérateurs linéaires continus $e^i(\alpha, h)$, $\alpha \in \Gamma, h \in (0,1)$ dépendant des paramètres α et h et également du chemin $l[\alpha^0, \alpha]$ et qui soient indéfiniment différentiables par rapport à α et h pour $h = 0$, i.e. qu'on suppose satisfaites des relations du type (1.13).

Supposons que pour $h = 0$ ces opérateurs deviennent des fonctions numériques bornées $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha)$ qui soient les éléments d'une partition de l'unité subordonnée à l'atlas. Comme dans la section 5 du § 1, remplaçons dans l'expression de l'opérateur $K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}$ les fonctions $e^i(\alpha)$ par les opérateurs $e^i(\alpha, R_z)$. On obtient une famille d'opérateurs $K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}, \tilde{K}_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}, \tilde{\tilde{K}}_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}$ dépendant de $e^i(\alpha, R_z)$.

Théorème 2.4. *Supposons que la sous-variété lagrangienne Γ soit associée à un atlas canonique $\mathscr{X}$ de point initial α^0 et à un certain opérateur $K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}$.*

Soit $\tilde{\mathscr{X}}$ un autre atlas canonique de la sous-variété Γ, de point initial $\tilde{\alpha}^0$. Alors il existe un opérateur unique de la forme $\tilde{K}_{A,\Gamma,R_z}^{\tilde{\gamma},\tilde{\alpha}^0}$ égal à $K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}$ pour les fonctions de la forme $\varphi(\alpha)$, et on a

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0] + A \int_{l[\alpha^0, \tilde{\alpha}^0]} p\,\mathrm{d}q$$

CHAPITRE 3

ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

§ 1 ASYMPTOTIQUE QUASI-CLASSIQUE

1. Théorèmes fondamentaux

1. Les propositions, analogues à celles du chap. 2, § 1, n°4 , restent valables.

Théorème 3.1. *Soit Γ une variété lagrangienne compacte, invariante par rapport au système dynamique*

$$\dot{x}_i = p_i\,; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$v(x) \in C^\infty, \qquad \lim_{|x| \to \infty} \frac{v(x)}{\sqrt{|x|^\alpha}} = \infty, \qquad \alpha > 0$$

$$\frac{p^2}{2} + v(x) = E.$$

Alors, il existe des valeurs propres λ_N de l'équation

$$\{-\Delta + \lambda_N^2 [v(x) - E]\} \psi_N \mp 0 \qquad \psi_N \in L_2[R^n],$$

satisfaisant les relations (2.5) (*).

(*) De cette façon, pour $E = E_n^0$, les $\lambda_n = 1/h$ satisfaisant les conditions

$$\oint_K p \, dq = 2\pi (m_k + l_{k/4}) h + O(h^2), \qquad k = 1, \dots, K_0,$$

où K_0 est le nombre de Betti de la variété Γ, $\oint_K$ l'intégrale sur le k-ième cycle d'une base indépendante, l_k son indice, m_k des entiers quelconques. Ces formules portent dans la littérature physique le nom de « formules de Bohr-Sommerfeld », ou formules de quantification de la vieille mécanique quantique. Toutefois, dans la littérature physique on ne trouvait pas les valeurs des constantes l_k. On savait seulement que $l_k \leqslant 4$ ([32, 2], [12]).

2. Théorème 3.2. *Supposons que le coefficient $v(x,t)$ de l'équation de Schrödinger* (1.6), *chap.* 1, *soit une fonction* $\left(\left[\frac{n}{2}\right]+4\right)$ *fois différentiable et que $\varphi(\alpha)$ soit deux fois différentiable.*

Supposons qu'une solution $\psi(x,t)$ de l'équation (1.6), *chap.* 1, *satisfasse la condition initiale*

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma}\varphi(\alpha) \tag{1.1}$$

$$\Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}, \qquad x = x_1,\dots,x_n\,;\; p = p_1,\dots,p_n$$

alors la solution $\psi(x,t)$ est de la forme

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t}\varphi(x) + Z_h(x,t) \tag{1.2}$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q(\alpha^0\,;0,t) + \frac{1}{h}\int_0^t \left\{\frac{P^2(\alpha^0,\tau)}{2\mu} - v(Q(\alpha^0,\tau),\tau)\right\}\mathrm{d}\tau,$$

où $Q(\alpha,t), P(\alpha,t)$ sont les solutions des équations de Hamilton

$$\mu\dot{Q}_i = P_i, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial v(Q,t)}{\partial Q_i}, \qquad i = 1,\dots,n$$

$$Q(\alpha,0) = q^0(\alpha), \quad P(\alpha,0) = p^0(\alpha) \qquad \Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}$$

et $\displaystyle\int |Z_h(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \to 0$ *pour* $h \to 0$.

3. Corollaire. *Supposons que soient remplies les hypothèses de la proposition précédente et que le support R de la fonction $\varphi(\alpha)$ soit suffisamment petit de sorte que son image R_t sur Γ_t soit entièrement contenue dans une des cartes de l'atlas $\mathscr{X}$ de coordonnées locales $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n$. Soit*

$$\tilde{\psi}(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n) = \Phi^{\tilde{x}_k}_{1/h}\psi(\tilde{x},t)$$

c'est-à-dire que nous considérons la solution $\psi(\tilde{x},t)$ dans la représentation $\tilde{p}$ associée aux variables $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_k$. Alors

$$\int |\tilde{\psi}(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n)|^2\,\mathrm{d}\tilde{p}_1\dots\mathrm{d}\tilde{p}_k\,\mathrm{d}\tilde{x}_{k+1}\dots\mathrm{d}\tilde{x}_n \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \int_R \varphi^2(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

$$\alpha(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{q}_{k+1},\dots,\tilde{q}_n) \in R_t$$

et tend vers zéro en dehors de ce domaine (voir chap. 2, § 1, *n°* 4*).*

4. La généralisation du concept d'opérateur canonique au cas où l'opérateur A n'est pas défini positif, et au cas où $\varphi(x)$ est une fonction vectorielle à valeurs dans un Hilbert ou dans un espace dénombrablement normé, s'effectue de façon complètement analogue à ce qui a été fait dans le cas à une dimension.

5. Considérons l'équation (1.16) du chapitre 1 pour $a_1 = 0, a_2 = 1$, $B = 0, A = 1/h$. En particulier pour $R = (\bar{\sigma}_2, H)$ elle coïncide avec l'équation de Pauli (tab. 1, n° 5).

Théorème 3.3. *Supposons qu'une solution $\psi(x,t)$ (fonction à valeurs dans B) de l'équation (1.16), chapitre 1, pour $a_1 = 0, a_2 = 1, B = 0, A = 1/h$ vérifie la condition initiale*

$$\psi(x,0) = K^{0,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)g(\alpha), \qquad \Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\} \tag{1.4}$$

(équation de Pauli, voir tab. 1), où $\varphi(\alpha) \in C^\infty$ et à support compact, et $g(\alpha)$ est un vecteur unité indéfiniment différentiable. Alors

$$\psi(x,t) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma_t,h}\varphi(\alpha)\exp\left\{i\int_0^t R[Q(\alpha,t),t]\,\mathrm{d}t\right\}g(\alpha)$$

où α^0 est le point initial sur la variété Γ,

$$\gamma = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind}Q(\alpha^0\,;0,t) + h^{-1}S(\alpha^0,t)$$

$Q(\alpha,t)$, $P(\alpha,t)$, $S(\alpha,t)$ les solutions du système hamiltonien

$$\dot{q}_i = H_{p_i}, \qquad \dot{p}_i = -H_{p_i}, \quad \dot{s} = -H + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H_{p_i}}{\partial p_i}$$

$$q(0) = q^0(\alpha), \qquad p(0) = p^0(\alpha) \qquad s(0) = 0$$

$$H(q,p,t) = [p + \mathscr{A}(q,t)]^2 - \Phi_0(q,t)$$

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha,t), P(\alpha,t)\}, \quad R(Q,t) = \mathrm{i}e(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(Q,t)).$$

6. Le corollaire 3 est valable pour l'intégrale du carré du module de la fonction vectorielle $\psi(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_k,\tilde{x}_{k+1},\dots,\tilde{x}_n)$ avec des conditions initiales localisées dans un voisinage du point x_0. Pourtant cette proposition 3 ne vaut pas pour l'intégrale de chaque composante du vecteur ψ. Pour l'équation de Pauli, cela signifie qu'à la particule classique est associée un certain vecteur (direction de spin) qui varie le long de la trajectoire selon la loi

$$\bar{r}(\alpha,t) = \exp\left\{\mathrm{i}\int_0^t R[Q(\alpha,\tau),\tau]\,\mathrm{d}\tau\right\}\bar{r}(\alpha,0)$$

c'est-à-dire que la polarisation de spin a une limite classique.

2. Méthode de la phase stationnaire pour l'intégrale sur les chemins de Feynmann

La fonction de Green $\mathscr{G}(x,\xi,t)$ (solution fondamentale) de l'équation de Schrödinger satisfait, de manière évidente, la condition initiale (1.14)' du chap. 2 pour $\Gamma = \{q(\alpha) = \xi, p(\alpha) = \alpha\}$ et $\varphi(\alpha) = 1$. En même temps, comme l'on sait, la fonction de Green peut être représentée sous la forme d'une intégrale sur les chemins de Feynman qu'on écrit formellement ([80], [55], [27])

$$\Phi = \int \exp\{ih^{-1}\theta\}\Pi \mathrm{d}q(\tau)$$

où

$$\theta = \int_0^t L(\dot{q}, q, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad q = q(\tau); \quad q(0) = \xi, \quad q(t) = x, \qquad (a)$$

$$L(\dot{q}, q, \tau) = \frac{\dot{q}^2}{2} - v(q, \tau).$$

De la même manière que pour l'exemple précédent, on voit facilement que si l'équation $\delta\theta = 0$ avec la condition initiale (a) a un nombre fini de solutions $q^k = q^k(\tau, t, x, \xi)$, $k = 1, \dots, k_0$ et si la variation seconde $\delta^2\theta$ n'a pas pour $q = q^k$ de valeur propre nulle, alors

$$\Phi = \mathscr{G}(x, \xi, t) \simeq (2\pi i h)^{-n/2} \sum_k |D(q^k)|^{-1/2} \exp\left\{-\,i\frac{\pi}{2}\gamma_k + \frac{i}{h} \times \int_0^t L(\dot{q}^k, q^k, \tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}$$

où γ_k est le nombre de valeurs propres négatives (*) de la variation seconde pour les extrémales q^k et où $D(q^k) = (D(p^k(0))/Dx)^{-1}$, $p^k(0)$ étant l'impulsion initiale de l'extrémale q^k. Cette formule est l'analogue fonctionnel de la méthode de la phase stationnaire pour l'intégrale

$$I = \int \exp\{ih^{-1}\mathscr{F}(x)\}\,\mathrm{d}x, \quad x \in R^n$$

qui, sous certaines conditions, est représentée pour $h \to 0$ par la formule (voir chap. 6, § 2)

$$I \approx (2\pi i h)^{n/2} \sum_k |D(x^k)|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{i\pi\gamma_k}{2} + \frac{i}{h}\mathscr{F}(x^k)\right\}$$

si le nombre de solutions x^k de l'équation $\mathrm{d}\mathscr{F} = 0$ est fini et si la matrice A de la forme $\mathrm{d}^2\mathscr{F}$ n'a pas pour $x = x^k$ de valeur propre nulle. Ici, γ_k est le nombre de valeurs propres négatives de la matrice A et $D(x) = \det A$ ([79, 2]).

§ 2 ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS RELATIVISTES

1. Considérons l'équation (1.16) du chapitre 1 et supposons que ses coefficients prennent les valeurs indiquées dans le tableau 1 dans les lignes 1, 2, 3, 4 (équations d'onde, de Maxwell, de Dirac et de Klein-Gordon-Fock).

(*) Comme on sait, ([43], [53]), γ_k est égal à l'indice de Morse.

Dans ce cas l'équation (1.16) du chapitre 1 peut s'écrire sous une forme plus simple

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}A\Phi(x,t)\right]^2 - C^2(x,t)\left[(\nabla + \mathrm{i}A\mathscr{A}(x,t))^2 + A^2\gamma^2\right]\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + \mathrm{i}AR(x,t)\right\}\psi(x,t) = 0 \quad (2.1)$$

où $\psi(x,t)$ est une fonction vectorielle : $\psi(x,t) = \psi_1, \dots, \psi_s$ et les coefficients prennent une des quatre valeurs suivantes :

TABLEAU 2

Équation	$\varphi(x,t)$	$C^2(x,t)$	$\mathscr{A}(x,t)$	γ	$B_k(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$	$R(x,t)$
Onde	0	$C^2(x,t) > 0$	0	0	0	0
Maxwell	$C^2(x,t) > 0$	0	0	0	Voir tabl. n° 1	1
Dirac	$\Phi(x,t)$ potentiel	C^2 = const	$\mathscr{A}(x,t) =$ $= \mathscr{A}_1(x,t), \dots, \mathscr{A}_n(x,t)$	mC – const	0	$\frac{e}{c}\{(\bar{\sigma}, \bar{H}) - \mathrm{i}(\bar{\alpha}, \bar{E})\}$
Klein-Gordon-Fock	–	–	Potentiel vecteur	–	0	0

L'équation caractéristique pour (2.1) a la forme

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} - \Phi(x,t)\right]^2 - C^2(x,t)\{[\nabla S + \mathscr{A}(x,t)]^2 + \gamma^2\} = 0. \quad (2.2)$$

Aux deux branches des solutions de cette équation (par rapport à $\partial S/\partial t$)

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = H^\nu(x, \nabla S^\nu, t)$$

$$H^\nu(x, p^\nu, t) = \Phi(x,t) + (-1)^\nu C(x,t)\sqrt{|p^\nu + \mathscr{A}(x,t)|^2 + \gamma^2}$$

correspondent deux ($\nu = 1,2$) systèmes d'équations bicaractéristiques

$$\dot{q}_i^\nu = -\frac{\partial H^\nu(q^\nu, p^\nu, t)}{\partial p_i^\nu}; \quad \dot{p}_i^\nu = \frac{\partial H^\nu(q^\nu, p^\nu, t)}{\partial q_i^\nu} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$q = q_1, \dots, q_n; \quad p = p_1, \dots, p_n; \quad \nu = 1,2 \qquad (2.4)$$

$$\dot{s}^\nu = H^\nu - \sum_i^n p_i^\nu H_{p_i}^\nu.$$

Soit $q(0) = q^0(\alpha), p(0) = p^0(\alpha)$, $s^\nu(0) = 0$, et $\Gamma\{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ une variété lagrangienne.

Notons par

$$Q^\nu(\alpha,t) = q^\nu(t); \qquad P^\nu(\alpha,t) = p^\nu(t); \qquad S^\nu(\alpha,t) = s^\nu(t),$$
$$\Gamma_t^\nu = \{Q^\nu(\alpha,t), P^\nu(\alpha,t)\} \tag{2.5}$$

2. On a le :

Théorème 3.4. *Soient $r^\nu(x)$ $(\nu = 1,2)$ deux fonctions vectorielles arbitraires indéfiniment différentiables de longueur unité et $\varphi^\nu(\alpha)(\nu = 1,2)$ (*) des fonctions arbitraires à support compact sur Γ, à valeurs dans H.*

Il existe des solutions de l'équation (2.1) *qui peuvent être représentées sous la forme de :*

$$\psi^\nu(x,t) = K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma^\nu,\alpha^0}\left(\frac{C[Q^\nu(\alpha,t),t]}{C[q^0(\alpha),0]}\right)^{1/2}$$
$$\left\{\frac{|p^0(\alpha) + \mathscr{A}[q^0(\alpha),0]|^2 + \gamma^2}{|p^\nu(\alpha,t) + \mathscr{A}[Q^\nu(\alpha,t),t]|^2 + \gamma^2}\right\}^{1/4}\varphi^\nu(\alpha)\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{(-1)^{\nu+1}\left[\int_0^t\left\{\sum_{k=1}^n P_k^\nu(\alpha,t)B_k(Q^\nu(\alpha,t),t)\right.\right.\right.$$
$$\left.+ R(Q^\nu(\alpha,t),t)\right\}\frac{\mathrm{d}t}{2C\sqrt{(p+\mathscr{A})^2+\gamma^2}}r^\nu(\alpha) \tag{2.6}$$
$$\nu = 1,2$$

$$\gamma^\nu = AS^\nu(\alpha^0,t) - \frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} Q^\nu(\alpha^0\,;0,t)$$

Les coefficients de $\psi^\nu(x,t)$ (des matrices $s\times s$, $e_{ij}^\nu(\alpha)$) qui dépendent de t comme paramètre peuvent être obtenus par substitution de $\psi^\nu(x,t)$ dans l'équation (2.1) et regroupement des coefficients des puissances de R_z. Un tel procédé est possible en vertu du théorème 3.4.

3. On peut trouver de façon élémentaire une solution de l'équation (2.1) qui soit une combinaison linéaire $\sum_{\nu=1}^{2} C_\nu\psi^\nu(x,t)$ des solutions mentionnées $\psi^\nu(x,t)$, et qui satisfasse des conditions initiales de la forme

$$\begin{cases} \psi(x,0) = K_{A,\Gamma,R_z}^{\gamma,\alpha^0}\varphi(\alpha)r(\alpha) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

(*) On peut prendre $\varphi(\alpha)$ à valeurs dans l'espace des fonctions généralisées dans H. Si $A = \mathrm{i}\partial/\partial\tau$, alors $\varphi^\nu(\alpha)$ pourrait être égal à une distribution en τ : $\delta(\tau), \theta(\tau), \tau^+ \ldots$

(pour des matrices quelconques bornées, d'ordre $s \times s, (e_{ij}(\alpha))$ ou

$$\begin{cases} \psi(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = K^{\gamma,\alpha^0}_{A,\Gamma,R_z}\,\varphi(\alpha)\,r(\alpha) \end{cases}$$

(pour des matrices quelconques bornées, d'ordre $s \times s, (e_{ij}(\alpha))$.

Dans l'espace S (c'est-à-dire à l'approximation d'ordre zéro en R_z) pour le premier cas, par exemple, il faut poser

$$\varphi^{\nu}(\alpha) = \Phi(q^0(\alpha),0) + (-1)^{\nu}\,C(q^0(\alpha),0)\sqrt{|\,p^0(\alpha) + \mathscr{A}(q^0(\alpha),0)|^2 + \gamma^2}$$

et prendre la demi-somme des solutions $\psi^{\nu}(x,t), \nu = 1,2$.

§ 3 EXEMPLES ET COROLLAIRES

1. Si $H = L_2[1,\infty]$ est un espace de fonctions de ω et A l'opérateur de multiplication par ω, le problème ainsi posé dans le cas des équations d'onde ou de Maxwell est celui du comportement asymptotique des solutions de ces équations pour les petites longueurs d'onde. En particulier, si Γ_t est, pour $t = 0$, le plan $p = p_0$, qui est parallèle au plan des coordonnées q, la solution $\psi^1(x,t)$ correspond au cas où, à l'instant initial on a une onde plane d'impulsion p_0. Le sens physique détaillé d'une telle formulation et son lien avec l'approximation de l'optique géométrique sont donnés dans la 5^e édition du livre de Courant et Hilbert ([38]). Il s'agit là de la formulation et de la solution locales du problème, c'est-à-dire valable pour les $t \leqslant t_0$ tels que les bicaractéristiques ne se rencontrent pas et que le jacobien DX/Dx_0 ne s'annule pas (voir 1°, § 1, chap. 1).

Au moyen de (2.6) on peut faire globalement le passage de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique. En particulier, les affirmations analogues à **3** et **6**, § 1, n° 1°, sont valables pour $\psi(x,t)$. On obtient aussi que la polarisation d'une solution de l'équation de Maxwell a une limite pour les petites longueurs d'onde et peut ainsi être observée à l'approximation de l'optique géométrique. A chaque rayon de l'optique géométrique on peut associer un vecteur $\vec{e}(t)$ qui varie le long du rayon. Pour le champ électrique $\vec{E}$ le vecteur $\vec{e}$ a la forme $\vec{e}_E = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\vec{u}$, pour le champ magnétique $\vec{H}, \vec{e}_H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unité qui satisfait l'équation (voir [13], [68])

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -(\vec{u}\,\mathrm{grad}\ln n)\,\vec{p}(\alpha,t) \tag{3.1}$$

avec $n = C\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Cette formule est valable quel que soit le temps t. Ainsi, l'existence de points focaux n'affecte pas la polarisation classique : la polarisation ne change pas par passage au travers des points focaux.

2. Une affirmation semblable est vraie pour la polarisation de spin de l'équation de Dirac (voir [15], [51, 2]). Les deux solutions $\psi^\nu(x,t), \nu = 1,2$ de l'équation de Dirac correspondent à l'électron et au positron ([81, 2], [86]).

Les conditions initiales de l'équation de Dirac satisfont les relations (II). Ces relations imposent des restrictions aux vecteurs $\bar{r}^\nu(\alpha), \nu = 1,2$, de la formule (2.6). On peut montrer que le vecteur propre $\bar{r}^\nu(\alpha)$ est un vecteur propre (de valeur propre nulle) de la matrice caractéristique

$$C^\nu = (-1)^\nu\sqrt{(C\nabla S_0 + C\mathscr{A})^2 + m^2C^4}I - \sum_{k=1} \alpha_k \left(C\frac{\partial S}{\partial x_k} - e\mathscr{A}_k\right) + \alpha_4 mC^2 \tag{3.2}$$

où I est la matrice identité.

Le rang de la matrice C^ν est égal à 2, c'est pourquoi il existe deux vecteurs linéairement indépendants $\bar{r}_i^\nu, i = 1,2$, qu'elle annule. Le système des vecteurs $\bar{r}_i^\nu, i = 1,2, \nu = 1,2$ forme une base d'un espace vectoriel de dimension 4, ce qui fait que n'importe quelle solution de l'équation de Dirac qui satisfait la condition initiale $\psi(x,0) = K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h,\Gamma,h}\varphi(\alpha)$ peut être représentée sous forme d'une combinaison linéaire d'expressions (2.6) si on pose dans cette formule $\bar{r}_i^\nu = r_\nu, \nu = 1,2, i = 1,2$.

3. Considérons la solution $\psi^1(x,t)$ de l'équation d'onde satisfaisant la condition initiale $\psi(x,0) = \varphi(x)e^{iAf(x)}g$, $A = \mathrm{i}\partial/\partial\tau$; g étant une fonction généralisée en τ.

Supposons que la variété initiale $\Gamma_0 = \{q^0 = \alpha, p^0 = \operatorname{grad} f(\alpha)\}$ satisfasse la relation

$$|p^0(\alpha)|^2 C^2(\alpha,0) = \text{const.} \tag{3.3}$$

Supposons que le plan $q = x$ ne coupe Γ_t qu'en des points réguliers. Alors, le nombre de ces points est fini. Autrement dit, le point (x,t) n'est pas focal et l'équation $Q(\alpha,t) = x$ a un nombre fini de solutions $\alpha^1,\dots,\alpha^k$. Puisqu'elles dépendent de x,t, nous écrirons $\alpha^i(x,t), 1 \leqslant i \leqslant k$. En vertu de (2.6), la solution $\psi^1(x,t)$ a la forme

$$\begin{aligned}\psi^1(x,t) = C(x,t) &\sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha^j(x,t))C^{-1}(\alpha^j(x,t),0)\\ &\cdot\left|\det\left\|\frac{\partial Q}{\partial\alpha_l}(\alpha^j(x,t),t)\right\|\right|^{-1/2}\operatorname{Re}\left[\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}\pi\gamma^j}{2} + \mathrm{i}Af(\alpha^j(x,t))\right\}\right.\\ &\left.\cdot\left[1 + \sum_{m=l}^{\infty}\varphi_m(\alpha^j(x,t),t)R_Z^m\right]g\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

où γ^j est l'indice de Morse du chemin $Q(\alpha^j, 0, t)$, c'est-à-dire le nombre de zéros de

$$J(\alpha^j, \tau) = \det \left\| \frac{\partial Q(\alpha^j, \tau)}{\partial \alpha_l^j} \right\| \qquad \text{pour } 0 < \tau \leqslant t .$$

Après avoir substitué l'expression (3.4) dans l'équation d'onde et annulé les coefficients des puissances de R_z, nous trouvons que les $\varphi_m(\alpha^j(x, t), t)$ vérifient les équations :

$$\mathrm{i}A \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{C(\alpha^j, 0)}{C(Q(\alpha^j, t), t)} \sqrt{|J(\alpha^j, t)|}\, \Box_{\alpha^j t} \frac{C(Q(\alpha^j, t), t)}{C(\alpha^j, 0)\sqrt{|J(\alpha^j, t)|}} \varphi_{m-1}$$

où $\Box_{\alpha^j, t}$ est l'opérateur de d'Alembert en coordonnées « curvilignes » α^j, t.

Soit $g = \theta(\tau)$, alors

$$\mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi/2)\gamma}\ \mathrm{e}^{-f(\alpha\,(x, t))\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau}\, \theta(\tau) = \begin{cases} (-1)^{-\gamma^j/2}\, \theta(\tau - f(\alpha^j(x, t))) & \text{pour } \gamma^j \text{ pair} \\ \dfrac{(-1)^{-(\gamma^j - 1)/2}}{\pi} \ln|\tau - f(\alpha^j(x, t))| & \text{pour } \gamma^j \text{ impair}. \end{cases}$$

Un résultat tout à fait semblable est valable pour $\psi^2(x, t)$. On obtient donc la solution globale du problème (1.1)-(1.2) du chap. 1, lorsque le point (x, t) n'est pas focal.

4. Si le point (x, t) est focal, d'après le théorème 3.3 l'asymptotique de la solution se présente sous forme d'une intégrale dont la multiplicité est égale à l'indice de défaut (l'ordre moins le rang) de la matrice $\| \partial Q_i(\alpha, t)/\partial \alpha_j \|$ au point (x, t). Considérons maintenant le cas où la variété Γ_t est en position générale et où l'indice de défaut vaut 1.

Soit une équation d'onde à coefficients indépendants du temps. Supposons aussi que le support R de la fonction $\varphi(\alpha)$ soit assez petit pour que son image R_t n'appartienne qu'à une seule carte de l'atlas $\mathscr{X}$. Soient

$$\varphi(x, 0) = \varphi(x) \exp[\mathrm{i}\omega f(x)] \quad \text{et} \quad C^2(x)\,|\mathrm{grad}\, f(x)|^2 = \mathrm{const}.$$

Soient $\tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ les coordonnées locales de la carte canonique. Désignons par $\tilde{p}_1'$ la valeur de l'impulsion $\tilde{p}'$ au point central de la carte.

L'asymptotique, pour $\omega \to \infty$, de la fonction $\psi'(x, t)$ est de la forme

$$\psi'(x, t) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma\pi/2}\sqrt{\mathrm{i}\omega}}{\sqrt{2\pi}} C(x) \int_{\tilde{p}_1' - \varepsilon}^{\tilde{p}_1' + \varepsilon} \mathscr{F}(\tilde{p}_1)\, \varphi(\alpha) \left| \frac{\partial \tilde{p}_1\, \partial \tilde{x}_2 \dots \partial \tilde{x}_n}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_n} \right|^{-1/2} \cdot$$

$$C^{-1}(\alpha) \cdot \exp[\mathrm{i}\omega f(\alpha)] \exp[\mathrm{i}\omega(\tilde{x}_1 - \tilde{X}_1(\alpha, t))\tilde{p}_1]\, \mathrm{d}\tilde{p}_1 + O(1/\sqrt{\omega}),$$

où $\alpha = \alpha(\tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, t)$ s'obtient à partir des équations :

$$\tilde{p}_1 = P_1(\alpha, t), \quad \tilde{x}_i = Q_i(\alpha, t), \quad n \geqslant i \geqslant 2;$$

la fonction $\mathscr{F}(\tilde{p}_1) = 1$ pour $\tilde{p}'_1 - \varepsilon/2 \leqslant \tilde{p}_1 \leqslant \tilde{p}'_1 + \varepsilon/2, \mathscr{F}(\tilde{p}_1) = 0$ pour $\tilde{p}_1 > \tilde{p}'_1 + \varepsilon, \tilde{p}_1 < \tilde{p}'_1 - \varepsilon$ et est suffisamment régulière, γ est le nombre de zéros de $\det \| \partial Q_i(\alpha, \tau)/\partial \alpha_j \|$ dans le semi-intervalle $0 < \tau \leqslant t$.

Par exemple dans le cas à deux dimensions, d'après nos hypothèses, le rang de la matrice $\| \partial Q_i(\alpha, \tau)/\partial \alpha_j \|$ ne peut être inférieur à 1. C'est pourquoi n'importe quel point focal s'exprime par une intégrale à une dimension. Par exemple, si la projection de la variété de singularités sur un plan (caustique) a la forme d'une courbe différentiable régulière et si $x = x'$ est la projection du centre de la carte, alors les axes $\tilde{x}_2$ et $\tilde{x}_1$ ont des directions correspondant à la tangente et à la normale de la courbe au point x'. Dans ce cas on peut simplifier l'intégrale : en développant en puissances de ε l'expression sous le signe intégrale, nous arrivons à la somme d'une fonction d'Airy et de sa dérivée (voir [79,1] (*)). Lorsque la caustique a la forme représentée dans la figure 9 l'intégrale se simplifie aussi après développement en puissances de ε, mais ne fournit déjà plus la fonction d'Airy.

§ 4 SYSTÈME DES ÉQUATIONS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Considérons le système des équations de la théorie de l'élasticité

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \bar{u}) + 2D \operatorname{grad} \mu = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$$

où $\lambda = \lambda(x) > 0, \mu = \mu(x) > 0, x = (x_1, x_2, x_3)$, (coefficients de Lamé), $\rho = \rho(x)$ (densité du milieu) est une fonction de x, C^∞.

$$D = \|\varepsilon_{ij}\| = \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right\|$$

est le tenseur de déformation. Le polynôme caractéristique a quatre racines réelles. Il leur correspond les équations caractéristiques suivantes [30, 48]

$$\frac{\partial S_1^\sigma}{\partial t} = (-1)^\sigma \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} |\operatorname{grad} S_1^\sigma| \quad \sigma = 1, 2$$

$$\frac{\partial S_2^\sigma}{\partial t} = (-1)^\sigma \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} |\operatorname{grad} S_2^\sigma| \qquad \sigma = 1, 2.$$

(*) Les formules unidimensionnelles du travail [79, 1] auraient été mentionnées pour la première fois dans la thèse de I. A. Hordeef.

Ces équations à leur tour définissent un système d'équations des bicaractéristiques :

$$\frac{dx^\sigma_\beta}{dt} = (-1)^\sigma a_\beta(x^\sigma_j)\frac{p^\sigma_\beta}{|p^\alpha_\beta|}, \qquad \sigma = 1,2, \quad \beta = 1,2, \quad j = 1,2,3\,;$$

$$\frac{dp^\sigma_\beta}{dt} = (-1)^{\sigma+1}\operatorname{grad} a_\beta(x^\sigma_\beta)\,|p^\sigma_\beta|, \qquad x^\sigma_\beta = (x^\sigma_{\beta_1}, x^\sigma_{\beta_2}, x^\sigma_{\beta_3}),$$

$$p^\sigma_\beta = (p^\sigma_{\beta_1}, p^\sigma_{\beta_2}, p^\sigma_{\beta_3})\,;$$

$$a_\beta(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}} & \text{pour } \beta = 1 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} & \text{pour } \beta = 2 \end{cases}$$

Soit Γ^σ_β une variété lagrangienne à trois dimensions dans l'espace de phase à six dimensions

$$\Gamma^\sigma_\beta = \{\mathring{x}^\sigma_\beta(\alpha), \mathring{p}^\sigma_\beta(\alpha)\}.$$

Posons dans le système hamiltonien

$$x^\sigma_\beta(0) = \mathring{x}^\sigma_\beta(\alpha), \; p^\sigma_\beta(0) = \mathring{p}^\sigma_\beta(\alpha)$$

et désignons, comme d'habitude,

$$x^\sigma_\beta(t) = X^\sigma_\beta(t,\alpha), \qquad p^\sigma_\beta(t) = P^\sigma_\beta(t,\alpha).$$

Soit

$$\Gamma^\sigma_{\beta t} = \{X^\sigma_\beta(t,\alpha), \; P^\sigma_\beta(t,\alpha)\}$$

l'image de la variété lagrangienne Γ^σ_β par un déplacement le long des solutions du système hamiltonien correspondant à la fonction S^σ_β.

Théorème 3.5. *Il existe des solutions* u^σ_1, $\sigma = 1,2$ *de l'équation de l'élasticité, ayant la forme suivante :*

$$u^\sigma_1 = K^{\gamma^\alpha, \alpha^0}_{A, \Gamma^\sigma_{1t}, R_Z}\varphi^\sigma_1(\alpha)\frac{\sqrt{\lambda[X^\sigma_1(\alpha,t)] + 2\mu[X^\sigma_1(\alpha,t)]}}{\rho(X^\sigma_1(\alpha,t))}\cdot P^\sigma_1(\alpha,t)$$

où les $\varphi^\sigma_1(\alpha) \in C^\infty, \sigma = 1,2$ *sont deux fonctions arbitraires, à support compact sur* Γ *et à valeurs dans* H, *et où*

$$\gamma^\alpha = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^0_t] - A\int_{l[\alpha^0,\alpha^0_t]}\left(H\,dt - \sum_{i=1}^n P_i\,dq_i\right)$$

Soient $\vec{n}^\sigma(\alpha, t)$ et $\vec{v}^\sigma(\alpha, t)$ des vecteurs unitaires dans l'espace à 3 dimensions, orthogonaux entre eux et orthogonaux au vecteur $P_2^\sigma(\alpha, t)$. Il existe des solutions de l'équation de l'élasticité ayant la forme suivante

$$u_2^\sigma = K_{A, \Gamma_{2t}^\sigma, R_Z}^{\gamma^\alpha, \alpha_t^0} \varphi_2^\sigma(\alpha) \frac{1}{\sqrt{\rho[X_2^\sigma(\alpha, t)]}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \vec{n}^\sigma(\alpha, t) \cos \int_0^t \left(\frac{\partial \vec{n}^\sigma(\alpha, t)}{\partial t}, \vec{v}^\sigma(\alpha, t) \right) \mathrm{d}t + \vec{v}^\sigma(\alpha, t) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sin \int_0^t \left(\frac{\partial \vec{v}^\sigma(\alpha, t)}{\partial t}, \vec{n}^\sigma(\alpha, t) \right) \mathrm{d}t \right\},$$

où

$$\gamma^\sigma = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha_0^0, \alpha_t^0] - A \int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} \left(H \, \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n P_i \mathrm{d}q_i \right)$$

et où $\varphi_2^\sigma \in C^\infty$, $\sigma = 1, 2$ sont n'importe quelles fonctions à support compact, indéfiniment différentiables sur Γ à valeurs dans H.

Habituellement l'opérateur $A = \mathrm{i}\partial/\partial\tau$, et $\varphi(\alpha)$ est une fonction « discontinue » de τ (par exemple $\tau^+, \delta(\tau), \theta(\tau)$, etc...), multipliée par une fonction indéfiniment différentiable de α à valeurs sur la droite.

Puisque les fonctions $\varphi_i^\sigma, i = 1, 2, \sigma = 1, 2$ sont arbitraires, une combinaison linéaire de solutions u_i^σ peut satisfaire des conditions initiales arbitraires de la forme :

$$\bar{u}(x, 0) = K_{A, \Gamma_1, R_Z}^{0, \alpha^0} \bar{\varphi}_0(\alpha),$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x, 0) = K_{A, \Gamma_2, R_Z}^{0, \alpha^0} \bar{\psi}_0(\alpha).$$

§ 5 LE CAS STATIONNAIRE

Supposons réalisée la condition (3.3). Si on pose $A = \mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, on peut alors écrire l'équation d'onde sous la forme :

$$C^2(x) \Delta \psi - A^2 \psi = 0. \tag{5.1}$$

C'est aussi d'après notre classification une équation d'onde. Si on pose $A = \omega$, on obtient alors une équation hamiltonienne. Le passage de $\mathrm{i}\partial/\partial t$ à l'opérateur de multiplication par ω s'accomplit au moyen de la transformation de Fourier.

Puisque en physique, la formulation du problème pour l'équation d'Helmholtz se ramène toujours à la formulation du problème de Cauchy pour l'équation d'onde, il est naturel de parler de la solution de l'équation d'Helmholtz induite par la solution d'un problème de Cauchy donné pour l'équation d'onde.

Une situation analogue a lieu pour les équations stationnaires et non stationnaires de Schrödinger.

De cette façon, on peut formellement déterminer la solution $\psi(x, \omega)$ de l'équation (5.1) pour $A = \omega$ induite par le problème (1.1), (1.2), chap. 1 comme transformée de Fourier en t $(0 \leqslant t \leqslant +\infty)$ de la solution $u(x, t)$ du problème (1.1), (1.2) du chapitre 1 considérée comme fonction généralisée en t d'un espace de fonctions généralisées K. Dans ce cas, l'espace K se détermine par le comportement de la fonction $u(x, t)$ pour $t \to \infty$. Le développement asymptotique de $u(x, t)$ en puissance de R_z deviendra alors le développement asymptotique de la solution $\psi(x, \omega)$ en tant que fonction généralisée en ω de l'espace $\tilde{K}$ (en puissance de $1/\omega$). Sans préciser l'espace K et son espace de fonction d'essai, nous pouvons formuler un corollaire évident de (2.6) :

$$\psi(x, \omega) = C(x) K_{\omega, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \frac{\varphi(\alpha)}{C[X(\alpha)]} + \Phi(x, \omega),$$

où $\Phi(x, \omega)$ est telle que $\omega\Phi(x, \omega)$ appartienne à un espace donné de fonctions généralisées $\tilde{K}$.

Aux points qui ne sont pas focaux nous pouvons utiliser la formule (3.4). Cependant pour $t \to \infty$ le nombre k peut en général tendre vers ∞. A cause de cela, pour améliorer la convergence de la série, nous ajoutons sous le signe somme le terme $\left(1 - \dfrac{1}{1 + A}\right)^i$. Le premier terme du développement asymptotique en est inchangé. Alors la transformée de Fourier en t du premier terme de la fonction de Green aux points non focaux est de la forme :

$$\mathscr{G}(x, \xi) = C(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left\{i\omega\left[\displaystyle\int_0^{t^k} C^{-2}[Q(\alpha^k, \tau)]\, d\tau\right] - \dfrac{i\pi\gamma^k}{2}\right\}}{\sqrt{\left|\det\left\|\dfrac{\partial Q_i(\alpha^k, t^k)}{\partial \alpha_j^k}\right\|\right| \left|C[Q(\alpha^k, 0)]\right| \left(1 + \dfrac{1}{\omega^2}\right)^k}} \tag{5.2}$$

où $Q(\alpha, t)$ est solution du système

$$\dot{Q}_i = P_i, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial C^{-2}(Q)}{\partial Q}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$P(\alpha, 0) = \alpha, \qquad Q(\alpha, 0) = \xi, \qquad |\alpha|^2 = C^2(\xi)$$

et $\alpha^k = \alpha^k(x, \xi)$, $t^k = t^k(x, \xi)$ sont obtenus à partir de l'équation

$$X(\alpha^k, \xi, t^k) = x.$$

Apparemment cette asymptotique est aussi valable dans le cas où $C^{-2}(x) = E - v(x)$ et nous obtenons l'équation stationnaire de Schrödinger (équation de type mixte). Sur les exemples il est possible de montrer que les pôles de la fonction (5.2) (c'est-à-dire les points $E = E_n^0$ où la série diverge) et leurs résidus définissent (approximativement) non seulement les valeurs propres et les fonctions propres de l'équation de Schrödinger comme il fallait s'y attendre, mais aussi les niveaux dits quasi-stationnaires et les résonances (voir [51.4]).

Cette formule pourrait être obtenue par une autre méthode donnant une estimation plus précise. En plus, on peut aussi écrire l'asymptotique de la fonction de Green aux points focaux. Toutefois, nous ne le ferons pas ici car il faudrait des constructions supplémentaires.

La formule (5.2), plus précisément son analogue pour le problème aux limites de première espèce est une généralisation de la méthode bien connue des « réflexions », appliquée à la construction des fonctions de Green pour un rectangle.

Le problème du développement asymptotique pour les petites longueurs d'onde d'une solution de l'équation (5.1) lorsque $C^{-2}(x) = E - v(x)$, est équivalent au problème de l'asymptotique quasi-classique de la solution du problème aux fonctions propres de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi + v(x)\psi = \lambda_k\psi \qquad x = x_1, \dots, x_n \tag{5.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \, dx = 1.$$

L'asymptotique est ici recherchée en fonction de deux paramètres simultanément :

$$h \to 0, \qquad k \to \infty \tag{5.4}$$

tels de plus que $kh \to$ const. Lorsque $v(x)$ croît polynomialement, une telle asymptotique coïncide avec l'asymptotique en fonction d'un seul paramètre : $k \to \infty$.

Ce problème est équivalent au problème de l'asymptotique de la solution de l'équation (5.1) pour $\omega \to \infty, C^{-2} = E - v(x)$. Nous nous sommes déjà posé ce dernier problème lors du théorème 3.1.

Nous allons formuler maintenant un théorème plus général concernant les solutions du problème (5.3).

Théorème 3.6. *Soit une famille de variétés lagrangiennes compactes $\Gamma(E)$, dépendant continûment du paramètre $E \in \varepsilon = \{\mathring{E} - \varepsilon, \mathring{E} + \varepsilon\}$ et invariantes par rapport au système dynamique.*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial v(q)}{\partial q_i}, \qquad \mu\dot{q}_i = p_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2\mu} + v(q) \qquad H|_\Gamma = E, \quad p = p_1, \dots, p_n, \ q = q_1, \dots, q_n \tag{5.5}$$

où $v(q)$ *tend vers* ∞ *pour* $|q| \to \infty$ *et est une fonction indéfiniment différentiable. Soient* $\mu(E)$ *une valeur propre et* $\chi(\alpha)$ *la fonction propre de l'opérateur auto-adjoint du système dynamique* (5.5), *correspondant à la mesure invariante* $\sigma(\alpha)$, *c'est-à-dire*

$$\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta t}\chi(\alpha) = \mu(E)\chi(\alpha) \qquad \left(\frac{\delta}{\delta t} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Alors il existe des valeurs propres $\lambda^k(h)$ *de l'opérateur hamiltonien*

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta + v(x), \qquad x = x_1, \dots, x_n \tag{5.6}$$

telles que

$$\lambda^k(h) - E^k + \mu(E^k)h = O(h^2),$$

où E^k *est un certain sous-ensemble de* ε, *dépendant de* h *et tel que sur* $\Gamma(E^k)$ *les conditions suivantes soient satisfaites*

$$\frac{2}{\pi h}\oint_i p\,\mathrm{d}q = l_i\,(\mathrm{mod.}\ 4), \qquad i = 1, \dots, i_0,$$

où i_0 *est le nombre de Betti de la variété* Γ, $\oint_i$ *est une intégrale sur le* i-ième *cycle de base, et* l_i *son indice. Soit* $E_{\Delta\lambda}$ *la mesure spectrale de l'intervalle* $\Delta\lambda$, *alors*

$$\| [E_{\Delta\lambda} - 1] K^{0;\alpha^0}_{1/h,\Gamma(E^k)}\chi(\alpha) \|_{\Gamma_2} = O(h), \tag{5.7}$$

ou $\Delta\lambda = \{ \lambda^k - O(h), \lambda^k + O(h) \}$.

La méthode exposée plus bas permettra aussi de trouver une approximation des valeurs propres à $O(h^N)$ près, où N est n'importe quel entier, et de restreindre dans la relation (5.7) l'intervalle $\Delta\lambda$ à $O(h^N)$. Ainsi, si le point λ^k est simple, et si l'intervalle $\lambda^k \pm O(h^N)$ ne contient pas de points du spectre, on obtient alors l'asymptotique de la fonction propre ψ_k de l'opérateur $\hat{H}$.

Considérons l'équation de Pauli

$$\hat{H}_n\psi = \{(-\mathrm{i}h\nabla + \mathscr{A}(x))^2 - \Phi_0(x) - \mathrm{i}eh(\bar{\sigma}_2, \bar{H}(x))\}\psi = E\psi. \tag{5.8}$$

Supposons que $\Gamma(E)$ satisfasse les conditions du théorème précédent pour

$$H(x,p) = [p + \mathscr{A}(x)]^2 - \Phi_0(x) \tag{5.9}$$

Un opérateur de la forme

$$R = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}e(\bar{\sigma}_2, \bar{H}) \tag{5.10}$$

est auto-adjoint dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\Gamma(E)$ par rapport à la mesure invariante $\sigma(\alpha)$. Supposons que $\mu(E)$ soit une de ses valeurs propres et que $\chi(\alpha)$ soit la fonction propre correspondante. (Remarquons que, lorsque $R = \mathrm{i}\,\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ (par exemple, pour l'équation de Schrödinger), on peut supposer en particulier que $\mu = 0, \chi(\alpha) = 1$).

Théorème 3.6a. *Sous les hypothèses énoncées, le théorème* 3.6 *reste vrai si on pose dans* (5.5)

$$H(p, q) = (p + \mathscr{A}(q))^2 - \Phi_0(q)$$

et si on remplace l'hamiltonien par l'opérateur

$$\hat{H}_P = [- ih\nabla + \mathscr{A}(x)]^2 - \Phi_0(x) - ihe(\bar{\sigma}_2, \overline{H}(x)).$$

Nous voyons que pour l'équation de Pauli, il s'ajoute à l'opérateur ordinaire de déplacement le long de la trajectoire du système dynamique, une matrice caractérisant la variation de la polarisation du spin le long de la trajectoire. Ainsi (*), le spin existe en mécanique classique mais n'affecte pas la trajectoire classique. Toutefois en présence du spin, il est nécessaire d'étudier les propriétés spectrales non de l'opérateur de déplacement le long d'une trajectoire, mais celles de l'opérateur (5.10) puisque les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur R correspondent au problème d'une particule classique possédant un spin.

(*) Pour l'existence d'une limite classique de la polarisation du spin, voir [19]; [68]; [58]; [66]. Dans notre travail on donne une démonstration rigoureuse de ce fait, on obtient le lien avec l'opérateur de déplacement du système dynamique et on étudie le comportement du spin aussi bien près des foyers que loin d'eux.

CHAPITRE 4

ÉQUATIONS A COEFFICIENTS OPÉRATORIELS

§ 1 ÉQUATIONS DANS DES ESPACES DÉNOMBRABLEMENT NORMÉS ET PROBLÈMES A PLUSIEURS CORPS EN MÉCANIQUE QUANTIQUE

Nous allons analyser en détail un problème qui s'avère des plus généraux et des plus actuels en physique et en chimie quantiques : c'est-à-dire le cas d'une équation linéaire aux dérivées partielles dont seuls les coefficients des dérivées par rapport à certaines variables contiennent un « petit » paramètre. Cette situation apparaît dans les problèmes d'interaction de particules lourdes et légères, par exemple en théorie quantique des molécules ou en théorie des collisions.

Dans ces conditions, l'opérateur différentiel dépendra de deux groupes de variables. Soit n le nombre de variables telles que les coefficients des dérivées partielles correspondantes contiennent le « petit » paramètre (par exemple, les variables décrivant le système des particules lourdes). Grâce à des hypothèses assez générales sur la dépendance de l'opérateur par rapport aux variables restantes, dont le nombre peut être égal à zéro, et à leurs dérivées, nous allons pouvoir simplifier l'écriture et obtenir une équation différentielle par rapport aux n variables avec des coefficients opératoriels paramétrés par ces variables.

Par exemple l'équation

$$-\frac{h^2}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}-\frac{h^2}{2m_2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}+v(x_1,x_2)\psi=\lambda\psi \tag{1.1}$$

où $m_1 \gg m_2$ sera écrite

$$-\frac{h^2}{2m_1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+A(x_1)\psi=\lambda\psi$$

où $A(x_1)$ est l'opérateur

$$A(x_1)=-\frac{h^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+v(x_1,x_2)$$

qui dépend de x_1 comme d'un paramètre. L'opérateur $A(x_1)$ est non borné. Dans le cas où $v(x_1, x_2) \in C^\infty$, on peut dire qu'il transforme l'espace $W_2^k[R^1]$ des fonctions de x_2 dans $W_2^{k-2}[R^1]$. Ainsi, si l'on considère l'espace dénombrablement normé $W_2^\infty[R^1]$, c'est-à-dire l'espace des fonctions de x_2 appartenant à $W_2^k[R^1]$, avec $k = 1, 2, \ldots$, il est évident que l'opérateur $A(x_1)$ transforme cet espace en lui-même.

La fonction $\psi(x_1, x_2)$ peut être considérée comme une fonction de x_1 à valeurs dans l'espace $W_2^\infty[R^1]$ des fonctions de x_2.

Généralement, nous ne concrétiserons pas l'espace dénombrablement normé dans lequel agissent les coefficients opératoriels, mais dans toutes les applications cet espace est l'espace des vecteurs dont la norme appartient à $W_2^\infty[R^s]$, s étant un entier.

Considérons encore un exemple :

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left[h^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - v(x_1, x_2)\right]\psi = \mathscr{F}(x_1, x_2, t, h),$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2, h) \tag{1.2}$$

Supposons que toutes les fonctions données soient C^∞ par rapport à tous leurs arguments et que les expressions

$$\operatorname*{Max}_{\substack{0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 \leqslant h \leqslant 1}} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \mathscr{F}(x_1, x_2, t, h) \right|^2 \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \right)^{1/2} \tag{1.3}$$

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant h \leqslant 1} \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} \psi_0(x_1, x_2, h) \right|^2 \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$

soient bornées pour $k = 1, 2, \ldots$

Cela signifie que $\mathscr{F}(x_1, x_2, t, h)$ en tant que fonction des variables x_1 et x_2, appartient à $W_2^\infty[R^2]$ et est continue en t et h. Nous désignerons respectivement par $W_2^\infty[R^2, C_2]$ et $W_2^\infty[R^2, C_1]$ les espaces de fonctions possédant un nombre dénombrable de normes de la forme (1.3) ou (1.4).

Nous verrons (voir chap. 5) que la solution $\psi(x_1, x_2, t, h)$ du problème (1.2) satisfait la condition

$$h\psi(x_1, x_2, t, h) \in W_2^\infty[R^2, C_2].$$

Autrement dit, il existe N tel que, si $\mathscr{F}(x_1, x_2\, t\, h) \in W_2^N[R^2, C_2]$ et $\psi_0(x_1, x_2, h) \in W_2^N[R^2, C_1]$, alors $h\psi(x_1, x_2, t, h) \in W_2^{m(N)}[R^2, C_2]$,

et $$\lim_{N\to\infty} m(N) = \infty.$$

Nous n'avons pas sélectionné ici les variables t et x_1 dont les dérivées contiennent le petit paramètre h. Cependant, nous pouvons considérer l'espace $W_2^N[R^2, C_2]$ comme l'espace $W_2^N[R^1, C_2]$ des fonctions de x_1, t, h à valeurs dans l'espace $W_2^N[R^1]$ des fonctions de x_2.

Ainsi $\qquad W_2^N[R^2, C_2] \supseteq W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}$.

En effet,

$$\| \mathscr{F}(x_1, x_2, t, h) \|_{W_2^N\{R^1, C_2, W_2^N[R^1]\}}$$

$$= \underset{\substack{0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 \leqslant h \leqslant 1}}{\mathrm{Max}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x_1^j} \mathscr{F}(x_1, x_2, t, h) \right\|^2_{W_2^N[R^1]} \mathrm{d}x_1} \tag{1.5}$$

Soit $\{B^N\}$ la suite d'espaces de Banach $B^{N+1} \subset B^N, N = 1, 2, \ldots$ définissant l'espace dénombrablement normé B. Généralement, nous aurons à considérer l'espace des fonctions de $(x_1, \ldots, x_n, t, h)$, appartenant à $W_2^\infty[R^n, C_2]$ et à valeurs dans un certain espace abstrait dénombrablement normé B^∞. Nous désignerons par $W_2^\infty[R^n, C_2, B^\infty]$ cet espace de fonctions muni d'un nombre dénombrable de normes de la forme

$$\underset{\substack{0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 \leqslant h \leqslant 1}}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{\substack{i \leqslant n+1 \\ k \leqslant N}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \mathscr{F}(x_1, \ldots, t, h) \right\|^2_{B^N} \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n, \quad x_{n+1} = t \tag{1.6}$$

De même, nous désignerons par $C^\infty[R^{n+1}, C_1, B^\infty]$ cet espace muni d'un nombre dénombrable de normes de la forme

$$\underset{\substack{0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 \leqslant h \leqslant 1 \\ |x| \leqslant \infty}}{\mathrm{Max}} \sum_{\substack{i \leqslant n+1 \\ k \leqslant N}} \left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \mathscr{F}(x, t, h) \right\|_{B^N},$$

$$x_{n+1} = t \tag{1.7}$$

Supposons que sur la variété Γ soit donné un ensemble de vecteur de base $X_\nu(\alpha)$ $(\nu = 1 \ldots r)$, appartenant à un certain espace dénombrablement normé B^∞ et indéfiniment différentiables par rapport au paramètre α, c'est-à-dire tels que les dérivées de ces vecteurs par rapport à α appartiennent à nouveau à B^∞. L'opérateur canonique $K^{\gamma, \alpha}_{1/h, \Gamma, h}$ qui transforme une fonction de la forme $\sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha) X_\nu(\alpha)$ à valeurs dans B^∞ en une certaine fonction de $x_1, \ldots, x_n$ à valeurs dans B^∞, se définit comme à l'ordinaire.

Rappelons que $e^i(\alpha, 0) = e^i(\alpha) I$ où I est la matrice unité dans ce sous-espace et que les fonctions $\{e^i(\alpha)\}$ constituent une partition de l'unité subordonnée à l'atlas canonique $\mathscr{X}$.

§ 2 SOLUTION ASYMPTOTIQUE DU PROBLÈME DE CAUCHY D'UNE ÉQUATION A COEFFICIENTS OPÉRATORIELS

Nous allons étudier l'asymptotique de la solution de l'équation (3.7), ch. I. Considérons, dans l'espace dénombrablement normé B^∞, intersection d'espaces de Banach $B^1, B^2, \dots, B^N, \dots$ tels que $B^{i+1} \subseteq B^i$, l'opérateur $\mathscr{L}(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, x_1, \dots, x_n, t, h)$ dépendant de $2n + 3$ paramètres et transformant B^∞ en lui-même. Supposons que l'opérateur $\mathscr{L}$ soit indéfiniment différentiable par rapport à tous ces paramètres dans le domaine $p \in \Omega_p$, $x \in \Omega_x, 0 \leqslant t \leqslant T$, et que toutes ses dérivées partielles transforment B^∞ en lui-même.

1) Supposons que B^1 soit un espace d'Hilbert et qu'il existe une valeur propre $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ des opérateurs $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ et $\mathscr{L}_0^* = \mathscr{L}^*(p, p_{n+1}, x, t, 0)$, dépendant des paramètres

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n), p_{n+1}, x, t.$$

Supposons aussi que la multiplicité de cette valeur propre soit la même pour $\mathscr{L}_0$ et $\mathscr{L}_0^*$, ne dépende pas des paramètres et soit finie à moins que

$$\mathscr{L}_0 \equiv \mathscr{L}_0^* \equiv \lambda(p, p_{n+1}, x, t).$$

Soient $X_1(p, p_{n+1}, x, t), X_2(p, p_{n+1}, x, t), \dots, X_r(p, p_{n+1}, x, t)$ et $X_1^+, \dots, X_r^+$ les fonctions propres des opérateurs $\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0)$ et $\mathscr{L}^*(p, p_{n+1}, x, t, 0)$, correspondant à la valeur propre $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$. En fait, il suffit que les matrices $\| (X_\nu, \mathscr{F}_i X_\mu) \|_{\nu, \mu < r < \infty}$ où les $\mathscr{F}_i$ sont n'importe quelles dérivées de l'opérateur $\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, h)$ par rapport aux paramètres, possèdent un sous-espace invariant dont la dimension m est finie et indépendante des paramètres p, x, t pour $p \in \Omega_p, x \in \Omega_x, t \in [0, T]$. Dans ce cas, il suffira que les fonctions X_ν^+ et X_ν engendrent ce sous-espace. On suppose qu'elles appartiennent à B^∞ et que det $\| (X_i^+ X_j) \| \neq 0$. De cette inégalité résulte que l'on peut choisir $X_i^+ (i = 1, \dots, r)$ de telle sorte que $(X_i^+, X_j) = \delta_{ij}$.

Soit P_λ l'opérateur de projection sur le sous-espace propre de l'opérateur $\mathscr{L}_0$ correspondant à la valeur propre $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$, et P_λ^+ l'opérateur de projection sur le sous-espace sous-tendu par les vecteurs $X_1^+, X_2^+, \dots, X_r^+$.

Supposons que l'opérateur

$$T = \{ [\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0) - \lambda(p, p_{n+1}, x, t)] (1 - P_\lambda)^{-1} (1 - P_\lambda^+) \}$$

existe et soit partout défini dans B^∞, et que

$$\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, h) = \sum_{k=0}^{m} \Lambda_k(p, x, t, h) p_{n+1}^k.$$

Posons

$$\hat{\mathscr{L}}\psi = \hat{\mathscr{L}}\left(- ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, - ih\frac{\partial}{\partial x_n}, - ih\frac{\partial}{\partial t}, x_1, \dots, x_n, t, h\right)\psi$$
$$= \sum_{k=0}^{m} \Lambda_k\left(- ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, - ih\frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_n, t, h\right)\left(- ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi, \tag{2.1}$$

où

$$\Lambda_k\left(- ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, - ih\frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_n, t, h\right)\psi = \Lambda_k(\hat{p}, x, t, h)\psi$$
$$= (2\pi h)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/h}\, dp \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_k(p, x, t, h)\, e^{-ip\xi/h}\psi(\xi, t)\, d\xi \tag{2.2}$$

2) Nous supposons que le problème

$$\hat{\mathscr{L}}\psi = h^r \mathscr{F} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi\Big|_{t=0} = h^{s_k}\psi_0 \qquad k = 0, \dots, m-1 \tag{2.3}$$

où r et (s_k), $k = 0, \dots, m-1$, sont $m + 1$ nombres fixés et où $\mathscr{F} = \mathscr{F}(x, t, h)$, $\psi_0 = \psi_0(x, h)$ sont des fonctions quelconques indéfiniment différentiables par rapport à x et continues par rapport à h et t, à valeurs dans B^∞, ait une solution et qu'elle soit unique dans cette classe de fonctions (*).

Finalement, supposons que le polynôme caractéristique (au sens du § 3, ch. 1) $\lambda(p, p_{n+1}, x, t) = 0$ ait une racine réelle $p_{n+1} = H(p, x, t)$ de multiplicité constante et telle que $\partial\lambda/\partial p_{n+1} \neq 0$.

Supposons que les solutions $Q(\alpha, t), P(\alpha, t), 0 \leqslant t \leqslant T$, des équations (pour l'existence de telles solutions, T étant quelconque, cf. le lemme 1 de l'appendice)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \qquad \frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \qquad i = 1 \dots n \tag{2.4}$$

satisfaisant les conditions initiales

$$Q\,|_{t=0} = q^0(\alpha) \qquad P\,|_{t=0} = p^0(\alpha) \tag{2.5}$$

soient C^∞ et contenues respectivement dans les domaines Ω_x et Ω_p. Remarquons que, parmi ces conditions, il suffit en pratique pour les problèmes concrets de la mécanique quantique de vérifier seulement celles qui requièrent la multiplicité constante et le caractère isolé du point $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$.

Les conditions restantes, non triviales pour des opérateurs différentiels, sont :

(*a*) l'appartenance des fonctions propres X_i, X_i^+ à l'espace B^∞;

(*) La classe des fonctions $\mathscr{F}(x, t, h)$ est un espace dénombrablement normé muni des normes

$$\underset{\substack{x,\, 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 \leqslant h \leqslant 1}}{\text{Max}} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \mathscr{F}(x, t, h) \right\|_{B^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(*b*) l'existence d'une solution $X \in B^\infty$ de l'équation

$$[\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, 0) - \lambda] X = \mathscr{F}, \qquad \text{avec } \mathscr{F} \in B^\infty;$$

(*c*) l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.3). Ces conditions sont vérifiées par les équations de la mécanique quantique grâce aux inégalités sur l'énergie.

Sous ces hypothèses on a :

Théorème 4.1. *Soit $\Gamma = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$ une variété lagrangienne, α^0 son point initial.*

Pour toute fonction vectorielle à support compact

$$\varphi_0(x, h) = \{\varphi_{0_1}(\alpha, h), \dots, \varphi_{0_r}(\alpha, h)\}$$

indéfiniment différentiable en α et bornée pour $0 \leqslant h \leqslant 1$ ainsi que toutes ses dérivées, il existe une solution de l'équation

$$\hat{\mathscr{L}}\psi = 0 \tag{2.6}$$

telle que

$$\psi = K^{\gamma, \alpha_t^0}_{1/h, \Gamma_t, h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t, h) X_\nu[Q(\alpha, t), P(\alpha, t), t] \tag{2.7}$$

où

$$X_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t] = X_\nu(p, p_{n+1}, q, t)$$

pour $p = P(\alpha, t), \quad p_{n+1} = H(P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t), \quad q = Q(\alpha, t),$

$$\Gamma_t = \{Q(\alpha, t), P(\alpha, t)\},$$

α_t^0 *est le point initial de la variété* Γ_t,

$$\gamma = -\pi/2 \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t^0] + \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} \left(- H \,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} p_i \,\mathrm{d}q_i \right) \tag{2.8}$$

et $\varphi = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \varphi_2(\alpha, t, h), \dots, \varphi_r(\alpha, t, h)\}$ *satisfait l'équation*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}}\varphi\right) = \Bigg\| &- \left(X_\nu^+, \frac{\partial}{\partial t} X_\mu\right) \frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}} \\
&- \sum_{i=1}^{n+1} \left(X_\nu^+, \left(\frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial p_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\right) \frac{\partial X_\mu}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial x_i} (X_\nu^+, X_\mu) \\
&- \mathrm{i}\left(X_\nu^+, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h} X_\mu\right)_{h=0} \Bigg\| \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1/2} \varphi
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où

$$x_{n+1} = t, \quad p = P(\alpha, t), \quad x = X(\alpha, t) \quad \text{et} \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(\alpha, h).$$

Si $\mathscr{L}_0 \equiv \mathscr{L}_0^* \equiv \lambda(p, p_{n+1}, x, t)$, *en supposant que* $\exp\left\{ \mathrm{i}\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial h}\Big|_{h=0} \right\}$ *applique* B^∞ *en lui-même,* φ *satisfait l'équation*

$$\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{\partial \lambda}{\partial p_{n+1}}}\varphi = \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_j \partial x_j} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h}\Big|_{h=0}\right]\varphi .$$

Rappelons que l'égalité (2.7) n'est valable que modulo des fonctions indéfiniment différentiables en x et t qui, ainsi que toutes leurs dérivées, sont d'ordre $O(h^\infty)$.

Indiquons l'importante généralisation suivante du théorème 4.1 :

Soit A un opérateur fermé ayant un domaine de définition dense $D(A) \subset B^i, i = 1 2, \ldots$

Supposons que $(1 + \varepsilon A)^{-1}$ existe et soit partout défini dans B^i, $i = 1, 2, \ldots$ avec

$$\|(1 + \varepsilon A)^{-1}\|_{B^i} \leqslant 1, \qquad i = 1, 2, \ldots \text{pour tout } \varepsilon > 0 \text{ ou imaginaire pur,} \qquad \text{(I)}$$

et que A^{-1} existe.

Changeons formellement dans l'opérateur $\hat{\mathscr{L}}$ le paramètre $1/h$ par l'opérateur A.

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses du théorème* 4.1, *il existe une solution* (*) *de l'équation*

$$\tilde{\mathscr{L}}\left(-\frac{\mathrm{i}}{A}\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\mathrm{i}}{A}\frac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right)\psi = 0$$

pouvant s'écrire

$$\psi = K^{\gamma\, \alpha_t^0}_{A, \Gamma_t, (1+\varepsilon A)^{-1}} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t) X_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t] \qquad (2.10)$$

où $\gamma, \alpha_t^0, \Gamma_t, X_\nu, P(\alpha, t), Q(\alpha, t)$ *sont définis comme pour le théorème précédent, où* $\varphi_\nu(\alpha, t)$ *satisfait* (2.9) *et la condition initiale* $\varphi_\nu(\alpha, 0) = \varphi_\nu^0(\alpha)$, *les* $\varphi_\nu^0(\alpha)\,(\nu = 1, \ldots, r)$ *étant des fonctions quelconques indéfiniment différentiables à support compact.*

Remarques

(*a*) Rappelons que l'opérateur $\hat{\mathscr{L}}\left(-\dfrac{\mathrm{i}}{A}\dfrac{\partial}{\partial x}, -\dfrac{\mathrm{i}}{A}\dfrac{\partial}{\partial t}, x, t, A\right)$ est défini de la façon suivante :

$$\hat{\mathscr{L}}\varphi(x) = \Phi_A^{p_n}\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, A)\,\Phi_A^{x_n}\varphi(x)$$

(*) Notons qu'il faut remplacer dans (2.3) h par $1/A$ et que $\mathscr{F}$ et ψ_0 ne dépendent évidemment pas de h et appartiennent à l'espace des fonctions avec un nombre démontrable de normes

$$\operatorname*{Max}_{x,\,0 \leqslant t \leqslant T}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \mathscr{F}(x, t)\right\|_{B^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$\mathscr{L}(p, p_{n+1}, x, t, A)$ étant un opérateur dans B^∞ commutant avec A et développable en série asymptotique par rapport aux puissances de l'opérateur résolvant $(A - i)^{-1}$.

(*b*) Dans l'expression de γ donnée par la formule (2.8) il faut remplacer $1/h$ par A.

(*c*) Dans l'expression (2.10) on a, comme précédemment,

$$X_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t] \equiv X_\nu(p, p_{n+1}, q, t),$$

avec $p = P(\alpha, t)$, $q = Q(\alpha, t)$, $p_{n+1} = H(P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t)$, et ε est imaginaire pur.

(*d*) Le théorème 4.2 est aussi valable lorsque la condition (I) :

$$\| (1 + \varepsilon A)^{-1} \|_{B^j} \leqslant 1,$$

est satisfaite pour tout ε imaginaire pur ou négatif. Il reste encore vrai si la condition (I) n'est satisfaite que pour ε imaginaire pur, mais que $B^i = B^{i+} \oplus B^{i-}$ (voir page 152).

De ce théorème résultent tous les résultats précédents relatifs à l'asymptotique du problème de Cauchy.

Posons, dans le théorème 4.1,

$$m = 1, \Lambda_1 \equiv 1 \text{ et } \Lambda_0(p, x, t, h) = \mathscr{L}(p, x, t, h).$$

Supposons $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(p, x, t, 0)$ auto-adjoint dans B^1.

On obtient

Théorème 4.1a. *Sous les hypothèses du théorème* 4.1, *la solution de l'équation*

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathscr{L}(\hat{p}, x, t, h)\psi \tag{2.11}$$

$$\psi|_{t=0} = K^{0, \alpha^0}_{1/h, \Gamma, h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi^0_\nu(\alpha, h) X_\nu(p^0(\alpha), q^0(\alpha), 0) \tag{2.11a}$$

où $\varphi^0_\nu(\alpha, h) \in C^\infty[C^1]$, *peut s'écrire*

$$\psi = K^{\gamma, \alpha^0_t}_{1/h, \Gamma_t, h} \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha, t, h) X_\nu[P(\alpha, t), Q(\alpha, t), t] \tag{2.12}$$

où $\alpha^0_t, \Gamma_t, P(\alpha, t) Q(\alpha, t)$ *sont définis comme précédemment et où*

$$\varphi(\alpha, t, h) = \{\varphi_1(\alpha, t, h), \dots, \varphi_n(\alpha, t, h)\}$$

satisfait l'équation

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \Bigg\| -\left(X_\nu, \frac{\partial}{\partial t} X_\mu\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(X_\nu, \left(\frac{\partial \mathscr{L}_0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} X_\mu\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}\delta_{\mu\nu} - i\left(X_\nu, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h} X_\mu\right)_{h=0} \Bigg\|_{\substack{p=P(\alpha, t)\\ q=Q(\alpha, t)}} \varphi \tag{2.13}$$

et la condition initiale

$$\varphi_\nu(\alpha, t, h)\big|_{t=0} = \varphi_\nu^0(\alpha, h), \qquad \nu = 1, \ldots, r$$

A partir de ces théorèmes généraux on peut obtenir sans difficulté des formules asymptotiques (globales) pour les solutions des systèmes hyperboliques dont les données initiales sont oscillantes ou discontinues.

A titre d'exemple, nous allons considérer les systèmes hyperboliques faiblement connexes.

Remarquons enfin que le théorème 3.4 et tous les exemples du chapitre 1 résultent également du théorème 4.2.

§ 3 SYSTÈMES HYPERBOLIQUES

Considérons un système faiblement connexe hyperbolique au sens de Petrowski de la forme

$$Lu = \frac{\partial^s u}{\partial t^s} + \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_{n+1} \leqslant s \\ k_{n+1} \neq s}} a_{k_1 \ldots k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_{n+1}}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} u = 0,$$

$$u = (u_1, \ldots, u_r), \tag{3.1}$$

où $a_{k_1 \ldots k_{n+1}}(x,t)$ pour $k_1 + \ldots + k_{n+1} < s$ est une matrice d'ordre r. Introduisons les notations suivantes : on désigne par $\Lambda(\partial/\partial x, \partial/\partial t, x, t)$ la partie principale de l'opérateur L

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{\substack{k_1 + \ldots + k_{n+1} = s \\ k_{n+1} \neq s}} a_{k_1 \ldots k_{n+1}} \frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} + \frac{\partial^s}{\partial t^s} \tag{3.2}$$

et par $B(\partial/\partial x, \partial/\partial t, x, t)$ l'opérateur matriciel :

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{k_1 + \ldots + k_{n+1} = s-1} a_{k_1 \ldots k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^{s-1}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_1} \partial t^{k_{n+1}}} \tag{3.3}$$

Supposons maintenant que :

(1) les racines $H = H^\nu(x, p, t)$ du polynôme $\Lambda(p, H, x, t) = 0$ en H sont réelles et distinctes;

(2) le polynôme en $p, \Lambda(p, 0, x, t)$, est non-négatif et, en outre, si $|p| \geqslant \delta > 0$, alors $\Lambda(p, 0, x, t) \geqslant \varepsilon > 0$;

(3) les coefficients de l'équation sont C^∞.

L'équation caractéristique pour (3.1) s'écrit

$$\Lambda\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right) = 0 \tag{3.4}$$

Aux racines

$$\frac{\partial S^\nu}{\partial t} = H^\nu\left(x, \frac{\partial S^\nu}{\partial x}, t\right) \quad (\nu = 1, \ldots, s) \tag{3.5}$$

de cette équation correspondent s bicaractéristiques satisfaisantes des équations d'Hamilton du type (1.2), ch. 1, pour $\nu = 1, \ldots, s$.

Théorème 4.3. *Soient A un opérateur auto-adjoint de l'espace d'Hilbert H et $\varphi(\alpha)$ une fonction vectorielle à support compact indéfiniment différentiable sur la variété Γ et à valeurs dans H. Sous les hypothèses précédentes relatives à l'équation hyperbolique* (3.1) *il existe des solutions vectorielles $u(x,t)$ à valeurs dans H qui peuvent être représentées sous la forme*

$$u(x,t) = K^{\gamma^\nu, \alpha_t^0}_{A, \Gamma_t, Rz}\left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu}\right]^{1/2}_{t=0}\left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu}\right]^{-1/2}$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\partial \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu}\right]^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial p_i^\nu \partial q_i^\nu}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^2 \Lambda(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)}{\partial H^\nu \partial t} - 2B(p^\nu, H^\nu, q^\nu, t)\right) \mathrm{d}t\right\}\varphi(\alpha), \tag{3.6}$$

où

$$\gamma^\nu = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t^0] + A\int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]}\left(-H^\nu \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{r} p_i^\nu \mathrm{d}q_i^\nu\right),$$

$$p^\nu = P^\nu(\alpha, t), \quad q^\nu = Q^\nu(\alpha, t), \quad H^\nu = H^\nu(Q^\nu(\alpha, t), P^\nu(\alpha, t), t)$$

α_t^0 est le point initial de l'atlas $\mathscr{X}_t$, $l[\alpha^0, \alpha_t^0]$ un arc compris entre α^0 et α_t^0 et appartenant au film R_t.

L'ensemble des solutions de ce type est assez vaste, et par combinaison linéaire on peut obtenir la solution de l'équation considérée (3.1) satisfaisant une condition initiale de la forme

$$\frac{\partial^{i-1} u}{\partial t^{i-1}} = K^{0, \alpha^0}_{A, \Gamma^i, Rz}\varphi_i(\alpha) \qquad i = 1, \ldots, s,$$

où Γ^i $(i = 1, \ldots, s)$ est une sous-variété lagrangienne quelconque et $\varphi_i(\alpha)$ une fonction vectorielle à support compact indéfiniment différentiable sur Γ^i et à valeurs dans l'espace H. Ces conditions comprennent en particulier le cas de données initiales discontinues et oscillantes, considérées dans le livre de Courant ([38]). Cela résulte des remarques suivantes.

Comme auparavant, on peut faire agir l'opérateur A^N sur les deux membres de l'égalité du théorème 4.3.

On obtient alors dans les termes de droite et gauche de cette égalité des fonctions généralisées au sens de la section 2°, § 1, ch. 1.

La fonction $A^N u(x,t)$ sera une solution généralisée de l'équation correspondante. Aussi si $A = i\partial/\partial x$, et si H est l'espace $L_2[R^1]$ des fonctions de τ, on peut alors poser $G(\alpha) = g(\tau) f(\alpha)$, où $g(\tau)$ est une distribution égale à la N-ième dérivée d'une fonction continue et $f(\alpha)$ une fonction à support compact à valeurs dans R^1.

Dans le cas de conditions initiales oscillantes, il faut poser $H = L_2[R^1]$ l'espace des fonctions de ω sur l'intervalle $[1,\infty]$, $A = \omega$, l'opérateur de multiplication par ω

$$\varphi(\alpha) = g f(\alpha), \qquad g = 1/\omega \in L_2[R^1].$$

Alors $Ag = 1$, $Au(x,t)$ est une fonction dépendant du paramètre ω, et

$$K^{\gamma,\alpha^0}_{A.\Gamma_t.R_Z} = K^{\gamma,\alpha^0}_{\omega.\Gamma_t.1/\omega}.$$

§ 4 ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES D'UNE ÉQUATION A COEFFICIENTS OPÉRATORIELS

Considérons un espace B^∞, où B^1 est un espace hilbertien et soit

$$\hat{L} = L\left(x_1,\dots,x_n; -ih\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,-ih\frac{\partial}{\partial x_n}; h\right)$$

l'opérateur introduit au § 2. Supposons de plus qu'il ne dépende pas de t et p_{n+1}, qu'il soit auto-adjoint dans l'espace d'Hilbert $L_2[B^1] = W_2^0[R^n, B^1]$ des fonctions de $x_1,\dots,x_n$ à valeurs dans B^1 et qu'il satisfasse la condition (I) du § 2.

De plus supposons que le spectre de l'opérateur $\hat{L}$ ne soit pas limite pour $\lambda = E^0$.

Enfin nous demandons l'existence d'une famille de variétés lagrangiennes fermées compactes $\Gamma(E)$ sans bord pour $E \in \mathscr{E} = (E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon)$ où $\varepsilon > 0$ telle que :

(1) $\Gamma(E)$ dépend continûment de E,

(2) $H(p(\alpha), q(\alpha)) = E$ pour $\alpha \in \Gamma(E)$ (ici $H(p,q)$ est l'opérateur hamiltonien de $\hat{L}$),

(3) $U_{0,t}\Gamma(E) = \Gamma_t(E) = \Gamma(E)$.

Remarques

a) L'ensemble $\mathscr{E}$ ne doit pas nécessairement coïncider avec l'intervalle $(E^0 - \varepsilon, E^0 + \varepsilon)$. Il suffit qu'il soit dense sur cet intervalle.

b) L'opérateur $U_{0,t}$ est l'opérateur de déplacement le long des trajectoires du système hamiltonien donné par $H(p,q)$, l'opérateur hamiltonien associé à $\hat{\mathscr{L}}$.

Nous prendrons comme mesure $\sigma(\alpha)$ sur la variété $\Gamma(E)$, une mesure invariante pour les déplacements le long des trajectoires du système hamiltonien.

L'opérateur (*) $R = \mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}G$

$$R = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\left\| \left(X^{\nu}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{\mu}\right) + \left(X^{\nu}, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{\partial X^{\mu}}{\partial p_i}\right) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_i}\delta_{\mu\nu} - \mathrm{i}\left(X^{\nu}, \frac{\partial L}{\partial h}X^{\mu}\right)_{h=0} \right\|_{\substack{p=P(\alpha,t)\\ q=Q(\alpha,t)}}$$

sur la variété $\Gamma(E)$ est auto-adjoint dans l'espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure $\sigma(\alpha)$.

Soient $\mu(E)$ une des valeurs propres et $\xi(\alpha)$ la fonction propre correspondante.

Théorème 4.4. *Soit* $\{E^i\} \subset \mathscr{E}$ $(i = 1, 2, \dots, i_0)$ *un ensemble de points de* $\mathscr{E}$ *dépendant de* h *et tel que sur* $\Gamma(E^i)$ *soit vérifié le système d'équations*

$$\frac{2}{\pi h}\oint_k p(\alpha)\,\mathrm{d}q(\alpha) = l_k \bmod 4 \qquad 1 \leqslant k \leqslant k_0 \tag{4.1}$$

où $\oint_k$ *dénote l'intégrale sur le* k*-ième cycle de base de la variété* $\Gamma(E^i)$, l_k *l'indice de ce cycle et* k_0 *le premier nombre de Betti de la variété* $\Gamma(E^i)$. *Alors il existe une sous-suite* λ^i *de valeurs propres de l'opérateur* $\hat{L}$, *telle que*

$$\lambda^i = E^i - h\mu(E^i) + O(h^2), \tag{4.2}$$

et la fonction spectrale de l'opérateur L *associée à l'intervalle*

$$\Delta\lambda = \{\lambda^i - O(h), \lambda^i + O(h)\}$$

vérifie la relation

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}]\, K^{\gamma,\alpha^0}_{1/h\ \Gamma(E^i),h} \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha) X^{\nu}(\alpha) \right\|_{L_2[R^n, B^1]} = O(h) \tag{4.3}$$

Remarques

a) Le théorème 4.4 n'est pas trivial lorsque $n = 1$ et que $L(x, p, h)$ est un polynôme en p à coefficients matriciels, c'est-à-dire pour un système d'équations linéaires d'ordre m.

b) Lorsque $L(x, p, 0) \equiv H(p, x)$,

$$R = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}\sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial x_j} - \mathrm{i}\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}$$

(*) Les produits scalaires sont calculés dans B^1.

Notons que pour $r = 1$, et $H(p, x)$ réel, la matrice G est nulle et le problème se ramène à la recherche des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur de déplacement (ou l'opérateur de $\mathrm{i}d/dt$) le long du système hamiltonien sur la variété Γ. Ce problème est très étudié (*). En outre, dans ce cas nous pouvons prendre $\mu = 0, \xi(\alpha) = 1$.

Comme exemple considérons l'opérateur d'Hamilton de la forme

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2M}\Delta_1 - \frac{h^2}{2M}\Delta_2 + \frac{e}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + \hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \quad (4.4)$$

où

$$\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad \bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}, \qquad i = 1, 2,$$

e la charge et $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ est l'hamiltonien le plus général pour le système de N électrons dans le champ de deux protons immobiles (voir par exemple [87]).

L'opérateur d'Hamilton $\hat{H}$ est celui d'une molécule di-atomique. Soit $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ une valeur propre de l'opérateur $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ (appelé le terme électronique). Supposons que la fonction

$$u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) = \frac{e}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} + E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$$

ait un minimum (c'est-à-dire le terme $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ est stable (voir par exemple [47])). Pour simplifier, nous supposerons, comme cela se passe ordinairement, que ce minimum est unique. Cette condition n'est pas essentielle.

Nous allons chercher l'asymptotique des valeurs propres de l'opérateur $\hat{H}$, distribuées dans un voisinage du point λ^0, compris entre le minimum et le maximum absolu de la fonction $u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$. Dans cet intervalle, le spectre de $\hat{H}$ est discret (voir [23]). Faisons l'hypothèse que la multiplicité de la valeur propre $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ reste constante dans le domaine $\Omega \ni |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|$, pour lequel $u(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|) \leqslant \lambda^0$, c'est-à-dire que dans ce domaine le terme $E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ ne se recoupe avec aucun autre. Supposons la multiplicité égale à 1. Il n'est pas difficile de montrer que sous ces conditions l'opérateur $\hat{H}_N(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$ vérifie la condition (I), si pour B^∞ on prend l'espace $W_2^\infty[R^{3N}]$, et si l'opérateur $\hat{H}$ vérifie les conditions du théorème 4.4.

Désignons par a les dimensions linéaires de la molécule.

Passons dans (4.4) à des variables sans dimension.

Posons $\rho_1 = \frac{r_1}{a}$, $\rho_2 = \frac{r_2}{a}$ et divisons (4.4) par

$$V_0 = \operatorname*{Min}_{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| \in \Omega} E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)$$

On obtient l'opérateur

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{V^2}{2}\Delta_1 - \frac{V^2}{2}\Delta_2 + \frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|} + \hat{\mathscr{H}}_N(|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|, \alpha_1, \alpha_2)$$

(*) Pour les autres cas voir [3].

où

$$V = \frac{h}{a\sqrt{MV_0}}, \qquad \alpha_1 = \frac{e}{aV_0}, \qquad \alpha_2 = \frac{h}{a\sqrt{mV_0}},$$

m étant la masse de l'électron.

Ici

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial \rho_\sigma^2} \quad (\sigma = 1, 2)$$

sera à nouveau noté Δ_σ.

Puisqu'en pratique, pour des molécules, $V \sim 10^{-3} - 10^{-4}$, et $\alpha_1, \alpha_2 \sim 1$, on peut considérer V comme un « petit » paramètre et chercher l'asymptotique de l'équation $\hat{\mathscr{H}}\psi_n = \lambda_n \psi_n$ pour $V \to 0$. L'opérateur hamiltonien $\hat{\mathscr{H}}$ a alors la forme

$$\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} + \frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|} + \frac{E(a|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|)}{V_0}.$$

Il lui correspond l'équation suivante d'Hamilton-Jacobi :

$$\left\{\frac{1}{2}(\nabla_1 S)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_2 S)^2\right\} + \frac{\alpha_1}{|\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2|} + \frac{E(|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|)}{V_0} = \lambda^0 \quad (4.5)$$

Introduisons de nouvelles variables :

$$\bar{r} = \bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2, \qquad \bar{R} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2.$$

En désignant respectivement par $\nabla_{\bar{R}}$ et $\nabla_{\bar{r}}$ les opérateurs ∇ par rapport aux variables R et r, on obtient

$$\frac{1}{2}\{(\nabla_{\bar{R}} S)^2 + (\nabla_{\bar{r}} S)^2\} + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{E(ar)}{V_0} = \lambda^0.$$

Ainsi les variables $\bar{r}$ et $\bar{R}$ se séparent et, en posant $S = S(\bar{r})$, on obtient

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(ar)}{V_0} = 2\lambda^0.$$

Il est facile de voir que la condition (4.1) s'écrit, dans ce cas :

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2\left[\lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0}\right] - \alpha_\theta^2}, \qquad \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}},$$

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi = 2\pi m,$$

$$J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\varphi) = \pi(2l + 1),$$

$$J_r = 2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\left[\lambda^0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{E(ar)}{V_0}\right] - \frac{(J_\theta + J_\varphi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr = \pi(2n + 1).$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'expression sous la racine carrée. Ainsi

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + O(V^2),$$

avec λ_k^0 vérifiant l'équation

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\lambda_k^0 - \frac{2\alpha_1}{r} + \frac{2E(ar)}{V_0} - \frac{(l + 1/2)^2 V^2}{r^2}}\, \mathrm{d}r = \pi(k + 1/2)\, V\,.$$

Notons que la méthode connue de Born-Oppenheimer (la méthode adiabatique) peut être appliquée à la solution du problème posé avec la condition supplémentaire : $k \sim 1$ (voir [87]).

CHAPITRE 5

REPRÉSENTATION CARACTÉRISTIQUE LOCALE POUR LES ÉQUATIONS DU TYPE DE L'ÉQUATION DES ONDES

L'asymptotique locale, c'est-à-dire pour t suffisamment petit, des solutions d'un système d'équations de type hyperbolique avec données initiales discontinues ou rapidement oscillantes a été étudiée dans la littérature mathématique (voir par exemple [26], [6, 1], [46, 1], [46, 2], [40], [38], [50], [2], [5]).

Le développement quasi-classique local des équations de la mécanique quantique qui est tout à fait analogue au développement asymptotique des problèmes mentionnés ci-dessus a été formellement donné dans la littérature physique [24], [27] (voir aussi [8], [51, 1], [26]).

Aussi ce chapitre est-il consacré à la démonstration de ces formules, démonstration qui s'appuie d'une part sur le théorème 3.2 de la théorie des perturbations et d'autre part sur une estimation de l'inverse d'un opérateur dans tel ou tel espace (*).

La déduction mathématique de ces formules peut être, en gros, esquissée de la manière suivante :

1) On démontre que la substitution de ces formules asymptotiques *a priori* dans les équations donne des expressions de l'ordre $O(1/\omega^N)$ (i.e. des termes appelés non-cohérents).

(*) Il serait tentant (voir [29]), de remplacer $1/h$ par $i\partial/\partial s$ (passage à l'optique pentadimensionnelle, voir [67], [63]) et ainsi de réduire le problème de l'asymptotique quasi-classique au problème, considéré par Ludwig [50]), de l'asymptotique des systèmes hyperboliques dont les données initiales sont oscillantes. Cependant, il est facile de voir que le problème ainsi obtenu ne satisfait nullement les conditions d'application des théorèmes de Ludwig et de Lax. De la même façon, le problème de l'asymptotique quasi-classique se ramène par exemple pour l'équation de Schrödinger à un problème très complexe avec des données initiales sur les caractéristiques. Un tel problème ne rentre même pas dans le cadre de la théorie de l'« uniformisation » de Leray [26]. Dans le cas relativiste, le plan $t = 0$ pourrait ne pas être de genre espace (pour certaines relations entre les coefficients). Cette difficulté supplémentaire est liée au fait que $\lambda = 0$ est un point du spectre de l'opérateur $i\partial/\partial s$, alors même que $1/h \neq 0$.

2) On donne une majoration de l'opérateur inverse. On en tire une estimation de la différence entre la solution exacte et la formule asymptotique donnée.

Notons que les formules asymptotiques et les restes deviennent simultanément infinis aux points focaux.

Cependant, pour les équations de type tunnel ce schéma n'est pas adéquat. Nous donnerons donc ici une démonstration qui suivra un schéma quelque peu modifié, de façon à pouvoir l'étendre aux équations de type tunnel. En outre, les démonstrations que nous donnerons permettent de s'appuyer sur les théorèmes (3.2) et (3.6) de la théorie abstraite des perturbations. Ceci simplifie d'une part les démonstrations et d'autre part diminue les conditions de différentiabilité à imposer aux coefficients des équations.

§ 1 ASYMPTOTIQUE LOCALE D'UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

1. Représentation quasi-classique

Construisons d'abord la représentation caractéristique (quasi-classique) pour l'équation de Schrödinger :

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + \mathscr{V}(x)\psi \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad (1.1)$$

Le système correspondant des bicaractéristiques (au sens de § 2, ch. 1) a la forme des équations hamiltoniennes

$$\dot{x}_i = p_i, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Démontrons un lemme préliminaire. Considérons un système général d'Hamilton

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$
$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - H \qquad (1.2)$$

Supposons que les dérivées troisièmes de H soient continues, et que le système (1.2) ait une famille à n-paramètres de trajectoires ne se coupant pas :

$$\{x(\beta, t), p(\beta, t)\} \qquad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Lemme 5.1. *Le jacobien* $Y^{-1} = \det \| \partial\beta_i/\partial x_j \|$ *vérifie l'équation de continuité*

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial t} + \operatorname{div} Y^{-1} \operatorname{grad} S = 0.$$

Démonstration. Considérons $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}t$, où $Y = \det\left\| \frac{\partial x_i}{\partial \beta_j} \right\|$.

On a évidemment

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} D_i,$$

où D_i s'obtient à partir de Y en remplaçant les éléments de la i-ème ligne par

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial \beta_j} \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Mais

$$\frac{\partial x_i(\beta, t)}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x_i} \quad \text{(voir [59,3])},$$

et

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\, \partial \beta_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i\, \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \beta_j}$$

Seul le i-ème terme de cette somme ne dépend pas linéairement des autres lignes du déterminant D_i.

Aussi

$$D_i = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2} Y, \qquad \text{i.e.} \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = Y \Delta S$$

et par conséquent

$$\frac{\mathrm{d}Y^{-1}}{\mathrm{d}t} + Y^{-1} \Delta S = 0;$$

d'où

$$\frac{\partial Y^{-1}}{\partial t} + \operatorname{grad} Y^{-1} \cdot \operatorname{grad} S + Y^{-1} \Delta S = 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Pour $\sqrt{Y^{-1}}$, on obtient l'équation

$$2\frac{\partial \sqrt{Y^{-1}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\sqrt{Y^{-1}} \operatorname{grad} S) + \operatorname{grad} S \operatorname{grad} \sqrt{Y^{-1}} = 0 \qquad (1.3)$$

Passons à la déduction de la représentation caractéristique pour l'équation (1.1). Substituant

$$\psi(x, t) = \sqrt{Y^{-1}}\, \mathrm{e}^{ih^{-1}S(x,t)} \varphi(x, t) \qquad (1.4)$$

dans (1.1) et tenant compte de ce que, pour toute fonction différentiable $R(x_i)$, on a

$$-\mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial x_i} R(x_i)\, \mathrm{e}^{ih^{-1}S(x,t)} = \mathrm{e}^{ih^{-1}S(x,t)} \left(-\mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) R(x_i)$$

et de ce que S satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad} S)^2 + \mathscr{V}(x) = 0,$$

on obtient

$$ih\frac{\partial}{\partial t}(Y^{-1/2}\varphi) = -\frac{1}{2}h^2\Delta(Y^{-1/2}\varphi) - \frac{1}{2}ih[\mathrm{div}(Y^{-1/2}\varphi\,\mathrm{grad}\,S) + \mathrm{grad}\,S\,\mathrm{grad}\,(Y^{-1/2}\varphi)]$$

D'où

$$ih\left\{\frac{\partial Y^{-1/2}}{\partial t} + \frac{1}{2}[\mathrm{div}\,Y^{-1/2}\,\mathrm{grad}\,S + \mathrm{grad}\,S\,\mathrm{grad}\,Y^{-1/2}]\right\}\varphi$$

$$+ ihY^{-1/2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{grad}\,S\,\mathrm{grad}\,\varphi\right\} = -\frac{h^2}{2}\Delta(Y^{-1/2}\varphi) \quad (1.5)$$

Substituons $\varphi(x,t) = \varphi(x(\beta,t),t) = \tilde{\varphi}(\beta,t)$. On a

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\,\mathrm{grad}\,S \quad (1.6)$$

De (1.5) et (1.6), on obtient enfin

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{ih}{2}Y^{+1/2}\Delta_\beta Y^{-1/2}\tilde{\varphi}(\beta,t) \quad (1.7)$$

où Δ_β est l'opérateur de Laplace en coordonnées curvilignes (β), et ceci est la représentation caractéristique locale de l'équation de Schrödinger.

2. **Estimation de l'opérateur inverse**

Considérons l'hamiltonien (auto-adjoint)

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + \mathscr{V}(x,t) \qquad x = (x_1,\dots,x_n) \quad (1.8)$$

dans l'espace $L_2[R^n]$.

Désignons par $L_1[L_2]$ l'espace des fonctions de t intégrables au sens de Bochner sur l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0$ et à valeurs dans $L_2[R^n]$. Soit V la somme directe $L_1[L_2] \oplus L_2$. Soit $C[L_2]$ l'espace des fonctions continues de $t, 0 \leqslant t \leqslant t_0$ à valeurs dans L_2.

Les normes de ces espaces sont :

$$\|g\|_{L_1[L_2]} = \int_0^{t_0}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t,x)|^2\,dx}\,dt \qquad \text{pour } g \in L_1[L_2],$$

$$\|g\|_{C[L_2]} = \max_{0\leqslant t\leqslant t_0}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|g(t,x)|^2\,dx} \qquad \text{pour } g \in C[L_2],$$

$$\|\{g,f\}\|_V = \|g\|_{L_1[L_2]} + \|f\|_{L_2},$$

pour $g \in L_1[L_2]$, $f \in L_2$, $\{g,f\} \in V$.

Considérons un opérateur $\hat{L}$ dont le domaine de définition est contenu dans $C[L_2]$ et le domaine des valeurs dans V et agissant de la manière suivante

$$\hat{L}g(t, x) = \left\{ g(0, x), \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + \frac{\mathrm{i}}{h} \hat{H} g(t, x) \right\} \in V$$

pour $g(t,x) \in D(\hat{L}) \subset C[L_2]$.

En vertu du lemme (4.1) du ch. 4, partie I, il en résulte en particulier que $\| \hat{L}^{-1} \| \leqslant$ Cte. Dans le cas où $\mathscr{V}(x, t)$ ne dépend pas de t, ceci est dû évidemment au fait que l'opérateur $\hat{H}$ est auto-adjoint. En fait, si

$$\hat{L}u(t,x) = \{ f(x), \mathscr{F}(x,t) \},$$

il est évident que

$$u(t,x) = \hat{L}^{-1} \{ f(x), \mathscr{F}(x,t) \} = \mathrm{e}^{ih^{-1}\hat{H}t} f + \int_0^t \mathrm{e}^{ih^{-1}\hat{H}(t-\tau)} \mathscr{F}(x,\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

D'où

$$\| u(t,x) \|_{L_2} \leqslant \| f \|_{L_2} + \int_0^t \| \mathscr{F}(x,\tau) \|_{L_2} \mathrm{d}\tau \tag{1.9}$$

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \| u(t,x) \|_{L_2} \leqslant \| f \|_{L_2} + \| \mathscr{F} \|_{L_1[L_2]} \tag{1.10}$$

Considérons maintenant l'espace $\tilde{L}_2[R^n]$ des fonctions de β ($\beta = (\beta_1, \dots \beta_n)$), muni de la norme

$$\| f \|_{\tilde{L}_2} = \sqrt{\int | f(\beta)|^2 \mathrm{d}\beta}$$

Il lui correspond des espaces $L_1[\tilde{L}_2], C[\tilde{L}_2]$.

L'opérateur M

$$M f(\beta, t) = Y^{-1/2}(\beta(x,t),t)\, \mathrm{e}^{ih^{-1}S(\beta(x,t),t)} f(\beta(x,t),t)$$

applique unitairement l'espace $\tilde{L}_2$ sur L_2.
En effet, soit

$$g(x,t) = Y^{-1/2} \mathrm{e}^{ih^{-1}S(x,t)} f(\beta,t).$$

Alors

$$\int |g(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \int | f(\beta,t)|^2 Y^{-1} \mathrm{d}x = \int | f(\beta,t)|^2 \mathrm{d}\beta$$

L'opérateur M applique également $\tilde{V}$ sur $V, L_1[\tilde{L}_2]$ sur $L_1[L_2]$, et $C[\tilde{L}_2]$ sur $C[L_2]$ avec conservation de la norme.

Par cette application, l'opérateur $\hat{L}$ est transformé en un opérateur $\hat{L}_1$ de domaine de définition contenu dans $C[\tilde{L}_2]$ et à valeurs dans $\tilde{V}$. Il est évident que les normes $\| \hat{L}^{-1} \| = \| \hat{L}_1^{-1} \| \leqslant t_0$.

En vertu de ce qui a été dit plus haut, l'opérateur $\hat{L}_1$ agit de la manière suivante :

$$\hat{L}_1 u(t,\beta) = \left\{ u(0,\beta), \frac{\partial u}{\partial t} + ih\hat{H}_1 u \right\},$$

où

$$\hat{H}_1 = -\frac{Y^{1/2}}{2} \Delta_\beta Y^{-1/2}$$

(Δ_β est l'opérateur de Laplace dans les coordonnées β).

3. Séries de la théorie des perturbations

Considérons maintenant l'opérateur $\hat{L}_0$ de $C[\tilde{L}_2]$ dans $\tilde{V}$, de la forme

$$\hat{L}_0 u(t,\beta) = \left\{ u(0,\beta), \frac{\partial u}{\partial t} \right\}$$

et un opérateur $\tilde{H}_1$ de $C[\tilde{L}_2]$ dans $\tilde{V}$ de la forme

$$\tilde{H}_1 u(t,\beta) = \{ 0, \hat{H}_1 u(t,\beta) \}.$$

On a $\hat{L}_1 = \hat{L}_0 + ih\tilde{H}_1$ et en outre $\| \hat{L}_0^{-1} \| \leqslant t_0$ et $\| \hat{L}_1^{-1} \| \leqslant t_0$.

En outre, si $f(\beta), \mathscr{F}(\beta,t)$ sont $2k$-fois différentiables par rapport à β et si le potentiel $\mathscr{V}(x,t)$ est $2k$-fois différentiable par rapport à x, alors l'expression $\hat{L}_0^{-1}(\tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^k \{ f(\beta), \mathscr{F}(\beta,t) \}$ existe et appartient à $C[\tilde{L}_2]$.

Par conséquent toutes les conditions du théorème §3, ch. 3, Partie 1, sont remplies et nous avons, pour $g \in \tilde{V}$:

$$\hat{L}_1^{-1} g = \sum_{j=0}^{k} (ih)^j \hat{L}_0^{-1} (\tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^j g + h^k z_h(t,\beta)$$

où

$$\| z_h(t,\beta) \|_{C[\tilde{L}_2]} \quad \text{pour } h \to 0.$$

En particulier, si $g = \{ 0, \mathscr{F}(\beta,t) \}$, alors

$$\hat{L}_0^{-1} g(\beta,t) = \int_0^t \mathscr{F}(\beta,\tau)\,d\tau \qquad \text{et} \qquad \tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1} g = \left\{ 0, \hat{H}_1 \int_0^t \mathscr{F}(\beta,\tau)\,d\tau \right\}$$

$$(\tilde{H}_1 \hat{L}_0^{-1})^2 g = \left\{ 0, \hat{H}_1 \int_0^t \hat{H}_1\,dt' \int_0^{t'} \mathscr{F}(\beta,\tau)\,d\tau \right\}$$

et

$$L_1^{-1} \{ 0, \mathscr{F}(\beta,t) \} = \sum_{j=0}^{k} (ih)^j \int_0^t \hat{H}_1\,dt_1 \int_0^{t_1} \hat{H}_1\,dt_2 \ldots \int_0^{t_{j-1}} \mathscr{F}(\beta,t_j)\,dt_j + h^k z_h(\beta,t).$$

De manière analogue

$$L_1^{-1} \{ f(\beta), 0 \} = \sum_{j=0}^{k} (ih)^j \int_0^t \hat{H}_1\,dt_1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{j-2}} \hat{H}_1 f(\beta)\,dt_{j-1} + h^k z_h(\beta,t).$$

Donc la solution du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\beta) + \mathrm{i}h\hat{H}_1 u(t,\beta) = 0 \qquad u(0,\beta) = f(\beta)$$

est de la forme

$$u(t,\beta) = \sum_{j=0}^{k} (\mathrm{i}h)^j \int_0^t \hat{H}_1 \,\mathrm{d}t_1 \ldots \int_0^{t_{j-2}} \hat{H}_1 f(\beta)\,\mathrm{d}t_{j-1} + h^k z_h(t,\beta),$$

où

$$\operatorname{Max} \| z_h(t,\beta) \|_{\tilde{L}_2} \to 0 \quad \text{pour } h \to 0,$$

si l'expression, qui est sous le signe somme, est une fonction continue de t et de carré intégrable en β.

Une affirmation analogue est aussi valable lorsque $f(\beta) = f(\beta,h)$ est analytique en h.

Considérons maintenant la solution du problème

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{h}{2}\Delta\psi + \frac{\mathscr{V}(x)}{h}\psi \tag{1.11}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0 = \varphi(x,h)\,\mathrm{e}^{ih^{-1}S_0(x)} \tag{1.12}$$

Théorème 5.1. *La solution du problème* (1.11)-(1.12) *sous les hypothèses que* $\mathscr{V}(x) \in C^4$, $\varphi(x,h) \in C^2$, $S_0(x) \in C^4$ *peut s'écrire :*

$$\psi = Y^{-1/2}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{h}\tilde{S}(\beta,t)\right\}\tilde{\varphi}(\beta,h) + z_h(\beta,t). \tag{1.13}$$

Ce résultat, de même que les résultats du paragraphe suivant, se généralise de manière évidente au cas où le potentiel dépend du temps.

§ 2 THÉORÈME DE PLONGEMENT POUR LES FONCTIONS ABSTRAITES ET ESTIMATION DANS DES ESPACES DÉNOMBRABLEMENT NORMÉS

1. Théorème de plongement

Nous avons besoin pour la suite du :

Théorème de plongement. *Soit, dans un espace d'Hilbert* B, *le générateur* A *d'un groupe fortement continu, possédant un inverse et tel que* $\| (1 + \varepsilon A)^{-1} \| \leqslant 1$ *pour* $\varepsilon > 0$ *ou* ε *imaginaire pur. Soit* $\Phi(x) \in L_2[R^n, B]$ *appartenant aux domaines de définition des opérateurs* $(\partial/\partial x_i)^{[n/2]+i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ *et* $A^{[n/2]+1}$.

Posons $a_n = ((-1)^n + 3)/4$. *Alors*

$$\text{Vrai sup} \| A^{a_n}\Phi(x) \|_B \leqslant \text{const}.$$

Démonstration. Soit $\mathscr{F}(x) = (1 + A)^{[n/2]+1}\,\Phi(x)$.
Donc $\Phi(x) = (R_{-1}^{A})^{[n/2]+1}\,\mathscr{F}(x)$, où

$$R_{-1}^{A} = (1 + A)^{-1}.$$

Remarquons que, puisque $AR_{-1}^{A} = 1 - R_{-1}^{A}$,

$$\| AR_{-1}^{A} \| \leqslant 2.$$

Notons $\|\mathscr{F}(x)\|_B = |\mathscr{F}|$ et $\tilde{\mathscr{F}}(p) = \Phi^{x_n}\mathscr{F}(x)$ la transformée de Fourier de $\mathscr{F}(x)$. Alors

$$\begin{aligned}
&| A^{a_n}(R_{-1}^{A})^{[n/2]+1}\,\mathscr{F}(x)| \\
&\quad = \left|\frac{(R_{-1}^{A})^{[n/2]+1}A^{[n/2]+1}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iApx}\,\tilde{\mathscr{F}}(p)\,dp\right| \\
&\quad \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left|(AR_{-1}^{A})^{[n/2]+1}\,\tilde{\mathscr{F}}(p)\right| dp \\
&\quad = (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + (p^2)^{[n/2]+1}}\,\frac{(AR_{-1}^{A})^{[n/2]+1}\,\tilde{\mathscr{F}}(p)}{\sqrt{1 + (p^2)^{[n/2]+1}}} \\
&\quad \leqslant (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (1 + (p^2)^{[n/2]+1})[(AR_{-1}^{A})^{[n/2]+1}\,\tilde{\mathscr{F}}(p)]^2\,dp}\,. \\
&\qquad\qquad \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + (p^2)^{[n/2]+1}}}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(AR_{-1}^{A})^{[n/2]+1}\,\tilde{\mathscr{F}}(p)|^2\,dp \leqslant 2^{n+2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\mathscr{F}}(p)|^2\,dp = 2^{n+2}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\mathscr{F}}(x)|^2\,dx,$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |[p(AR_{-1}^{A})]^{[n/2]+1}\,\mathscr{F}(p)|^2\,dp &= \int_{-\infty}^{\infty} |[R_{-1}^{A}(-\Delta)^{1/2}]^{[n/2+1]}\,\mathscr{F}(x)|^2\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |[(-\Delta)^{1/2}]^{[n/2]+1}\,\Phi(x)|^2\,dx
\end{aligned}$$

Si $[n/2] + 1$ est pair, alors l'existence d'une borne pour la partie droite de l'égalité résulte des conditions du théorème de plongement. Si $[n/2] + 1$ est impair, en utilisant l'identité

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{1/2} f(x)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(-\Delta)^{1/2} f(x)|^2\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\Delta f(x)\,dx, \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla f(x)|^2\,dx
\end{aligned}$$

on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(-\Delta)^{1/2}(-\Delta)^{1/2[n/2]}\Phi(x)|^2$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} (-\Delta)^{1/2[n/2]}\Phi(x)\Delta[(-\Delta)^{1/2[n/2]}\Phi(x)]\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(-\Delta)^{1/2[n/2]}\Phi(x)|^2\,dx$$

Il résulte alors du théorème de plongement que cette intégrale est bornée.

Une démonstration analogue est valable pour un opérateur A satisfaisant la condition $\|(1-\varepsilon A)^{-1}\| \leqslant 1$ pour $\varepsilon > 0$ ou ε imaginaire pur.

Le cas général s'obtient à l'aide de la décomposition $A = A^+ + A^-$ où A^+ et A^- sont des opérateurs non-négatifs.

Remarque 1. Si A^{-1} existe et est borné, alors dans le théorème de plongement au lieu de R^A_{-1} on peut prendre $R^A_0 = A^{-1}$.

2. Opérateurs dans les espaces dénombrablement normés

Considérons l'espace S_h muni de l'ensemble dénombrable de normes

$$\|\mathscr{F}\|_{k,l,m} = \operatorname*{Max}_{\substack{0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0<h\leqslant h_0\\ |x|<\infty}} \left|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k x^m\hat{p}^l\mathscr{F}(x,t,h)\right| \tag{2.1}$$

$$k,l,m = 1,2,\ldots$$

où

$$x^m = \prod_{j=1}^n x_j^{l_j}\quad,\quad \sum_j l_j = m,$$

$$\hat{p}^l = \prod_{\nu=1}^n\left(-ih\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{l_\nu},\qquad \Sigma l_\nu = l.$$

Considérons également l'espace R_h muni de l'ensemble dénombrable de normes

$$\|\mathscr{F}\|^2_{k,l,m} = \operatorname*{Max}_{\substack{0\leqslant t\leqslant t_0\\ 0<h\leqslant h_0}} \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k x^m\hat{p}^l\mathscr{F}(x,t,h)\right|^2 dx$$

Lemme 5.2a

Soit $\mathscr{F}(x,t,h)\in R_h$. *Alors* $\Phi^{x_n}_{1/h}\,\mathscr{F}(x,t,h)\in R_h$.

Démonstration. Soit

$$\tilde{\mathscr{F}}(p,t,h) = \Phi^{x_n}_{1/h}\,\mathscr{F}(x,t,h).$$

Il est évident que

$$p^{\beta}\left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha}\tilde{\mathscr{F}}(p,t,h) = \Phi^{x_n}_{1/h}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}x^{\alpha}\mathscr{F}(x,t,h).$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|p^{\beta}\left(ih\frac{\partial}{\partial p}\right)^{\alpha}\tilde{\mathscr{F}}(p,t,h)\right|^2 \mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\beta}x^{\alpha}\mathscr{F}(x,t,h)\right|^2 \mathrm{d}x,$$

d'où l'affirmation du lemme.

Il est évident que S_h est plongé dans R_h.

Lemme 5.2. *Soit* $g(x,t,h) \in R_h$. *Alors* (*)

$$h^{n/2}g(x,t,h) \in S_h \tag{2.2}$$

Démonstration. En vertu du théorème de plongement :

$$\left|\left(ih\frac{\partial}{\partial t}\right)^k x^m \hat{p}^l g(x,t,h)\right| \leqslant \frac{1}{h^{n/2}}(c_n \| g \|_{k,m,l} + c_n' \| g \|_{k,m,l+\frac{n}{2}+1})$$

Donc $h^{n/2}g(x,t,h) \in S_h \subset R_h$.

Considérons les espaces suivants : $W_2^l(\hat{p})$ de norme

$$\| g \|^2_{W_2^l} = \sum_{i=0}^{l}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{p}^i g(x)|^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{et}$$

$K_l(x,\hat{p})$, de norme

$$\| g \|^2_{K_l} = \sum_{i+j\leqslant l}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{p}^i x^j g(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Théorème 5.2. *Si* $y(x,h) \in S_h$, *alors*

$$h^{n/2}\,\mathrm{e}^{ih^{-1}\hat{H}t}y(x,h) \in S_h.$$

Nous démontrons deux lemmes préliminaires.

Lemme 5.3. *Supposons que les dérivées l-ièmes de* $\mathscr{V}(x)$ *existent et soient bornées. Alors l'opérateur* $\exp\,(\mathrm{i}/h\,\hat{H}t)$ *est uniformément borné dans l'espace* $W_2^l(\hat{p})$ *pour* $0 < h \leqslant h_0, 0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Démonstration. Comme cela est démontré dans [51, 1] on a l'identité

$$[\hat{B},\mathrm{e}^{ih^{-1}\hat{H}t}] \equiv ih^{-1}\int_0^t \mathrm{e}^{ih^{-1}\hat{H}(t-t')}[\hat{B},\hat{H}]\mathrm{e}^{ih^{-1}\hat{H}t'}\,\mathrm{d}t', \tag{2.3}$$

(*) Plus précisément, on peut modifier $g(x,t,h)$ sur un ensemble de mesure nulle de manière à avoir (2.2).

Elle entraîne l'inégalité

$$\| \hat{B}g \|_{L_2} \leqslant \| \hat{B}y \|_{L_2} + \frac{t}{h} \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant t_1} \| [\hat{B}, \hat{H}] g \|_{L_2} \tag{2.4}$$

où

$$g = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h}\hat{H}t\right) y \qquad \left(\| g \|^2_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} |g|^2 \, \mathrm{d}x, \; [\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \right)$$

Supposons le lemme valable jusqu'à $l = k$. Il est évident, puisque les dérivées de $\mathscr{V}(x)$ sont bornées, que le commutateur $[\hat{p}^{k+1}, \hat{H}] = [\hat{p}^{k+1}, \mathscr{V}(x)]$ sera un opérateur borné dans W_2^k. De (2.4) résulte que si $y \in W_2^{k+1}$, la norme $\| \hat{p}^{k+1} g \|_{L_2}$ est bornée puisque d'après l'hypothèse de récurrence $g \in W_2^k$.

Lemme 5.4. *Supposons les dérivées l-ièmes de $\mathscr{V}(x)$ uniformément bornées. Alors l'opérateur $\exp(\mathrm{i}h^{-1}\hat{H}t)$ est uniformément borné dans l'espace $K_l(x, \hat{p})$ pour $0 < h \leqslant h_0$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$.*

Démonstration. Elle se fait par induction. Supposons que $g \in K_{l-1}$ et que la norme $\| x^{m-1} \hat{p}^{l-m+1} g \|_{L_2}$ soit bornée. Montrons que $g \in K_l$ entraîne que la norme $\| x^m \hat{p}^{l-m} g \|_{L_2}$ est aussi bornée. Pour $m = 1$, l'hypothèse de récurrence est satisfaite en vertu du lemme (5.3). Le premier terme de la partie de droite de l'identité

$$[x^m \hat{p}^{l-m}, \hat{H}] g = x^m [\hat{p}^{l-m}, \mathscr{V}(x)] - \mathrm{i}hm x^{m-1} \hat{p}^{l-m+1} g$$

est borné en norme dans L_2, puisque $g \in K_{l-1}$. Le deuxième terme est borné d'après l'hypothèse de récurrence. De (2.4), il résulte que la norme $\| x^m \hat{p}^{l-m} g \|_{L_2}$ est également bornée.

Comme pour $l = 1$ l'hypothèse de récurrence est satisfaite, le lemme est ainsi démontré.

Montrons maintenant que si $y(x, h) \in R_h$, $\exp(\mathrm{i}h^{-1}\hat{H}t)\, y(x, h) \in R_h$ (alors du lemme (5.2) résultera le théorème). Pour cela, il reste à montrer que si $y \in R_h$, la norme $\| (\mathrm{i}h\, \partial/\partial t)^k g \|_{L_2}$ est uniformément bornée pour $0 < h \leqslant h_0$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Cela résulte de l'identité

$$\left\| \left(\mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial t} \right)^k g \right\|_{L_2} = \left\| \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h}\hat{H}t\right) \hat{H}^k y \right\|_{L_2} = \| \hat{H}^k y \|_{L_2}.$$

Le théorème est donc démontré.

De la discussion précédente découle aussi, ce qui est important pour la suite, le :

Théorème 5.1a. *L'opérateur* $\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{h}\hat{H} \right]^{-1}$ *applique R_h en lui-même.*

Un théorème analogue peut être démontré lorsque le potentiel $\mathscr{V}(x)$ dépend aussi du temps. Il faut alors s'appuyer sur l'estimation (2.1) du lemme (4.1) de la première partie. Le théorème est aussi valable dans le cas où l'opérateur $\hat{H}$ est l'opérateur du premier ordre de Dirac. La démonstration est analogue à celle du théorème (4.1a).

Du théorème 5.1 résulte la proposition suivante :

Théorème 5.2 a. *La solution du problème* (1.11)-(1.12) *peut être représentée sous la forme* (1.13), *où*

$$z(x, t, h) \in S_h .$$

Démonstration. Le passage à la représentation quasi-classique s'effectue à l'aide de la transformation

$$\psi = Y^{-1/2} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S\right) u .$$

Il est évident que si $u \in S_h$, alors $\psi \in S_h$ et réciproquement. Le théorème se démontre par l'intermédiaire du lemme suivant qui se rapporte d'une façon générale à la théorie abstraite des perturbations.

Lemme 5.5. *Soit* A, C, U_i $(i = 1, \dots, N)$ *des opérateurs linéaires dont les domaines de définition et de valeurs sont contenus dans l'espace dénombrablement normé* B^∞. *L'opérateur* C *qui a un inverse et qui commute avec* A *et* U_i *est défini sur tout* B^∞ ; *une restriction*(*) $\tilde{A}$ *de l'opérateur* A *a un inverse, et le domaine de valeurs de l'opérateur* $C^{-m}\left(A - \sum_{i=1}^{N} C^i U_i\right)$ *est égal à* B^∞.

Supposons qu'il existe des solutions $x_0, \dots, x_{N_1+m+1}$ *de l'équation* $Ax = 0$, *telles que :* $f_0 = x_0$

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1} \sum_{i=1}^{k} U_i f_{k-i} \qquad (a) \qquad \text{pour } k = 1, \dots, N_1 + m + 1$$

appartienne au domaine de définition de

$$B = \sum_{i=1}^{N} C^{i-1} U_i .$$

Alors il existe une solution de l'équation

$$\left(A - \sum_{i=1}^{N} C^i U_i\right) y = \mathscr{F}, \qquad \mathscr{F} \in B^\infty,$$

qui peut être mise sous la forme

$$y = \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k f_k + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k \tilde{A}^{-1} (B \tilde{A}^{-1})^k \mathscr{F} + C^{N_1+1} f,$$

où $f \in B^\infty$, *si l'on a*

$$\sum_{k=0}^{N_1+m} C^k \tilde{A}^{-1} (B\tilde{A}^{-1})^k \mathscr{F} \in D(B).$$

(*) L'équation $Ax = 0$ pour $x \in D(A)$ peut avoir des solutions non-triviales, mais pour $x \in D(\tilde{A})$ on a seulement la solution triviale.

Démonstration. Faisons agir l'opérateur $A - CB$, où

$$B = \sum_{i=1}^{N} C^{i-1} U_i,$$

sur un élément de la forme

$$\psi = \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k f_k + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k \tilde{A}^{-1}(B\tilde{A}^{-1})^k \mathscr{F}$$

Puisque $A\tilde{A}^{-1}B = B$ et $Ax_j = 0$, alors

$$Af_k = \sum_{i=1}^{k} U_i f_{k-i} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} A\psi &= \sum_{n=1}^{N_1+m} C^n \sum_{i=1}^{n} U_i f_{n-i} + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k (B\tilde{A}^{-1})^k \mathscr{F} \\ &= \sum_{k=0}^{N_1+m-1} C^{k+1} \sum_{j=0}^{k} U_{j+1} f_{k-j} + \sum_{k=0}^{N_1+m} C^k (B\tilde{A}^{-1})^k \mathscr{F} \end{aligned}$$

où l'on a posé $U_j = 0$ pour $j > N$.

Il est évident que

$$\sum_{j=1}^{N} C^j U_j \psi = C \sum_{i=0}^{N-1} C^i U_{i+1} \psi$$

$$= \sum_{k=0}^{N+m+N_1-1} C^{k+1} \sum_{i=0}^{k} U_{i+1} f_{k-i} + \sum_{k=1}^{N_1+m+1} C^k (B\tilde{A}^{-1})^k \mathscr{F}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left[A - \sum_{i=1}^{N} C^i U_i\right]\psi &= -\sum_{k=N_1+m}^{N+m+N_1} C^{k+1} \sum_{i=0}^{k} U_{i+1} f_{k-i} - (B\tilde{A}^{-1})^{N_1+m+1} C^{N_1+m+1} \mathscr{F} + \mathscr{F} \\ &= C^{N_1+1+m} g + \mathscr{F} \end{aligned}$$

où $g \in B^\infty$ en vertu des hypothèses du lemme.

Ainsi :

$$(A - CB)\psi = C^{N_1+1+m} g + \mathscr{F}.$$

D'après les hypothèses du lemme, il existe une solution v de l'équation :

$$C^{-m}(A - CB)v = g.$$

Comme il est évident que $y = \psi - C^{N_1+1} v$ est la solution de l'équation $(A - CB)y = \mathscr{F}$, il en résulte l'affirmation du lemme.

Posons, dans le lemme 5.5, $B^\infty = S_h$, $A = \mathrm{i}\,\partial/\partial t$, $\tilde{A} = \mathrm{i}\,\partial/\partial t$ sur les fonctions s'annulant pour $t = 0$, $B = \hat{H}_1$, $C = h$.

Les conditions du lemme pour l'opérateur $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t} - h\hat{H}_1$ sont vérifiées, puisque le domaine de ses valeurs, comme nous l'avons montré, est égal à S_h.

Les solutions de l'équation $\mathrm{i}\,\partial\varphi/\partial t = 0$ sont des fonctions dépendant seulement de $x_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_n})$.

D'où il s'ensuit que les solutions de l'équation $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t} - h\hat{H}_1 = \mathrm{i}\mathscr{F}$ peuvent être écrites

$$u = \sum_{k=0}^{N} h^k \sum_{j=0}^{k} \left(-\,\mathrm{i} \int_0^t \mathrm{d}t \hat{H}_1 \right)^j \varphi_{k-j}$$

$$+\,\mathrm{i} \sum_{k=0}^{N} h^k \left(-\,\mathrm{i} \int_0^t \mathrm{d}t \left(-\,\mathrm{i}\hat{H}_1 \int_0^t \right)^k \mathscr{F} \right) + h^{N+1} f ,$$

avec $f \in S_h$.

Par conséquent la solution ψ du problème (1.11)-(1.12) peut être représentée sous la forme (1.13), où

$$z(x, t, h) = \sqrt{Y^{-1}}\, \mathrm{e}^{ih^{-1}S} f \in S_h,$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ 3 ÉQUATIONS RELATIVISTES

1. Équations de Dirac

1. Considérons l'équation de Dirac :

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} - e\Phi(x,t)\psi - c\gamma\left(\mathrm{i}h\nabla + \frac{e}{c}\mathscr{A}(x,t)\right)\psi - mc^2\psi = \mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}_m\psi = 0 \tag{3.1}$$

où $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathscr{A}(x,t) = \{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3\}$ et $\Phi(x,t)$ sont les potentiels vecteur et scalaires du champ électromagnétique considérés ici comme des fonctions données de x, t.

Supposons que la solution de l'équation (3.1) satisfasse une condition initiale de la forme

$$\psi\big|_{t=0} = \varphi_0(x)\,\mathrm{e}^{ih^{-1}S_0(x)} \tag{3.2}$$

Considérons l'équation classique de Hamilton-Jacobi correspondant à l'équation (3.1) :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi\right)^2 - c^2\left(\nabla S - \frac{e}{c}\mathscr{A}\right)^2 - m^2c^4 = 0 \tag{3.3}$$

D'après (3.3) on voit que $\partial S/\partial t$ a 2 valeurs. Les solutions $x^{\pm}(t) = X^{\pm}(x_0, t)$, $p^{\pm}(t) = P^{\pm}(x_0, t), s^{\pm}(t) = S^{\pm}(x_0, t)$ du système d'équations d'Hamilton :

$$\frac{\mathrm{d}x_i^{\pm}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}p_i^{\pm}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i},$$

$$x^{\pm}\big|_{t=0} = x_0, \qquad p^{\pm}\big|_{t=0} = \nabla S_0(x_0),$$

$$\frac{\mathrm{d}S^{\pm}}{\mathrm{d}t} = -H^{\pm} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}} p_i^{\pm}, \qquad i = 1,2,3.$$

$$H^{\pm}(x, p, t) = e\Phi \mp c\sqrt{\left(p - \frac{e}{c}\mathscr{A}\right)^2 + m^2c^2}$$

correspondent respectivement pour les signes $\pm$ aux deux branches de l'équation Hamilton-Jacobi.

Supposons que $\mathscr{A}(x, t)$ et $\Phi(x, t)$, leurs deux premières dérivées, et les dérivées secondes de $S(x)$ soient bornées. Alors (cf. ch. 8, § 2) pour t inférieur à t_0, la famille des solutions du système (3.4). correspondant au signe + (de même qu'au signe −), ne se coupe pas, le jacobien

$$Y^{\pm}(x_0, t) = \det\left\|\frac{\partial X_i^{\pm}(x_0, t)}{\partial x_{0j}}\right\|$$

est différent de 0 et la solution de l'équation $X^{\pm}(x_0, t) = x$ est unique : $(x_0^{\pm} = x_0^{\pm}(x, t))$.

Soit $S^{\pm}(x, t) = S_{\pm}(x_0, t)$ les deux branches des solutions de l'équation (3.3), satisfaisant la condition $S^{\pm}(x, 0) = S_0(x)$. L'équation de Dirac élevée au carré s'écrit (voir [86], [81, 2])

$$\left[\left(\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right)^2 - c^2\left(\mathrm{i}h\nabla + \frac{e}{c}\mathscr{A}\right)^2 - m^2c^4 + hR(x, t)\right]\chi = 0 \quad (3.5)$$

où $R(x, t)$ est une matrice (4×4) de la forme

$$R(x, t) = ec[(\sigma, \bar{H}) - \mathrm{i}(\alpha, \bar{E})].$$

$\bar{E}(x, t), \bar{H}(x, t)$ sont les vecteurs du champ électromagnétique et

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

sont les matrices de Pauli [86].

Posant : $\chi\big|_{t=0} = \varphi_0(x)\mathrm{e}^{ih^{-1}S_0(x)}$

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\chi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \left\{e\Phi + c\gamma\left(\mathrm{i}h\nabla - \frac{e}{c}\mathscr{A}\right) + mc^2\right\}\varphi_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}h^{-1}S_0(x)} \quad (3.6)$$

on obtient que $\chi = \psi$, où ψ est la solution de l'équation (3.1), vérifiant la condition (3.2) (cf. ch. 1). Désignons par $\beta(x_0, t)$ la fonction $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial X}{\partial t}(x_0, t)$ et par

$$f = \exp\left\{- \mathrm{i}\frac{1}{2mc^2}\int_0^\tau R[X(x_0, t), t]\big|_{t=t(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\} f_0,$$

où

$$\tau = \tau(x_0, t) = \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2(x_0, t)}\,\mathrm{d}t.$$

la solution du problème

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2mc^2}R[X(x_0, t), t]\big|_{t=t(\tau)} f, \qquad f(0) = f_0$$

Par le changement

$$\chi^\pm = \varphi^\pm |Y^\pm|^{-1/2}\sqrt[4]{\frac{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, 0)]^2}{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, t)]^2}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}S^\pm(x, t)\right],$$

$$\varphi^\pm[X^\pm(x_0, \tau), t^\pm(x_0, \tau)] = \theta_\pm(x_0, \tau) \tag{3.6a}$$

$$\mathscr{H}_\pm(x_0, \tau) = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2mc^2}\int_0^\tau R[X^\pm(x_0, t), t]\big|_{t=t(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\}\theta_\pm(x_0, \tau)$$

l'équation (3.5) se met sous la forme suivante (« représentation » quasi-classique de l'équation de Dirac pour l'électron (+) et le positron (−)).

$$\frac{\partial \mathscr{H}_\pm}{\partial \tau} = -\frac{\mathrm{i}h}{2mc^2}\sigma_\pm(x_0, \tau)\,\Box_{x^0, \tau}|Y|^{-1/2}\sigma_\pm(x_0, \tau)\;\mathscr{H}_\pm$$

où

$$\sigma_\pm(x_0, \tau) = \sqrt[4]{\frac{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, 0)]^2}{c^2 - [\dot{X}^\pm(x_0, t)]^2}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2mc^2}\int_0^\tau R(X^\pm(x_0, t), t)\big|_{t=t(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.6b}$$

$\Box_{x_0, \tau}$ est l'opérateur de d'Alembert en coordonnées curvilignes. Ce résultat est aussi une conséquence du paragraphe supplémentaire : cf. § 5 « Solutions des équations de transfert ».

Supposons $\mathscr{A}(x, t), \Phi(x, t), S_0(x)$ indéfiniment différentiables. Soit

$$\frac{\partial \mathscr{H}_n^\pm}{\partial \tau} = -\frac{\mathrm{i}h}{2mc^2}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2mc^2}\int_0^\tau R^\pm\,\mathrm{d}\tau\right]\sigma_\pm|Y^\pm|^{1/2}\Box_{x_0, \tau}|Y^\pm|^{-1/2}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2mc^2}\int_0^\tau R^\pm\,\mathrm{d}\tau\right]\sigma_\pm\mathscr{H}_{n-1}^\pm$$

$$\mathscr{H}_0^\pm\big|_{\tau=0} = \mathscr{F}^\pm(x_0, h), \qquad \mathscr{H}_n^\pm\big|_{\tau=0} = 0, \quad n > 0, \qquad \mathscr{H}_{-1} = 0$$

où $\mathscr{F}^{\pm}(x_0, h)$ est une fonction indéfiniment différentiable de x_0 et h. Dénotons

$$\chi_N^{\pm} = \exp\left[\frac{i}{h} S^{\pm}(x,t)\right] \sigma_{\pm} |Y^{\pm}|^{-1/2} \left\{ \exp\left[\frac{i}{2mc^2} \int_0^{\tau} R^{\pm} \, d\tau\right] \sum_{n=0}^{N} \mathscr{H}_n^{\pm} \right\}\Bigg|_{x_0 = x_0^{\pm}(x,t)} \tag{3.6c}$$

La démonstration de l'existence de solutions ψ^+ et ψ^- de l'équation de Dirac (3.1) telles que

$$\begin{aligned} \psi^+ - \chi_N^+ &= h^{N+1} z(x,t,h) \\ \psi^- - \chi_N^- &= h^{N+1} z_1(x,t,h) \end{aligned} \tag{3.6 d}$$

où $z(x,t,h) \in S_h$ et $z_1(x,t,h) \in S_h$, s'effectue de façon semblable à celle du théorème (5.2).

Pour cela, il faut utiliser des estimations des solutions de l'équation (3.5) analogues à celles qui ont été obtenues pour l'équation de Schrödinger.

Toute la discussion relative à l'équation de Schrödinger comme nous l'avons déjà dit dans les remarques concernant le théorème (4.1) s'applique au cas de l'équation linéaire de Dirac (3.1).

2. Estimations des solutions de l'équation quadratique de Dirac et de l'équation de Klein-Gordon-Flock

Désignons par Q_m l'opérateur (3.5), défini sur les fonctions vectorielles suffisamment régulières $u(x,t) \in C(\tilde{L}_2)$, vérifiant la condition

$$u(x,0) = u_t'(x,0) = 0.$$

Ici, $\tilde{L}_2$ est l'espace des fonctions vectorielles de carré intégrables.

Désignons en outre par $L_{\pm m}$ les opérateurs fermés de $C(\tilde{L}_2)$ de la forme

$$L_{\pm m} u(x,t) = ih \frac{\partial u}{\partial t} - \hat{H}_{\pm m} u$$

où les $\hat{H}_{\pm m}$ sont comme dans (3.1), et définis sur les fonctions suffisamment régulières $u(x,t) \in C[\tilde{L}_2]$, satisfaisant la condition $u(x,0) = 0$.

Théorème 5.3. *Les opérateurs hL_{+m}^{-1} et hL_{-m}^{-1} appliquent R_h dans R_h.*

Ce théorème se démontre comme le théorème 5.1*a*.

On voit facilement [86] que $Q_m = L_{+m} \cdot L_{-m} = L_{-m} \cdot L_{+m}$.

Sur $D(L_{+m}) = D(L_{-m})$, on a l'identité $2mc^2 = L_{-m} - L_{+m}$.

D'où $Q_m^{-1} = L_{-m}^{-1} L_{+m}^{-1} = \dfrac{1}{2mc^2}(L_{+m}^{-1} - L_{-m}^{-1})$. D'où :

Théorème 5.4. *L'estimation suivante est satisfaite*

$$\operatorname{Max} \sqrt{\int |Q_m^{-1} f(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x} \leqslant \frac{1}{h} \int_0^t \sqrt{\int |f(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t}$$

Soit $\tilde{L}_{\pm m}$ l'opérateur de $C(\tilde{L}_2)$ dans la somme directe $\tilde{L}_2 \oplus C(\tilde{L}_2)$, qui s'écrit

$$\tilde{L}_{\pm m} u(x,t) = \left\{ u(x,0), \mathrm{i}h \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \hat{H}_{\pm m} u(x,t) \right\}$$

(on notera $L_{+m} = L_m$)

et soit $\tilde{Q}_m$ l'opérateur de $C[\tilde{L}_2]$ dans la somme directe $\tilde{L}_2 \oplus \tilde{L}_2 \oplus C[\tilde{L}_2]$ donné par

$$\tilde{Q}_m u(x,t) = \left\{ u(x,0)\,; \mathrm{i}h \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\,; \left[\left(\mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \right)^2 - c^2 \left(\mathrm{i}h\, \nabla + \frac{e}{c} \mathscr{A} \right)^2 - m^2 c^4 + hR(x,t) \right] u(x,t) \right\}$$

On a alors l'identité

$$\tilde{Q}_m^{-1} \{y_1, y_2, 0\} = \frac{1}{2mc^2} [\, \tilde{L}_{+m}^{-1} \{y_2 - \tilde{H}_{-m} y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}^{-1} \{- y_2 + \hat{H}_m y_1, 0\} \,]. \tag{3.7}$$

On peut la vérifier en faisant agir sur les deux membres de l'égalité (3.7) l'opérateur $\tilde{Q}_m$.
En effet, puisque

$$\mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial t} \tilde{L}_{\pm m} \{y, 0\} |_{t=0} = \hat{H}_{\pm m} \tilde{L}_{\pm m}^{-1} \{y, 0\} |_{t=0} = \hat{H}_{\pm m} y$$

alors

$$\tilde{Q}_m [\, \tilde{L}_m^{-1} \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1, 0\} + \tilde{L}_{-m}^{-1} \{- y_2 + \hat{H}_{+m} y_1, 0\}$$

$$= \{y_2 - \hat{H}_{-m} y_1 - y_2 + \hat{H}_{+m} y_1, \hat{H}_m (y_2 - \hat{H}_{-m} y_1) + \hat{H}_{-m} (- y_2 + \hat{H}_m y_1), 0\}$$

$$= 2mc^2 \{y_1, y_2, 0\}.$$

On peut démontrer, de manière analogue au théorème (5.2), le théorème :

Théorème 5.5. *Si* $y \in S_h$, $h^{n/2} \tilde{L}_m^{-1} \{ y, 0 \} \in S_h$.

Ce théorème et l'égalité (3.7) ont pour conséquence :

Théorème 5.6. *Si* $y_1, y_2 \in S_h$, *alors*

$$h^{n/2} \tilde{Q}_m^{-1} \{ y, y_1, 0 \} \in S_h,$$

et en outre

Théorème 5.5a. *Si* $y \in R_h$, *alors* $\tilde{L}_m^{-1}\{y, 0\} \in R_h$ *et*

$$\| \tilde{Q}_m^{-1}\{y, y_1, 0\} \| \leqslant \text{const}\{ \| H_{+m} y \|_{L_2} + \| H_{-m} y \|_{L_2} + \| y_1 \|_{L_2} \},$$

la constante étant indépendante de h.

Théorème 5.6a. *Si* $y, y_1 \in R_h$, *alors* $\tilde{Q}_m(y, y_1, 0) \in R_h$.

Une proposition analogue pour l'opérateur de Klein-Gordon-Fock résulte des arguments donnés « ci-dessous ».

Théorème 5.7. *Il existe des solutions* ψ^+ *et* ψ^- *de l'équation* (3.1) *telles que*

$$\psi^+ - \chi_N^+(x, t) = h^{N+1} z(t, x, h)$$

$$\psi^- - \chi_N^-(x, t) = h^{N+1} z_1(t, x, h)$$

où z_1 *et* $z \in S_h$.

Démontrons un résultat semblable pour les solutions de l'équation de Klein-Gordon-Fock.

Considérons l'opérateur de Klein-Gordon-Fock $K = Q_m - hR(x, t)$. Le développement formel de K^{-1} en séries de puissance de hRQ_m^{-1} est de la forme

$$K^{-1} = Q_m^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} h^k (RQ_m^{-1})^k. \tag{3.8}$$

Cette série converge. En fait, pour l'opérateur RL_m^{-1}, on a l'estimation (cf. lemme 4.1, ch. 1)

$$\| RL_{+m}^{-1} f \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \| R \| \frac{1}{h} \int_0^t \| f \|_{\tilde{L}_2} \mathrm{d}t .$$

Puisque $Q_m^{-1} = \dfrac{1}{2mc^2}(L_m^{-1} - L_{-m}^{-1})$, il résulte de l'inégalité précédente

$$\| RQ_m^{-1} f \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \frac{\| R \|}{mc^2 h} \int_0^t \| f \|_{\tilde{L}_2} \mathrm{d}t .$$

D'où l'estimation suivante

$$\| (RQ_m^{-1})^k f \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \frac{\| R \|^k}{(mc^2 h)^k} \int_0^{t_0} \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1} \mathrm{d}t_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} \| f \|_{\tilde{L}_2} \mathrm{d}t_k$$

$$\leqslant \frac{\| R \|^k}{(mc^2 h)^k} \frac{t_0^k}{k!} \operatorname*{Max}_t \| f \|_{\tilde{L}_2}$$

qui entraîne la convergence de la série (3.8) et l'inégalité $\| K \| \leqslant \text{Cte}/h$.

Considérons l'espace $\tilde{S}_h$ muni d'un ensemble dénombrable de normes de la forme

$$\| \varphi(x,t,h) \|_i = \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant t_0 \\ 0 < h \leqslant 1}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}^i \varphi(x,t,h)|^2 \, dx}$$

avec $\hat{p} = -\, ih \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Théorème 5.8. *Si les coefficients de l'équation de Klein-Gordon-Fock sont indéfiniment différentiables, l'opérateur hK^{-1} est partout défini dans $\tilde{S}_h$,* i.e. *quel que soit $f \in \tilde{S}_h, hK^{-1} f \in \tilde{S}_h$.*

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\| \hat{p}^i R L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \frac{\mathrm{Cte}}{h} \int_0^t \sum_{j=1}^{i} \| \hat{p}^i \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt$$

où la constante ne dépend que de i.

La démonstration se fait par récurrence. L'inégalité est vérifiée pour $i = 0$, supposons la vraie pour $i \leqslant N-1$ et estimons $\| \hat{p}^N R L_m^{-1} \varphi \|_{L_2}$. Étant donné l'identité

$$[A, B^{-1}] = -\, B^{-1}[A,B] B^{-1},$$

on obtient

$$\| \hat{p}^N R L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \| R L_m^{-1} \hat{p}^N \varphi \|_{\tilde{L}_2} + \| [\hat{p}^N, R] L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} + \| R L_m^{-1} [\hat{p}^N, L_m] L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2}.$$

Pour le premier terme, on a

$$\| R L_m^{-1} \hat{p}^N \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \mathrm{Cte} \cdot \frac{1}{h} \int_0^t \| \hat{p}^N \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt$$

et pour la somme des termes restants, d'après l'hypothèse de récurrence et les conditions du théorème, on a

$$\| [\hat{p}^N, R] L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} + \| R L_m^{-1} [\hat{p}^N, L_m] L_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \frac{\mathrm{Cte}}{h} \int_0^t \sum_{j=0}^{N-1} \| \hat{p}^j \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt.$$

Ce qui démontre la récurrence. De cette inégalité on tire

$$\| \hat{p}^i R Q_m^{-1} \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \frac{\mathrm{Cte}}{h} \int_0^t \sum_{j=0}^{i} \| \hat{p}^j \varphi \|_{\tilde{L}_2} dt$$

et comme lors de la démonstration de (2.8) on en conclut que

$$\| \hat{p}^i h^k (R Q_m^{-1})^k \varphi \|_{\tilde{L}_2} \leqslant \frac{\mathrm{Cte} \cdot \mathrm{i}^k}{k\,!} \sum_{j=0}^{i} \| \hat{p}^j \varphi \|_{\tilde{L}_2}.$$

En effet, pour $k = 1$, cette inégalité a été démontrée. Supposons la vraie pour $k \leqslant r$; alors

$$
\begin{aligned}
\| \hat{p}^i h^{r+1} (RQ_m^{-1})(RQ_m^{-1})^r \varphi \|_{\tilde{L}_2} &\leqslant C \int_0^t \sum_{j=0}^{i} \| \hat{p}^j h^r (RQ_m^{-1})^r \varphi \|_{\tilde{L}_2} \mathrm{d}t \\
&\leqslant C \int_0^t \sum_{j=0}^{i} \sum_{\alpha=0}^{j} \frac{C^r \alpha^r t^r}{r!} \operatorname{Max} \| \hat{p}^\alpha \varphi \|_{\tilde{L}_2} \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{C^{r+1} t^{r+1} i^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{j=0}^{i} \operatorname{Max}_t \| \hat{p}^\alpha \varphi \|_{\tilde{L}_2}
\end{aligned}
$$

C étant une constante dépendant seulement de i.

En substituant cette estimation dans (3.8) et tenant compte (cf. théorème 5.4) de ce que si $\varphi \in \tilde{S}_h$, alors $hQ_m^{-1}\varphi \in \tilde{S}_h$, on obtient que $hK^{-1}\varphi \in \tilde{S}_h$.

Soit maintenant $\varphi \in R_h$ et $u = hK^{-1}\varphi$. On a

$$Kx_i u = [K, x_i] u + h\varphi x_i \equiv hf + h\varphi x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

D'après ce qui a été démontré, $f \in \tilde{S}_h$ et comme par hypothèse $x_i \varphi \in \tilde{S}_h$, c'est-à-dire $x_i u \in \tilde{S}_h$. Par induction on obtient $x_i^n u \in \tilde{S}_h$, c'est-à-dire $u \in \tilde{R}_h$, donc hK^{-1} transforme R_h en R_h.

Soit $\tilde{K}$ l'opérateur de $C(L_2)$ dans $L_2 \oplus L_2 \oplus C(L_2)$ donné par

$$
\begin{aligned}
\tilde{K}u(x,t) = \Big\{ u(x,0), ih\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}, \left(ih\frac{\partial}{\partial t} + e\Phi \right)^2 u \\
- c^2 \left(ih\nabla - \frac{e}{c}\mathscr{A} \right)^2 u - m^2 c^4 u \Big\}
\end{aligned}
$$

Comme pour le théorème précédent, on obtient à partir de l'identité (3.7) le théorème :

Théorème 5.8a. *Si $y_1 \in R_h, y_2 \in R_h$, alors $\tilde{K}^{-1}\{y_1, y_2, 0\} \in R_h$.*

§ 4 DÉVELOPPEMENT DE CONDITIONS INITIALES ARBITRAIRES EN COMPOSANTES CORRESPONDANT AUX DIFFÉRENTES RACINES DU POLYNOME CARACTÉRISTIQUE

Nous allons montrer que les conditions initiales de la forme

$$
\begin{aligned}
u|_{t=0} &= \varphi(x) \exp[i/hS_0(x)] \\
u_t'|_{t=0} &= \varphi_1(x) \exp[i/hS_0(x)]
\end{aligned}
$$

peuvent se développer en composantes correspondant aux racines du polynôme caractéristique.

Considérons pour simplifier, l'équation du second ordre

$$\left\{\left(i\frac{\partial}{\partial t} - A\Phi(x,t)\right)^2 - C^2[-\nabla^2 + \gamma^2 A^2] + (\bar{B}(x,t),\mathrm{grad}) + AR(x,t)\right\}u(x,t) = 0 \tag{4.1}$$

Tous les raisonnements s'étendent immédiatement au cas général de l'équation (1.16) du chap. 1, mais les expressions obtenues sont plus compliquées.

L'équation caractéristique pour (4.1) est

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \Phi(x,t)\right)^2 - C^2[(\nabla S)^2 + \gamma^2] = 0. \tag{4.2}$$

Aux deux branches d'une solution de cette équation

$$\frac{\partial S^\pm}{\partial t} = -H^\pm(x,\nabla S^\pm,t) \tag{4.3}$$

$$H^\pm(x,p,t) = +\Phi(x,t) \mp C\sqrt{p^2+\gamma^2} \tag{4.4}$$

correspondent deux systèmes d'équations bicaractéristiques

$$\frac{\mathrm{d}x_i^\pm}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H^\pm}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H^\pm}{\partial x_i} \qquad i = 1,\ldots, \tag{4.5}$$

Soient $(X(x_0,t),P(x_0,t))$ les solutions du système bicaractéristique (4.5) qui vérifient les conditions initiales $X(x_0,0) = x_0, P(x_0,0) = \mathrm{grad}\,S_0(x_0)$ et supposons que l'équation $X(x_0,t) = x$ ait, par rapport à x_0, une solution unique : $x_0 = x_0(x,t)$. Notons $S^\pm(x,t) = S_\pm(x_0,t)$.

Définissons les fonctions $v^\pm(x,t)$ par la relation

$$v^\pm(x,t) = u(x,t)\exp[-\mathrm{i}S^\pm(x,t)A]. \tag{4.6}$$

En substituant dans l'équation (4.1)

$$u = v^\pm \exp[\mathrm{i}S^\pm(x,t)A]$$

on obtient l'équation suivante pour $v^\pm(x,t)$:

$$A\left\{2\frac{\partial S^\pm}{\partial t}\frac{\partial v^\pm}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}v^\pm + \Phi\frac{\partial v^\pm}{\partial t} - 2C^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v^\pm}{\partial x_i}\frac{\partial S^\pm}{\partial x_i} - [(\bar{B}(x,t),\mathrm{grad}\,S^\pm) + \Box S^\pm - \mathrm{i}R(x,t)]v^\pm\right\} = -\mathrm{i}\{\Box v^\pm + (\bar{B}(x,t),\mathrm{grad}\,v^\pm)\} \tag{4.7}$$

avec $\Box = C^2\nabla^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Considérons l'équation (4.7) dans la représentation où l'opérateur A est l'opérateur diagonal de multiplication par ω :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \omega\,\mathrm{d}E_\omega^A.$$

Développons formellement la fonction $v^{\pm}(x,t,\omega)$ en série de puissance de $1/\omega$

$$v^{\pm}(x,t,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{\pm}(x,t)\frac{1}{\omega^k}. \tag{4.8}$$

Écrivons formellement pour la fonction

$$v_j^{\pm} = \sum_{\alpha=0}^{j} b_\alpha^{\pm}(x,t)\,\omega^{-\alpha}$$

les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial v_j^{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}v_j^{\pm} + \Phi\frac{\partial v_j^{\pm}}{\partial t} - 2C^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S^{\pm}}{\partial x_k}\frac{\partial v_j^{\pm}}{\partial x_k} \\ - \left[\,(\bar{B},\operatorname{grad} S^{\pm}) + \Box S^{\pm} - \mathrm{i}R(x,t)\,\right]v_j^{\pm} = \\ - \mathrm{i}\left[\,\Box v_{j-1}^{\pm} + (\bar{B},\operatorname{grad} v_{j-1}^{\pm})\,\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

Supposons que, pour $t = 0, S^{\pm} = S_0(x),\ \Phi = \Phi_0(x)$.

Posant, dans les relations (4.9) : $j = 0, v_{-1}^{\pm} = 0, t = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial v_0^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0} &= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0} + \Phi_0(x)\right)^{-1}\Bigg\{2C^2(\nabla S_0,\nabla) \\ &+ (\bar{B}(x,0),\nabla S_0) + \left.\Box S^{\pm}\right|_{t=0} - \mathrm{i}R(x,0) - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=0}\Bigg\}v_0^{\pm}(x,0) \\ &= B_1^{\pm}v_0^{\pm}(x,0) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Les conditions initiales de la forme

$$u_N^{\pm}\big|_{t=0} = \varphi_0^{\pm}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega S_0(x)} \tag{4.11}$$

$$\left.\frac{\partial u_N^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0} = \left(\mathrm{i}\omega\left.\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi_0^{\pm} + \left.\frac{\partial v_N^{\pm}}{\partial t}\right|_{t=0}\right)\mathrm{e}^{i\omega S_0(x)} \tag{4.12}$$

où $\varphi_0^{\pm}(x,t)$ sont deux fonctions analytiques quelconques de ω, indéfiniment différentiables en x, seront dites respectivement positive et négative.

Elles correspondent aux deux racines du polynôme caractéristique.

Lemme 5.6. *Les conditions initiales de la forme*

$$u\big|_{t=0} = \psi(x,\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega S_0(x)} \qquad u_t'\big|_{t=0} = 0 \tag{4.13}$$

ou de la forme

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad u_t'\big|_{t=0} = \tilde{\psi}(x,\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega S_0(x)} \tag{4.14}$$

peuvent se représenter à l'ordre $O(\omega^{-N-1})$ *sous la forme d'une somme de conditions initiales positives et négatives*

$$u\big|_{t=0} = u_N^+\big|_{t=0} + u_N^-\big|_{t=0} + O(\omega^{-N-1})\big| \qquad u'_t\big|_{t=0} = 0 \quad (4.15)$$

ou

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\partial u_N^+}{\partial t} + \frac{\partial u_N^-}{\partial t}\right)\right|_{t=0} + O(\omega^{-N-1})$$
$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad (4.16)$$

$\left.\frac{\partial u_N^\pm}{\partial t}\right|_{t=0}$ et $u_N^\pm\big|_{t=0}$ *se calculant formellement à partir de* (4.11) *et de* (4.12).

Démonstration. Il suffit de trouver des fonctions $\varphi^+(x,\omega)$ et $\varphi^-(x,\omega)$ telles que

$$u\big|_{t=0} = (u_N^+ + u_N^-)\big|_{t=0} + O(\omega^{-N-1}) \qquad (4.15)$$

$$u'_t\Big|_{t=0} = \left.\left(\frac{\partial u_N^+}{\partial t} + \frac{\partial u_N^-}{\partial t}\right)\right|_{t=0} + O(\omega^{-N-1}) \qquad (4.16)$$

c'est-à-dire

$$\psi(x,\omega) = \varphi^+ + \varphi^- + O(\omega^{-N-1}),$$

$$\mathrm{i}\omega\left(\left.\frac{\partial S^+}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi^+ + \left.\frac{\partial S^-}{\partial t}\right|_{t=0}\varphi^- + \left.\frac{\partial v_N^+}{\partial t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\partial v_N^-}{\partial t}\right|_{t=0}\right) = O(\omega^{-N-1})$$

Développant $\psi(x,\omega), \varphi^\pm(x,\omega)$ en séries de puissance de $1/\omega$ et comparant les coefficients, on obtient en degré 0

$$\varphi_0^+ + \varphi_0^- = \psi_0$$

$$(\Phi_0 + C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_0^+ + (\Phi_0 - C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_0^- = 0,$$

d'où

$$\varphi_0^\pm = \frac{\mp\,\Phi_0 + C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}}{2C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}}\psi_0 .$$

En comparant les coefficients de ω^{-1} :

$$\varphi_1^+ + \varphi_1^- = \psi_1,$$

$$\mathrm{i}(\Phi_0 + C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_1^+ + \mathrm{i}(\Phi_0 - C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2})\varphi_1^- = B_1^+\psi_0 + B_1^-\psi_0$$

puisque $v_0(x,0) = \psi_0(x)$. D'où

$$\varphi_1^\pm = \mp\frac{\Phi_0 \mp C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}\psi_1 + B_2\psi_0}{2C\sqrt{(\nabla S_0)^2 + \gamma^2}},$$

avec $B_2\psi_0 = \mathrm{i}(B_1^+ + B_1^-)\psi_0$.

On peut ainsi obtenir $\varphi_k^{\pm}(x)$ pour $k \leqslant N$.

Des développements formels semblables des conditions initiales en composantes correspondant aux différentes racines du polynôme caractéristique peuvent être effectués pour une équation quelconque à coefficients opératoriels de la forme (1.16), ch. 1. Ce sont des développements de ce type qu'a utilisé Ludwig pour les systèmes de type hyperbolique [50].

§ 5 SUPPLÉMENT : SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE TRANSPORT POUR CERTAINES ÉQUATIONS (OU SYSTÈMES) DU TYPE ONDE

La proposition auxiliaire suivante sera un outil important pour l'étude des solutions des équations de transport.

Proposition A. *Si les équations* $\dfrac{dx}{d\tau} = \mathscr{F}(x)$, $x = (x_1 \dots x_{n+1})$ *admettent une famille de courbes intégrales* $x(\tau, a_1 \dots a_n)$, *on a l'égalité*

$$\frac{d}{d\tau} \ln \frac{D(x_1 \dots x_n x_{n+1})}{D(a_1 \dots a_n \tau)} = \operatorname{div} \mathscr{F}$$

La démonstration se fait en modifiant légèrement le lemme de Sobolev (cf. Smirnov, T. 4)

Venons-en maintenant à la considération d'équations concrètes du type ondulatoire.

1. Considérons un système hyperbolique faiblement connexe à caractéristiques distinctes :

$$L\psi = \frac{\partial^m \psi}{\partial t^m} + \sum_{\substack{[k_1 + \dots + k_{n+1}] \leqslant m \\ k_{n+1} \neq m}} a_{k_1 \dots k_{n+1}}(x, t) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{n+1}}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} \psi = 0 \quad (5.1)$$

ici $\psi = \{\psi_1 \dots \psi_N\}$ est une fonction vectorielle à N composantes et les matrices $a_{k_1 \dots k_{n+1}}$ sont, pour $k_1 + \dots + k_{n+1} = m$, proportionnelles à la matrice unité.

Introduisons les notations suivantes :

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) \equiv \sum_{k_1 + \dots + k_{n+1} = m} a_{k_1 \dots k_{n+1}} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}} + \frac{\partial^m}{\partial t^m}$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, x, t\right) = \sum_{k_1 + \dots + k_{n+1} = m-1} a_{k_1 \dots k_{n+1}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}}$$

Soit $S(x, t)$ la solution d'une des branches de l'équation caractéristique relative à (5.1).

Substituons dans le système (5.1) $\psi = u\,\mathrm{e}^{i\omega S}$ *et annulons le coefficient de* ω^{-m+1} . *On appelle l'équation ainsi obtenue : équation de transport de l'équation* (5.1).

Elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} + \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} + B\right)u = 0 \tag{5.2}$$

Lorsque B est proportionnel à la matrice unité, cette équation est donnée en ( ) – la généralisation en est triviale). Ici, τ est un paramètre $(t|_{\tau=0} = 0, x_{n+1} = t)$. Il faut remplacer x, p, t par les fonctions correspondantes de τ, calculées le long des bicaractéristiques du système (5.1), c'est-à-dire le long des caractéristiques de l'équation caractéristique.

Effectuant la substitution $u = v\exp\left[-\int_0^\tau B\,\mathrm{d}\tau\right]$, l'équation de transport devient

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} v = 0$$

Il est évident que la direction de vecteur v ne change pas le long des bicaractéristiques. Aussi peut-on chercher v sous la forme

$$v = v_0\,\mathrm{e}^{\varphi} J^{-1/2}, \text{ où } v_0 = \text{Cte}, \qquad J = \frac{D(t,x)}{D(\tau,x_0)}.$$

On obtient

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln J + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Utilisons la proposition A.

Pour cela, écrivons les équations en $x(\tau)$ et $t(\tau)$

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}} \quad , \quad (i = 1, \dots, n)$$

On a alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln J = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i}\left(\nabla S, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}\left(\nabla S, \frac{\partial S}{\partial t}, x, t\right)$$

Substituant cette expression dans l'équation de transport, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1}\partial t} = 0$$

Intégrant cette équation, on arrive à

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2}\left(\int_0^\tau \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1}\partial t}\right)\mathrm{d}\tau\right)$$

Repassant à une intégrale en t, et tenant compte de

$$J = \frac{D(t, x)}{D(\tau, x_0)} = \frac{Dx}{Dx_0}\frac{dt}{d\tau} = \frac{Dx}{Dx_0}\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}},$$

on obtient le résultat formulé dans le lemme suivant.

Lemme 5.7. *La solution de l'équation* (5.2) *s'écrit*

$$u = u(0)\left[\sqrt{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1}\frac{D(x_0)}{D(x)}}\right]\exp\left\{\int_0^t\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p_{n+1}}\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_i \partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial p_{n+1}\partial t} - B\right]dt\right\} \qquad (5.3)$$

Exemple. Considérons l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - C^2(x, t)\Delta u = 0.$$

Ici $\Lambda(p, p_{n+1}, x, t) = p_{n+1}^2 - C^2(x, t)p^2, B \equiv 0$; son équation de transport est

$$\frac{du}{d\tau} + u\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - C^2\Delta S\right) = 0$$

où t et τ sont liés par l'équation $dt/d\tau = 2p_{n+1}$ et comme $p_{n+1}^2 - C^2p^2 = 0$:

$$\frac{dt}{d\tau} = \pm 2C|p|.$$

Calculant les dérivées de Λ et les substituant dans (5.3) on obtient :

$$u = \sqrt{\frac{C_0|p_0|}{C|p|}}u_0\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{(\nabla C\cdot p)}{\pm|p|}\right]dt\right\}.$$

En utilisant l'équation $\dot{p} = \pm\nabla C|p|$, on aboutit alors à l'expression suivante pour u

$$u = \frac{|p_0|^{3/2}}{|p|^{3/2}}\sqrt{\frac{C_0}{C}}\sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}}u_0$$

2. Considérons l'équation du type onde

$$\left\{\left[i\frac{\partial}{\partial t} + A\Phi(x, t)\right]^2 + C^2(x, t)([\nabla - iA\mathscr{A}(x, t)]^2 - A^2\gamma^2) + \sum_k B_k(x, t)\frac{\partial}{\partial x_k} + iAR(x, t)\right\}\psi(x, t) = 0 \qquad (5.4)$$

introduite dans la première partie, ch. 1, § 2 et qui comprend comme cas particuliers différentes équations de la mécanique quantique. Demandons que l'expression

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{iS(x, t)A}(-iA^{-1})^k\psi_k(x, t),$$

où $S(x,t)$ est solution de l'équation caractéristique pour (5.4), satisfasse formellement l'équation (5.4).

Nous appellerons encore équation de transport de (5.4) l'équation que doit vérifier la fonction ψ_0. Pour résoudre cette équation de transport nous utiliserons la méthode suivante. Remplaçons dans (5.4) l'opérateur A par $-\,\mathrm{i}\partial/\partial y$ (y étant une nouvelle variable que nous introduisons en plus de x et t). Alors (5.4) devient un système hyperbolique faiblement connexe :

$$\left\{-\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]^2+C^2\left[\left(\nabla-\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\gamma^2\right]+\sum_k B_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial R}{\partial y}\right\}\psi=0 \tag{5.4*}$$

En utilisant la solution de l'équation de transport, donnée plus haut, pour (5.4)* et en faisant dans le résultat obtenu $p_y = 1$, on obtient le résultat suivant :

Lemme 5.8. *Une solution de l'équation de transport pour* (5.4) *s'écrit*

$$\psi_0=\psi_0(0)\sqrt{\frac{\mathrm{D}x_0}{\mathrm{D}x}\frac{C(x_0,0)}{C(x,t)}}\sqrt{\frac{(p_0-\mathscr{A}(x_0,0))^2-\gamma_0^2}{(p-\mathscr{A}(x,t))^2-\gamma^2}}$$

$$\times\exp\left\{\int_0^t\frac{(-1)^\nu}{2C\sqrt{(p-\mathscr{A})^2-\gamma^2}}\left[(p-\mathscr{A})\cdot\nabla C^2-B_kp_k-R\right]\mathrm{d}t\right\}$$

Le facteur multiplicatif $(-1)^\nu$ *prend les valeurs* ± 1 *correspondant aux deux solutions linéairement indépendantes des équations de transport.*

3. Considérons maintenant le système d'équations de la théorie de l'élasticité

$$\rho(x)\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}=(\lambda(x)+\mu(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\mu\,\Delta u_i$$
$$+\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\operatorname{div}u+\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{5.5}$$

L'équation caractéristique pour (5.5) se décompose en branches de la forme

$$\frac{\partial S_1^\pm}{\partial t}=\mp a|\nabla S_1^\pm|,\qquad a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial S_2^\pm}{\partial t}=\pm b|\nabla S_2^\pm|,\qquad b=\sqrt{\mu/\rho}. \tag{5.7}$$

On définit l'équation de transport pour (5.5) de la même manière que pour les équations précédentes. La solution de l'équation de transport pour $S_1^\pm$ est appelé onde longitudinale, celle pour $S_2^\pm$, onde transversale.

On appellera respectivement équations caractéristiques et bicaractéristiques les équations d'Hamilton-Jacobi et le système d'Hamilton.

Nous allons considérer séparément le cas des ondes longitudinales et celui des ondes transversales.

La solution présentée ici est due à B. Kouchevenko [41].

(a) *Ondes longitudinales.* L'équation de transport, après le remplacement de u par $\varphi \nabla S$, où φ est une fonction scalaire, prend la forme

$$\nabla S\, M\varphi\, \nabla S = 0,$$

où M est un opérateur agissant de la manière suivante sur les fonctions vectorielles :

$$\begin{aligned} Mv = \rho v \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 2\rho \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t} - (\lambda + \mu)[(\operatorname{div} v)\nabla S \\ + \nabla(v \nabla S) - \mu(v\,\Delta S + 2\nabla v\, \nabla S) - \nabla\lambda\,(v\,\nabla S) \\ - \nabla S(v\,\nabla\mu) - v\,(\nabla\mu\,\nabla S)] \end{aligned}$$

on utilise la notation

$$(\nabla u\, \nabla S) \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j}$$

En utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi, on peut obtenir l'identité suivante (sans perte de généralité, on considérera dorénavant l'onde correspondant à S^+ et on omettra le signe $+$) :

$$\nabla \frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla a\,|\nabla S| - \frac{a}{2|\nabla S|}\nabla(\nabla S)^2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a^2 \frac{\nabla(\nabla S)^2\, \nabla S}{2|\nabla S|^2} + a\nabla a \nabla S$$

On peut alors calculer $\nabla S\, M\varphi\, \nabla S$ en utilisant l'égalité précédente et l'équation d'Hamilton-Jacobi et on obtient :

$$\begin{aligned} &-(\lambda + 2\mu)[\varphi\,\Delta S(\nabla S)^2 + 2\nabla\varphi\nabla S(\nabla S)^2 + \varphi\nabla S\nabla(\nabla S)^2] \\ &- 2\varphi\nabla\mu\nabla S\,|\nabla S|^2 - (\nabla\lambda\nabla S)\,|\nabla S|^2\varphi + \frac{3}{2}a^2\rho\varphi\nabla S\,\Delta(\nabla S)^2 \\ &+ 3\rho a(\nabla a\,\nabla S)\,|\nabla S|^2\,\varphi - 2a\rho\,|\nabla S|^3\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2\rho a\nabla S a(\nabla S)^2\,\varphi = 0. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Pour simplifier l'équation, nous allons utiliser le lemme de Sobolev (cf. Proposition A).

Si x satisfait l'équation $\dfrac{dx}{dt} = X(t, x)$, alors

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{Dx}{Dx_0} = \operatorname{div} X .$$

Appliqué aux trajectoires de notre système, ce lemme fournit la relation

$$\Delta S = \frac{|\nabla S|}{a}\left[\frac{d}{dt}\ln\frac{Dx}{Dx_0} - \frac{\nabla a \nabla S}{|\nabla S|} + \frac{a\nabla S\nabla(\nabla S)^2}{2|\nabla S|^3}\right].$$

En utilisant cette expression pour ΔS, l'égalité suivante, qui résulte du système d'Hamilton :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\nabla f\,\nabla S}{|\nabla S|},$$

ainsi que le fait que (ρ, λ, μ) ne dépendent pas explicitement du temps, on réduit l'équation de transport à

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\sqrt{\frac{Dx}{Dx_0}}\frac{1}{a^2}\sqrt{(\lambda + 2\mu)}\,\varphi\right) = 0 .$$

D'où

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\frac{\varphi_0}{\sqrt{\dfrac{D(x)}{D(x_0)}}}\,\frac{a}{a_0}$$

On obtient une solution exactement semblable, pour l'onde correspondant à S^-.

D'où le lemme :

Lemme 5.9. *La fonction vectorielle*

$$u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,\frac{\varphi_0}{\sqrt{\dfrac{Dx}{Dx_0}}}\,\frac{a}{a_0}\,\nabla S$$

satisfait l'équation de transport pour les équations de l'élasticité dans le cas des ondes longitudinales.

(b) *Ondes transversales.* Posons $u = nv_n + \nu v_\nu$, où v_n et v_ν sont des scalaires, n et ν deux champs de vecteurs continûment différentiables tels que :

$$n\cdot\nu = n\cdot\nabla S = \nu\cdot\nabla S = 0 \qquad \text{et} \qquad n^2 = \nu^2 = 1 .$$

L'équation de transport s'écrit alors :

$$n\cdot M\cdot(v_n n + v_\nu \nu) = 0 ,$$

$$\nu\cdot M\cdot(v_n n + v_\nu \nu) = 0 .$$

En utilisant les mêmes identités que pour les ondes longitudinales, ces équations se mettent sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} + v_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \sqrt{\rho \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}x_0}} + v_\nu \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} n = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}v_\nu}{\mathrm{d}t} + v_\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \sqrt{\rho \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}x_0}} + v_n \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \nu = 0.$$

De $n\nu = 0$, résulte

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \cdot \nu = - \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} \cdot n = T.$$

Posant $z = v_n + \mathrm{i} v_\nu$, on obtient alors

$$z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\, z_0 \sqrt{\frac{Dx_0}{Dx}} \exp\left(- \mathrm{i} \int_0^t T \, \mathrm{d}t \right).$$

On a donc finalement le lemme :

Lemme 5.10. *La fonction*

$$u = n \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{Dx_0}{Dx}} \frac{v_{n_0}}{\cos\gamma} \cos\left(- \int_0^t \nu \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + \gamma \right) +$$

$$+ \nu \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\mathrm{D}x_0}{\mathrm{D}x}} \frac{v_{n_0}}{\cos\gamma} \sin\left(- \int_0^t \nu \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + \gamma \right),$$

où γ est une constante, est une solution de l'équation de transport pour les équations de l'élasticité dans le cas des ondes transversales. Si $\cos\gamma = 0$, *il faut poser*

$$u = \nu \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\mathrm{D}x_0}{\mathrm{D}x}}\, v_{\nu_0} \cos\left(\int_0^t \nu \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \right).$$

CHAPITRE 6

ASYMPTOTIQUE LOCALE DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans ce chapitre, on étudie l'asymptotique des équations du n-ième ordre par rapport au temps, à coefficients opératoriels, dépendant de $x = (x_1, \dots, x_n)$ et des dérivées partielles par rapport à $x_1, \dots, x_n$. Les résultats de ce chapitre seront surtout utilisés pour la construction de l'asymptotique locale des équations hyperboliques.

Les deux premiers paragraphes ont un caractère auxiliaire. Ils sont consacrés au développement asymptotique d'intégrales de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iAf(x)} g(x)\, \mathrm{d}x, \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

où $g(x)$ est une fonction à valeurs dans un espace de Banach B, $f(x)$ une fonction à valeurs sur la droite et $\mathrm{i}A$ le générateur infinitésimal d'un groupe dans B. Le problème consiste à calculer cette intégrale à des fonctions appartenant à $D(A^N)$ près.

En s'appuyant sur les formules obtenues au § 2 et sur le lemme 5.5, Ch. 2, de la théorie des perturbations, on construit l'asymptotique locale des solutions d'équations opératorielles aux dérivées partielles. Dans ce but on suppose l'existence, l'unicité et la différentiabilité des solutions de ces équations.

§ 1 SUR LA RACINE CARRÉE D'UN OPÉRATEUR DANS UN ESPACE DE BANACH

Considérons un opérateur non borné A dans l'espace de Banach B et possédant les propriétés suivantes :

1) l'opérateur A engendre un groupe à un paramètre e^{iAt} fortement continu et borné pour tout t

$$\| e^{iAt} \| \leqslant M \qquad \text{pour } -\infty \leqslant t \leqslant +\infty\,;$$

2) l'opérateur $(1 + \gamma^2 A)^{-1}$ existe, est partout défini dans B quel que soit $\gamma > 0$ et borné par l'unité;

3) l'opérateur A^{-1} existe.

Tous les lemmes que nous allons démontrer s'étendent directement au cas où l'opérateur A satisfait, au lieu de la condition 2, la condition 2*a*) l'opérateur $(1 - \gamma^2 A)^{-1}$ existe, est partout défini, et borné par l'unité.

En vertu du théorème de Hille-Phillips-Yosida (cf. première partie, chap. 4, § 1), la condition 1) entraîne en particulier que

$$\left\| \frac{1}{1 - i\alpha A} \right\| \leqslant M \qquad \text{pour tout } -\infty < \alpha < \infty$$

En outre, on a

$$\left\| \frac{1}{1 - i\alpha A + \gamma^2 A} \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{1 + \gamma^2 A} \right\| \left\| \frac{1}{1 - i\alpha \dfrac{A}{1 + \gamma^2 A}} \right\| \leqslant M \quad (1.1)$$

puisque, en vertu de (2.8), Partie I, ch. 4, § 2

$$\| e^{iB_\gamma t} \| \leqslant M, \qquad \text{où} \quad B_\gamma = A/(1 + \gamma^2 A),$$

ceci signifie qu'en vertu de ce même théorème de Hille-Phillips-Yosida :

$$\left\| \frac{1}{1 - i\alpha B_\gamma} \right\| \leqslant M.$$

Nous utiliserons la formule suivante (évidente) « d'intégration par parties »

$$\int_0^1 e^{iAf(t)} \left(\frac{g(t)}{f'(t)} \right)' dt = - e^{iAf(0)} \frac{g(0)}{f'(0)} - iA \int_0^1 e^{iAf(t)} \frac{g(t)}{f'(t)} \, df(t) \quad (1.2)$$

Ici, $g(t)$ est une fonction différentiable à valeurs dans B s'annulant pour $t = 1$.

Cette formule est valable à condition que l'intégrale qui figure dans la partie gauche de l'égalité existe.

Lemme 6.1. *L'expression*

$$T = \frac{2 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} A \int_0^\infty e^{iAx^2} dx$$

existe en tant qu'opérateur dans B avec pour domaine $D(A)$.

Démonstration. Soit $g \in D(A)$. Remarquons d'abord que, puisque A est un opérateur fermé d'après la condition 1), l'égalité

$$\lim_{N \to \infty} \left\{ A \int_0^N e^{iAx^2} g \, dx \right\} = \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{iAx^2} Ag \, dx$$

entraîne par définition de la fermeture

$$A \int_0^\infty e^{iAx^2} g \, dx = \int_0^\infty e^{iAx^2} Ag \, dx .$$

Montrons que

$$f = \int_0^\infty e^{iAx^2} Ag \, dx \in B . \tag{1.3}$$

Divisons l'intégrale (1.3) en somme de deux intégrales

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty .$$

Il est évident que $f_1 = \int_0^1 e^{Ax^2} Ag \, dx \in B$:

$$\| f_1 \| \leqslant \int_0^1 \| e^{iAx^2} Ag \| \, dx \leqslant M \| Ag \| . \tag{1.4}$$

Maintenant, estimons la norme de $f_2 = \int_1^\infty e^{Ax^2} Ag \, dx$.

Effectuons la substitution $x^2 = t$. On obtient :

$$f_2 = \int_1^\infty e^{iAx^2} Ag \, dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{iAt} Ag}{\sqrt{t}} dt .$$

Intégrant par parties (*), on a

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{iAt}}{\sqrt{t}} Ag \, dt = \frac{i}{2} e^{iA} g - \frac{i}{4} \int_1^\infty \frac{e^{iAt}}{t^{3/2}} g \, dt \tag{1.5}$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.5) est évidemment inférieur à $\frac{1}{2} M \| g \|$, et on a pour le second terme l'estimation :

$$\frac{1}{4} \left\| \int_1^\infty \frac{e^{iAt}}{t^{3/2}} g \, dt \right\| \leqslant \frac{1}{4} \int_1^\infty \left\| \frac{e^{iAt}}{t^{3/2}} g \right\| dt \leqslant \frac{M \| g \|}{4} \left| \int_1^\infty \frac{dt}{t^{3/2}} \right| = M_1 \| g \| .$$

Ainsi, nous obtenons finalement que

$$\| f \| \leqslant C_1 \| Ag \| + C_2 \| g \| \tag{1.6}$$

c.q.f.d.

(*) Cette formule s'obtient par passage à la limite ∞ de la borne supérieure d'intégration.

Définissons un opérateur P_α de la manière suivante

$$P_\alpha g = \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{i}}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{iA\xi^2} \mathrm{e}^{-\alpha\xi^2} g \, \mathrm{d}\xi \tag{1.7}$$

où $g \in B$ et $\alpha > 0$. Il est évident que cet opérateur est borné et défini sur tout B. En effet,

$$\left\| \int_0^\infty \mathrm{e}^{iA\xi^2} \mathrm{e}^{-\alpha\xi^2} g \, \mathrm{d}\xi \right\| \leqslant \int_0^\infty \| \mathrm{e}^{iA\xi^2 - \alpha\xi^2} g \| \, \mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant M \| g \| \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha\xi^2} \mathrm{d}\xi = M_1 \| g \| .$$

Lemme 6.2. *On a l'égalité* $P_\alpha^2 g = \dfrac{1}{A + \mathrm{i}\alpha} g \qquad \forall g \in B$ et $\alpha > 0$.

En effet,

$$P_\alpha^2 g = \frac{4}{\pi \mathrm{i}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{iA\xi^2 - \alpha\xi^2} \mathrm{d}\xi \int_0^\infty \mathrm{e}^{iA\eta^2 - \alpha\eta^2} g \, \mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{4}{\pi \mathrm{i}} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{iAr^2 - \alpha r^2} g \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = -\mathrm{i} \int_0^\infty \mathrm{e}^{i(A+\alpha i)t} g \, \mathrm{d}t = \frac{1}{A + \mathrm{i}\alpha} g$$

(cf. [28]).

Lemme 6.3. $\forall g \in D(A)$, *on a l'égalité* $T^2 g = Ag$.

Démonstration. Soit $T_\alpha = AP_\alpha$, $D(T_\alpha) = D(A)$.

Avant tout montrons que

$$T_\alpha g = \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{i}}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{iAx^2 - \alpha x^2} Ag \, \mathrm{d}x \to Tg \tag{1.8}$$

au sens de la convergence forte dans B, pour $\alpha \to 0, g \in D(A)$. On a

$$\frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{i}}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{iAx^2} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} Ag \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{i}}} \int_0^{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{iAx^2} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} Ag \, \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{\pi \mathrm{i}}} \int_N^\infty \frac{\mathrm{e}^{iAt} \mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} Ag \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi \mathrm{i}}} \int_0^{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{iAx^2} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} Ag \, \mathrm{d}x + \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-N\alpha} \mathrm{e}^{iAN}}{\sqrt{N}} g$$

$$- \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\pi}} \int_N^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{e}^{iAt}}{2\sqrt{t^3}} g \, \mathrm{d}t - \alpha \sqrt{\frac{\mathrm{i}}{\pi}} \int_N^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{iAt} g \, \mathrm{d}t \tag{1.9}$$

Il est évident que le premier terme du membre de droite de l'égalité (1.9) a une limite lorsque $\alpha \to 0$ et ensuite $N \to \infty$, égale à Tg. Des inégalités qui suivent, résulte que les autres termes du membre de droite de l'égalité (1.9) tendent vers 0 pour $\alpha \to 0$, puis $N \to \infty$:

I) $$\left\| \frac{e^{-N\alpha} e^{iAN}}{\sqrt{N}} g \right\| \leqslant M \frac{\| g \|}{\sqrt{N}};$$

II) $$\left\| \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{3/2}} e^{iAt} g \, dt \right\| \leqslant \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{t^{3/2}} \| e^{iAt} g \| \, dt \leqslant \frac{M \| g \|}{\sqrt{N}};$$

III) $$\alpha \left\| \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} e^{iAt} g \, dt \right\| \leqslant \alpha M \| g \| \left| \int_N^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt \right| \leqslant$$

$$2\alpha M \| g \| \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\alpha\pi} M \| g \|$$

Ce qui démontre la relation (1.8).

Considérons maintenant T_α^2 et montrons que

$$\lim_{\alpha \to 0} T_\alpha^2 = T^2 \qquad \text{sur} \quad D(A^2). \tag{1.10}$$

Pour $g \in D(A^2)$, on a

$$T_\alpha^2 g = T_\alpha (T_\alpha - T) g + T_\alpha T g. \tag{1.10a}$$

Il est évident que

$$A(T_\alpha - T) g = (T_\alpha - T) A g \to 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \to 0.$$

Comme l'inégalité (1.6) démontrée plus haut, on a :

$$\| T_\alpha g_1 \| \leqslant C_1 \| A g_1 \| + C_2 \| g_1 \| \qquad \text{pour} \quad g_1 \in D(A).$$

En posant $(T_\alpha - T) g = g_1$, nous obtenons

$$\| T_\alpha (T_\alpha - T) g \| \leqslant C_1 \| A(T_\alpha - T) g \| + C_2 \| (T_\alpha - T) g \| \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{1.10b}$$

Et comme $Ag \in D(A)$, $ATg = TAg \in B$, ce qui signifie que $Tg \in D(A)$. Donc, en vertu de (1.8) $T_\alpha T g \to T^2 g$ pour $\alpha \to 0$.

On en déduit alors (1.10) avec l'aide de (1.10*a*) et (1.10*b*).

Il est évident que

$$T_\alpha^2 g = \frac{4}{\pi i} \int_0^\infty e^{iA\xi^2} e^{-\alpha\xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2} e^{-\alpha\eta^2} d\eta A^2 g$$

$$= -i \int_0^\infty e^{iAt - \alpha t} dt A^2 g = \frac{A^2}{A + i\alpha} g = \left(A - i\alpha - \frac{\alpha^2}{A + i\alpha} \right) g.$$

Comme $\left\| \dfrac{1}{A + i\alpha} \right\| \leqslant M/\alpha$, il en résulte que

$$T_\alpha^2 g \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} Ag \qquad \text{pour } g \in D(A^2).$$

Ainsi $T^2 g = Ag$ pour $g \in D(A^2)$. Par fermeture dans la norme $\| g \| + \| Ag \|$, cette identité se prolonge au domaine $D(A)$. Le lemme est démontré.

Soit $\bar{P}_\alpha$ l'opérateur complexe-conjugué de P_α

$$\bar{P}_\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-iAx^2} e^{-\alpha x^2} dx$$

Lemme 6.4. *Pour toute fonction $g \in B$ et $\alpha > 0$, on a l'égalité*

$$P_\alpha \bar{P}_\alpha g = \frac{1}{A + i\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{N} \frac{C_k \alpha^k}{(A + i\alpha)^k} g + \alpha^N g_N \right\}$$

où $g_N \in D(A^N)$ et les C_k sont des constantes.

Démonstration. On a

$$P_\alpha \bar{P}_\alpha g = \bar{P}_\alpha P_\alpha g = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{iA\xi^2 - \alpha\xi^2} d\xi \int_0^\infty e^{iA\eta^2 - \alpha\eta^2} g \, d\eta$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{iAr^2 - \alpha r^2} e^{-2iAr^2 \cos^2 \varphi} gr \, dr$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{iAt - \alpha t} e^{-2iAt \cos^2 \varphi} g \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha - iA(1 - 2\cos^2 \varphi)} g = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\alpha + iA \cos 2\varphi} g$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\alpha + iA \cos \varphi} g = \frac{1}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{dz}{(\alpha + iA \cos z)} g \tag{1.10c}$$

où le contour C_δ se compose des points

$$z = \begin{cases} x \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 - \delta, \\ \pi/2 + \delta e^{i\varphi} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ x \quad \text{pour } \pi/2 + \delta \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Ainsi, sur le demi-cercle

$$\begin{aligned} i \cos z &= i \cos(\pi/2 + \delta e^{i\varphi}) \\ &= i \cos(\pi/2 + \delta \cos\varphi) \operatorname{ch}(\delta \sin\varphi) + \sin(\pi/2 + \delta \cos\varphi) \operatorname{sh}(\delta \sin\varphi) \end{aligned}$$

et en outre

$$\sin(\pi/2 + \delta\cos\varphi)\operatorname{sh}(\delta\sin\varphi) \geqslant 0, \qquad \delta < \delta_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

D'où, d'après (1.1),

$$\|(\alpha + \mathrm{i}\cos zA)^{-1}\| \leqslant M/\alpha \qquad \text{quand } z \in C_\delta.$$

De (1.10*c*) résulte

$$P_\alpha \bar{P}_\alpha g = \frac{1}{\pi(\mathrm{i}A - \alpha)} \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{\cos z\left[1 + \dfrac{\alpha(1 + \cos z)}{(\mathrm{i}A - \alpha)\cos z}\right]} g$$

$$= \frac{1}{\pi(\mathrm{i}A - \alpha)} \left\{ \sum_{n=0}^{N} \int_{C_\delta} \frac{\alpha^n}{\cos z}\left[\frac{1 + \cos z}{(\alpha - \mathrm{i}A)\cos z}\right]^n g\,\mathrm{d}z \right.$$

$$\left. + \int_{C_\delta} \frac{\alpha^{N+1}}{\cos z + \dfrac{\alpha(1 + \cos z)}{\mathrm{i}A - \alpha}}\left[\frac{1 + \cos z}{(\alpha - \mathrm{i}A)\cos z}\right]^{N+1} g\,\mathrm{d}z \right\}.$$

Comme l'intégrale

$$\frac{(-1)^n}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{1}{\cos z}\left(\frac{1 + \cos z}{\cos z^n}\right)^n \mathrm{d}z$$

existe et est égale à une certaine constante C_n, on peut écrire

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{\cos z + \dfrac{\alpha(1 + \cos z)}{\mathrm{i}A - \alpha}}\ g = \sum_{n=0}^{N} \frac{C_n \alpha^n}{(\mathrm{i}\alpha + A)^n} g -$$

$$\frac{\alpha^{N+1}}{(\alpha - \mathrm{i}A)^N} \int_{C_\delta} \frac{(1 + \cos z)^{N+1}\,\mathrm{d}z}{(\mathrm{i}A\cos z + \alpha)\cos z^{N+1}} g.$$

Montrons maintenant que

$$\frac{\alpha}{(\alpha - \mathrm{i}A)^N} \int_{C_\delta} \frac{(1 + \cos z)^{N+1}}{(\mathrm{i}A\cos z + \alpha)(\cos z)^{N+1}} g\,\mathrm{d}z \in D(A^N).$$

En effet

$$\left\| \frac{A^N \alpha}{(\alpha - \mathrm{i}A)^N} \int_{C_\delta} \frac{(1 + \cos z)^{N+1}}{(\mathrm{i}A\cos z + \alpha)(\cos z)^{N+1}} g\,\mathrm{d}z \right\| \leqslant \alpha \cdot \left\| \left[\mathrm{i}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha - \mathrm{i}A}\right)\right]^N \right\|$$

$$\cdot \operatorname*{Max}_{C_\delta} \left| \frac{(1 + \cos z)^{N+1}}{(\cos z)^{N+1}} \right| \int_{C_\delta} \|(\mathrm{i}A\cos z + \alpha)^{-1} g\|\,\mathrm{d}z$$

$$\leqslant M(1 + M)^N \|g\|\, C(N, \delta)$$

Le lemme est démontré.

Notons que si A vérifie (2*a*), il faut alors prendre $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$.

Lemme 6.5. *Pour tout* $g \in D(A)$, *on a l'égalité*

$$T\bar{T}g = Ag. \tag{1.11}$$

Démonstration. On a

$$T\bar{T}g = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{iAx^2} A\,dx \int_0^\infty e^{-iAy^2} Ag\,dy.$$

En faisant une démonstration semblable à celle de la relation (1.20), nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{iAx^2} A\,dx \int_0^\infty e^{-iAy^2} Ag\,dy = \lim_{\alpha\to 0}\int_0^\infty e^{iAx^2-\alpha x^2} A\,dx \int_0^\infty e^{-iAy^2-\alpha y^2} Ag\,dy \tag{1.12}$$

Comme pour les lemmes 6.3 et 6.4, nous avons :

1) $$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{iAx^2-\alpha x^2}dx \int_0^\infty e^{-iAy^2-\alpha y^2} A^2 g\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\alpha + iA\cos z}A^2 g$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{C_\delta}\left\{\frac{A}{i\cos z} + \frac{\alpha}{\cos^2 z} - \frac{\alpha}{\cos^2 z\left(1+\dfrac{iA}{\alpha}\cos z\right)}\right\} g\,dz$$

2) $$\left\|\frac{1}{1+\dfrac{iA}{\alpha}\cos z}\right\| \leqslant M.$$

Comme

$$\frac{1}{i}\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos z} = \pi, \qquad \left\|\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos^2 z}g\right\| \leqslant C_1(\delta)\|g\|,$$

$$\left\|\int_{C_\delta}\frac{dz}{\cos^2 z\left(1+\dfrac{iA\cos z}{\alpha}\right)}g\right\| \leqslant C_2(\delta)M\|g\|,$$

alors

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{iAx^2-\alpha x^2}dx\int_0^\infty e^{-iAy^2-\alpha y^2}A^2 g\,dy = Ag.$$

Ce qui, avec (1.12) entraîne l'égalité (1.11) pour $g \in D(A^2)$.

Par fermeture en norme $\| g \| + \| Ag \|$, l'égalité reste valable pour tous les $g \in D(A)$.

c.q.f.d.

Lemme 6.6. *On a l'égalité* $T = \overline{T}$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, pour $g \in D(A)$,

$$T\overline{T}g = Ag.$$

D'autre part, en vertu du lemme 6.3 $T^2 g = Ag$.
Par conséquent, $T\overline{T}g = T^2 g$ pour $g \in D(A)$.
Ce qui signifie que pour $g \in D(A^2)$, $T^2\overline{T}g = T^3 g$, c'est-à-dire

$$A\overline{T}g - ATg = 0.$$

Donc d'après la condition 3) du début du paragraphe, $\overline{T}g = Tg$ pour $g \in D(A^2)$. Par fermeture en norme $\| g \| + \| Ag \|$ cette égalité se conserve pour tous les $g \in D(A)$.

c.q.f.d.

Il en résulte que si A est un opérateur dans un espace de Banach réel B, alors T est aussi défini comme opérateur dans B.

Dans la suite nous écrirons $T = \sqrt{A}$ et $P_\alpha = (A + i\alpha)^{-1/2}$. Ces notations sont justifiées par les lemmes précédemment démontrés. Lorsque A est « négatif », i.e. vérifie la condition 2*a*), par $\sqrt{|A|}$ il faut comprendre $\sqrt{-A}$.

§ 2 MÉTHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE POUR LES FONCTIONS ABSTRAITES

Dans ce paragraphe, les formules asymptotiques de la méthode de la phase stationnaire seront appliquées aux intégrales de fonctions abstraites. La méthode de la phase stationnaire pour les fonctions à valeurs sur la droite est justifiée, par exemple, dans les travaux [79,2] et [90].

Nous allons d'abord présenter formellement la technique (bien connue) d'obtention de formules asymptotiques par la méthode de la place stationnaire. Nous rencontrerons au cours de cette déduction des intégrales divergentes : nous les régulariserons tout à fait formellement. Notons que la justification de la méthode de la phase stationnaire donnée ici, ne s'appuie d'aucune façon sur le procédé qui sera décrit plus bas.

1. **Procédé formel de calcul des termes d'une série asymptotique**

Considérons l'intégrale

$$I(h) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ih^{-1} f(x)} \varphi(x) \, dx_1 \ldots dx_n \tag{2.1}$$

où $\varphi(x), f(x) \in C^\infty$ et $\varphi(x)$ est à support compact.

Pour calculer les termes de l'asymptotique de $I(h)$ pour $h \to 0$, appliquons la méthode formelle suivante : soit $x = x_0$ l'unique point stationnaire, c'est-à-dire un point où $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

Développons $f(x)$ et $\varphi(x)$ en séries asymptotiques de Taylor au voisinage de $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \ldots,$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_j}(x_j - x_{0j}) + \ldots$$

Faisons dans l'intégrale (2.1) le changement de variables

$$x_j - x_{0_j} = \sqrt{h}\,\xi_j .$$

Alors

$$I(h) = e^{ih^{-1} f(x_0)} h^{n/2} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon |\xi|^2} \exp\left(\frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} f_{kj}(x_0) \xi_k \xi_j\right)$$
$$\times \exp\{i\sqrt{h}[f_3(x_0,\xi) + \sqrt{h} f_4(x_0,\xi) + \ldots]\}(\varphi(x_0) + \varphi_1(x_0,\xi)\sqrt{h} + \ldots)\, d\xi, \tag{2.2}$$

où

$$f_k(x_0,\xi) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x_0)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k},$$

$$f_{ik}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(0) \qquad \varphi_k(x_0,\xi) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x_0)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}$$

Comme

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(x_0) + \sqrt{h}\varphi_1(x_0,\xi) + \ldots + h^{\nu/2}\varphi_\nu(x_0,\xi) + \ldots$$

on obtient que

$$\psi(x_0,\xi) = \exp\{i\sqrt{h}(f_3(x_0,\xi) + \sqrt{h} f_4(x_0,\xi) + \ldots)\}\tilde{\varphi}(\xi)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu/2} Q_\nu(x_0,\xi), \tag{2.3}$$

où $Q_\nu(x_0,\xi)$ est un polynôme de degré ν en $\xi_k, (k = 1, \ldots, n)$ à coefficients des fonctions linéaires des dérivées de $\varphi(x)$ au point stationnaire jusqu'à l'ordre ν.

En substituant l'expression (2.3) de $\psi(x_0, \xi)$ dans (2.2), il vient

$$I(h) = e^{ih^{-1}f(x_0)} h^{n/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu/2} C_\nu(x_0) \tag{2.4}$$

où

$$C_\nu(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|\xi|^2} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} f_{jk}(x_0)\, \xi_k \xi_j\right) Q_\nu(x_0, \xi)\, d\xi .$$

Pour ν impair, $Q_\nu(x_0, \xi)$ est impair et les coefficients des puissances demi-entières de h sont nuls.

Donc :

$$I(h) = e^{ih^{-1}f(x_0)} h^{n/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} C_{2\nu}(x_0),$$

où $C_{2\nu}(x_0)$ est une combinaison linéaire des dérivées de φ jusqu'à l'ordre 2ν, prises au point $x = x_0$.

La justification de ce développement s'obtient en s'appuyant seulement sur la formule d'intégration par parties (*).

Remarque :

Comme on l'a déjà indiqué au paragraphe précédent, pour une fonction abstraite $g(x)$ à valeurs dans un espace de Banach B et pour un opérateur A, générateur infinitésimal d'un groupe dans cet espace, la formule d'intégration par parties s'écrit :

$$\int_a^b e^{iAf(x)} \left(\frac{g(x)}{f(x)'}\right)' dx = - e^{iAf(a)} \frac{g(a)}{f'(a)} - iA \int_a^b e^{iAf(t)} \frac{g(t)}{f'(t)}\, df(t) \tag{2.5}$$

à condition que $g(b) = 0, g(a)/f'(a) \in B$ et que l'intégrale de droite existe.

Cette formule permet d'étendre aux fonctions abstraites les résultats connus de la méthode de la phase stationnaire.

Considérons le lemme suivant, qui est évident, comme l'illustration la plus simple de cette méthode :

Lemme 6.7. *Soient* $\varphi(x) \in C^\infty$ *à support compact,* $f(x) \in C^\infty, \Omega = \operatorname{supp} \varphi$ *et* grad $f(x) \neq 0$ *si* $x \in \Omega$.

Alors

$$I(h) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{h} f(x)\right) \varphi(x)\, dx = O(h^N) \qquad \forall N .$$

(*) Il est facile d'obtenir directement une justification de la méthode de développement et de régularisation des intégrales, exposée ci-dessus, en prenant un domaine d'intégration dans l'espace complexe ne rencontrant pas le support de $\varphi(x)$ et tel que les intégrales de la formule (2.4) convergent.

Démonstration. Il est évident que

$$I(h) = \frac{h}{\mathrm{i}} \int_{\Omega} \frac{1}{\partial f/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathrm{e}^{ih^{-1}f(x)}) \varphi(x) \, \mathrm{d}x . \tag{2.6}$$

Intégrant alors (2.6) par parties, on a : $I(h) = O(h)$ et en itérant ce procédé, on obtient le lemme.

Pour des fonctions abstraites, on peut reformuler ce lemme de la façon suivante :

Lemme 6.8. *Soient* $x = (x_1, \dots, x_n), \varphi(x) \in C^{\infty}(B)$ *à support compact* $\Omega, f(x) \in C^{\infty}$ *et* grad $f(x) \neq 0$ *si* $x \in \Omega$, *et* iA *un opérateur infinitésimal d'un groupe borné; alors*

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iAf(x)} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \in D(A^N) \qquad \forall N .$$

La démonstration se fait, comme celle du lemme 6.7, au moyen de la formule (2.5) d'intégration par parties.

2. Cas à une dimension. Développement en séries asymptotiques

Nous allons considérer ici une intégrale de la forme

$$\int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)} g(t) \, \mathrm{d}t \tag{2.7}$$

où $f(t) \in C^{\infty}$, et $g(t) \in C^{\infty}[B]$, B étant un espace de Banach et où A est un opérateur linéaire non borné, engendrant un groupe et satisfaisant les propriétés 1-3 du paragraphe précédent.

On peut en particulier considérer pour $g(t)$ une fonction dépendant continûment d'un paramètre h, $g(t) = g(t, h)$, telle que toutes ses dérivées en t soient bornées pour $0 \leqslant h \leqslant 1$, et pour opérateur A, l'opérateur de multiplication par $1/h$.

Dans ce cas, la théorie que nous allons développer coïncidera entièrement avec la méthode ordinaire de la phase stationnaire telle qu'elle est exposée par exemple dans le livre d'Erdëlyi *Développements asymptotiques* [90].

Nous allons nous appuyer dans ce qui suit sur les résultats du paragraphe précédent et sur la formule d'intégration par parties (2.5).

Lemme 6.9. *Soient* $f(t) \in C^{\infty}, f'(a) = 0, f''(a) > 0, f'(t) \neq 0$ *pour* $a \leqslant t \leqslant b$, *et* $g(t)$ *une fonction* C^{∞} *à valeurs dans un espace de Banach* B, *s'annulant ainsi que toutes ses dérivées pour $t = b$. Alors, pour m impair, $\forall \alpha \geqslant 0$, on a les relations*

$$\begin{aligned}(A + \mathrm{i}\alpha)^{(m+1)/2} & \int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)}(t - a)^m g(t)\,\mathrm{d}t \\ & = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\mathrm{e}^{i(m+1)\pi/4}\,\mathrm{e}^{iAf(a)}\,g(a) \\ & + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_1(a) + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1}\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(a)}\varphi_2(a) \\ & + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\psi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \chi(a) \qquad (2.8)\end{aligned}$$

où $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(a)$ sont des fonctions C^∞ à valeurs dans B, $\psi_1(\xi)$ est C^∞ à valeurs dans B et s'annule ainsi que toutes ses dérivées au point b, $\chi(a) \in D(A^\infty)$ et est C^∞ en a.

Pour m pair, $\forall \alpha \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}(A + \mathrm{i}\alpha)^{(m+1)/2} & \int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)}(t - a)^m g(t)\,\mathrm{d}t \\ & = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\mathrm{e}^{i(m+1)\pi/4}\,\mathrm{e}^{iAf(a)}\,g(a) \\ & + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{iAf(a)}\varphi_3(a) \\ & + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2} \int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\psi_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \chi_1(a) \qquad (2.9)\end{aligned}$$

où $\varphi_3(a), \chi_1(a)$ sont C^∞ à valeurs dans B, $\psi_2(\xi)$ est C^∞ à valeurs dans B, $\psi_2^{(n)}(b) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ et $\chi_1(a) \in D(A^\infty)$.

Démonstration. Il est évident que

$$\begin{aligned}I_m & = \int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)}(t - a)^m g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}(t - a)^m\,\mathrm{e}^{\alpha f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t \\ & = \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}(t - a)^m g_1(t)\,\mathrm{d}t \\ & = (\mathrm{i})^{[m/2]}(A + \mathrm{i}\alpha)^{-[m/2]} \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{f'(t)}\right]^{[m/2]} g_2(t)\,\mathrm{d}t \qquad (2.10)\end{aligned}$$

où $g_2(t) = (t - a)^m e^{\alpha f(t)} g(t)$, puisque pour $m > 1$:

$$\int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{g_1(t)(t-a)^m}{f'(t)}\,\mathrm{d}f(t) = \mathrm{i}(A + \mathrm{i}\alpha)^{-1}\int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)ft}\left[\frac{(t-a)^m g_1(t)}{f'(t)}\right]'\mathrm{d}t$$

Soit :

$$f_1(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{f'(t)}\right]^{[m/2]} (t-a)^m g(t)\, \mathrm{e}^{\alpha f(t)}.$$

Il est facile de voir que si m est pair, $f_1(a) \neq 0$, et que si m est impair, $f_1(t)$ a un zéro du premier ordre au point $t = a$. Supposons m impair. Alors, en intégrant (2.10) une fois par partie, on obtient

$$I_m = \left[\frac{\mathrm{i}}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2} C(m)(A+\mathrm{i}\alpha)^{-(m+1)/2}\, \mathrm{e}^{iAf(a)} g(a)$$
$$+\ \mathrm{i}^{(m+1)/2}(A+\mathrm{i}\alpha)^{-(m+1)/2} \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{f'(t)} f_1(t)\right]\mathrm{d}t \quad (2.11)$$

où $C(m) = (m-1)!!$, puisque

$$\mathrm{i}\int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)} f_1(t)\,\mathrm{d}t = (A+\mathrm{i}\alpha)^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\ f_1(t)}{f'(t)}\bigg|_a^b - \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{f_1(t)}{f'(t)}\right]\mathrm{d}t\right\}.$$

On peut évidemment réécrire l'égalité (2.11) sous la forme

$$\int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)}(t-a)^m g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\mathrm{e}^{i(m+1)\pi/4}$$
$$\times\ (A+\mathrm{i}\alpha)^{-(m+1)/2}\mathrm{e}^{iAf(a)} g(a)$$
$$+\ \mathrm{i}^{(m+1)/2}(A+\mathrm{i}\alpha)^{-(m+1)/2}\int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{f_1(t)}{f'(t)}\right]\mathrm{d}t \quad (2.12)$$

Ainsi le problème se réduit à l'étude d'une intégrale de la forme

$$I_0 = \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\varphi(t) \in C^\infty[B], \qquad \varphi(a) \neq 0, \qquad \varphi^{(k)}(b) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

On a

$$I_0 = \int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(t)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi(t(\xi))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi$$
$$= \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(a)}\int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}\varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

où $(\xi - a)^2 = f(t) - f(a)$.

Soit la fonction $e(\xi) \in C^\infty$:

$$e(\xi) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \xi - a > \dfrac{b_1 - a}{2} \\ \\ 1 \quad \text{si} \quad \xi - a \leqslant \dfrac{b_1 - a}{4}. \end{cases}$$

On a

$$I_0 = \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(a)} \int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\, e(\xi)\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\xi$$
$$+ \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(a)} \int_a^{b_1} e(\xi)\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,(\varphi_1(\xi) - \varphi(a))\,\mathrm{d}\xi$$
$$+ \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(a)} \int_a^{b_1} [1 - e(\xi)]\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

En vertu des propriétés de $e(\xi)$, on obtient

$$\int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,e(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,e(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_a^{\infty} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\xi + \int_a^{\infty} [e(\xi) - 1]\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,\eta^2}\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\eta + \int_a^{\infty} [e(\xi) - 1]\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{A + \mathrm{i}\alpha}}\,\varphi(a) + \int_a^{\infty} [e(\xi) - 1]\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

D'où

$$\int_a^b \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(t)}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{A + \mathrm{i}\alpha}}\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(a)}\,\varphi(a)$$
$$+ \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(a)} \int_a^{\infty} [e(\xi) - 1]\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi(a)\,\mathrm{d}\xi$$
$$+ \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,f(\alpha)} \left[\int_a^{b_1} e(\xi)\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}(\varphi_1(\xi) - \varphi(a))\,\mathrm{d}\xi \right.$$
$$\left. + \int_a^{b_1} [1 - e(\xi)]\,\mathrm{e}^{i(A+i\alpha)\,(\xi-a)^2}\,\varphi_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right].$$

Notons que pour tout $q \in B$, on a l'identité :

$$\int_a^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} q(1-e(\xi))\,d\xi = \int_c^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} q(1-e(\xi))\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}(A+\mathrm{i}\alpha)} \int_c^\infty \frac{1-e(\xi)}{\xi-a}\,d(e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} q)$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2(A+\mathrm{i}\alpha)} \int_c^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} q \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1-e(\xi)}{\xi-a}\right) d\xi$$

$$= \left[\frac{\mathrm{i}}{2(A+\mathrm{i}\alpha)}\right]^N \int_c^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} q\left[\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\xi-a}\right]^N (1-e(\xi))\,d\xi,$$

où $c = a + \dfrac{b_1 - a}{4}$.

Ainsi :

$$\int_a^\infty e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi(a)(1-e(\xi))\,d\xi \in D(A^\infty).$$

En outre, puisque

$$\int_a^{b_1} [1-e(\xi)]\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi_1(\xi)\,d\xi = \int_c^\infty [1-e(\xi)]\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \varphi_1(\xi)\,d\xi$$

et cette dernière intégrale, en vertu du lemme 6.8, appartient à $D(A^\infty)$, on a

$$\int_a^b e^{i(A+i\alpha)f(t)} \varphi(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A+\mathrm{i}\alpha}} e^{i(A+i\alpha)f(a)} \varphi(a)$$

$$+ e^{i(A+i\alpha)f(a)} \int_a^{b_1} e(\xi)\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}(\varphi_1(\xi)-\varphi(a))\,d\xi + \chi(a),$$

où $\chi(a) \in D(A^\infty)$ et est indéfiniment différentiable par rapport à a. Il est évident que

$$\int_a^{b_1} e(\xi)\,e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2}(\varphi_1(\xi)-\varphi_1(a))\,d\xi = \frac{\mathrm{i}}{2}(A+\mathrm{i}\alpha)^{-1}\varphi_1'(a)$$

$$+ \mathrm{i}(A+\mathrm{i}\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \frac{d}{d\xi}\left[\frac{e(\xi)[\varphi_1(\xi)-\varphi_1(a)]}{2(\xi-a)}\right] d\xi$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}(A+\mathrm{i}\alpha)^{-1}\varphi_1'(a) + \mathrm{i}(A+\mathrm{i}\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \frac{d\psi}{d\xi}\,d\xi,$$

où

$$\psi(\xi) = e(\xi) \frac{(\varphi_1(\xi) - \varphi_1(a))}{2(\xi - a)}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{i(A+i\alpha) f(t)} \varphi(t)\, dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{A + i\alpha}} e^{i(A+i\alpha) f(a)} \varphi(a) \\ &+ \frac{i}{2} e^{i(A+i\alpha) f(a)} (A + i\alpha)^{-1} \varphi_1'(a) \\ &+ i(A + i\alpha)^{-1} \int_a^{b_1} e^{i(A+i\alpha)(\xi - a)^2} \frac{d\psi}{d\xi}\, d\xi \quad (2.13)\end{aligned}$$

où $\psi(\xi)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ξ à valeurs dans B, $\psi^{(k)}(b_1) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$ et $\psi(a) \neq 0$. Portant

$$I_0 = \int_a^b e^{i(A+i\alpha) f(t)} \varphi(t)\, dt$$

de (2.13) dans (2.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}(A + i\alpha)^{(m+1)/2} &\int_a^b e^{iAf(t)(t-a)^m} g(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) e^{i(m+1)\pi/4} e^{iAf(a)} g(a) \\ &+ (A + i\alpha)^{-1/2} e^{i(A+i\alpha) f(\alpha)} \varphi_1(a) + (A + i\alpha)^{-1} e^{i(A+i\alpha) f(a)} \varphi_2(a) \\ &+ (A + i\alpha)^{-1} \int_a^b e^{i(A+i\alpha)(\xi - a)^2} \psi_1(\xi)\, d\xi + \chi(a) \qquad (2.14)\end{aligned}$$

où $\varphi_1(a), \varphi_2(a)$ et $\chi(a)$ sont des fonctions indéfiniment différentiables de a à valeurs dans B,

$\chi(a) \in D(A^\infty), \psi_1(\xi)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ξ à valeurs dans B.

Supposons maintenant m pair, alors

$$\int_a^b e^{iAf(t)} (t - a)^m\, dt = i^{m/2} (A + i\alpha)^{-m/2} \int_a^b e^{i(A+i\alpha) f(t)} f_1(t)\, dt \quad (2.15)$$

où $f_1(t)$ est une fonction indéfiniment différentiable de t

$$f_1(a) = C_1(m) \frac{g_1(a)}{[f''(a)]^{m/2}} \neq 0.$$

En utilisant (2.13), on obtient :

$$(A + \mathrm{i}\alpha)^{(m+1)/2} \int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)}(t - a)^m g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\mathrm{i})^{(m+1)/2} \, \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(a)} \varphi_3(a)$$

$$+ (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)f(a)} \varphi_4(a) + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2}$$

$$\int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \psi_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \chi_1(a), \quad (2.16)$$

où

$$\varphi_3(a) = f_1(a) \sqrt{\frac{2}{f''(a)}} \, \mathrm{e}^{\alpha f(a)}$$

$\psi_2(\xi)$ est une fonction indéfiniment différentiable de ξ à valeurs dans $B, \varphi_3(a), \varphi_4(a), \chi(a)$ des fonctions indéfiniment différentiables de a à valeurs dans B et où

$$\chi_1(a) \in D(A^\infty).$$

Puisque

$$f_1(a) = \frac{C_1(m) g\ (a)}{[f''(a)]^{m/2}},$$

on a pour m pair

$$A + \mathrm{i}\alpha)^{(m+1)/2} \int_a^b \mathrm{e}^{iAf(t)}(t - a)^m g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \mathrm{e}^{i(m+1)\pi/4} \, \mathrm{e}^{iAf(a)} g(a) + (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2} \mathrm{e}^{iAf(a)} \varphi_4(a)$$

$$+ (A + \mathrm{i}\alpha)^{-1/2} \int_a^{b_1} \mathrm{e}^{i(A+i\alpha)(\xi-a)^2} \psi_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \chi_1(a) \quad (2.17)$$

où $\varphi_4(a)$ est une fonction indéfiniment différentiable de a à valeurs dans $B, \psi_2(\xi)$ une fonction indéfiniment différentiable de ξ à valeurs dans B, s'annulant ainsi que toutes ses dérivées au point $\xi = b$, et où $\chi_1(a) \in D(A^\infty)$ et est indéfiniment différentiable. Ce qui démontre le lemme.

Faisons maintenant dans les formules (2.8), (2.9) $\alpha = 0$, et appliquons ces mêmes formules à l'intégrale qui figure dans les membres de droite des égalités (2.8), (2.9), mais pour $\alpha = \alpha_0 > 0$. A l'intégrale obtenue, appliquons à nouveau les formules (2.8), (2.9) pour $\alpha = \alpha_0$. En répétant ce processus, nous aboutissons ainsi au développement asymptotique de l'intégrale (2.7) en puissances de l'opérateur $(A + \alpha_0 \mathrm{i})^{-1/2}$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{iAf(t)} g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

où $g^{(j)}(-b) = g^{(j)}(b) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots$

$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0,\ f'(t) \neq 0$ si $t \neq a$. Décomposons cette intégrale en somme de deux intégrales :

$$\int_{-b}^{b} = \int_{-b}^{a} + \int_{a}^{b}.$$

Nous pouvons appliquer le lemme 6.9 à chacune des intégrales du membre de droite et obtenir le développement asymptotique en puissances de $(A + \mathrm{i}\alpha_0)^{-1/2}$.

Il n'est pas difficile de voir qu'il ne subsiste alors que les termes pairs de cet opérateur et on obtient finalement

$$\sqrt{A} \int_{-b}^{b} \mathrm{e}^{iAf(t)} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{(A + \mathrm{i}\alpha_0)^j} \mathrm{e}^{iAf(a)} g_j(a) + \mathscr{F}_{N+1}(a) \qquad (2.18)$$

où $\mathscr{F}_{N+1}(a) \in D(A^{N+1})$, est à valeurs dans B, et est $(N + 1)$-fois différentiable par rapport à a. En outre

$$g_0(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{f''(a)}\right]^{1/2} \Gamma(1/2)\,\mathrm{e}^{i(\pi/4)\ \mathrm{sgn}\ f''(a)} g(a)$$

Lorsque l'opérateur A^{-1} est borné, on peut poser $\alpha = 0$.

3. Cas à une dimension. Premier terme du développement

Le lemme suivant nous sera utile par la suite.

Lemme 6.10. *Soit $g(t)$ une fonction $\left(\left[\frac{m}{2}\right] + 1\right)$-fois différentiable* (*) *à valeurs dans un espace de Banach B. Supposons en outre que $g(t)$ et toutes ses dérivées s'annulent pour $t = a, g(0) \neq 0$. Soit*

$$\psi(k) = \int_0^a \mathrm{e}^{ikf(t)} t^m g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (2.19)$$

où $a > 0$, et où $f(t) \in C_{[0,a]}^{[m/2]+3}$ est une fonction à valeurs sur la droite telle

(*) i.e. les dérivées d'ordre $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$ appartiennent à B.

que $f'(0) = 0, f''(0) \neq 0, f'(t) \neq 0$ *pour* $t \in (0, a)$. *Alors la fonction* $\psi(k)$, *pour* $k \to \infty$, *peut être représentée sous la forme*

$$\psi(k) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) e^{i(m+1)\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)} k^{-(m+1)/2} \cdot e^{ikf(0)} \cdot g(0)(1 + \sigma_K) \quad (2.20)$$

où $\| \sigma_K \|_B \to 0$ *si* $k \to \infty$.

Démonstration. Il est évident que la fonction $f'(t)$ peut s'écrire

$$f'(t) = t\varphi(t), \text{où } \varphi(t) \in C^{[m/2]+1}_{[0,a]}.$$

En intégrant (2.19) par parties $[m/2]$ fois

$$\psi(k) = \int_0^a e^{ikf(t)} \frac{t^m g(t)}{f'(t)} \, d f(t) = \frac{1}{ik} \int_0^a \frac{t^m g(t)}{f'(t)} \, d\, e^{ikf(t)}$$
$$= \frac{(-1)^{[m/2]}}{(ik)^{[m/2]}} \int_0^a e^{ikf(t)} \frac{1}{f'(t)} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)}\right]^{[m/2]} t^m g(t) \, d f(t).$$

La fonction

$$\psi(t) = \frac{1}{f'(t)} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{f'(t)}\right]^{[m/2]} t^m g(t) \quad (2.21)$$

à valeurs dans B est, pour m pair, de la forme

$$\psi(t) = \frac{C_1(m) \varphi_1(t)}{f'(t)}, \qquad C_1(m) = (m-1)!! \quad (2.22)$$

où $\varphi_1(t)$ est une fonction continûment différentiable telle que

$$\varphi_1(0) = g(0) / [f''(0)]^{[m/2]}$$

et $\psi(t)$ a donc un pôle du premier ordre en $t = 0$. Pour m impair, la fonction $\psi(t)$ est de la forme $\psi(t) = C_1(m) \varphi_2(t) t / f'(t)$, où $\varphi_2(t) \in C^1$ telle que

$$\varphi_2(0) = \frac{g(0)}{[f''(0)]^{(m-1)/2}}$$

et donc

$$\psi(0) = \frac{C_1(m) g(0)}{[f''(0)]^{(m+1)/2}}$$

Par conséquent, pour m impair, $\psi(t) \in C^1$.

Ainsi pour m pair

$$\psi(k) = \frac{(-1)^{m/2}}{(ik)^{m/2}} C_1(m) \int_0^a e^{ikf(t)} \varphi_1(t) \, dt \quad (2.23)$$

alors que pour m impair

$$\psi(k) = \left(\frac{\mathrm{i}}{k}\right)^{(m+1)/2} \mathrm{e}^{ikf(0)}\psi(0) + \left(\frac{\mathrm{i}}{k}\right)^{(m+1)/2} \int_0^a \mathrm{e}^{ikf(t)}\psi'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{\mathrm{i}}{kf''(0)}\right)^{(m+1)/2} C_1(m)\,\mathrm{e}^{ikf(0)} g(0)(1+\sigma_k)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{|f''(0)|}\right)^{(m+1)/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+1)\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,f''(0)}k^{-(m+1)/2}$$
$$\mathrm{e}^{ikf(0)} g(0)(1+\sigma_k) \tag{2.24}$$

où $\|\sigma_k\|_B \to 0$ pour $k \to \infty$.

Pour m pair, on a

$$(k)^{(m+1)/2}\,\psi(k) = \sqrt{k}\int_0^a \mathrm{e}^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,\mathrm{d}t = I(k),$$

où $\varphi_3(t) = i^{m/2}C_1(m)\varphi_1(t)$.

Comme $f''(0) \neq 0$, on choisit $\alpha > 0$ assez petit pour que $f''(t) \neq 0$ pour $t \in [0,\alpha]$. Divisons $I(k)$ en la somme de 3 intégrales :

$$I(k) = \sqrt{k}\int_0^{N/\sqrt{k}} \mathrm{e}^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{k}\int_\alpha^a \mathrm{e}^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,\mathrm{d}t$$
$$+ \sqrt{k}\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \mathrm{e}^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,\mathrm{d}t.$$

Estimons cette dernière intégrale :

$$\left|\sqrt{k}\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \mathrm{e}^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$= \left|\left.\frac{\mathrm{e}^{ikf(t)}\varphi_3(t)}{\sqrt{k}\,f'(t)}\right|_{N/\sqrt{k}}^\alpha + \frac{1}{\sqrt{k}}\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \mathrm{e}^{ikf(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \frac{C_1}{\sqrt{k}}\frac{1}{f'(N/\sqrt{k})} + \frac{C_2}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}}\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\right|\mathrm{d}t \leqslant \frac{C_3}{N} + \frac{C_4}{\sqrt{k}}$$

puisque

$$\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\varphi_3}{f'}\right|\mathrm{d}t \leqslant C\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \frac{1}{f'(t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant C_1\int_{N/\sqrt{k}}^\alpha \frac{|f''(t)|}{|f'(t)|^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left.\frac{C_1}{|f'(t)|}\right|_{N/\sqrt{k}}^\alpha \leqslant \frac{C_2\sqrt{k}}{N}.$$

Estimons maintenant l'avant-dernière intégrale

$$\sqrt{k}\int_\alpha^a e^{ikf(t)}\varphi_3(t)\,dt = \frac{1}{i\sqrt{k}}\int_\alpha^a \frac{\varphi_3(t)}{f'(t)}\,d(e^{ikf(t)}) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Ainsi en passant successivement aux limites $k \to \infty$ et $N \to \infty$, on obtient

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty} k^{(m+1)/2}\psi(k)\,e^{-ikf(0)}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_0^N e^{ik[f(\xi/\sqrt{k})-f(0)]}\varphi_3(\xi/\sqrt{k})\,d\xi$$

$$= \varphi_3(0)\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{if''(0)\,\xi^2/2}\,d\xi = \varphi_3(0)\sqrt{\frac{2}{|f''(0)|}}\int_0^\infty e^{i\xi^2\operatorname{sgn} f''(0)}\,d\xi$$

$$= \varphi_3(0)\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}}\,e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)} = \frac{i^{m/2}\,C_1(m)\,g(0)}{[f''(0)]^{m/2}}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(0)|}}\,e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} f''(0)}$$

Par suite

$$\psi(k) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{|f''(0)|}\right]^{(m+1)/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)e^{i(m+1)\pi/4\cdot\operatorname{sgn} f''(0)}\,k^{-(m+1)/2}\,e^{ikf(0)}g(0)(1+\sigma_k) \quad (2.25)$$

où $\|\sigma_k\|_B \to 0$ pour $k \to \infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 1. Des estimations précédentes résulte que si toutes les conditions du lemme précédent sont satisfaites, sauf : $f''(0) \neq 0$, c'est-à-dire si $f''(0) = 0$, alors

$$\lim_{k\to\infty} |\psi(k)|\,k^{(m+1)/2} = \infty$$

4. **Cas multidimensionnel**

Soient maintenant $f(x) = f(x_1, \dots, x_n), g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$ une fonction $([n/2] + 1)$-fois différentiable à valeurs dans un espace de Banach B, s'annulant sur la frontière du domaine $\Omega_0 = \{|x_i - x_i^0| < \delta,\ i = (1, \dots, n)\}$ ainsi que toutes ses dérivées; soit $x = x_0$ l'unique point stationnaire de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire $\operatorname{grad} f(x)|_{x=x_0} = 0$.

Soit en outre

$$\psi(k) = \int_{\Omega_0} e^{ikf(x)}g(x)\,dx,$$

et supposons la matrice

$$R = \left\|\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|_{i,j=1}^n$$

non-dégénérée et non définie, enfin supposons $f(x) \in C^{[n/2]+4}(\Omega_0)$.

Lemme 6.11. *Sous les hypothèses décrites plus haut, on a l'égalité suivante :*

$$\psi(k, x_0) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\delta}(2\pi)^{n/2}}{k^{n/2}\sqrt{|J|}} e^{ikf(x_0)} g(x_0)(1 + \sigma_k) \tag{2.26}$$

où δ est la signature de la forme quadratique associée à la matrice $R, J = \det R$, et $\| \sigma_k \|_B \to 0$ si $k \to \infty$.

Démonstration. Il est évident que

$$\psi(k) = \int_{-\delta}^{+\delta} \cdots \int_{-\delta}^{+\delta} e^{ikf(x_0+\eta)} g(x_0 + \eta) \, d\eta, \qquad \text{avec } \eta = x - x_0 \tag{2.27}$$

Pour η assez petit :

$$f(x_0 + \eta) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \eta_i \eta_j + \ldots \tag{2.28}$$

Effectuons le changement de variables $\xi_i = \xi_i(\eta)$, $i = 1, \ldots, n$, qui réduit la forme quadratique

$$Q(\eta) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \eta_i \eta_j$$

à la forme canonique

$$Q(\eta) = \tilde{Q}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 .$$

Il résulte de là que, pour ξ assez petit,

$$f(\eta + x_0) = f_1(\xi) = f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \, \lambda + \ldots \tag{2.29}$$

Puisque $D\xi / D\eta = 1$, alors

$$\psi(k) = \int_{-\delta_1}^{+\delta_1} \cdots \int_{-\delta_1}^{+\delta_1} e^{ikf_1(\xi)} g_1(\xi) \, d\xi, \quad \text{où } g_1(\xi) = g(\eta(\xi) + x_0) \tag{2.30}$$

Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n < 0$. Posons $y_j = |\lambda_j|^{1/2} \xi_j$. Notons $f_2(y), g_2(y)$ les fonctions suivantes :

$$f_2(y) = f_1(\xi(y)) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{n} y_j^2 + \ldots,$$

$$g_2(y) = g_1(\xi) = g_1(y_1/\sqrt{|\lambda_1|}, \ldots, y_n/\sqrt{|\lambda_n|}).$$

Comme

$$dy = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{1/2} \, d\xi_i,$$

alors

$$\psi(k, x_0) = \frac{e^{ikf(x_0)}}{\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{1/2}} \int_{-\delta'_1}^{+\delta'_1} \dots \int_{-\delta'_n}^{+\delta'_n} e^{ikf_2(y)} g_2(y) \, dy$$

$$= \frac{e^{ikf(x_0)}}{\sqrt{|J|}} I(k) \tag{2.31}$$

où

$$J = \det R = \det \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{i,j \leqslant n}$$

Passons aux coordonnées bipolaires

$$y_i = rQ_i(\alpha) \qquad (i = 1, \dots, p),$$

$$y_j = \rho Q_j(\beta) \qquad (j = p + 1, \dots, n).$$

En posant

$$g_2(y) = g_3(r, \rho, \alpha, \beta), \qquad f_2(y) = f_3(r, \rho, \alpha, \beta),$$

on obtient

$$I(k) = \iint d\Omega_1 \, d\Omega_2 \int_0^a \int_0^b e^{ikf_3(r,\rho,\alpha,\beta)} g_3(r, \rho, \alpha, \beta) \, r^{p-1} \rho^{n-p-1} \, dr \, d\rho \tag{2.32}$$

où

$$f_3(r, \rho, \alpha, \beta) = \frac{r^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} + \dots$$

Il est évident que $f_3(r, \rho, \alpha, \beta)$ a autant de dérivées continues par rapport à ses arguments que $f(t)$. On a, en omettant les variables angulaires :

$$f_3(r, \rho) = f_3(r, \rho) - f_3(r, 0) + f_3(r, 0),$$

$$f_3(r, 0) = r^2 f_4(r),$$

$$f_3(r, \rho) - f_3(r, 0) = \rho \frac{\partial f_3(r, 0)}{\partial \rho} - \rho^2 f_5(r, \rho),$$

$$\rho \frac{\partial f_3(r, 0)}{\partial \rho} = \rho r^2 f_6(r).$$

Finalement :

$$f_3(r, \rho) = r^2 [f_4(r) + \rho f_6(r)] - \rho^2 f_5(r, \rho).$$

En posant

$$\xi_1^2 = r^2 [f_4(r) + \rho f_6(r)],$$

$$\xi_2^2 = \rho^2 f_5(r, \rho), \qquad \xi_j = \alpha_j, \qquad j = 3, \dots, p + 1,$$

$$\xi_{p+i+1} = \beta_i, \qquad i = 1, \dots, n - p - 1,$$

on obtient

$$I(k) = \iint \mathrm{d}\Omega_1\,\mathrm{d}\Omega_2 \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} \mathrm{e}^{ik(\xi_1^2-\xi_2^2)}\,\xi_1^{p-1}\,\xi_2^{n-p-1}\,g_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \qquad (2.33)$$

$$g_4(\xi) = g_3[r(\xi),\rho(\xi),\xi_3,\dots,\xi_n]\,\frac{D(r,\rho)}{D(\xi_1,\xi_2)}[f_4+\rho f_6]^{-(p-1)/2}(f_5)^{-(n+p+1)/2}$$

Soit

$$f(r,\rho) = r^2(f_4(r)+\rho f_6(r)),$$

$$\varphi(r,\rho) = \rho^2 f_5(r,\rho).$$

Puisque

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial r} = f'_r/2\sqrt{f} \qquad \frac{\partial\xi_2}{\partial r} = \varphi'_r/2\sqrt{\varphi},$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho} = f'_\rho/2\sqrt{f} \qquad \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho} = \varphi'_\rho/2\sqrt{\varphi},$$

et que $D(r,\rho)/D(\xi_1,\xi_2)$ est différent de 0 pour ξ_1 et ξ_2 petits, alors la fonction

$$\psi(\xi_1,\xi_2) = \frac{D(r,\rho)}{D(\xi_1,\xi_2)} = \left(\frac{D(\xi_1,\xi_2)}{D(r,\rho)}\right)^{-1}$$

est $([n/2]+2)$-fois différentiable.

Par conséquent $g_4(\xi)\in C^{[n/2]+1}$.

Considérons

$$I_1(k) = \int_0^{a_1}\int_0^{b_1} \mathrm{e}^{ik(\xi_1^2-\xi_2^2)}\,\xi_1^{p-1}\,\xi_2^{n-p-1}\,g_4(\xi)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,.$$

Comme $g_4(\xi)$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées pour $\xi_1 = a_1, \xi_2 = b_1$, on obtient en intégrant par parties

$$I_1(k) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2k}\right)^q(-1)^{-\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\int_0^{a_1}\mathrm{d}\xi_1\int_0^{b_1}\mathrm{e}^{ik(\xi_1^2-\xi_2^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}$$

$$\cdot\,\xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\xi_2^{n-p-1}\,g_4\,\mathrm{d}\xi_2 \quad (2.34)$$

où $q = \left[\dfrac{p-1}{2}\right] + \left[\dfrac{n-p-1}{2}\right]$ et la fonction

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]}\xi_2^{n-p-1}\,g_4(\xi)$$

a un zéro au point $\xi_1 = \xi_2 = 0$, dont l'ordre est inférieur ou égal au premier ordre. Estimons une intégrale de la forme

$$I_2(k,\xi_1) = \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi)\,d\xi_2 . \tag{2.35}$$

Deux cas sont possibles : $n-p-1$ est pair ou impair.

Si $n-p-1$ est pair, alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \xi_1^{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}\frac{1}{\xi_2}\right)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]} \xi_2^{n-p-1} g_4(\xi) = (n-p-2)!!\,\varphi(\xi_1,\xi_2)$$
$$= C_1(n,p)\,\varphi(\xi_1,\xi_2)$$

La fonction $\varphi(\xi_1,\xi_2) \in C^2_{[0\,,\,b_1]}$:

$$\varphi(\xi_1,0,\xi_3,\dots,\xi_n) = \varphi(\xi_1,0) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1,0,\xi_3,\dots,\xi_n).$$

Par conséquent :

$$I_2(k,\xi_1) = C_1(n,p)\int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}\varphi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2$$

En vertu des lemmes 6.7, 6.10 on a

$$I_2(k,\xi_1) = \frac{1}{2}\frac{C_1(n,p)}{\sqrt{k}}\sqrt{\pi}\,e^{-i\pi/4}\varphi(\xi_1,0)$$
$$+ C_1(n,p)\int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}e(\xi_2)\,\xi_2\psi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 + O(1/k^\infty).$$

$$\text{où}\quad e(\xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \xi \leqslant b_1/4 \\ 0 & \text{pour } \xi \geqslant b_1/2 \end{cases} \qquad \text{et } e(\xi_2) \in C^\infty,$$
$$\xi_2\psi(\xi_1,\xi_2) = \varphi(\xi_1,\xi_2) - \varphi(\xi_1,0).$$

Comme

$$I_3(k,\xi_1) = \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}e(\xi_2)\,\xi_2\psi(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2$$
$$= -\frac{i}{2k}\psi(\xi_1,0) - \frac{i}{2k}\int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}(e(\xi_2)\,\psi(\xi_1,\xi_2))\,d\xi_2$$

Par conséquent

$$I_2(k,\xi_1) = \frac{C_1(n,p)}{\sqrt{k}}\sqrt{\pi}\,e^{-i\pi/4}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1,0)$$
$$+ C_2(n,p)\frac{\psi(\xi_1,0)}{k} + \frac{C}{k}\int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}\psi_1(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 + O\left(\frac{1}{k^\infty}\right).$$

D'où

$$I_1(k) = \left(\frac{i}{2k}\right)^q (-1)^{\left[\frac{n-p-1}{2}\right]} \frac{C_1(n,p)}{\sqrt{k}} \sqrt{\pi}\, e^{-i\pi/4} \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2}$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0)\, d\xi_1 + \frac{C_2(n,p)}{k^{q+1}} \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi(\xi_1, 0)\, d\xi_1$$

$$+ \frac{C_3(n,p)}{k^{q+1}} \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} e^{ik(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \psi_1(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

Évidemment $\| I_3(k) \| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, où

$$I_3(k) = \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} e^{ik(\xi_1^2 - \xi_2^2)} \psi_1(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

car

$$I_3(k) = \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi_1(\xi_1, \xi_2^*)\, d\xi_1 \int_0^{b_1} e^{-ik\xi_2^2}\, d\xi_2$$

$$= \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi_1(\xi_1, \xi_2^*)\, d\xi_1 \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{b_1\sqrt{k}} e^{-z^2}\, dz = O(1/\sqrt{k})$$

où l'intégration en z se fait le long du rayon $\arg z = -\pi/4$. Estimons l'intégrale

$$I_4(k) = \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0)\, d\xi_1 .$$

Si $p - 1$ est pair, alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{1}{\xi_1}\right)^{\frac{p-1}{2}} \xi_1^{p-1} g_4(\xi_1, 0) = C_4(p)\, \varphi(\xi_1),$$

où $C_4(p) = (p-2)!!$, $\varphi(\xi_1) \in C^2$ et $\varphi_2(0) = g_4(0)$.

Par conséquent, d'après le lemme 6.10,

$$I_4(k) = C_4(p) \int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \varphi(\xi_1)\, d\xi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{i\pi/4} g_4(0,0)(1 + \sigma_k) \quad (2.36)$$

Il est évident que

$$\int_0^{a_1} e^{ik\xi_1^2} \psi(\xi_1, 0)\, d\xi_1 = \sigma_k \quad (2.37)$$

Et donc d'après (2.36) et (2.37)

$$I_1(k) = \left(\frac{i}{2k}\right)^q \frac{(-1)^{-(n-p-1)/2}}{k} C_1(n,p) C_4(p) g_4(0,0)(1 + \sigma_k).$$

Comme

$$\sqrt{\pi} C_1(n, p) = \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) 2^{(n-p-1)/2},$$

$$\sqrt{\pi} C_4(p) \quad = \Gamma(p/2) 2^{(p-1)/2}.$$

$$g_4(0,0) = g(x_0) 2^{n/2}, \qquad \mathrm{i}^q(-1)^{-(n-p-1)/2} = \mathrm{e}^{i\pi\delta/4}$$

où δ est la signature de la forme quadratique associée à la matrice

$$R = \left\| \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|,$$

on a alors

$$I_1(k) = \frac{e^{i\pi\delta/4} 2^{n/2}}{k^{n/2}} \Gamma(n - p/2) \Gamma(p/2) g(x_0)(1 + \sigma_k).$$

D'où, comme

$$\iint \mathrm{d}\Omega_1 \, \mathrm{d}\Omega_2 = (\pi)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right),$$

il en résulte que

$$I(k) = \frac{\mathrm{e}^{i\pi\delta/4}(2\pi)^{n/2}}{k^{n/2}\sqrt{|J|}} g(x_0) \mathrm{e}^{ikf(x_0)}(1 + \sigma_k),$$

où

$$\| \sigma_k \|_B \to 0 \qquad \text{si } k \to \infty .$$

Les cas restant se traitent de façon similaire. Le lemme est démontré. De même en s'appuyant sur le lemme 6.9, on peut obtenir un développement asymptotique de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iAf(x)} g(x) \, \mathrm{d}x \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{2.38}$$

où $f(x) \in C^\infty$, $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ si $x \neq x_0, g(x) \in C^\infty(B)$ est bornée et où l'opérateur A satisfait les conditions 1)-3). Plus précisément, on a

Lemme 6.12. *Sous les hypothèses précédentes, on a le développement*

$$A^{n/2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iAf(x)} g(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{if(x_0)A} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{(A + \mathrm{i}\alpha)^j} g_j(x_0)$$
$$+ \mathscr{F}_{N+1}(x_0), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \tag{2.39}$$

où les $g_j(x_0)$, $j \leqslant N$, sont des fonctions indéfiniment différentiables de x_0 à valeurs dans $B, \mathscr{F}_{N+1}(x_0) \in D(A^{N+1})$ est $(N+1)$-fois différentiable dans B et

$$g_0(x_0) = g(x_0) \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|J|}} \mathrm{e}^{i\pi\delta/4}.$$

Notons qu'ici, comme dans le cas à une dimension (2.18), le développement se fait suivant les puissances entières de la résolvante $(A + i\alpha)^{-j}$. On voit facilement que les termes contenant $1/(A + i\alpha)$ à une puissance demi-entière, s'annulent par suite de l'intégration sur les variables angulaires dans la représentation (2.33), exactement comme cela a lieu dans le cas des fonctions ordinaires pour le développement asymptotique par la méthode de la phase stationnaire (voir [79 1), 2)]).

On a aussi une formule analogue pour un opérateur A vérifiant les conditions 1, 2*a*, 3 du § 1. Les fonctions $g_j(x_0)$ de la formule (2.39) sont alors les fonctions complexes conjuguées des fonctions correspondantes obtenues pour le développement asymptotique de l'intégrale (2.38) avec un opérateur positif A vérifiant 1, 2, 3 du § 1 et au lieu de $A^{n/2}$, il faut prendre $|A|^{n/2}$, c'est-à-dire $(-A)^{n/2}$.

On peut évidemment obtenir un développement asymptotique dans le cas où A ne vérifie pas 2 ou 2*a* et 3, mais où l'on peut décomposer $g(t)$ en une somme de $g_+(t)$ et $g_-(t), g_+(t) \in B_+ \subset B, g_-(t) \in B_- \subset B$ et où en outre la restriction de A à B_+ vérifie 2 et 3 et celle de A à B_- vérifie 2*a* et 3. De plus, on peut aussi appliquer ce développement au cas où $g(t)$ est une fonction généralisée au sens du n° 2, § 1, ch. 1. Pour cela, il suffit de faire agir sur les deux membres de l'égalité (2.39) l'opérateur A^l où l est un entier > 0 et de tenir compte de ce que $A^l D(A^m) = D(A^{m-l})$.

Exemple. Soient $B = L_2[-\infty, +\infty]$ l'espace de Hilbert des fonctions de τ, $-\infty \leqslant \tau \leqslant +\infty$, $A = i\partial/\partial\tau$ et

$$g(t,\tau) = g_0(t)\,\delta(\tau) \qquad \text{(cf. ch. 2, § 1, n° 8)} \qquad g_0(t) \in C^\infty .$$

Alors $g_0(t)\,\delta_+(\tau) \in B_+$ et $g_0(t)\,\delta_+^*(\tau) \in B_-$. Supposons que $f(t) \in C^\infty$, et que $\operatorname{grad} f(t) = 0$ seulement si $t = 0$. On a

$$e^{iAf(t)} g_0(t)\,\delta(\tau) = g_0(t)\,\delta(\tau - f(t)).$$

Ainsi, pour n pair, on a :

$$\int_{-a}^{+a} \cdots \int_{-a}^{+a} g_0(t)\,\delta^{n/2}(\tau - f(t))\,dt = \frac{(2\pi)^{n/2} g_0(0)}{\sqrt{|J|}}\{e^{i\pi\delta/4}\,\delta_+(\tau - f(0))$$

$$+ e^{-i\pi\delta/4}\,\delta_+^*(\tau - f(0))\}$$

$$+ \mathscr{F}(\tau) = \frac{2(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|J|}}\,g_0(0) \times \operatorname{Re}\{e^{i\pi\delta/4}\,\delta_+(\tau - f(0))\} + \mathscr{F}(\tau)$$

où $\mathscr{F}(\tau) \in L_2$, δ et J sont définis plus haut.

Notons enfin que, dans le cas à plusieurs dimensions, on a une proposition semblable à la remarque du lemme 6.10. Celle-ci est équivalente à la proposition suivante. Supposons que pour toute fonction à support compact $g(x)$,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, k^{n/2} I(k) < \infty$$

lorsque det $\| \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j \|$ est différent de 0 au point stationnaire, alors la méthode de la phase stationnaire est applicable.

§ 3 ASYMPTOTIQUE LOCALE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS ABSTRAITES*

1. Problème de Cauchy pour les équations à coefficients opératoriels

1. Soit B une suite emboîtée d'espaces de Banach : $B^{\nu+1} \subseteq B^{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, déterminant un espace linéaire B^{∞} muni d'une suite dénombrable de normes $\| \quad \|_{B_N}, N = 1, 2, \ldots$

Considérons l'opérateur

$$L = \sum_{i=0}^{m} L_i(p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_{n+1}, h)\, p_{n+1}^{i}$$

(où $x_{n+1} = t$) dépendant de $2n + 2$ paramètres et appliquant B^{∞} en lui-même. Supposons que L soit indéfiniment différentiable par rapport à tous ces paramètres, c'est-à-dire que toutes les dérivées partielles de L appliquent aussi B^{∞} en lui-même.

Considérons maintenant l'espace dénombrablement normé R_h des fonctions de $x_1, \ldots, x_{n+1}, h$ à valeurs dans B^{∞}. L'espace R_h est défini par un ensemble dénombrable de normes de la forme

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqslant x_n+1 \leqslant T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \prod_{\nu, m} \left(ih \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{l_\nu} x_m^{l_m} f(x_1, \ldots, x_{n+1}, h) \right\|_{B_k}^{2} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \leqslant \mathrm{Cte}$$

$$0 \leqslant h \leqslant 1, \qquad \Sigma l_\nu = k \qquad 1 \leqslant \nu, \qquad m \leqslant n + 1$$

Soit V_h un espace dénombrablement normé contenant R_h

$$V_h \supset R_h .$$

Soit R_h^0 le sous-espace de R_h des fonctions indépendantes de x_{n+1}.

Remarque. Dans ce chapitre, nous ferons la démonstration dans le cas où les espaces B^i, $i = 1, \ldots, \infty$ sont hilbertiens. Nous nous servirons du fait, valable pour ce seul cas, que $\Phi_{1/h}^{p_n} R_h \subset R_h$ Si les B^i sont des espaces de Banach, nous pouvons seulement affirmer que $h^{n/2} \Phi_{1/h}^{p_n} R_h \subset R_h$. Cette circonstance n'a pas d'influence sur la marche de la démonstration des théorèmes présentés ici, mais modifie les estimations qui nous seront nécessaires pour la démonstration du théorème 4.4.

(*) L'idée essentielle de la méthode est particulièrement mise en relief dans l'appendice du livre d'Heading [51,4]. Ici les calculs sont donnés avec plus de détails et les résultats sous forme plus générale.

Dans l'espace R_h, considérons l'opérateur

$$\hat{L} = \sum_{j=0}^{m} \hat{L}_j\left(-\,ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\,ih\frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_{n+1}, h\right)\left(ih\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)^j,$$

où les opérateurs $-\,ih\,\partial/\partial x_1, \dots, -\,ih\,\partial/\partial x_n$ agissent les premiers, c'est-à-dire (*)

$$\hat{L}_j(\hat{p}, x, t, h)\,\varphi(x) = \hat{L}_j\left(-\,ih\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\,ih\frac{\partial}{\partial x_n}, x_1, \dots, x_{n+1}, h\right)\varphi(x)$$
$$= \Phi^{p_1 \cdots p_n} L(p, x, t, h)\, \Phi^{\xi_1 \cdots \xi_n}\varphi(\xi).$$

Supposons que la restriction $\tilde{\hat{L}}$ de l'opérateur $\hat{L}$, définie sur l'ensemble des éléments de R_h s'annulant pour $x_{n+1} = 0$ avec leurs $(m-1)$-ièmes dérivées par rapport à x_{n+1}, ait un inverse $\tilde{\hat{L}}^{-1}$.

Supposons de plus que soient remplies les deux conditions suivantes :

1) $h^r \tilde{\hat{L}}^{-1} R_h \subseteq V_h$;

2) il existe une solution unique de l'équation

$$\hat{L}\psi = 0 \tag{3.0}$$

satisfaisant, pour $x_{n+1} = t_0$, les conditions

$$\partial^j\psi/\partial t^j \in R_h^0,\, j = 0, \dots, m-1,\, t = x_{n+1}$$

pour $t_0 \leqslant x_{n+1} \leqslant T$, telle que

$$h^r\psi \in V_h \qquad T > t_0 \geqslant 0.$$

Il est évident que si les conditions du théorème 4.1 sont remplies, alors les conditions 1 et 2 le sont : cela résulte du lemme 5.2.

2. Soit

$$\psi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h) = \varphi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h)\, e^{ih^{-1}S(p,x)}$$

où $S(p,x) = S(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \in C^\infty$ et où $\varphi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h)$ est une fonction bornée indéfiniment différentiable pour

$$0 \leqslant h \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant T,$$

à support compact par rapport aux variables $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ et à valeurs dans l'espace dénombrablement normé B^∞. Pour simplifier les for-

(*) Ici $\Phi^{p_1 \cdots p_k} = \Phi_A^{p_k}$ pour $A = 1/h$ (cf. chap. 2, § 2) i.e.

$$\Phi^{p_1 \cdots p_k}\varphi(p) = (-\,2\pi ih)^{-k/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/h}\varphi(p)\,dp\,;$$

et $\Phi^{\xi_1 \cdots \xi_k} = \Phi_A^{\xi_k}$ pour $A = 1/h$,

$$\text{i.e. } \Phi^{\xi_1 \cdots \xi_k}\varphi(\xi) = (2\pi ih)^{-k/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi/h}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

mules, notons $p_{k+1}, \dots, p_{n+1}$ par $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+1}$ et $x_1, \dots, x_k$ par $\eta_1, \dots, \eta_k$, avec $\hat{p}_i = \hat{\xi}_i \quad i > k$.

Nous pouvons alors écrire

$$\psi(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h) = \psi(p, x, h),$$

$$\hat{L} = \hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h) = \hat{L}\left(\eta_1, \dots, \eta_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, -\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \dots \right.$$
$$\left. -\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial \eta_k}, -\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial x}, h\right)$$

où
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

2. Développement asymptotique d'un opérateur différentiel linéaire aux dérivées partielles et à coefficients opératoriels

Lemme 6.13. *On a la relation suivante :*

$$\hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h)\, \Phi^{p_1 \dots p_k} \psi(p, x, h) = \Phi^{p_1 \dots p_k} \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)}$$

$$\times \left\{ L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0)\varphi + \mathrm{i}h\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L^0}{\partial \eta^0} \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \xi_j^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right.\right.$$

$$- \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} \right.$$

$$\left. - 2\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} \right)\varphi$$

$$\left.\left. - \mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial h}\bigg|_{h=0} \varphi \right] + \sum_{i=2}^{N} h^i P_i\left(p, \frac{\partial}{\partial p}, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi \right\}$$

$$+ h^{N+1} z_h(\eta, x, h) \tag{3.1}$$

où $\eta_i^0 = -\partial S/\partial p_i$, $i = 1, \dots, k$, $\xi_j^0 = \partial S/\partial x_j$ $j = k+1, \dots, n+1$, $P_i(x, \partial/\partial x, p, \partial/\partial p)$ *est un polynôme d'ordre* $2i$ *par rapport à* $\partial/\partial x$ *et à* $\partial/\partial p$, $Z_h(\eta, x, h) \in R_h$

et $\quad L^0 = L(\eta^0, x, p, \xi^0, h)|_{h=0}$.

Démonstration. Notons $\tilde{L}_j = \tilde{L}_j(\tilde{\eta}, x, p, \tilde{\xi}, h)$ l'opérateur agissant de la manière suivante :

$$\hat{L}_j\psi = \hat{L}_j\Big(ih\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, ih\frac{\partial}{\partial p_k}, x_{k+1},$$

$$\dots, x_{n+1}, p_1, \dots, p_k, -ih\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, -ih\frac{\partial}{\partial x_n}, h\Big)\psi(p, x, h)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=k+1}^{n} d\xi_j \prod_{i=1}^{k} d\eta_i \exp\left[\frac{i}{h}\left(\sum_{j=k+1}^{n} \xi_j x_j - \sum_{i=1}^{k} \eta_i p_i\right)\right]$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(\sum_{j=1}^{k} \eta_j p'_j - \sum_{j=k+1} \xi_j x'_j\right)\right] L_j(\eta_1, \dots, \eta_k, x_{k+1},\right.$$

$$\left.\dots, x_n, p'_1, \dots, p'_k, \xi_{k+1}, \dots \xi_n, h)\psi(p', x', h) \prod_{j=k+1}^{n} dx'_j \prod_{i=1}^{k} dp'_i\right]$$

On a

$$\tilde{L} = \sum_{j=0}^{m} \tilde{L}_j \hat{\xi}^j_{n+1} = \Phi^{x_1 \cdots x_k} L \Phi^{p_1 \cdots p_k}$$

Considérons l'espace $C^\infty[R^{n+2}, B^\infty]$ des fonctions de

$$p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}, h :$$

$$0 \leqslant h \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant a, \qquad 0 \leqslant |p| \leqslant \infty, \qquad 0 \leqslant |x| \leqslant \infty$$

à valeurs dans B^∞, et l'espace $C^\infty_\delta[R^{n+2}, B^\infty]$ des fonctions des mêmes arguments dans le domaine

$$0 \leqslant h \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant a, \qquad 0 \leqslant |p| \leqslant \infty, \qquad 0 \leqslant |x| \leqslant \infty$$

à valeurs dans B^∞ et s'annulant hors de l'intervalle $-\delta \leqslant x_{n+1} \leqslant a + \delta$. Soient $\varphi \in C^\infty[R^{n+2}, B^\infty]$, et $\varphi_\delta \in C^\infty_\delta[R^{n+2}, B^\infty]$ telles que $\varphi_\delta = \varphi$ pour $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant a$.

Posons

$$\psi = \varphi(p, x, h) e^{ih^{-1}S(p,x)} \qquad p = (p_1, \dots, p_k), \quad x = (x_{k+1} \dots x_{n+1}).$$

On a :

$$\tilde{L}\psi_\delta = \tilde{L}\psi \qquad \text{pour } 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant a.$$

et la fonction $\tilde{L}\psi_\delta$ peut être représentée par une intégrale de la forme

$$\tilde{L}\psi_\delta = I(x,p,h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}\xi_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\eta_i \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j - \sum_{i=1}^{k} \eta_i p_i\right)\right]$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{i=1}^{k} \eta_j p'_j - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x'_j\right)\right]\right.$$

$$\left.\times\ \tilde{L}(\eta, x, p', \xi, h)\,\varphi_\delta(p', x', h)\,\mathrm{e}^{ih^{-1}S(p', x')} \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}x'_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}p'_i\right]$$

Notons $I_1(\eta, x, \xi, h)$ l'intégrale suivante :

$$I_1(\eta, x, \xi, h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{j=1}^{k} \eta_j p'_j - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x'_j\right)\right] L(\eta, x, p', \xi, h)$$

$$\times\ \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p', x')}\varphi_\delta(p', x', h) \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}x'_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}p'_i \quad (3.2)$$

Soit Ω le support de la fonction $\varphi_\delta(p', x', h)$.

Notons les domaines des valeurs des fonctions $\partial S(x')/\partial x'_i$ pour $x' \in \Omega$ par

$$\Omega_{\xi_j^0} = \frac{\partial S}{\partial x'_j}(\Omega) \qquad j = k+1, \dots, n+1$$

de même

$$\Omega_{\eta_i^0} = -\frac{\partial S}{\partial p'_i}(\Omega) \qquad i = 1, \dots, k.$$

Prenons une fonction à support compact $\Phi(\eta, \xi)$ de support contenant le domaine

$$\Omega_0 = \prod_{i,j} \Omega_{\eta_i^0} \times \Omega_{\xi_j^0}$$

et en outre telle que $\Phi(\eta, \xi) = 1$ pour $(\eta, \xi) \in \Omega_0$.

Considérons l'intégrale

$$I_2(x, p, h) = \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}\xi_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\eta_i (1 - \Phi(\eta, \xi)$$

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{j=k+1}^{n+1} x_j \xi_j - \sum_{j=1}^{k} \eta_j p_j\right)\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \exp\frac{\mathrm{i}}{h}\left[\sum_{j=1}^{k} \eta_j p'_j\right]\right.$$

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{h}\sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x'_j\right] L(\eta, x, p', \xi, h)$$

$$\mathrm{e}^{ih^{-1}S(p', x')}\,\varphi_\delta(p', x', h) \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}x'_j \prod_{j=1}^{k} \mathrm{d}p'_j$$

D'après la définition de $\Phi(\eta,\xi)$, il résulte que $I_2(x,p,h)$ est différent de 0 seulement si $\eta,\xi \notin \Omega_0$, c'est-à-dire pour

$$\xi \neq \mathrm{grad}_{x'} S(p',x'), \quad \eta \neq -\mathrm{grad}_{p'} S(p',x').$$

Mais si $\eta,\xi \notin \Omega_0$ alors $I_1(\eta,x,\xi,h)$ n'a pas de points stationnaires. En vertu du lemme 6.7, on a

$$I(x,p,h) = I_3(x,p,h) + O(h^N),$$

où

$$I_3(x,p,h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \Phi(\eta,\xi) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j - \sum_{i=1}^{k} \eta_i p_i\right)\right]$$

$$\times\ L(\eta,x,p',\xi,h) \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{j=1}^{k} \eta_j p'_j - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x'_j\right)\right]$$

$$\varphi_\delta(p',x',h) \exp\left[\mathrm{i}h^{-1} S(p',x')\right] \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}x'_j \mathrm{d}\xi'_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}p'_i \mathrm{d}\eta_i \qquad (3.3)$$

et N est un nombre entier quelconque.

Pour calculer $I_3(x,p,h)$, appliquons la méthode de la phase stationnaire. Les points stationnaires $\xi_j^0, x_j'^0, p_i^{0\prime}, \eta_i^0$, $j = k+1,\dots,n+1, i = 1,\dots,k$ sont les solutions du système

$$x_j'^0 = x_j, \qquad \frac{\partial S(p'^0,x'^0)}{\partial x_j'^0} = \xi_j^0 \qquad j = k+1,\dots,n+1$$

$$\frac{\partial S(p'^0,x'^0)}{\partial p'_i} = -\eta_i^0 \qquad p_i'^0 = p_i$$

$$i = 1,\dots,k.$$

Ce système a évidemment une solution unique

$$\xi_j^0 = \frac{\partial S(p,x)}{\partial x_j} \qquad x_j'^0 = x_j \qquad j = k+1,\dots,n+1,$$

$$\eta_j^0 = -\frac{\partial S(p,x)}{\partial p_i} \qquad p_i^{i0} = p_i \qquad i = 1,\dots,k.$$

Comme le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \|\delta_{ij}\| & & \\ & & 0 & \\ \|\delta_{ij}\| & \left\|\dfrac{\partial^2 S(p,x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\| & & \\ & & \left\|\dfrac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\right\| & \|\delta_{ij}\| \\ & 0 & & \\ & & \|\partial_{ij}\| & 0 \end{pmatrix} = 1$$

on peut directement appliquer la méthode de la phase stationnaire à $I_3(x,p,h)$. Ce faisant, en tenant compte de ce que

$$I(x,p,h) = I_3(x,p,h) + O(h^N),$$

on a

$$\begin{aligned} I(x,p,h) = \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)}\Bigg\{ & L(\eta^0,x,p,\xi^0,0)\,\varphi_\delta(p,x,h) \\ & + \mathrm{i}h\Bigg[a_0 L(\eta^0,x,p,\xi^0,0) + \sum_{j=1}^{k} a_j \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1} b_j \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0} \\ & + \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{\partial L^0}{\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} b_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} \\ & + \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{i,j=1}^{k} d_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n+1} e_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} \\ & + \sum_{j=k+1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k} f_{ij} \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_i \partial \xi_j^0} - \mathrm{i} \frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0,x,p,\xi,h)\Bigg|_{h=0} \varphi_\delta(x,p,h) \\ & + \sum_{i=2}^{N} h^i p_i(x,\hat{\xi},p,\hat{\eta})\,\varphi_\delta(p,x,h) + h^{N+1} z_h(p,x,h)\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ici

$$L^0 = L(\eta^0,x,p,\xi^0,h)|_{h=0},\ \eta_i^0 = -\partial S/\partial p_i,\ \xi_j^0 = \partial S/\partial x_j,$$

$$i = 1,2,\dots,k \quad j = k+1,\dots,n+1$$

et les $P_i(x, \hat{\xi}, p, \hat{\eta})$ sont des polynômes de degré $2i$ par rapport à $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ et $a_i, b_i, c_i, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}$, des coefficients dépendant de p et x. Déterminons-les. Si

$$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \xi, h) = C_0 = \text{Cte},$$

alors on a

$$I(x, p, h) = C_0 \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)} \varphi_\delta(p, x, h).$$

De (3.4) résulte que $a_0 = 0$. Soit maintenant

$$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = \hat{\eta}_i + \hat{\xi}_j + p_\nu.$$

Dans ce cas, on peut évidemment écrire $I(x, p, h)$:

$$I(x, p, h) = \left[\mathrm{i}h\left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + p_\nu \right] \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)} \varphi_\delta(p, x, h).$$

Par conséquent

$$I(x, p, h) = \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)} \left[p_\nu \varphi_\delta + \varphi_\delta \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} - \frac{\partial S}{\partial p_i} \right) + \mathrm{i}h\left(\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_j} \right) \right]$$

Comme

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \hat{\xi}_i} = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \hat{\eta}_j} = \delta_{ij}, \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial p_j} = \delta_{\nu j}$$

alors on obtient, de (3.4) :

$$a_j = \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_j} \qquad j = 1, \ldots, k \tag{3.5}$$

$$b_j = -\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_j} \qquad j = k+1, \ldots, n+1 \tag{3.6}$$

$$c_j = 0 \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{3.7}$$

Soit maintenant

$$\hat{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = \hat{\eta}_i \hat{\eta}_j + \hat{\xi}_l \hat{\xi}_m$$

Dans ce cas

$$I(x, p, h) = -h^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \right) \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)} \varphi_\delta(p, x, h)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I(x, p, h) = \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)} \Bigg[& \frac{\partial S}{\partial x_l} \frac{\partial S}{\partial x_m} \varphi_\delta + \frac{\partial S}{\partial p_i} \frac{\partial S}{\partial p_j} \varphi_\delta \\ & - \mathrm{i}h\left(\frac{\partial S}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_m} + \frac{\partial S}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_l} \right) - \mathrm{i}h\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right) \varphi_\delta \\ & - h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial p_i \partial p_j} \right) - \mathrm{i}h\left(\frac{\partial S}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_j} + \frac{\partial S}{\partial p_j} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_i} \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.4) et (3.8) il résulte

$$a_{ij} + a_{ji} = -\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\varphi_\delta \tag{3.9}$$

$$b_{ij} + b_{ji} = -\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\varphi_\delta \tag{3.10}$$

Portant a_{ij}, b_{ij} de (3.9)-(3.10) dans (3.4), on obtient

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}\frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} \tag{3.11}$$

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1} b_{ij}\frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L}{\partial \xi_j^0 \partial \xi_i^0} \tag{3.12}$$

Soit aussi

$$\tilde{L}(\hat{\eta}, x, p, \hat{\xi}, h) = p_i p_j + \hat{\eta}_m p_l .$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} I(x,p,h) &= \left(ih\frac{\partial}{\partial p_m}p_l + p_i p_j\right)e^{ih^{-1}S(p,x)}\varphi_\delta(p,x,h) \\ &= p_i p_j e^{ih^{-1}S(p,x)}\varphi_\delta(p,x,h) + e^{ih^{-1}S(p,x)}\Bigg(ih\,\delta_{ml}\varphi_\delta - p_l\frac{\partial S}{\partial p_m}\varphi_\delta \\ &\qquad + ihp_l\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_m}\Bigg). \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\partial^2 \tilde{L}(\eta, x, p, \xi, h)}{\partial \eta_i \partial p_j} = \delta_{mi}\delta_{lj}$$

on a, d'après (3.4) :

$$\sum_{i,j=1}^{k} d_{ij}\delta_{mi}\delta_{lj} = \delta_{ml}\varphi_\delta, \tag{3.13}$$

$$d_{lm} = \delta_{ml}\varphi_\delta \qquad c_{ij} = 0$$

Supposons enfin que $\tilde{L} = \hat{\eta}_l\hat{\xi}_m + p_\nu\hat{\xi}_l$. Par conséquent

$$\begin{aligned} I(x,p,h) &= h^2\frac{\partial^2}{\partial p_l \partial x_m}e^{ih^{-1}S(p,x)}\varphi_\delta(p,x,h) - ihp_\nu\frac{\partial}{\partial x_l}e^{ih^{-1}S(p,x)}\varphi_\delta(p,x,h) \\ &= e^{ih^{-1}S(p,x)}\Bigg[-\frac{\partial S}{\partial x_m}\frac{\partial S}{\partial p_l}\varphi_\delta + ih\left(\frac{\partial S}{\partial x_m}\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial p_l} + \frac{\partial S}{\partial p_l}\frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_m}\right) \\ &\quad + ih\frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m}\varphi_\delta + h^2\frac{\partial^2 \varphi_\delta}{\partial p_l \partial x_m} - ihp_\nu\left(\frac{i}{h}\frac{\partial S}{\partial x_l}\varphi_\delta + \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial x_l}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.14}$$

D'où, avec (3.4) :

$$\sum_{j=k+1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k} e_{ij}\delta_{mj}\delta_{li} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m}\varphi_\delta$$

$$e_{lm} = \frac{\partial^2 S}{\partial p_l \partial x_m}\varphi_\delta \tag{3.15}$$

On a donc alors, d'après (3.14) et (3.4), $f_{ij} = 0$. Des relations (3.5)-(3.7), (3.9)-(3.13), (3.15) pour $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant a$ résulte l'égalité

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\psi_\delta &= \tilde{L}\psi = \tilde{L}\,\mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x)}\varphi(p,x,h) \\
&= \frac{1}{(2\pi h)^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}\xi_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}\eta_i \\
&\quad \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x_j\right] \cdot \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{h}\sum_{j=1}^{k} \eta_j p_j\right] \\
&\quad \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\left(\sum_{j=1}^{k} \eta_j p'_j - \sum_{j=k+1}^{n+1} \xi_j x'_j\right)\right] L(\eta, x, p', \xi, h) \right. \\
&\quad \left. \times\ \mathrm{e}^{ih^{-1}S(p',x')}\varphi_\delta(p',x',h) \prod_{j=k+1}^{n+1} \mathrm{d}x'_j \prod_{i=1}^{k} \mathrm{d}p'_i \right] \\
&= \mathrm{e}^{ih^{-1}S}\left\{ L^0\varphi + \mathrm{i}h\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0}\frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right.\right. \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} \right. \\
&\quad \left. - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i}\right)\varphi \\
&\quad \left. - i\frac{\partial L}{\partial h}(\eta^0, x, p, \xi^0, h)\Big|_{h=0}\varphi \right]_{\substack{\eta^0 = -\operatorname{grad}_p S(p,x) \\ \xi^0 = \operatorname{grad}_x S(p,x)}} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{N} h^i P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi \\
&\quad + h^{N+1} Z_h(p,x,h)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Comme on a

$$\hat{L}(\eta, x, \hat{p}, \hat{\xi}, h)\,\Phi^{p_1 \cdots p_k}\psi(x,p,h) = \Phi^{p_1 \cdots p_k}\tilde{L}\psi$$

et que $\Phi^{p_1 \cdots p_k}$ applique R_h en R_h, on obtient le lemme.

3. Cas des termes de multiplicité infinie

Considérons l'opérateur $\hat{L}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h)$ dans l'espace dénombrablement normé R_h. Rappelons que

$$\hat{L}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h) = \sum_{k=0}^{m} \hat{L}_k(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, \hat{p}_{n+1}^k$$

$$\hat{L}_m = 1 \qquad \hat{p}_j = -\,\mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad j = 1, \dots, n,$$

$$\hat{p}_{n+1} = \mathrm{i}h \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \qquad x_{n+1} = t,$$

et les opérateurs $\hat{p}_j$ agissent les « premiers », c'est-à-dire

$$\hat{L}_k(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, \psi(x_1, \dots, x_n) = \Phi^{p_1 \cdots p}\, L_k(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, \Phi^{\xi_1, \cdots, \xi_n} \psi(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

Nous supposons que, dans B^1,

$$L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \tag{3.16a}$$

est une constante (dépendant, il va de soi, des paramètres $x_1, \dots, x_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}$) (c'est-à-dire la valeur propre de l'opérateur (3.16*a*) est de multiplicité infinie).

Ici,

$$L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h) = \sum_{k=0}^{m} L_k(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_{n+1}, h)\, p_{n+1}^k .$$

En revenant aux anciennes notations, redésignons

$$L(p_1, \dots, p_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}, h) \quad \text{par} \quad L(\eta, x, p, \xi, h),$$

où

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \equiv (x_1, \dots, x_k), \qquad \xi = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+1}) \equiv (p_{k+1}, \dots, p_{n+1})$$

On note $L(\eta, x, p, \xi, 0)$, égal à (3.16*a*) (*), par L^0.

Ainsi, $L^0(\eta, x, p, \xi)$ est un polynôme d'ordre m relativement à $\xi_{n+1} \equiv p_{n+1}$. Supposons que

(1) le polynôme $L^0(\eta, x, p, \xi)$ a une racine réelle

$$\xi_{n+1} \equiv p_{n+1} = \lambda(p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, t) \text{ (**)}$$

(*) Dans les notations du § 1, chap. 4, $L^0 = \mathscr{L}_0 \equiv \mathscr{L}_0^* = \lambda(\eta, x, p, \xi)$.

(**) A la différence des notations du § 1, chap. 4, où la racine p_{n+1} est désignée par $H(p, x, t)$.

de multiplicité constante et par conséquent

$$\frac{\partial L^0}{\partial \lambda} = \left.\frac{\partial L^0}{\partial p_{n+1}}\right|_{p_{n+1}=\lambda(p_1,\dots,p_n,x_1,\dots,x_n,t)}$$

est différent de 0.

(2) L'opérateur $L(p_1,\dots,p_n,p_{n+1};x_1,\dots,x_n,t,h)$ ainsi que toutes ses dérivées par rapport aux paramètres et l'opérateur

$$\exp\left\{it\frac{\partial L}{\partial h}\right\}\Bigg|_{h=0} \qquad \text{appliquent } B^\infty \text{ dans } B^\infty.$$

(3) Les conditions 1, 1°, § 3, sont remplies.

Sous ces hypothèses, et pour t assez petit, il existe évidemment une solution $s(t) = s(x_0, p_0, t)$

$$p(t) = p(x_0, p_0, t) \qquad x(t) = x(x_0, p_0, t) \tag{3.17}$$

$$x_0 = (x_{01},\dots,x_{0k}) \qquad p_0 = (p_{0k+1},\dots,p_{0n})$$

du système

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}$$

$$\dot{s} = \lambda - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}p_i \qquad i = 1,\dots,n$$

qui satisfait les conditions initiales, correspondant à une carte locale du type $\tilde{\Omega}_k$ de la sous-variété lagrangienne, c'est-à-dire

$$s(0) = s^0(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0k+1},\dots,x_{0n}) \tag{3.18}$$

$$p_i(0) = p_{0i} \quad i = 1,\dots,k, \qquad x_j(0) = x_{0j} \quad j = k+1,\dots,n$$

$$x_i(0) = -\frac{\partial S^0}{\partial p_{0i}} = x_{0i}(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0k+1},\dots,x_{0n}) \qquad i = 1,\dots,k$$

$$\tag{3.19}$$

$$p_j(0) = \frac{\partial S^0}{\partial x_{0j}} = p_{0j}(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0k+1},\dots,x_{0n}) \qquad j = k+1,\dots,n$$

Pour t assez petit, il existe évidemment une solution unique

$$p_{0i} = p_{0i}(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)$$

$$x_{0j} = x_{0j}(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)$$

du système implicite d'équations

$$p_i(p_{01},\dots,p_{0k};x_{0k+1},\dots,x_{0n},t) = p_i \qquad i = 1,\dots,k$$

$$x_j(p_{01},\dots,p_{0k};x_{0k+1},\dots,x_{0n},t) = x_j \qquad j = k+1,\dots,n.$$

En conservant les notations du lemme 6.13, posons

$$S(p,x) = \tilde{S}(x_0, p_0, t), \quad \text{où } x_0 = x_0(x,p,t), \quad p_0 = p_0(x,p,t).$$

D'après le théorème d'Hamilton-Jacobi les solutions du système (3.17)-(3.19) satisfont aussi le système

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}(\eta^0, x, p, \xi^0) \qquad j = k+1, \ldots, n+1$$

où

$$\eta_i^0 = -\frac{\partial S}{\partial p_i} \qquad \xi_j^0 = \frac{\partial S}{\partial x_j} \qquad i = 1, \ldots, k,\ j = k+1, \ldots, n+1.$$

Par conséquent on a l'égalité suivante :

$$-\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial L^0}{\partial \eta_i^0} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{3.20}$$

Considérons l'opérateur qui figure entre crochets dans la partie de droite de la formule (3.1), sur lequel agit l'opérateur $\Phi^{p_1, \cdots, p_k}$. Désignons cet opérateur par R. La formule (3.1) se réécrit ainsi sous la forme

$$L\Phi^{p_1, \cdots, p_k}\psi = \Phi^{p_1, \cdots, p_k} e^{ih^{-1}S} R\varphi + h^{N+1} Z_h \tag{3.21}$$

Effectuant la substitution $\varphi = u/\sqrt{J}$, où

$$J = \frac{D(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, t)}{D(p_{01}, \ldots, p_{0k}, x_{0k+1}, \ldots, x_{0n}, \tau)}$$

on obtient

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{du}{d\tau} - \frac{1}{2}\, u \frac{d}{d\tau} \ln J\right).$$

D'après le lemme de Sobolev ([71], cf. ch. 5, § 5)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\ln J &= -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial L^0}{\partial \eta_i^0}(\eta^0, x, p, \xi^0)\right\} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}(\eta^0, x, p, \xi^0)\right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j} + \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial \xi_j^0}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

De là on tire

$$\begin{aligned}
R\varphi = \tilde{R}u &= \frac{h}{\sqrt{J}}\Bigg(-i\frac{du}{d\tau} + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j \partial p_j} u + \frac{\partial L}{\partial h}\bigg|_{h=0} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{N} h^{i-1} P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right) u\Bigg) \\
&= -ih(Au + hBu)
\end{aligned}$$

puisque $L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = 0$.

Considérons l'opérateur

$$\tilde{R}u = -\,\mathrm{i}h(Au + hBu) \tag{3.23}$$

où

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 L^0}{\partial x_i \partial p_i} + \mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial h}\bigg|_{h=0},$$

$$B = \mathrm{i}\sum_{j=0}^{N-2} h^j P_{j+2}\left(x, \frac{\partial}{\partial p}, p, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Soit $\tilde{A}$ la restriction de l'opérateur A à l'ensemble des fonctions qui s'annulent pour $\tau = 0$. Il est évident que $\tilde{A}^{-1}$ existe. Comme

$$P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right)$$

s'exprime linéairement au moyen des dérivées de L par rapport aux paramètres p, x, h et comme ces dérivées appliquent B^∞ en lui-même,

$$P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right)$$

applique B^∞ en lui-même. Il est évident que, si $f(x) \in R_h$ et est indéfiniment différentiable dans R_h, alors

$$P_i\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, p, \frac{\partial}{\partial p}\right) f(x) \in R_h$$

et est indéfiniment différentiable dans R_h. En outre, comme

$$\exp\left\{\mathrm{i}\frac{\partial L}{\partial h}\bigg|_{h=0} t\right\}$$

applique B^∞ dans B^∞, alors la solution de l'équation

$$Av(t) = 0 \tag{3.24}$$

satisfaisant pour $t = 0$ la condition initiale

$$v\big|_{t=0} = v_0 \in R_h,$$

est indéfiniment différentiable dans R_h

La même remarque s'applique aussi à l'opérateur $\tilde{A}^{-1}$. Ainsi, $\forall N$, $(A^{-1}B)^N v(t) \in R_h$ et est indéfiniment différentiable dans R_h. Soient $v^i(t)$ des solutions de l'équation (3.24) satisfaisant des conditions initiales indéfiniment différentiables dans R_h. De la même manière que cela a été fait pour le lemme 5.5, on peut montrer que l'expression

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} (-\,h)^n \sum_{i=0}^{n} (\tilde{A}^{-1}B)^i v^{n-i}(t)$$

satisfait l'équation

$$Au_N + hBu_N = h^{N+1}\tilde{z}_h,$$

où $\tilde{z}_h \in R_h$.

Ce qui implique

$$\hat{L}\Phi^{p_1,\dots,p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{ih^{-1}S(p,x)}u_N = -ih^{N+2}\Phi^{p_1,\dots,p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{ih^{-1}S(p,x)}\tilde{z}_h + h^{N+1}z_h(x,t,h)$$
$$= h^{N+1}\bar{z}_h(x,t) \tag{3.25}$$

où $\bar{z}_h(x,t) \in R_h$ — puisque l'opérateur $\Phi^{p_1,\dots,p_k}$ applique R_h sur R_h. Comme par hypothèse il existe une solution $w \in V_h$ de l'équation

$$h^r\hat{L}w = \bar{z}_h(x,t,h),$$

$$\hat{L}\left(\Phi^{p_1,\dots,p_k}\frac{1}{\sqrt{J}}e^{ih^{-1}S}u_N - h^{N+1-r}w\right) = 0 \tag{3.26}$$

Comme N est aussi grand qu'on le veut, il en résulte :

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une solution de l'équation $L\psi(x,t) = 0$ représentable sous la forme*

$$\psi(x,t) = \Phi^{p_1,\dots,p_k}\left\{\frac{\exp\left[ih^{-1}S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)\right]}{\sqrt{\dfrac{D(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n)}{D(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0k+1},\dots,x_{0n})}}\sqrt{\dfrac{\partial L^0}{\partial\lambda}}}\right.$$
$$\times\exp\left[\int_0^t\left(\frac{\partial L^0}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n+1}\frac{\partial^2 L^0}{\partial x_j\partial p_j} - i\left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}\right)dt\right]$$
$$\left.\times\sum_{j=0}^{N}h^j\varphi_j(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)\right\} + h^{N+1}z_h(x,t,h)$$

Ici $\dfrac{\partial L^0}{\partial\lambda}, \dfrac{\partial^2 L^0}{\partial x_j\partial p_j}, \left.\dfrac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}$ *sont des fonctions de* $x = x(x_0,p_0,t)$, $p = p_0(x_0,p_0,t)$;

$$S(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t) = \tilde{S}(x_0(p,x,t),p_0(p,x,t),t);$$

les $\varphi_j(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t)$ *sont des fonctions indéfiniment différentiables à support compact en p et x à valeurs dans* B^∞ ; $z_h \in R_h$ *et en outre*

$$\varphi_0(p_1,\dots,p_k,x_{k+1},\dots,x_n,t) = f(p_{01},\dots,p_{0k},x_{0,k+1},\dots,x_{0n})$$

où f est une fonction arbitraire à support compact.

4. Cas des termes de multiplicité finie

Supposons maintenant que soit satisfaite la condition 1) du théorème 4.1 et qu'en outre le point $\lambda(p, p_{n+1}, x, t)$ (terme) soit de multiplicité finie.

Les notations et hypothèses 1) et 2) et la condition **I)** du ch. 4, § 2 restent en vigueur.

Identités fondamentales

Soit $\chi_1, \dots, \chi_r$ un système normé de vecteurs propres :

$$L|_{h=0}\chi_i = L^0\chi_i = \lambda\chi_i \qquad i = 1, \dots, r \tag{3.27}$$

$$\chi_i = \chi_i(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_{n+1}),$$

$$\lambda = \lambda(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_{n+1})$$

et $\chi_1^+, \dots, \chi_r^+$ un système normé de vecteurs propres de l'opérateur $(L^0)^*$

$$(L^0)^*\chi_i^+ = \lambda\chi_i^+ \qquad i = 1, \dots, r \tag{3.28}$$

pour la même valeur $\lambda = \lambda(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_{n+1})$. Montrons les égalités suivantes.

3)

$$(a) \qquad \left(\chi_j^+, \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu}\chi_i\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = (\chi_j^+, \chi_i).$$

$$(b) \qquad \left(\chi_j^+, \frac{\partial L^0}{\partial x_\nu}\chi_i\right) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu}\delta_{ij}$$

En différentiant (3.27) par rapport à p_ν, nous obtenons

$$\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu}\chi_i + L^0\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\chi_i + \lambda\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} \tag{3.29}$$

En multipliant scalairement cette identité par χ_j^+ et tenant compte de (3.28) on obtient l'égalité (3 *a*). De la même manière, à partir de

$$\frac{\partial L^0}{\partial x_\nu}\chi_i + L^0\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu}\chi_i + \lambda\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\nu}$$

on a 3*b*).

Différentions (3.29) selon x_μ :

$$\frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\chi_i + \frac{\partial L^0}{\partial x_\mu}\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} + \frac{\partial L^0}{\partial p_\nu}\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} + L^0\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial p_\nu \partial x_\mu}$$
$$= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\chi_i + \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu} + \lambda\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_\mu \partial p_\nu}.$$

Multipliant cette égalité scalairement par χ_j^+, on obtient

$$(4a)\qquad \left(\chi_j^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\chi_i\right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial x_\mu}\delta_{ij} + \left(\chi_j^+, \left[\frac{\partial L^0}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}\right) + \left(\chi_j^+, \left[\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial x_\mu}\right) = 0,$$

et de même :

$$(4b)\qquad \left(\chi_j^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial p_\nu \partial p_\mu}\chi_i\right) - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_\nu \partial p_\mu}\delta_{ij} + \left(\chi_j^+, \left[\frac{\partial L^0}{\partial p_\mu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\mu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\nu}\right) + \left(\chi_j^+, \left[\frac{\partial L^0}{\partial p_\nu} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu}\right]\frac{\partial \chi_i}{\partial p_\mu}\right) = 0.$$

Désignons comme auparavant par R l'opérateur figurant entre crochets dans le membre de droite de l'égalité (3.1), de sorte que (3.1) se réécrive sous la forme :

$$L\Phi^{p_1, \cdots, p_k}\psi = \Phi^{p_1, \cdots, p_k} e^{h^{-1} S(p,x)} R\varphi + h^{N+1} z_h(x,t).$$

Dans ce cas, nous écrivons

$$R = A + \sum_{i=1}^{N} h^i U_i,$$

où

$$A = L(\eta^0, x, p, \xi^0, 0) = L^0,$$

$$U = i\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0}\frac{\partial}{\partial p_j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \eta_j^0} + \sum_{i,j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \xi_i^0 \partial \xi_j^0} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1} \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial x_j}\frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial \xi_j^0} - 2\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 L^0}{\partial \eta_i^0 \partial p_i}\right)\right] + \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=0}.$$

Il est évident que l'équation $A\chi = 0$ est satisfaite lorsque χ appartient au sous-espace des vecteurs propres de l'opérateur L^0, i.e. si $S(p,x)$ satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\lambda\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, p, \frac{\partial S}{\partial p}\right) = 0 \qquad (3.30)$$

sous la condition que $\tilde{A} = A(1 - P_\lambda)$ ait un inverse dans B^∞ et que l'opérateur $[A(1 - P_\lambda)]^{-1}(1 - P_\lambda^+)$ soit défini sur tout B^∞; $\tilde{A}$ est la restriction de l'opérateur A au sous-espace $(1 - P_\lambda)B^\infty$. Afin de pouvoir appliquer le lemme 5.5 (ch. 2) de la théorie des perturbations et trouver un φ tel que $R\varphi = h^{N+1}z_h$, l'existence des N premiers termes de perturbation est nécessaire.

Comme pour la définition dans ce lemme du premier terme de l'asymptotique, nous aurons besoin de l'existence d'expressions de la forme $\tilde{A}^{-1}U_1\chi$. Cela signifie que $U_1\chi \in D(\tilde{A}^{-1})$, c'est-à-dire $P_\lambda^+ U_1\chi = 0$. Supposons d'abord que la dimension r du sous-espace des fonctions propres de l'opérateur L^0 soit égal à 1, c'est-à-dire que le point λ est simple. Alors la condition (3.30) s'écrit

$$(\chi^+, U_1\chi) = 0. \tag{3.31}$$

Le produit scalaire est à prendre ici au sens de l'espace ambiant B^1.

Comme $\chi = \chi_0\varphi_0$, où $\|\chi_0\| = 1$ et que

$$\varphi_0 = \varphi_0(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$$

est une fonction scalaire, et comme d'autre part, l'opérateur U_1 est dans l'espace R_h, incluant la différentiation par rapport aux arguments $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$, l'équation (3.31) qui, évidemment, peut s'écrire

$$(\chi_0^+, U_1\chi_0)\varphi_0 = 0 \tag{3.31a}$$

est une équation différentielle définissant la fonction

$$\varphi_0(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}).$$

De même dans le cas d'une valeur propre de multiplicité r, si $\chi_{01}, \dots, \chi_{0r}$ est le système normé de recteurs propres, on peut réécrire l'équation (3.31a) sous forme d'un système d'équations différentielles permettant de définir les coefficients scalaires $\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0r}$ de $\chi_1, \dots, \chi_r$.

(Rappelons que, bien que $\varphi_{0i} = \varphi_{0i}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$, soit une fonction des paramètres $p_1, \dots, p_k$ $x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$, elle est à valeurs sur la droite, c'est-à-dire scalaire dans l'espace B^1. Les vecteurs $\chi_{01}, \dots, \chi_{0r}$ sont des fonctions de $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$, à valeurs dans B^1, et norme 1.)

Le système d'équations équivalent à (3.31a) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi_i^+, U_1\chi_j)\varphi_{0j} = 0 \qquad i = 1, \dots, r.$$

En vertu du lemme 5.5, il faut, pour le calcul du terme suivant, que l'élément

$$U_1\left(\tilde{A}^{-1}U_1 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j + \sum_{j=1}^{r} \varphi_{1j}\chi_j\right) + U_2 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j$$

appartienne au domaine de définition de l'opérateur $\tilde{A}^{-1}$, c'est-à-dire

$$P_\lambda^+ \left\{U_1\left[\tilde{A}^{-1}U_1 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j + \sum_{j=1}^{r} \varphi_{1j}\chi_j\right] + U_2 \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j\right\} = 0.$$

Ainsi :

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi_i^+, U_1\chi_j)\varphi_{1j} = -\left(\chi_i^+, [U_1\tilde{A}^{-1}U_1 + U_2] \sum_{j=1}^{r} \varphi_{0j}\chi_j\right)$$

et nous obtenons un système d'équations pour définir

$$\varphi_{1j} = \varphi_{1j}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}).$$

De même, évidemment, pour le k-ième terme :

$$f_k = x_k + \tilde{A}^{-1} \sum_{j=1}^{k} U_j f_{k-j},$$

nous devons exiger que

$$\sum_{i=1}^{k+1} U_i \, f_{k+1-i} \in D(\tilde{A}^{-1}).$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^{r} (\chi_i^+, U_1 \chi_j) \varphi_{kj} = \mathscr{F} \tag{3.32}$$

où $\mathscr{F}$ dépend seulement de $\varphi_{ij}, i < k$, et nous obtenons une équation pour

$$\varphi_{kj} = \varphi_{kj}(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Ainsi le problème se réduit à la recherche de l'opérateur différentiel

$$L = (\chi_i^+, U_1 \chi_j)$$

dans l'espace C^∞ et à la démonstration de l'existence de solutions φ des équations $L\varphi = 0$ et $L\varphi = \mathscr{F}$, où

$$\varphi \in C^\infty \qquad \text{et} \qquad \mathscr{F} \in C^\infty. \tag{3.33}$$

Notons que l'opérateur U_1 est une somme de la forme

$$U_1 = i \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu^0} \frac{\partial}{\partial p_\nu} - i \sum_{\mu=k+1}^{n+1} \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + R_1$$

où l'opérateur R_1 est un opérateur dans B^∞ ne contenant pas d'opérateurs de différentiation, mais dépendant des paramètres $(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$.

Donc :

$$\sum_{\alpha=1}^{r} (\chi_\beta^+, U_1 \chi_\alpha) \varphi_{l\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{r} i \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} \left(\chi_\beta^+, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_\nu^0} \chi_\alpha \right) \frac{\partial \varphi_{l\alpha}}{\partial p_\nu} \right.$$
$$\left. - \sum_{\mu=k+1}^{n+1} \left(\chi_\beta^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_\mu^0} \chi_\alpha \right) \frac{\partial \varphi_{l\alpha}}{\partial x_\mu} \right\} + \sum_{i=1}^{r} a_{i\beta} \varphi_{li},$$

où les $a_{i\beta}$ sont des fonctions connues des paramètres $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$. D'après l'identité 3) :

$$\sum_{\alpha=1}^{r} (\chi_\beta^+, U_1 \chi_\alpha) \varphi_{l\alpha} = i \left(\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \varphi_{l\beta} - \sum_{\nu=k+1}^{n+1} \frac{\partial \lambda}{\partial p_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \varphi_{l\beta} \right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} a_{i\beta} \varphi_{li} = -i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \varphi_{l\beta} + \sum_{i=1}^{r} a_{i\beta} \varphi_{li} \tag{3.34}$$

où $d/d\tau$ est la dérivée le long des trajectoires du système hamiltonien, correspondant à (3.30).

Il résulte de là que les équations (3.32) (3.33) ont des solutions. En outre, en appliquant (3.25) (3.26), on en arrive à l'asymptotique des solutions de l'équation

$$\hat{L}\psi = 0$$

Il nous faut encore cependant obtenir sous forme explicite la solution de l'équation (3.33), c'est-à-dire expliciter la matrice $a_{i\beta}$ dans (3.34). Pour cela, nous utilisons les identités 3)-4). Notons avant tout que

$$(\chi_\nu^+, U_1\chi_\mu) = -i\delta_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau} + i\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\chi_\nu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \eta_j^0}\frac{\delta\chi_\mu}{\delta p_j}\right) - \sum_{j=k+1}^{n+1}\left(\chi_\nu^+, \frac{\partial L^0}{\partial \xi_j^0}\frac{\delta\chi_\mu}{\delta x_j}\right)\right. + R_2 \quad (3.35)$$

$$R_2 = (\chi_\nu^+, R_1\chi_\mu), \qquad \text{où } \frac{\delta}{\delta p_j} \text{ et } \frac{\delta}{\delta x_j}$$

désignent les dérivées partielles totales par rapport aux variables indépendantes $p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}$, c'est-à-dire

$$\frac{\delta\chi_\mu}{\delta p_j} = \frac{\partial\chi_\mu}{\partial p_j} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu^0}\frac{\partial\eta_\nu^0}{\partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i^0}\frac{\partial\xi_i^0}{\partial p_j}$$

$$= \frac{\partial\chi_\mu}{\partial p_j} - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu\partial p_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial p_j} \qquad j = 1, \dots, n.$$

De même :

$$\frac{\delta\chi_\mu}{\delta x_j} = \frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_j} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu^0}\frac{\partial\eta_\nu^0}{\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i^0}\frac{\partial\xi_i^0}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_j} - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\eta_\nu^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_\nu\partial x_j} + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$j = 1, \dots, n+1 \quad (x_{n+1} = t).$$

Posons, comme dans le cas précédent,

$$\varphi_{0j} = u_j/\sqrt{J},$$

où

$$J(p, x, t) = \frac{D(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)}{D(p_{01}, \dots, p_{0k}, x_{0k+1}, \dots, x_{0n}, \tau)}$$

$(p_1, \dots, p_k, x_{k+1}, \dots, x_n, t)$ étant solutions du système d'Hamilton :

$$\dot{p} = -\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{\partial\lambda}{\partial p} \qquad \dot{t} = \frac{\partial\lambda}{\partial p_{n+1}},$$

avec $t(0) = 0$ et p et x satisfaisant les conditions (3.18) (3.19)). D'après le lemme de Sobolev ([71]), J satisfait l'équation (cf. ch. V, § 5, prop. A).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln J = -\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i^0\,\partial p_i} + \sum_{i,j=1}^{k}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i^0\,\partial\eta_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\,\partial p_j}$$

$$+\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i^0\,\partial\xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial x_j} - 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\eta_i^0\,\partial\xi_j^0}\frac{\partial^2 S}{\partial p_i\,\partial x_j}$$

$$+\sum_{j=k+1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x_j\,\partial\xi_j^0}$$

Portant

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{0j}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{J}}\left(\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{2}u_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln J\right)$$

dans l'expression de l'opérateur U_1 (cf. 3.35) et tenant compte des identités $4a$, $4b$:

$$\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left\{\left(\chi_\nu^+, \frac{\partial^2 L^0}{\partial\xi_i^0\,\partial\xi_j^0}\chi_\mu\right) - \frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi_i^0\,\partial\xi_j^0}\delta_{\mu\nu}\right\}$$

$$= \sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left\{\left(\chi_\nu^+, \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_i^0} - \frac{\partial L^0}{\partial\xi_i^0}\right]\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_j^0}\right) + \left(\chi_\nu^+, \left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi_j^0} - \frac{\partial L^0}{\partial\xi_j^0}\right]\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_i^0}\right)\right\}$$

$$= 2\sum_{i,j=k+1}^{n+1}\left[\left(\chi_\nu^+, \dot{x}_i\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_j^0}\right) - \left(\chi_\mu^+, \frac{\partial L^0}{\partial\xi_i^0}\frac{\partial\chi_\mu}{\partial\xi_j^0}\right)\right]$$

et d'autres analogues, on obtient, en utilisant les égalités

$$\dot{x}_i\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dot{x}_i\frac{\partial\xi_j^0}{\partial x_i}$$

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial x_j} = \frac{\mathrm{d}\xi_j^0}{\mathrm{d}\tau} = \sum\frac{\partial\xi_j^0}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_{i=k+1}^{n+1}\frac{\partial\xi_j^0}{\partial x_i}\dot{x}_i \qquad \text{etc.},$$

l'équation suivante pour le vecteur $u = (u_1, \dots, u_r)$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} + Gu = 0$$

où G est la matrice

$$G = \left\| \left(\chi_\nu^+, \frac{\mathrm{d}\chi_\mu}{\mathrm{d}\tau}\right) + \sum_{i=1}^{n+1}\left(\chi_\nu^+, \left(\frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\right)\frac{\partial\chi_\mu}{\partial x_i}\right) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial^2\lambda}{\partial p_i\,\partial x_i}\delta_{\mu\nu} + i\left(\chi_\nu^+, \frac{\partial L}{\partial h}\chi_\mu\right)_{h=0} \right\| \qquad (3.36)$$

L'opérateur $\sqrt{J}\,(\chi_\nu^+, U_1\chi_\mu)\dfrac{1}{\sqrt{J}}$ correspondant a la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + G$.

D'où :

Théorème 6.2. *Sous les hypothèses précédentes, il existe une solution de l'équation*

$$\hat{L}\psi = 0$$

représentable sous la forme

$$\psi(x,t) = \Phi^{p_1,\dots,p_k}\frac{\mathrm{e}^{ih^{-1}S(p,x,t)}}{\sqrt{J(p,x,t)}}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{j=0}^{N} h^j\varphi_{j\nu}(p,x,t)\,\chi_\nu(p,\xi^0,\eta^0,x,t) + h^{N+1}z_h(x,t,h) \quad (3.37)$$

où les $\varphi_j(p,x,t)$ sont C^∞, à support compact en p et x et à valeurs dans Z $B^\infty, z_h \in R_h$ et en outre $\{\varphi_{0\nu}(p,x,t)\}$ satisfait l'équation

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}\tau} + G\varphi_0 = 0 \qquad \varphi_0 = (\varphi_{01},\dots,\varphi_{0r}).$$

(Rappelons que la fonction $S(p,x,t)$ (l'action) vérifie l'équation (3.10) et que la dérivée $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ se calcule le long des trajectoires du système d'Hamilton correspondant à $S(p,x,t)$).

CHAPITRE 7

ASYMPTOTIQUE GLOBALE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS ABSTRAITES

Dans ce chapitre, nous démontrons les théorèmes formulés dans les chapitres 2, 3 et 4. Pour cela, en règle générale, nous ne répéterons pas les énoncés.

§ 1 LEMME SUR LES COORDONNÉES LOCALES

Démontrons d'abord le lemme sur les coordonnées locales (lemme 2.1) utilisé pour la construction de l'opérateur canonique.

Nous reformulerons ce lemme au moyen des deux lemmes 7.1*a* et 7.1*b*.

Lemme 7.1a. *Supposons qu'au point $\alpha = \alpha^0$ la matrice $B = \| \partial q_i/\partial \alpha_j \|_{j \leqslant n}^{i \leqslant n}$ ait un rang $r < n$. Alors il existe une matrice orthogonale $n \times n$, $\| \beta_{ij}(\alpha^0) \|$ telle que pour la transformation canonique*

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\alpha^0) q_j(\alpha) \\ \tilde{p}_i(\alpha) &= \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}(\alpha^0) p_j(\alpha) \end{aligned} \tag{1.1}$$

l'égalité $\dfrac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \alpha_j}(\alpha^0) = 0$ soit vraie pour

$$1 \leqslant \sigma \leqslant k \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

avec $k = n - r$.

Démonstration. Il existe des matrices orthogonales $C_1 = C_1(\alpha^0)$ et $C_2 = C_2(\alpha^0)$ telles que la matrice $B_1 = C_1 B C_2$ soit diagonale (cf. [20]) pour $\alpha = \alpha^0$, et que de plus ses k-premières lignes soient nulles. Il est alors évident que les k-premières lignes de la matrice $B_2 = B_1 C_2^* = C_1 B$ sont également nulles. Montrons que $C_1 = C_1(\alpha^0)$ est la matrice orthogonale cherchée $\| \beta_{ij}(\alpha^0) \|$. Posons $\tilde{q}(\alpha) = C_1 q(\alpha)$. On a

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha} = C_1 \frac{\partial q}{\partial \alpha} = C_1 B = B_2 .$$

D'où

$$\left(\frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \alpha} \right)_{\alpha = \alpha_0} = 0 \qquad \sigma = 1, \dots, k .$$

La transformation (1.1) laisse invariants les crochets de Poisson.

c.q.f.d.

Lemme 7.1b. *Si le rang de la matrice* $\| \partial \tilde{q}_i / \partial \alpha_j \|_{\alpha = \alpha^0}$ *est égal à* r, $k = n - r$ *et* $\partial \tilde{q}_\sigma(\alpha_0) / \partial \alpha_j = 0$ *pour* $\sigma \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *alors la matrice*

$$\tilde{D}_k = \left\| \frac{\partial (\tilde{y}_k)_i}{\partial \alpha_j} \right\|_{i, j \leqslant n} ,$$

où

$$(\tilde{y}_k)_i = \begin{cases} \tilde{p}_i(\alpha) & \text{pour } i \leqslant k \\ \tilde{q}_i(\alpha) & \text{pour } i > k \end{cases} \tag{1.2}$$

est non-dégénérée.

Démonstration. La multiplication à droite de la matrice B_2 par C_2 équivaut à une transformation orthogonale des coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de la forme $\tilde{\alpha} = C_2^* \alpha$. Donc

$$B_1 = B_2 C_2 = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\| .$$

Comme dans la matrice B_1, les seuls termes différents de 0 pour $\alpha = \alpha_0$ sont $(\partial \tilde{q}_i / \partial \tilde{\alpha}_i)_{\alpha = \alpha_0}$ pour $i > k$, il s'ensuit alors de la condition (2.2) du chapitre 1 que

$$\left(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right)_{\alpha = \alpha_0} = 0 \tag{1.3}$$

pour $i > k$ et $j \leqslant k$.

Montrons que

$$\det \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\|_{i, j \leqslant k} \neq 0 .$$

Supposons le contraire. Alors d'après (1.3) le rang de la matrice rectangulaire

$$A = \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\|_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant k}}$$

est plus petit que k pour $\alpha = \alpha_0$.

De même la matrice rectangulaire

$$\left\| \frac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \right\|_{\alpha = \alpha_0} \qquad 1 \leqslant \sigma \leqslant n .$$

est égale à 0. Il en résulte que le rang d'une matrice rectangulaire de la forme

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \tilde{q}_\sigma}{\partial \tilde{\alpha}_j} \\ \dfrac{\partial \tilde{p}_\rho}{\partial \tilde{\alpha}_j} \end{matrix} \right\|_{\alpha = \alpha_0} = \begin{array}{c|c|c|} & k & r \\ \hline n & 0 & \\ \hline n & A & \\ \hline \end{array}$$

est plus petit que n, ce qui est impossible, puisque $\{ q(\alpha), p(\alpha) \}$ est une sous-variété de dimension n. D'où

$$\det \tilde{D}_k \Big|_{\alpha = \alpha_0} = \prod_{i = k+1}^{n} \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{\alpha}_i} \right)_{\alpha = \alpha_0} \det A \Big|_{\alpha = \alpha_0} \neq 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Les coordonnées du point α^0, de la forme

$$(\tilde{y}_k) = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n) \qquad k = n - r,$$

seront appelées coordonnées focales du point α^0 et le plan correspondant est dit plan focal.

§ 2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME D'INVARIANCE

1. Nous montrons maintenant l'invariance des indices modulo 4, puisqu'ils suffisent pour la définition de l'opérateur canonique. Si un domaine $\Omega \subset \Gamma$ se projette biunivoquement sur le plan

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_{k_1} = \tilde{p}_{k_1+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0,$$

nous écrirons $\Omega \subset \tilde{\Omega}_{k_1}$. Si, simultanément, il se projette biunivoquement sur le plan

$$\tilde{\tilde{q}}_1 = \tilde{\tilde{q}}_2 \dots = \dots = \tilde{\tilde{q}}_{k_2} = \tilde{\tilde{p}}_{k_2+1} = \dots = \tilde{\tilde{p}}_n = 0,$$

nous écrirons alors $\Omega \subset \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_1} \cap \tilde{\Omega}_{k_2}$. Si le point α appartient à l'élément du recouvrement $\mathscr{H}$ correspondant à la çarte $\tilde{\Omega}_k$, nous écrirons $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$.

Les points $\alpha \in \tilde{\Omega}_k$ sont en correspondance biunivoque avec leurs projections $(\tilde{y}_k)$ sur le plan

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\tilde{y}_k = \tilde{y}_k(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \alpha = \alpha(\tilde{y}_k).$$

Cette dernière fonction n'est définie seulement que sur la projection Ω_k du domaine correspondant à $\tilde{\Omega}_k$, sur le plan de référence. Notons

$$\tilde{J}_k = D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k \qquad \tilde{\gamma}_k = \operatorname{Ind}\tilde{B}_k.$$

Soit $S(\alpha)$ une fonction satisfaisant l'équation

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha_j} = p\frac{\partial q}{\partial \alpha_j}.$$

Notons

$$\tilde{I}_k = \tilde{I}_k(\tilde{y}_k) = \left[\,|\tilde{J}_k|^{1/2}\exp\left\{\mathrm{i}A\left[S(\alpha) - \sum_{j=1}^{k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j(\alpha)\right]\right\}\varphi(\alpha)\right]_{\alpha=\alpha(\tilde{y}_k)},$$

où $\varphi(\alpha)$ est une fonction régulière dont le support $\Omega \subset \tilde{\Omega}_k$.

Remarque. Comme dans la formulation du théorème d'invariance, nous supposons que A est un opérateur auto-adjoint, non borné, défini positif dans un espace de Hilbert H et que $\varphi(\alpha)$ est une fonction à valeurs dans H. Lors de la démonstration du théorème 2.4, il est possible de considérer un opérateur non borné A dans un espace de Banach B et possédant les propriétés énoncées au § 1, chap. 6. La fonction $\varphi(\alpha)$ est alors à valeurs dans B.

Les grandeurs correspondantes, pour $\tilde{\tilde{\Omega}}_k$, seront surmontées d'un double tilde. Notons $\Phi^{\tilde{q}_k}$ la transformation inverse de Fourier

$$\Phi^{\tilde{q}_k}\psi = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi k/4}}{(2\pi)^{k/2}}\int \exp\left[-\mathrm{i}A\sum_{j=1}^{k}\tilde{p}_j\tilde{q}_j\right]\psi(\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_k)\,\mathrm{d}\tilde{q}_1,\dots,\mathrm{d}\tilde{q}_k \qquad (2.1)$$

Lorsque le support de la fonction $\psi(\tilde{q}_1,\dots,\tilde{q}_k)$ est égal à R, il faut prendre l'intégrale sur R.

Quelques lemmes précéderont la démonstration des trois théorèmes que nous avions énoncés. Nous ferons aussi la convention suivante : toutes les égalités des lemmes 7.2 à 7.5 et de la démonstration du théorème 2.3 seront à comprendre dans l'espace facteur S (cf. ch. 2, § 1, 2°).

Lemme 7.2. *Supposons que le support Ω de la fonction à support compact $\varphi(\alpha)$ appartienne à la variété lagrangienne $\Gamma = \{q(\alpha), p(\alpha)\}$ et se projette biunivoquement sur le plan des coordonnées q et sur le plan*

$$\tilde{q}_1 = \dots = \tilde{q}_k = \tilde{p}_{k+1} = \dots = \tilde{p}_n = 0$$

et soit Ω_k sa projection sur ce dernier plan. Alors l'expression $\Phi^{\tilde{q}_k}\tilde{I}_0(\tilde{q})$ est égale à

$$\tilde{I}_k\,\mathrm{e}^{-i(\pi/2)\tilde{\gamma}_k} \quad \textit{pour } \tilde{y}_k \in \Omega_k \textit{ et à } 0 \textit{ sinon}.$$

Démonstration. Pour calculer l'intégrale $\Phi^{\tilde{q}_k}\tilde{I}_0(\tilde{q})$, nous appliquons la méthode de la phase stationnaire. Les points stationnaires $q_i = q_i^0$, $i = 1,\dots,k$ sont définis par le système

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{p}_i \qquad i = 1,\dots,k \qquad (2.2)$$

Posons dans (2.2)

$$\tilde{p}_j = \tilde{p}_j(\bar{\alpha}) \qquad \tilde{q}_i = \tilde{q}_i(\bar{\alpha}) \qquad i = k+1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, k. \tag{2.3}$$

Comme

$$\frac{\partial S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p}(\alpha(\tilde{q}))$$

et

$$\alpha(\tilde{q}(\bar{\alpha})) = \bar{\alpha}$$

pour $\bar{\alpha} \in \tilde{\Omega}_0$, alors le système (2.2) est satisfait pour $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i(\bar{\alpha})$, $i = 1, \dots, k$. Faisons, dans le système (2.3), $\bar{\alpha} = \alpha(\tilde{y}_k)(\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n)$.

On obtient que $\tilde{q}_i^0 = \tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)]$, $i = 1, \dots, k$ sont les solutions du système (2.2) pour des $\tilde{y}_k \in \Omega_k$ quelconques, puisque

$$\tilde{p}_j[\alpha(\tilde{y}_k)] = \tilde{p}_j \qquad j = 1, \dots, k$$

et que

$$\tilde{q}_i[\alpha(\tilde{y}_k)] = \tilde{q}_i \qquad i = k+1, \dots, n.$$

Si $\tilde{y}_k \notin \Omega_k$, les points stationnaires $\tilde{q}_i^0$, $i = 1, \dots$ n'appartiennent pas à la région où la fonction sous le signe somme est différente de 0.

L'unicité de la solution du système (2.2) dans le domaine $\tilde{y}_k \in \Omega_k$ résulte du fait que

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(\alpha(\tilde{q}))}{\partial \tilde{q}_i \, \partial \tilde{q}_j} \right\|_{i,\, j = 1, \cdots, k} = \det \tilde{B}_k^{-1} = \frac{D\sigma(\alpha)/D\tilde{q}}{D\sigma(\alpha)/D\tilde{y}_k} \neq 0 \tag{2.4}$$

Les conditions d'application de la méthode de la phase stationnaire sont alors remplies, d'où le lemme (cf. [81, 3, 4]).

Lemme 7.3. *Supposons que le support de la fonction $\varphi(\alpha)$ soit contenu dans l'intersection $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$; alors, aux points $\tilde{\tilde{y}}_{k_2} \in \Omega_{k_2}$ tels que $\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ soit non singulier, on a l'égalité* (*) :

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} I_{k_1} = e^{i(\pi/2)(\tilde{\gamma}_{k_1} - \tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2})} \tilde{\tilde{I}}_{k_2} \tag{2.5}$$

Démonstration. D'après le lemme 7.2, aux points non singuliers :

$$\Phi^{\tilde{q}_{k_1}} \tilde{I}_0 = e^{-i\tilde{\gamma}_{k_1}\pi/2} \tilde{I}_{k_1} \tag{2.6}$$

D'où

$$\tilde{I}_0 = e^{-i\tilde{\gamma}_{k_1}\pi/2} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} \tag{2.7}$$

Donc, en vertu du lemme 7.2

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = e^{i(\pi/2)\tilde{\gamma}_{k_1}} \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} I_0 = e^{i(\pi/2)(\tilde{\gamma}_{k_1} - \tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2})} \tilde{\tilde{I}}_{k_2} \tag{2.8}$$

c.q.f.d.

(*) Ici $\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} \equiv \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} [\Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1}]_{\tilde{q} = \tilde{q}(\tilde{\tilde{q}})}$

Remarque. Puisque $(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ n'est pas singulier un de ses voisinages $\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ n'est pas singulier. Soit $e_1(\alpha), e_2(\alpha)$ une partition de l'unité subordonnée aux domaines Ω_0 et $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2} \setminus \Omega_0$:

$$\varphi(\alpha) \equiv e_1(\alpha)\,\varphi(\alpha) + e_2(\alpha)\,\varphi(\alpha).$$

Les intégrales du second terme n'ont pas de point stationnaire et sont donc nulles dans S. C'est pourquoi il suffit de prouver le lemme 7.3 pour la fonction $e_1(\alpha)\,\varphi(\alpha)$ à support dans $\Omega_0 \cap \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$.

Lemme 7.4. *Supposons que le support de $\varphi(\alpha)$ est contenu dans $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. On a alors la relation*

$$\Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1} = \mathrm{e}^{-i(\pi/2)m} \tilde{\tilde{I}}_{k_2}$$

où m est un entier indépendant de $\tilde{\tilde{y}}_{k_2}$

Démonstration. Considérons l'intégrale

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}) = \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}} \Phi^{\tilde{p}_{k_1}} \tilde{I}_{k_1}.$$

Elle s'écrit

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}) = \frac{\mathrm{e}^{i(\pi/4)(k_2-k_1)} A^{k_1+k_2}}{(2\pi)^{(k_1+k_2)/2}} \int \exp\left\{ \mathrm{i}A\left[S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j(\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) - \tilde{q}_j) \right]\right\}$$

$$\exp\left[-\mathrm{i}A \sum_{j=1}^{k_2} \tilde{\tilde{p}}_j \tilde{\tilde{q}}_j \right] |D\sigma(\alpha)/D(\tilde{y}_k)|^{1/2} \quad \varphi(\bar{\alpha})\,\mathrm{d}\tilde{p}_1, \ldots, \mathrm{d}\tilde{p}_{k_1}, \mathrm{d}\tilde{\tilde{q}}_1, \ldots, \mathrm{d}\tilde{\tilde{q}}_{k_2}, \tag{2.9}$$

où

$$\tilde{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \tilde{\tilde{q}}_j, \qquad \det \| \beta_{ij} \| = 1,$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\tilde{y}_{k_1}) = \bar{\alpha}\left(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \sum_{j=1}^{n} \beta_{k+1,j}\, \tilde{\tilde{q}}_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \beta_{nj} \tilde{\tilde{q}}_j \right)$$

Pour calculer l'intégrale (2.9) appliquons la méthode de la phase stationnaire. Les points stationnaires $\tilde{\tilde{q}}_i^0, \tilde{p}_j^0$, $i = 1, \ldots, k_2$, $j = 1, \ldots, k_1$ sont définis par le système

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha}) \right)}{\partial \tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j \qquad j = 1, \ldots, k_1 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \tilde{q}_j(\bar{\alpha}) \right)}{\partial \tilde{\tilde{q}}_\nu} + \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j \beta_{j\nu} - \tilde{\tilde{p}}_\nu = 0 \qquad \nu = 1, \ldots, k_2 \tag{2.11}$$

Comme on sait que

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial\tilde{p}_j} = -\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) \qquad j = 1, \dots, k_1 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial\tilde{q}_\nu} = \tilde{p}_\nu(\bar{\alpha}) \qquad \nu = k_1 + 1, \dots, n \tag{2.13}$$

On tire de (2.13)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial\tilde{\tilde{q}}_\nu} &= \sum_{l=k_1+1}^{n} \frac{\partial\left(S(\bar{\alpha}) - \sum_{j=1}^{k_1} \tilde{p}_j\tilde{q}_j(\bar{\alpha})\right)}{\partial\tilde{q}_l}\beta_{l\nu} \\ &= \sum_{l=k_1+1}^{n} \tilde{p}_l\beta_{l\nu}\end{aligned} \tag{2.14}$$

En vertu de (2.12) et (2.14), le système (2.10-2.11) peut se réécrire

$$\tilde{q}_j(\bar{\alpha}) = \tilde{q}_j \qquad j = 1, \dots, k_1 \tag{2.10$'$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{p}_j\beta_{j\nu} = \tilde{\tilde{p}}_\nu \qquad \nu = 1, \dots, k_2 . \tag{2.11$'$}$$

On peut voir que le système (2.10, 2.11) a une solution

$$\tilde{p}_j = \tilde{p}_j^0 = \tilde{p}_j^0(\bar{\alpha}) \qquad \tilde{\tilde{q}}_i = \tilde{\tilde{q}}_i^0 = \tilde{\tilde{q}}_i^0(\bar{\bar{\alpha}})$$

où $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{\alpha}}(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ est solution du système

$$\tilde{\tilde{p}}_j(\bar{\bar{\alpha}}) = \tilde{\tilde{p}}_j \qquad j = 1, \dots, k_2, \qquad \tilde{\tilde{q}}_i(\alpha) = \tilde{\tilde{q}}_i \qquad i = k_2 + 1, \dots, n.$$

Soit en outre $D_{k_1k_2}(\bar{\alpha})$ le déterminant de la matrice $A(\bar{\alpha})$ des dérivées secondes de la phase de l'intégrale (2.9). De la formule (2.8) il résulte alors que pour des $\tilde{\tilde{y}}_{k_2}$ tels que $\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})$ soit un point non singulier.

$$\lim_{h\to 0} \Phi^{\tilde{\tilde{q}}_{k_2}}\Phi^{\tilde{p}_{k_1}} I_{k_1} < \infty$$

Par conséquent (cf. l'affirmation § 2, ch. 6, p. 23) $D_{k_1k_2}(\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_2})) \neq 0$ et on peut appliquer la méthode de la phase stationnaire.

Donc, avec (2.8), aux points non singuliers $\bar{\bar{\alpha}}$:

$$|D_{k_1k_2}(\bar{\alpha})| = \left|\frac{\tilde{\tilde{J}}_{k_2}(\bar{\bar{\alpha}})}{J_{k_1}(\bar{\bar{\alpha}})}\right| \tag{2.15}$$

De là, on déduit par continuité que cette égalité reste aussi valable aux points singuliers $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$, c'est-à-dire $D_{k_1k_2}(\bar{\alpha}) \neq 0$ pour $\bar{\bar{\alpha}} \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$.

A l'aide de la méthode de la phase stationnaire, on obtient

$$I(\tilde{\tilde{y}}_{k_2}) = e^{-i(\pi/2)m}\tilde{\tilde{I}}_{k_2},$$

où
$$m = \operatorname{Ind} A(\bar{\bar{\alpha}}).$$

On voit d'après (2.15) que $D_{k_1k_2}(\bar{\bar{\alpha}})$ ne s'annule pas sur l'intersection des cartes $\tilde{\Omega}_{k_1}$ et $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. Par conséquent, $\operatorname{Ind} A(\alpha)$ ne change pas pour

$$\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}.$$

c.q.f.d.

Corollaire. *La différence* $\tilde{\gamma}_k - \tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}$ *est égale à* m *pour tout* $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$.

Donc, puisque m ne dépend pas de $\alpha \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$

$$[\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2} - \tilde{\gamma}_{k_1}](\alpha_1) = [\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2} - \tilde{\gamma}_{k_2}](\alpha_2)$$

pour des points non singuliers quelconques α_1 et $\alpha_2 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. Par conséquent

$$\tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}(\alpha_1) - \tilde{\tilde{\gamma}}_{k_2}(\alpha_2) = \tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha_1) - \tilde{\gamma}_{k_1}(\alpha_2) = \mathrm{Inv}.$$

Nous avons donc montré que l'indice d'un chemin allant de α_1 à α_2 est un invariant indépendant de la carte dans laquelle se trouvent les points α_1 et α_2. De là résulte le théorème 2.1 sur l'invariance homotopique de l'indice d'un chemin (*).

2. Démonstration du théorème 2.3

Désignons par $K^{\gamma, \alpha^0}_{A, \Gamma}[\mathscr{H}, \mathscr{X}, \{e^j\}, \{l_j\}]$ l'opérateur canonique donné par (2.3), chap. 2, dépendant du recouvrement $\mathscr{H}$, de l'ensemble des centres $\mathscr{X}$, de la partition de l'unité $\{e^j\}$ et des chemins $\{l_j\}$. On voit facilement qu'en vertu de l'invariance homotopique locale de $\int p\,\mathrm{d}q$ et $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha]$, il est nécessaire et suffisant de vérifier la condition (2.5) du chap. 2 pour que (dans l'espace facteur S) l'opérateur $K^{\gamma, \alpha^0}_{A, \Gamma}$ soit uniquement déterminé par la donnée de l'atlas $\mathscr{H}$, des centres $\mathscr{X}$ et d'une partition de l'unité. Ainsi

$$K^{\gamma, \alpha^0}_{A, \Gamma}[\mathscr{H}, \mathscr{X}, \{e^j\}, \{l_j\}] \sim K^{\gamma, \alpha^0}_{A, \Gamma}[\mathscr{H}, \mathscr{X}, \{e^j\}]$$

On peut donc simplement noter l'opérateur (2.3) du chapitre 2 par

$$K^{\gamma, \alpha^0}_{A, \Gamma}[\mathscr{H}, \mathscr{X}, \{e^j\}]$$

Avant de passer à la démonstration de l'indépendance de l'opérateur canonique de la partition de l'unité, démontrons le lemme :

Lemme 7.5. *Supposons que des domaines* $\Omega^i = \Omega^i(\beta)$, $i = 1, \ldots, N$ *soient les éléments d'un recouvrement* $\mathscr{H}(\beta)$ *et d'un ensemble de centres* $\mathscr{X}(\beta)$ *et que des* $\tilde{e}^i(\alpha) = \tilde{e}^i(\alpha, \beta)$ *(éléments d'une partition de l'unité) dépendent d'un certain paramètre* $\beta \in [0, \varepsilon]$, *de telle manière que, pour tout* $\beta \in [0, \varepsilon]$, *chaque*

(*) Par définition $\operatorname{Ind} l[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}] = m$, où $\tilde{a}_{k_1}, \tilde{\tilde{a}}_{k_2}$ sont les centres des cartes $\tilde{\Omega}_{k_1}$ et $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$.

domaine $\Omega^i(\beta)$ *se projette biunivoquement sur un même plan* $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \dots, \tilde{q}_n$ *et que les* $e^i(\alpha, \beta)$ *soient deux fois différentiables en* β.

Alors

$$\frac{\partial}{\partial \beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \{ \mathscr{H}(\beta), \mathscr{X}(\beta), \{ \tilde{e}^i(\alpha, \beta) \} \} \varphi(\alpha) = 0 .$$

Démonstration. Il suffit de montrer le lemme pour $\beta = 0$. Soit $\tilde{e}_k^j(\alpha, \beta)$ un élément d'une partition de l'unité correspondant à une certaine carte $\tilde{\Omega}_k^j(\beta)$ et supposons que la carte $\tilde{\Omega}_k^j(\beta)$ n'a d'intersection qu'avec l cartes

$$\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_i}^i(\beta), \quad i = 1, \dots, l .$$

Considérons

$$K_{A,\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha) = K_{A,\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \sum_{j=1}^{N} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \varphi(\alpha) . \tag{2.16}$$

Montrons que

$$\left[\frac{\partial}{\partial \beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \varphi(\alpha) \right]_{\beta = 0} = 0 .$$

On a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} K_{A,\Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \varphi(\alpha) \right]_{\beta = 0} &= \left\{ \Phi^{\tilde{p}_k} e^{-i \tilde{\gamma}^j \pi/2} \tilde{I}_k \frac{\partial \tilde{e}_k^j(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{l} \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}} e^{-i \tilde{\tilde{\gamma}}^\nu \pi/2} \tilde{\tilde{I}}_{k_\nu} \frac{\partial e^\nu(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right\} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ici, $\tilde{\tilde{e}}^\nu$ et $\tilde{\tilde{I}}_{k_2}$ correspondent aux cartes $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_\nu}^\nu(\beta)$ et

$$\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}} f(\alpha) \equiv \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_\nu}} f(\alpha(\tilde{\tilde{y}}_{k_\nu})) .$$

En vertu des lemmes 7.3 et 7.4 :

$$\begin{aligned} &\Phi^{\tilde{p}_k} \exp\left(- i \tilde{\gamma}_k \frac{\pi}{2} \right) \tilde{I}_k \frac{\partial \tilde{\tilde{e}}^\nu}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \Big|_{\beta = 0} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \\ &\quad = \exp\left(- i \tilde{\tilde{\gamma}}_k \frac{\pi}{2} \right) \Phi^{\tilde{\tilde{p}}_k} \tilde{\tilde{I}}_{k_\nu} \frac{\partial \tilde{\tilde{e}}^\nu}{\partial \beta}(\alpha, \beta) \Big|_{\beta = 0} \tilde{e}_k^j(\alpha, 0) \qquad \nu = 1, \dots, l \end{aligned} \tag{2.18}$$

pour $\alpha \in \tilde{\Omega}_k^j(\beta) \cap R$.

Puisque

$$\tilde{e}_k^j(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\tilde{e}}_l^i(\alpha, \beta) = 1 ,$$

alors,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\tilde{e}_k^j(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^{l} \tilde{\tilde{e}}_l^i(\alpha, \beta) \right] = 0$$

en ces points.

Le lemme est donc une conséquence de (2.17) et (2.18).

Soient $\bar{\mathscr{H}}$ et $\bar{\bar{\mathscr{H}}}$ des atlas ayant le même ensemble de centres $\mathscr{X}$, c'est-à-dire à un centre α^i correspondent les domaines $\bar{\Omega}^i \in \bar{\mathscr{H}}$ et $\bar{\bar{\Omega}}^i \in \bar{\bar{\mathscr{H}}}$. Considérons aussi l'atlas $\mathscr{H}$ de centres $\mathscr{X}$ et de domaines $\Omega^i = \bar{\Omega}^i \cup \bar{\bar{\Omega}}^i$. Il leur correspond les partitions de l'unité $\{\bar{e}^i(\alpha)\}, \{\bar{\bar{e}}^i(\alpha)\}$ et $\{e^i(\alpha)\}$. Considérons la partition de l'unité $\{e^i(\alpha, \beta)\}$, où

$$e^i(\alpha, \beta) = \frac{\bar{e}^i(\alpha) + \beta e^i(\alpha)}{1 + \beta},$$

correspondant au recouvrement : $\Omega^i(\beta)$, où $\Omega^i(\beta) = \Omega^i$ si $\beta \in (0, 1]$ et $\Omega^i(0) = \bar{\Omega}^i$. D'après le lemme 7.5, on sait que l'opérateur canonique ne change pas (dans l'espace quotient S) en remplaçant l'atlas $\mathscr{H}$ par l'atlas $\bar{\mathscr{H}}$; de même avec $\bar{\bar{\mathscr{H}}}$. Par conséquent, le changement de l'atlas $\bar{\mathscr{H}}$ en $\bar{\bar{\mathscr{H}}}$ ne modifie l'opérateur canonique que par des quantités équivalentes à 0.

On peut donc écrire

$$K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathscr{H}, \mathscr{X}, \{e^i\}] = K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}[\mathscr{X}]$$

Supposons maintenant donné l'atlas $\mathscr{H}$. Prenons un point $\bar{\alpha} \in R, \bar{\alpha} \notin \mathscr{X}$. Changeons le recouvrement $\mathscr{H}$, en conservant les centres, de telle manière que $\bar{\alpha}$ n'appartienne qu'à une seule carte $\tilde{\Omega}_k^{i_0}$ du nouvel atlas $\mathscr{H}'$ (ayant les mêmes centres $\mathscr{X}$). On a démontré que $K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}$ était invariant par cette opération. Entourons le point $\bar{\alpha}$ d'un domaine ne rencontrant que $\tilde{\Omega}_k^{i_0}$ et se projetant entièrement sur le plan focal correspondant à $\bar{\alpha}$. Nous construisons ainsi une nouvelle carte, de centre $\bar{\alpha}$, que nous noterons $\tilde{\tilde{\Omega}}_k^{\omega}$. Soient $\mathscr{H}''$ le nouvel atlas augmenté de cette carte, $\mathscr{X}''$ l'ensemble des centres $\mathscr{X}$, augmenté de $\bar{\alpha}$. Soit $\{e_{(1)}^i(\alpha)\}$ une partition de l'unité associée à $\mathscr{H}'$; on peut alors construire la partition de l'unité suivante $\{e_{(2)}^i(\alpha)\}$ associée à l'atlas $\mathscr{H}''$.

$$e_{(2)}^{(i)}(\alpha) = e_{(1)}^i(\alpha), \qquad i \neq i_0 \qquad e_{(1)}^{(i_0)}(\alpha) = e_{(2)}^{i_0}(\alpha) + e_2^{\omega}(\alpha)$$

Considérons la différence des expressions de $K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0} \varphi(\alpha)$ correspondant aux atlas $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$ avec respectivement les partitions de l'unité $e_{(1)}^i$ et $e_{(2)}^i$

$$K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}(\mathscr{X})\varphi(\alpha) - K_{A, \Gamma}^{\gamma, \alpha^0}(\mathscr{X}'')\varphi(\alpha) = \exp\left(i\gamma - \frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^{i_0}]\right)$$

$$\times \Phi^{\tilde{p}_k}[e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha)]\tilde{I}_k - \exp\left(i\gamma - \frac{i\pi}{2}\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha^{\omega}]\right)\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k'}} e_{(2)}^{\omega}(\alpha)\tilde{\tilde{I}}_{k'} \quad (2.19)$$

$\mathscr{H}_\tau^i = \mathscr{U}_{\tau_i, \tau}\mathscr{H}_{\tau_i}^i$ soit un atlas pour $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$. Ensuite, sur $\Gamma_{\tau_{i+1}}$, on peut choisir un atlas $\mathscr{H}_{\tau_{i+1}}^{i+1}$, en général différent de l'atlas

$$\mathscr{H}_{\tau_{i+1}}^i = \mathscr{U}_{\tau_i, \tau_{i+1}}\mathscr{H}_{\tau_i}^i,$$

Comme

$$e_{(1)}^{i_0}(\alpha) - e_{(2)}^{i_0}(\alpha) = e_2^{\omega}(\alpha)$$

et que

$$\operatorname{supp} e_{(2)}^{\omega} \subset \tilde{\Omega}_k^{i_0} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_k^{\omega},$$

d'après les lemmes 7.3 et 7.4 la différence (2.19) est équivalente à 0.

Par conséquent, aux centres $\mathscr{X}$ de l'atlas $\mathscr{H}$, on peut ajouter de nouveaux points centraux sans changer l'opérateur

Soient maintenant deux atlas canoniques $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}''$ de centres $\mathscr{X}'$ et $\mathscr{X}''$. Considérons l'atlas $\mathscr{H}$ avec les centres $\mathscr{X} = \mathscr{X}' \cup \mathscr{X}''$.

Alors
$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}]$$
et
$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}''] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}]$$
d'où
$$K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}'] \sim K_{A,\Gamma}^{\gamma,\alpha^0}[\mathscr{X}''] \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Le théorème 2.4 se démontre de la même façon, en tenant compte de ce que, dans les lemmes 7.2-7.4, la méthode de la phase stationnaire donne une série asymptotique en puissances de R_z.

3. **Démonstration du théorème 2.2**

Soient Γ_0 et Γ_t des variétés lagrangiennes, et supposons en outre qu'on puisse déformer continûment Γ_0 en Γ_t de sorte qu'elles appartiennent à une famille à un paramètre $\Gamma_\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant t$, où, pour chaque τ, Γ_τ est une variété lagrangienne.

Soit $\mathscr{H}_0$ un atlas canonique de la variété lagrangienne initiale $\Gamma_0 = \{q^0(\alpha), p^0(\alpha)\}$. Notons $\mathscr{U}_{\tau_1,\tau_2}$ l'application de la sous-variété Γ_{τ_1} sur Γ_{τ_2}, $\mathscr{U}_{\tau_1\tau_2}\Gamma_{\tau_1} = \Gamma_{\tau_2}$, et $\mathscr{H}_\tau$ l'atlas canonique de Γ_τ. Supposons que Ω^j corresponde à la carte $\tilde{\Omega}_k^j \subset \mathscr{H}_0$. Par définition de $\tilde{\Omega}_k^j$, le domaine Ω^j se projette biunivoquement sur le plan $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$. Posons
$$\Omega_{\tau_0}^j = \mathscr{U}_{0,\tau_0}\Omega^j$$
Il est évident que pour $\tau_0 < \varepsilon$, le domaine $\Omega_{\tau_0}^j$ se projettera aussi biunivoquement sur le même plan. Comme il y a un nombre fini de domaines Ω^j, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $\tau_0 < \varepsilon$, on peut introduire, pour tous les domaines $\Omega_{\tau_0}^j$, les mêmes coordonnées locales $\tilde{y}_k$ que dans les images inverses Ω^j. Ainsi, en tant qu'atlas $\mathscr{H}_{\tau_0}$ sur Γ_{τ_0} on peut prendre l'ensemble des cartes locales
$$(\Omega_{\tau_0}^i)_k = \mathscr{U}_{0,\tau_0}\tilde{\Omega}_k^i$$
correspondant aux domaines $\tilde{\Omega}_{\tau_0}^i$ et aux coordonnées $\tilde{y}_k = \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_k, \tilde{q}_{k+1}, \ldots, \tilde{q}_n$, de cette façon il est possible d'écrire
$$\mathscr{H}_{\tau_0} = \mathscr{U}_{0,\tau_0}\mathscr{H}_0 .$$
D'après le lemme de Borel on peut diviser l'intervalle fini $[0, t]$ (par des points $\tau_1, \ldots, \tau_m = t$) en un nombre fini d'intervalles de longueur Δ ayant la propriété suivante : sur Γ_{τ_i}, on peut choisir un atlas $\mathscr{H}_{\tau_i}^i$ tel que
$$\mathscr{H}_\tau^{i+1} = \mathscr{U}_{\tau_{i+1},\tau}\mathscr{H}_{\tau_{i+1}}^{i+1}$$
soit un atlas pour $\tau_{i+1} \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+2}$.

Considérons un cycle γ_{τ_i} sur la sous-variété Γ_{τ_i}. Montrons l'invariance de $\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i}$ pour les déformations $\Gamma_{\tau_i} \to \Gamma_{\tau_{i+1}}$, c'est-à-dire montrons que pour cette déformation

$$\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i} = \operatorname{Ind}\gamma_{\tau_{i+1}}.$$

Quand nous aurons montré l'invariance de $\operatorname{Ind}\gamma$ par changement d'atlas, nous aurons par là-même montré l'invariance de l'indice d'un cycle quelconque pour la déformation $\Gamma \to \Gamma_t$. Montrons d'abord qu'il est possible de déformer le cycle γ_{τ_i} sur Γ_{τ_i} de manière à ce qu'il ne traverse pas successivement deux cartes singulières de l'atlas $\mathscr{H}^i_{\tau_i}$. Considérons le segment $l_{\tau_i} = l_{\tau_i}[\alpha^1, \alpha^2]$ du cycle γ_{τ_i} contenu dans les trois cartes $\Omega^1, \tilde{\Omega}_k, \Omega^2$ où $\tilde{\Omega}_k$ est singulière, alors que Ω^1 et Ω^2 ne le sont pas. Les cartes $\mathscr{U}_{\tau_i,\tau}\Omega^\sigma, (\sigma = 1, 2)$, $\mathscr{U}_{\tau_i,\tau}\tilde{\Omega}_k$ pour $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$ seront à nouveau notées respectivement Ω^σ $(\sigma = 1, 2), \tilde{\Omega}_k$.

Considérons le segment

$$\mathscr{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}} l_{\tau_i} = l_{\tau_{i+1}} \subset \gamma_{\tau_{i+1}}.$$

Montrons que $\operatorname{Ind} l_{\tau_i} = \operatorname{Ind} l_{\tau_{i+1}}$, ce qui montrera l'invariance de $\operatorname{Ind}\gamma_{\tau_i}$, puisque, par construction, l'indice ne peut seulement changer que par passage à travers des points singuliers. En vertu de cette remarque, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\alpha^1, \alpha^2 \in \tilde{\Omega}_k$, c'est-à-dire que $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^1$ et $\alpha^2 \in \tilde{\Omega}_k \cap \Omega^2$. Sur chacune de ces intersections, le jacobien $D\tilde{y}_0/D\tilde{y}_k$, par définition des cartes Ω^1, Ω^2 et $\tilde{\Omega}_k$, ne s'annule pas. Par construction, il est aussi différent de zéro aux points

$$\mathscr{U}_{\tau_i,\tau}\alpha^\sigma, \quad (\sigma = 1, 2), \qquad \tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}.$$

Par conséquent, le déterminant de la matrice

$$\tilde{B}_k = \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial \tilde{p}_j} \right\|_{i,j \leqslant k}$$

qui lui est égal, est différent de zéro en ces points. Comme l'indice d'inertie de la matrice $\tilde{B}_k$ ne change pas par passage de $\alpha^0 \in \Gamma_{\tau_i}$ à $\mathscr{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}}\alpha^\sigma \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$, on a

$$\operatorname{Ind} l_{\tau_i} = \operatorname{Ind} l_{\tau_{i+1}} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Considérons maintenant le cas général. Déformons le cycle γ_{τ_i} et le cycle $\gamma_{\tau_{i+1}}$ de telle manière qu'ils passent par les centres de toutes les cartes traversées. Considérons un segment du cycle γ_{τ_i} joignant, sur la variété Γ_{τ_i}, le centre $\tilde{\alpha}_{k_1}$ de la carte $\tilde{\Omega}_{k_1}$ au centre $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ de la carte $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. Considérons le segment d'arc correspondant du cycle $\gamma_{\tau_{i+1}}$ allant du centre $\tilde{\alpha}'_{k_1} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ de la carte $\tilde{\Omega}'_{k_1} = \mathscr{U}_{\tau_i\tau_{i+1}}\tilde{\Omega}_{k_1}$ au centre $\tilde{\tilde{\alpha}}'_{k_2} \in \Gamma_{\tau_{i+1}}$ de la carte $\tilde{\tilde{\Omega}}'_{k_2} = \mathscr{U}_{\tau_i,\tau_{i+1}}\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. Montrons que les indices de ces chemins coïncident. De là résultera évidemment que l'indice du cycle γ_{τ_i} est égal à l'indice du cycle $\gamma_{\tau_{i+1}}$. Rappelons que nous avons défini l'indice d'un arc joignant un point régulier α^1 de la carte $\tilde{\Omega}_k$ au centre de cette carte $\tilde{\alpha}_k$ comme l'indice d'inertie de la matrice $\tilde{B}_k$ au point α^1.

Supposons $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$ et α^1 régulier. Soient $\tilde{\alpha}_{k_1}$ et $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ les centres respectifs de $\tilde{\Omega}_{k_1}$ et $\tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. Il est évident que

$$\operatorname{Ind} l[\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}] = -\operatorname{Ind} l[\alpha^1, \tilde{\alpha}_{k_1}] + \operatorname{Ind} l[\alpha^1, \tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}].$$

Ainsi l'indice du chemin de $\tilde{\alpha}_{k_1}$ à $\tilde{\tilde{\alpha}}_{k_2}$ est égal à la différence des indices d'inertie des matrices $\tilde{B}_{k_1}$ et $\tilde{B}_{k_2}$ calculés au point $\alpha^1 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$. Comme on l'a démontré pour le lemme 7.4, cette différence est égale à l'indice d'inertie de la matrice $A(\alpha^1)$.

Remarquons que l'on peut toujours supposer que les variétés Γ_{τ_i} et $\Gamma_{\tau_{i+1}}$ sont en position générale. Toutefois, pour certains $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ les variétés peuvent ne plus être en position générale.

Soient $\alpha^0 \in \tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$, sur le cycle γ_{τ_i} et $\alpha_1^0 = \mathscr{U}_{\tau_i, \tau_{i+1}}\alpha^0$ sur $\gamma_{\tau_{i+1}}$, et supposons en outre α^0 et α_1^0 réguliers. Montrons que les indices d'inertie en α^0 et α_1^0 de la matrice $A(\alpha)$ coïncident. De ce qui a été dit plus haut, il résultera que la démonstration de l'invariance de l'indice du cycle γ_{τ_i} est achevée.

L'égalité (2.15), démontrée dans le cas où la variété des singularités M, a une dimension inférieure à $n-1$ s'étend par continuité au cas général. Ainsi $\det A(\alpha)$ ne s'annule pas sur l'intersection des cartes $\tilde{\Omega}_{k_1} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}_{k_2}$, ni également le long du chemin $\mathscr{U}_{\tau_i \tau}\alpha$ pour $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$. Par conséquent le long de ce chemin l'indice d'inertie de la matrice $A(\alpha)$ ne change pas (sinon $\det A(\alpha)$ s'annulerait).

c.q.f.d.

De là résulte aussi l'analogue du théorème 2.1 pour les films.

§ 3 ASYMPTOTIQUE GLOBALE DES SOLUTIONS

1. Nous allons démontrer ici le théorème 4.1 dans le cas $m = 1$ et $\Lambda_1 = 1$, c'est-à-dire le théorème 4.1*a*. Dans le cas général où m est arbitraire, ce théorème et le théorème 4.2 se démontrent de manière tout à fait analogue.

Avant tout montrons que le théorème 4.1*a* résulte immédiatement des affirmations démontrées dans le théorème 6.2 sous la condition que le temps t soit suffisamment petit (c'est-à-dire que le théorème 4.1*a* est valable localement). Pour cela, déduisons de la formule (3.37), ch. 6, la formule (2.12) du ch. 4. Supposons le support de la fonction vectorielle $\varphi^0(\alpha, h)$ (cf. théorème 4.1*a*) contenu dans Ω^i.

D'après (2.13), ch. 4, le support de la fonction vectorielle $\varphi(\alpha, h, t)$ appartiendra à Ω_t^i. Ainsi dans ce cas, l'expression (2.12) peut, d'après la définition de l'opérateur canonique, être écrite sous la forme (3.37) du ch. 6 en utilisant pour cela l'égalité

$$S(p, x, t) = \int_{l[\alpha^0, \alpha_t^0]} \{-H\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}q\} + \int_{l[\alpha_t^0, \alpha_t(\tilde{y}_k)]} \tilde{p}\,\mathrm{d}\tilde{q} - \sum_{i=1}^{k} \tilde{p}_i \tilde{q}_i(\alpha_t(\tilde{y}_k))$$

Mais la formule (3.37) est obtenue sous l'hypothèse que pour $t \leqslant \varepsilon$,

$$D(\tilde{P}_1(\alpha, t), \dots, \tilde{P}_k(\alpha, t), \tilde{Q}_{k+1}(\alpha, t), \dots, \tilde{Q}_n(\alpha, t))/D\alpha$$

ne s'annule pas. Comme l'opérateur canonique peut être décomposé en une somme finie d'expressions de la forme (3.37), nous obtenons le théorème 4.1 pour $t \leqslant \varepsilon$. Tous ces raisonnements peuvent, il va de soi, être étendus à un instant initial arbitraire t_0. Les solutions $Q(\alpha, t), P(\alpha, t)$ du problème (2.4)-(2.5), ch. 4, donnent une application $\mathcal{U}_{0,t}$ de la sous-variété Γ_0 sur la sous-variété Γ_t.

Appliquons à $\mathcal{U}_{0,t}$ la construction décrite au début de la démonstration du théorème 2.2 (cf. sec. 3 § 2), et subdivisons le segment $[0, T]$ en intervalles $t = 0, t_1, t_2, \dots, T$. Nous conserverons les notations qui ont été introduites : $\mathcal{H}_t^0 = \mathcal{U}_{0,t}\mathcal{H}^0$ pour $t \leqslant t_1$, $\mathcal{H}_t^i = \mathcal{U}_{t_i,t}\mathcal{H}_{t_i}^i$ pour $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Supposons que pour $t = 0$, une solution de l'équation (2.11) ch. 4 satisfasse la condition (2.11*a*) ch. 4. Selon ce qui a été démontré, pour $t \leqslant t_1$, cette solution peut être représentée sous la forme (2.12) du ch. 4, où $\alpha_t^0 = \alpha^0$, $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$, $\mathcal{H}[\Gamma_t] = \mathcal{H}_t^0$. Ainsi

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{H}_t^0] \sum_{v=1}^{r} \varphi_v \chi^v$$

Notons que d'après les conditions du théorème 4.1*a*, une solution de l'équation (2.11) vérifiant une condition initiale équivalente à 0, est équivalente à 0.

Imposons à nouveau à la solution de l'équation (2.11) pour $t = t_1$, une condition initiale de la forme

$$\psi(x, t_1) = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{H}_t^0] \sum_{v=1}^{r} \varphi_v \chi^v \tag{3.1}$$

D'après l'unicité de la solution (cf. les conditions du théorème 4.1) on obtient pour $t \geqslant t_1$ la solution $\psi(x, t)$ du problème (2.11)-(2.11*a*).

En passant pour l'expression de la condition initiale (3.1) à l'atlas $\mathcal{H}_{t_1}^1$, on obtient, à des fonctions équivalentes à 0 près,

$$\psi(x, t\ ) = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\tilde{\gamma}, \alpha^0}[\mathcal{H}_{t_1}^1] \sum_{v=1}^{r} \varphi_v \chi^v$$

où α_1^0 est le point initial de $\mathcal{H}_{t_1}^1$ et où

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{h} \int_{l[\alpha^0, \alpha_1^0]} p\, dq + \gamma - \frac{r}{2} \operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_1^0]$$

on l'a remarqué, la solution de l'équation, pour $t \geqslant t_1$, n'est modifiée qu'à des fonctions équivalentes à 0 près. On obtient ainsi

$$\psi(x, t) = K_{1/h, \Gamma_t, h}^{\gamma, \alpha^0}[\mathcal{H}_t^1] \sum_{v=1}^{r} \varphi_v \chi^v \quad \text{pour } t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

En itérant ce processus, on arrive à la démonstration du théorème 4.1*a*.

2. **Démonstration du théorème 4.4**

En conservant les notations introduites lors de la démonstration du théorème 4.1, considérons

$$K^{\tilde{\gamma}_t,\,\alpha_t^0}_{1/h,\,\Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha,t)\,\chi^\nu(\alpha)$$

pour $t \leqslant t_1$, où

$$\alpha_t^0 = \mathscr{U}_{0,t}^{-1}\alpha^0, \qquad \tilde{\gamma}_t = \int_{l[\alpha^0,\,\alpha_t^0]} (p\,\mathrm{d}q - H\,\mathrm{d}t), \quad \varphi_\nu(\alpha,t) = \xi_\nu(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\mu t}$$

$\mu = \mu(E^j)$. D'après (3.25), ch. 6, on a pour $N = 1, i = 0$ (cf. également la remarque en début de paragraphe) comme $\operatorname{Ind} l[\alpha^0, \alpha_t^0] = 0$ par construction

$$\left(-\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial t} + \hat{L}\right) K^{\tilde{\gamma}_t,\,\alpha_t^0}_{1/h,\,\Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha,t)\,\chi^\nu(\alpha) = h^2 Z(x,t,h),$$

où $Z(x,t,h) \in L_2(B^1, C_2)$, l'espace des fonctions continues en t et h, de carré intégrables en $x, \in R_h$ et à valeurs dans B^1. Dans ce qui suit, nous désignerons les fonctions de $L_2(B^1, C_2)$ par les lettres $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ Il est évident que

$$K^{\tilde{\gamma}_t,\,\alpha_t^0}_{1/h,\,\Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] = \mathrm{e}^{-iE^j t/h} K^{0,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t^0]$$

puisque

$$\Gamma_t(E^j) = \Gamma(E^j), \qquad H = E^j$$

et que le point α_t^0 sur la variété $\Gamma_t(E^j)$ coïncide avec le point α^0 sur la variété Γ dans l'espace euclidien ambiant et, par conséquent,

$$\tilde{\gamma}_t = -\int_{l[\alpha^0,\,\alpha_t^0]} H\,\mathrm{d}t = -E^j t$$

Comme les conditions du théorème 2.3 sont remplies en vertu de (4.1), ch. 4, on peut appliquer le lemme 7.5, ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{0,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] = hZ_1(x,t,h).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial t} & K^{\gamma_t,\,\alpha_t^0}_{1/h,\,\Gamma_t(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \varphi_\nu(\alpha,t)\,\chi^\nu(\alpha) \\
&= -\mathrm{i}h\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathrm{e}^{-iE^j t/h} K^{0,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha)\,\mathrm{e}^{i\mu t}\right\} \\
&= (-E^j + h\mu)\ \mathrm{e}^{i(\mu - E^j/h)t} K^{0,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)}[\mathscr{H}_t^0] \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha) \\
&= h^2 Z_2\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$[\hat{L} - E^j + h\mu]\, K^{0,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)}[\mathscr{H}^0_t] \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha) = h^2 Z_3 \qquad (3.2)$$

et de plus, ou $E^j - h\mu(E^j)$ est un point du spectre de l'opérateur $\hat{L}$, ou

$$\left\| K^{0,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)}[\mathscr{H}^0_t] \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha) \right\|_{L^2} = h^2 \| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} Z_3 \|_{L^2}$$

$$\leqslant h^2 \| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} \|_{L^2} \cdot \| Z_3 \|$$

$\| \quad \|_{L^2}$ étant la norme dans $L_2[B^1]$. Comme

$$\| [\hat{L} - E^j + h\mu]^{-1} \|_{L^2} \leqslant \frac{1}{d},$$

où d est la distance du point $E^j - h\mu$ au spectre de l'opérateur $\hat{L}$, nous obtenons de là que $d \leqslant O(h^2)$.

c.q.f.d.

Remarquons que les relations (3.2) conduisent également, avec l'aide du lemme 2.4, Partie I de la théorie des perturbations, à l'asymptotique de la fonction spectrale $E_{\Delta\lambda}$ associée à l'intervalle $\Delta(\lambda) \sim O(h)$ de l'opérateur $\hat{L}$, ou, de manière plus précise,

$$\left\| [1 - E_{\Delta\lambda}]\, K^{\gamma,\,\alpha^0}_{1/h,\,\Gamma(E^j)} \sum_{\nu=1}^{r} \xi_\nu(\alpha)\,\chi^\nu(\alpha) \right\|_{L_2[B^1]} = O(h) \qquad (3.3)$$

avec

$$\Delta\lambda = \{ \lambda_j - O(h), \lambda_j + O(h) \}.$$

Le théorème est démontré.

3. Du théorème 4.4 résulte directement les théorèmes 3.1, 3.6 et 3.6*a*. Des théorèmes 4.1, 4.1*a*, 4.2, en tenant compte des théorèmes 5.2*a*, 5.3, 5.5*a*, 5.6*a*, résultent les théorèmes 3.3 et 3.4 (ce dernier pour les équations 3 et 4 du tableau 2).

Il est évident que pour un système hyperbolique, la condition 1), § 2, ch. 4, est vérifiée si comme espace B^∞ on prend un espace de dimension finie. On sait que les hypothèses des théorèmes 3.4 (pour les équations 1 et 2 du tableau 2), 3.5 et 4.3 entraînent la condition 2) § 2, ch. 4 (cf. [25], [49], [38], [59, 1), 2)]). A partir du lemme 2 du supplément et des hypothèses des théorèmes 3.4, 3.6 et 4.3, on déduit l'existence, à un instant quelconque t, de la solution du problème de Cauchy pour les équations bicaractéristiques correspondantes.

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 4.2 sont vérifiées si celles des théorèmes 3.4, 3.5 et 4.3 le sont.

CHAPITRE 8

FORMULES QUASI-CLASSIQUES POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE AVEC DES COEFFICIENTS $[n/2]+4$ FOIS DIFFÉRENTIABLES

Le problème de l'asymptotique quasi-classique « globale », c'est-à-dire du cas où les trajectoires d'un pinceau se recoupent, est très complexe, et même dans la littérature physique, il n'y a aucune méthode pour la résolution de ce problème. Le problème analogue en optique n'a été étudié dans la littérature physique que dans des cas particuliers (sur le passage d'une onde à travers une caustique – cf. par exemple dans le livre de Landau-Lifschitz « Théorie du champ »). Par analogie avec l'optique, on peut conclure *a priori* que si les trajectoires se coupent, et si en un point x à l'instant t, il arrive k trajectoires, alors il correspond à cette situation k ondes différentes qui interfèrent au point x. Cette interférence dépend essentiellement du facteur de la forme $\exp[-i(\pi/2)\gamma_j]$ qui figure dans l'onde (j). Pour ce genre de raisonnements voir [27]. Il y est aussi montré que par des considérations *a priori*, on ne peut deviner les quantités γ_j. Dans le cas de l'optique du vide avec des miroirs réfléchissants, la grandeur γ_j dépend du nombre de réflexions qu'a subies la j-ième trajectoire. Nous avons vu que pour l'asymptotique des solutions des équations de la mécanique quantique le rôle de ces miroirs réfléchissants est joué par l'enveloppe de la famille (pinceau) de trajectoires des particules classiques. Dans ce cas, comme on l'a indiqué au chapitre 2, la grandeur γ_j est égale à ce qu'on appelle l'indice de Morse de la j-ième trajectoire.

Cet indice a été introduit par Morse pour l'étude du problème variationnel d'une fonctionnelle et est défini comme le nombre de valeurs propres négatives de la variation seconde de cette fonctionnelle [53]. La théorie de Morse a joué un rôle essentiel dans le développement de la topologie des variétés différentiables ([52]) et dans l'étude du problème concernant le nombre de géodésiques joignant deux points (calcul global des variations) ([31]). Nous voyons ici que l'indice de Morse a un sens physique concret. Ce fait est un nouveau succès de la théorie de Morse.

Au chapitre précédent, nous avons déjà obtenu la valeur de γ_j mais il n'est pas encore démontré qu'elle coïncide avec l'indice de Morse. En outre, nous avons exigé que les coefficients de l'équation soient indéfiniment différentiables. Une différentiabilité élevée des coefficients est le fait essentiel qui permette d'obtenir le premier terme de l'asymptotique quasi-classique à l'aide de la méthode donnée plus haut. Mais établir la différentiabilité minimale des coefficients pour laquelle γ_j est égal à l'indice de Morse est une question de principe. On vérifie facilement — sur des exemples concrets à une dimension, que pour des coefficients discontinus la grandeur γ_j est distincte de l'indice de Morse.

Nous allons donner dans ce chapitre une déduction des formules de l'asymptotique qui est essentiellement différente de celle donnée au chapitre précédent. Les restrictions sur la différentiabilité des coefficients de l'équation dépend dans cette nouvelle démonstration de la différentiabilité des fonctions qui entrent dans une intégrale de la forme :

$$I(h) = \int \varphi(x, y)\, \mathrm{e}^{i\mathscr{F}(x, y)/h}\, \mathrm{d}x .$$

Elle doit être suffisante pour que la proposition suivante soit valable : « si l'équation $\mathrm{d}\mathscr{F} = 0$ a une solution unique $x = x_0$ et si la forme $\mathrm{d}^2\mathscr{F}$ est non-dégénérée pour $x = x_0$ et a un indice d'inertie γ, alors on a la relation

$$\int \varphi(x, y)\, \mathrm{e}^{i\mathscr{F}(x, y)/h}\, \mathrm{d}x = (2\pi\, \mathrm{i}h)^{n/2}\, |D|^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-i\pi\gamma/2}\, \mathrm{e}^{i\mathscr{F}(x_0)}\, \varphi(x_0) + z_h(y)$$

où $z_h(y)$ converge fortement vers 0 dans L_2 pour $h \to 0$ et D est le discriminant de la forme $\mathrm{d}^2\mathscr{F}$ au point x_0 ».

Dans la méthode donnée au chapitre précédent les restrictions sur la différentiabilité des coefficients des équations dépendent du degré de différentiabilité des fonctions $\varphi(x, y)$ et $\mathscr{F}(x, y)$, degré qui est suffisant pour obtenir le second terme de l'asymptotique. Apparemment, la proposition entre guillemets démontrée dans le chapitre 6, peut être améliorée. On peut probablement exiger que les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\mathscr{F}(x, y)$ appartiennent respectivement à l'espace $W_2^{[n/2]}$ (au lieu de $C^{[n/2]+1}$) et $W^{[n/2]+3}$ (au lieu de $C^{[n/2]+4}$). Cette amélioration du théorème sur la méthode de la phase stationnaire entraîne immédiatement une amélioration des théorèmes qui seront démontrés dans ce chapitre.

La démonstration des théorèmes pourrait être généralisée au cas des équations ondulatoires de l'optique, et même, sous l'hypothèse d'une différentiabilité infinie des coefficients, elle pourrait être modifiée de façon à ce que toutes les estimations asymptotiques aient lieu dans C^∞. Nous donnerons la démonstration pour l'équation 2.1, ch. 3, avec des coefficients prenant les valeurs des lignes 1 et 4 du tableau 2 (c'est-à-dire les équations de Klein-Gordon-Fock et de Dirac). Nous appellerons ces équations, pour simplifier, équations de Dirac.

§ 1 MÉTHODE DES PAS LE LONG DES TRAJECTOIRES POUR L'OBTENTION DE L'ASYMPTOTIQUE GLOBALE

Nous considérerons, pour être précis, l'asymptotique de la solution du problème de Cauchy pour l'équation de Dirac. Comme nous l'avons vu, cette solution peut s'écrire

$$u(x,t,h) = \tilde{Q}_m^{-1}\{y_1, y_2, 0\}.$$

L'opérateur $\tilde{Q}_m$ et les fonctions

$$y_1 = y_1(x,h), \qquad y_2 = y_2(x,h)$$

sont définis dans § 3 ch. 5. Supposons que

$$y_1 = u(x,0,h) = \varphi(x) \exp i/h f(x)$$

où $\varphi(x)$ est à support compact, et $f(x), \varphi(x) \in C^2$. Considérons le système des $1/h$-bicaractéristiques de l'équation de Dirac. Elles s'écrivent :

$$\dot{p}_i^{\pm} = -\frac{\partial H^{\pm}}{\partial x_i^{\pm}}, \qquad \dot{x}_i^{\pm} = \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{S}^{\pm} = -H^{\pm} + \sum_i p_i^{\pm} \frac{\partial H^{\pm}}{\partial p_i^{\pm}} \tag{1.1}$$

$$H^{\pm} = H^{\pm}(x,p,t) = e\Phi(x,t) \mp c\sqrt{\left(p - \frac{e}{c}\mathscr{A}(x,t)\right)^2 + m^2c^2} \tag{1.2}$$

Désignons par $X^{\pm}(x_0,t), P^{\pm}(x_0,t), S_{\pm}(x_0,t)$ les solutions du système (1.1), avec les conditions initiales

$$X^{\pm}(0) = x_0, \qquad P^{\pm}(0) = \operatorname{grad} f(x_0), \qquad S_{\pm}(0) = f(x_0). \tag{1.3}$$

Désignons aussi par $X^{\pm}(x_0; 0, T)$ l'ensemble des $X^{\pm}(x_0,t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$ (trajectoires). Soient $(x_0,t_1), \dots, (x_0,t_k)$ les foyers (*) sur la trajectoire $X^{+}(x_0; 0, T)$. Soit $D_0 = D_0(x_0, \varepsilon_\delta)$ un ε-voisinage du point x_0 tel que, en dehors de δ-voisinages en t des points $(x_0,t_1), \dots, (x_0,t_k)$ il n'y ait pas de foyers pour tout $x_0 \in D_0$ et qu'en chaque point situé hors de ces δ-voisinages

(*) On appelle foyer (point focal) un point où $DX/Dx_0 = 0$. Leur nombre est fini cf. § 2, sec. 1, chap. 8.

il ne passe qu'une seule trajectoire. Soit, en outre, D_t et Ω_t les domaines de valeurs des fonctions $X^+(x_0, t)$ et $P^+(x_0, t)$ pour $x_0 \in D_0, t \in (0, T]$.

Comme on le sait bien (cf. 2 de ce chapitre) il existe un intervalle de temps Δt, déterminé par le maximum du module des dérivées secondes de $H(x_0, p, t)$ dans le domaine $\bigcup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} D_t \times \Omega_t$ tel que les trajectoires issues avec la même impulsion de $\bigcup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} D_t$ qui appartienne à un certain voisinage du domaine $\bigcup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \Omega_t$ ne se recoupent pas pendant l'intervalle Δt. Supposons $\Delta t \leqslant (t_i - t_{i-1})/4$, $i = 1, \ldots, k, t_0 = 0$. Désignons par t_i' un certain point qui soit situé dans l'intervalle $[t_i - \Delta t/2, t_i + \Delta t/4]$, $i = 1, \ldots, k$. Divisons en intervalles le segment $[0, T]$ par les points $0, t_1', t_1 + \Delta t/4, t_2'$, $t_2 + \Delta t/4, \ldots, t_k', t_k + \Delta t/4, T$ (si $t_k = T$, on omet le point $t = t_k + \Delta t/4$).

Posons maintenant $D_{0i} = D_0(x_0, \varepsilon_\delta/i)$, $i = 1, \ldots, k$, $\delta_1 = \min\{\delta, \Delta t/4\}$. Désignons par D_{ti}, Ω_{ti} les domaines de valeurs respectives des fonctions $X^+(x_0, t), P^+(x_0, t)$ pour $x_0 \in D_{0i}$. Par construction, pour $t \leqslant t_1'$ la trajectoire $X^+(x_0; 0, t)$ ne se recoupe pas, c'est-à-dire que l'équation $X^+(x_0, t) = x$ est résoluble de manière unique relativement à x_0

$$x_0 = x_0^+(x, t).$$

Notons

$$S^+(x, t) = S_+(x_0^+(x, t), t).$$

Soit $u^+(x, t, h)$ la solution de l'équation (3.1) du chapitre 5 satisfaisant la condition initiale « positive » (cf. § 4, ch. 5)

$$u^+\Big|_{t=0} = \varphi(x) \exp\left[\frac{i}{h} f(x)\right] \tag{1.4a}$$

$$ih \frac{\partial u^+}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial S^+}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi(x) \exp\left[\frac{i}{h} f(x)\right] \tag{1.4b}$$

$$\frac{\partial S^+}{\partial t}\Big|_{t=0} = -H^+(x, \operatorname{grad} f(x), 0)$$

Supposons que le support de la fonction $\varphi(x)$ est égal à D_{0k}.

Comme $J(x_0, \tau)$ ne s'annule pas pour $0 < \tau \leqslant t_1'$ en utilisant les formules (3.6*c*) et (3.6*d*), ch. 5, nous obtenons que, pour $h \to 0, u^+(x, t_1', h)$ peut s'écrire :

$$u^+(x, t_1', h) = u_0^+(x, t_1', h) + Z(x, t_1', h) \tag{1.5}$$

où

$$u_0^+(x, t_1', h) = \frac{\exp[ih^{-1} S_+(x_0, t_1')] \sigma_+(x_0, t_1')}{\sqrt{J^+(x_0, t_1')}} \varphi(x_0)\Big|_{x_0 = x_0^+(x, t_1')} \tag{1.6}$$

$\sigma_\pm(x_0, t_1')$ sont définis par la formule (3.6*b*) du ch. 5.

$\| Z(x, t'_1, h) \|_{L_2} \xrightarrow{h \to 0} 0$ (dans ce qui suit, une fonction $\xi(x, t, h)$ telle que

$$\| \xi(x, t, h) \|_{L_2} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

sera notée $O(1)$).

Supposons que la fonction $B_{t'_1}(x) \in C^\infty$ ait comme support le domaine $D_{t'_1, k-1}$ et que $B_{t'_1}(x) \equiv 1$ pour $x \in D_{t'_1, k}$. Comme la fonction $u_0^+(x, t'_1, h)$ n'est différente de 0 que dans le domaine $D_{t'_1, k}$, on a l'identité

$$u_0^+(x, t'_1, h) \equiv B_{t'_1}(x) u_0^+(x, t'_1, h) \equiv B_{t'_1}(x) \Phi^{p_n} \Phi^{q_n} u_0^+(q, t'_1, h).$$

Soit $\tilde{u}_0^+(p, t'_1, h)$ la fonction

$$\tilde{u}_0^+(p, t'_1, h) = \Phi^{q_n} u_0^+(q, t'_1, h).$$

Lemme 8.1. *Si* $p \notin \Omega_{t'_1, k}$, *alors* $\tilde{u}_0^+(p, t'_1, h) = O(1)$.

Démonstration. Pour démontrer le lemme, on utilise la méthode de la phase stationnaire. Un point stationnaire $q = q^0$ pour l'intégrale

$$\tilde{u}_0^+(p, t'_1, h) =$$

$$\frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}} \int_{D_{t'_1, k}} \left[J^+(x_0, t'_1)^{-1/2} \sigma_+(x_0, t'_1) \ \varphi(x_0) \exp\left[\frac{i}{h} S_+(x_0, t'_1) \right] \right]_{x_0 = x^+(q, t'_1)} e^{-ipq/h} \, dq$$

vérifie le système d'équations

$$\frac{\partial S_+(x_0^+(q, t'_1), t'_1)}{\partial q_i} = p_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

et appartient de plus au domaine $D_{t'_1, k}$ puisque $\varphi(x_0^+(q, t'_1))$ n'est différente de 0 que pour $q \in D_{t'_1, k}$. Le domaine de valeurs de la fonction

$$\text{grad}_q S_+(x_0^+(q, t'_1), t'_1) = P^+(x_0^+(q, t'_1), t'_1)$$

pour $q \in D_{t'_1, k}$ est égal à $\Omega_{t'_1, k}$.

Par conséquent, d'après l'énoncé du lemme, il n'y a pas dans le domaine d'intégration de points stationnaires $q = q^0$ pour la fonction $S_+(x_0, t'_1) - pq$. Le lemme 8.1 résulte alors du lemme 6.7. D'où du lemme 8.1 :

$$u_0^+(x, t'_1, h) \equiv B_{t'_1}(x) \Phi^{p_n} \mathscr{F}_{t'_1}(p) \tilde{u}_0^+(p, t'_1, h) + B_{t'_1}(x) O(1) \qquad (1.7)$$

où la fonction

$$\mathscr{F}_{t'_1}(p) \in C^\infty, \qquad D[\mathscr{F}_{t'_1}(p)] = \Omega_{t'_1, k-1}$$

et

$$\mathscr{F}_{t'_1}(\Omega_{t'_1}, k) \equiv 1.$$

De (1.5) et (1.7) résulte donc que

$$u^+(x, t'_1, h) = \frac{1}{(2\pi h)^n} B_{t'_1}(x) \int_{\Omega_{t'_1, k}} \left\{ e^{ipx/h} \mathscr{F}_{t'_1}(p) \right.$$
$$\left. \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} u_0^+ (q, t'_1, h) \, dq \right\} dp + O(1) \quad (1.8)$$

En répétant le même raisonnement pour $\partial u^+/\partial t$, on obtient :

$$ih \frac{\partial u^+}{\partial t}(x, t'_1, h) =$$
$$\frac{ih}{(2\pi h)^n} B_{t'_1}(x) \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} \left\{ e^{ipx/h} \mathscr{F}_{t'_1}(p) \cdot \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} \frac{\partial u_0^+}{\partial t}(q, t'_1, h) \, dq \right\} dp + O(1).$$

Comme

$$ih \frac{\partial u_0^+}{\partial t} = u_0^+ H^+ + O(1),$$

alors

$$ih \frac{\partial u^+}{\partial t'_1} = \frac{1}{(2\pi h)^n} B_{t'_1}(x) \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} \left\{ e^{ipx/h} \mathscr{F}_{t'_1}(p) \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} H^+(q, \nabla_q S^+, t'_1) \right.$$
$$\left. \cdot u_0^+(q, t'_1, h) \, dq \right\} dp + O(1) \quad (1.9)$$

Introduisons les notations

$$\Phi_1(p, t'_1, h) = \frac{\mathscr{F}_{t'_1}(p)}{(2\pi i h)^{n/2}} \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} u_0^+ (q, t'_1, h) \, dq \quad (1.10a)$$

$$\Phi_2(p, t'_1, h) = \frac{1}{(2\pi i h)^{n/2}} \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} H^+ (q, \nabla_q S^+, t'_1) u_0^+(q, t'_1, h) \, dq \quad (1.10b)$$

Soit $u(x, t, h)$ la solution de l'équation de Dirac, vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$u\big|_{t=t'_1} = u^+(x, t'_1, h) = B_{t'_1}(x) \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} e^{ipx/h} \Phi_1 (p, t'_1, h) \, dp + O(1) \quad (1.11a)$$

$$ih \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t'_1} = ih \frac{\partial u^+(x, t'_1, h)}{\partial t'_1} = B_{t'_1}(x) \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} e^{ipx/h} \Phi_2(p, t'_1, h) \, dp + O(1) \quad (1.11b)$$

En vertu de la définition de l'opérateur $\tilde{Q}_m$ et de l'existence de $\tilde{Q}_m^{-1}$, la solution $u^+(x, t, h)$ pour $t'_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t/4$ peut s'écrire :

$$u^+(x, t, h) = \tilde{Q}_m^{-1} \left\{ u^+(x, t'_1, h), ih \frac{\partial u^+(x, t'_1, h)}{\partial t}, 0 \right\}$$
$$= \tilde{Q}_m^{-1} \left[(2\pi i h)^{-n/2} \int B_{t'_1}(x) e^{ipx/h} \{ \Phi_1, \Phi_2, 0 \} \, dp \right] + O(1),$$

puisque

$$\tilde{Q}_m^{-1}\{O(1), O(1), 0\} = O(1).$$

Faisant passer $\tilde{Q}_m^{-1}$ sous le signe somme, on obtient :

$$u^+(x, t_1 + \Delta t/4, h) = (-2\pi h i)^{-n/2} \int_{\Omega_{t'_1} \quad k-1} u(x, p, t'_1, t_1 + \Delta t/4, h)\,\mathrm{d}p + O(1) \quad (1.12)$$

où

$$u(x, p, t'_1, t_1 + \Delta t/4, h)$$

est la solution de l'équation de Dirac, au temps $t = t_1 + \Delta t/4$, satisfaisant pour $t = t'_1$, les conditions

$$u\big|_{t=t'_1} = B_{t'_1}(x)\,\mathrm{e}^{ipx/h}\Phi_1\,(p, t'_1, h) \quad (1.13a)$$

$$\mathrm{i}h\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t'_1} = \mathrm{e}^{ipx/h}B_{t'_1}(x)\,\Phi_2\,(p, t'_1, h) \quad (1.13b)$$

Notons

$$\varphi_1 = B_{t'_1}(x)\,\Phi_1(p, t'_1, h), \qquad \varphi_2 = B_{t'_1}(x)\,\Phi_2(p, t'_1, h).$$

Soient

$$x^\pm(t) = \tilde{X}^\pm(x_0, t), \qquad p^\pm(t) = \tilde{P}^\pm(x_0, t), \qquad s^\pm(t) = \tilde{S}_\pm(x_0, t)$$

les solutions du système (1.1) pour $t'_1 < t \leqslant t_1 + \Delta t/4$ vérifiant, pour $t = t'_1$, les conditions suivantes

$$x^\pm(t'_1) = x_0, \qquad p^\pm(t'_1) = p, \qquad s^\pm(t'_1) = px_0. \quad (1.14)$$

En vertu de (1.14) et du choix de Δt et de t'_1, chacun des déterminants

$$\tilde{J}^\pm(x_0, t) = \det \| \partial\tilde{X}^\pm(x_0, t)/\partial x_0 \|$$

est strictement positif pour $t \in [t'_1, t_1 + \Delta t/4]$. En vertu du choix de Δt pour $t'_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t/4$ les trajectoires $\tilde{X}^\pm(x_0, t)$ ne se recoupent pas, c'est-à-dire que pour chacune des équations

$$\tilde{X}^\pm(x_0, t) = x$$

est univoquement résoluble relativement à $x_0 : x_0 = \tilde{x}_0^\pm(x, t)$.

Posons $\tilde{S}^\pm(x, t) = \tilde{S}_\pm(\tilde{x}_0(x, t), t)$.

Représentons chacune des conditions (1.13*a*) et (1.13*b*) sous la forme d'une somme de conditions « positive » et « négative » (cf. § 4, ch. 5), c'est-à-dire

$$\varphi_1 = \varphi^+(x, h) + \varphi^-(x, h) \quad (1.15)$$

$$\varphi_2 = H^+\varphi^+(x, h) + H^-\varphi^-(x, h) \quad H^\pm = H^\pm(x, p, t'_1).$$

On a donc, d'après (1.13*a*), (1.13*b*) et (1.15),

$$u(x, p, t'_1, t, h) = \tilde{u}^+(x, p, t, h) + \tilde{u}^-(x, p, t, h) \quad (1.16)$$

pour $t'_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t/4$, où $\tilde{u}^{\pm}(x,t,h)$ est une solution de l'équation de Dirac, vérifiant pour $t = t'_1$ les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\pm}\big|_{t=t'_1} &= \varphi^{\pm}\, \mathrm{e}^{ipx/h} \\ \mathrm{i}h \frac{\partial \tilde{u}^{\pm}}{\partial t}\bigg|_{t=t'_1} &= \varphi^{\pm} H^{\pm}\, \mathrm{e}^{ipx/h} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Nous voyons que les conditions (1.17) sont des cas particuliers des conditions initiales considérées au § 4 ch. 5; ici $f(x) = px$. A cause du choix de Δt, la fonction $\tilde{J}^{\pm}(x_0,t)$ est strictement positive pour $t'_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t/4$, donc en utilisant les résultats du § 3, ch. 5, on obtient que, pour $h \to 0$, la fonction $\tilde{u}^{\pm}(x,p,t,h)$ peut s'écrire :

$$\tilde{u}^{\pm}(x,p,t_1 + \Delta t/4, h) = \tilde{u}_0^{\pm}(x,p,t_1 + \Delta t/4, h) + O(1) \tag{1.18}$$

où

$$\tilde{u}_0^{\pm}(x,p,t_1 + \Delta t/4, h) =$$

$$\frac{\exp\left[\mathrm{i}h^{-1}\tilde{S}_{\pm}\left(\tilde{x}_0^{\pm}, t_1 + \dfrac{\Delta t}{4}\right)\right]}{\sqrt{\tilde{J}^{\pm}(\tilde{x}_0^{\pm}, t_1 + \Delta t/4)}}\, \tilde{\sigma}_{\pm}(\tilde{x}_0^{\pm}, t_1 + \Delta t/4)\, \varphi^{\pm}(\tilde{x}_0^{\pm}, h) \tag{1.19}$$

où les $\tilde{\sigma}_{\pm}(x_0, t_1 + \Delta t/4)$ sont les $\sigma_{\pm}(x_0,t)$ dans lesquels on a respectivement remplacé $X^{\pm}(x_0,t)$ par $\tilde{X}^{\pm}(x_0,t)$ et où

$$\tilde{x}_0^{\pm} = \tilde{x}_0^{\pm}(x,p,t_1 + \Delta t/4)$$

sont les solutions de

$$\tilde{X}^{\pm}(x_0,t) = x.$$

De (1.12), (1.16) et (1.18) il résulte que la solution $u^{\pm}(x,t_1 + \Delta t/4, h)$ vérifiant les conditions initiales (1.11*a*) et (1.11*b*) peut, pour $h \to 0$, se représenter sous la forme :

$$\begin{aligned} u^{+}(x,t_1 + \Delta t/4, h) = (-2\pi \mathrm{i}h)^{n/2} \int_{\Omega_{t'_1\, k-1}} & [\tilde{u}_0^{+}(x,t_1 + \Delta t/4, h) \\ & + \tilde{u}_0^{-}(x,t_1 + \Delta t/4, h)]\, \mathrm{d}p + O(1) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Rappelons qu'en vertu du choix des conditions initiales (1.14)

$$\tilde{u}_0^{\pm}(x,t_1 + \Delta t/4, h)$$

est aussi une fonction de p et t'_1. Multiplions la formule obtenue par une fonction non négative $\varphi(t'_1) \in C^{\infty}$ égale à 0 en dehors de l'intervalle $(t_1 - \Delta t/2, t_1 - \Delta t/4)$, telle que

$$\int_{t_1 - \Delta t/2}^{t_1 - \Delta t/4} \varphi(t'_1)\, \mathrm{d}t'_1 = 1$$

et intégrons en t'_1 les deux membres de l'égalité (1.20) :

$$t_1 - \Delta t/2 \leqslant t'_1 \leqslant t_1 - \Delta t/4.$$

Comme $u^+(x, t_1 + \Delta t/4, h)$ ne dépend pas de t'_1, on obtient

$$u^+(x, t_1 + \Delta t/4, h) = (-2\pi i h)^{-n/2} \int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4} \varphi(t'_1) \left\{ \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} [\tilde{u}_0^+(x, t_1 + \Delta t/4, h) + \tilde{u}_0^-(x, t_1 + \Delta t/4, h)] \, dp \, dt'_1 + O(1) \right. \quad (1.21)$$

D'après (1.15) :

$$\varphi^{\pm}(x, h) = \pm \frac{(H^{\mp}\varphi_1 - \varphi_2)}{H^- - H^+} \quad (1.22)$$

où $H^{\pm} = H^{\pm}(x, p, t'_1)$,

$$\varphi_1 = \varphi_1(x, p, t'_1, h) = (2\pi i h)^{-n/2} B_{t'_1}(x) \mathscr{F}_{t'_1}(p) \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} u_0^+(q, t'_1, h) \, dq \quad (1.23)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(x, p, t'_1, h) = (2\pi i h)^{-n/2} B_{t'_1}(x) \mathscr{F}_{t'_1}(p) \int_{D_{t'_1, k}} e^{-ipq/h} \cdot H^+(q, \operatorname{grad}_q S^+(q, t'_1), t'_1) u_0^+(q, t'_1, h) \, dq \quad (1.24)$$

Considérons l'intégrale

$$I^-(x, t_1 + \Delta t/4, h) = (2\pi i h)^{-n/2} \int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4} \varphi(t'_1) \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} \tilde{u}_0^-(x, t_1 + \Delta t/4, h) \, dp \, dt'_1$$

Avec (1.19), (1.22)-(1.24) et (1.6) elle devient

$$I^- = (2\pi h)^{-n} \int_{t_1-\Delta t/2}^{t_1-\Delta t/4} \varphi(t'_1) \int_{\Omega_{t'_1, k-1}} \mathscr{F}_{t'_1}(p) \int_{D_{t'_1, k}} (\tilde{J}^-(\tilde{x}_0^-, t_1 + \Delta t/4))^{-1/2} \tilde{\sigma}_-(\tilde{x}_0^-, t_1 + \Delta t/4)$$

$$\times B_{t'_1}(\tilde{x}_0^-) \exp\left[\frac{i}{h}\tilde{S}^-\left(\tilde{x}_0^-, t_1 + \frac{\Delta t}{4}\right)\right] \cdot \frac{-H^+(q, \operatorname{grad}_q S^+(q, t'_1), t'_1) + H^+(\tilde{x}_0^-, p, t'_1)}{H^-(\tilde{x}_0^-, p, t'_1) - H^+(\tilde{x}_0^-, p, t'_1)}$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{h} S_+(x_0^+, t'_1)\right] (J(x_0^+, t'_1))^{-1/2} \sigma_+(x_0^+, t'_1) \varphi(x_0^+) \Bigg|_{\substack{x_0^+ = x_0^+(q, t'_1) \\ \tilde{x}_0^- = \tilde{x}_0^-(x, t_1 + \Delta t/4)}} e^{-ipq/h} \, dp \, dq \, dt'_1 \quad (1.25)$$

Pour le calcul de I^-, appliquons la méthode de la phase stationnaire. Les points stationnaires $q = q^0, p = p^0, t'_1 = \tilde{t}$ satisfont le système

$$\operatorname{grad}_q S_+(x_0^+(q, t'_1), t'_1) = p, \qquad \operatorname{grad}_p \tilde{S}^-(\tilde{x}_0^-, t_1 + \Delta t/4) = q \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}^-(x, t_1 + \Delta t/4)}{\partial t'_1} = -\frac{\partial S^+(q, t'_1)}{\partial t'_1} \quad (1.27)$$

D'après la définition de $\tilde{S}^-(x, t_1 + \Delta t/4)$ et $S^+(q, t_1')$, on a

$$\frac{\partial S^+(q,t_1')}{\partial t_1'} = - H^+(q, \mathrm{grad}_q S^+(q,t_1'),t_1')$$
$$\tag{1.28}$$
$$\frac{\partial \tilde{S}^-(x,t_1 + \Delta t/4)}{\partial t_1'} = H^-(\tilde{x}_0, p, t_1').$$

De (1.26)-(1.28) résulte que

$$H^-(\tilde{x}_0, p, t_1') = H^+(\tilde{x}_0, p, t_1').$$

Mais cette égalité contredit le fait que les racines de l'équation caractéristique (cf. § 3, ch. 5) sont essentiellement distinctes : $H^+(x,p,t)$ ne coïncide avec $H^-(x,p,t)$ en aucun point (x,p,t) et l'égalité (1.27) n'a pas lieu. Par conséquent, il n'y a pas dans le domaine d'intégration de point stationnaire $q = q^0, p = p^0, t_1' = \tilde{t}$ de la fonction

$$S_+(x_0^+(q,t_1'),t_1') + \tilde{S}^-(\tilde{x}_0^-, t_1 + \Delta t/4) - pq.$$

Appliquant le lemme 6.7 on obtient donc

$$\tilde{I}^-(x, t_1 + \Delta t/4, h) = O(1).$$

Considérons maintenant la fonction $I^+(x, t_1 + \Delta t/4, h)$ donnée par

$$I^+(x, t_1 + \Delta t/4, h) = (2\pi \mathrm{i} h)^{-n/2} \int_{t_1 - \Delta t/2}^{t_1 - \Delta t/4} \varphi(t_1') \int_{\Omega_{t_1', k-1}} \tilde{u}_0^+(x, t_1 + \Delta t/4, h)\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}t_1'$$

Avec (1.19), (1.22)-(1.24), (1.6), elle devient

$$I^+ = \int_{t_1 - \Delta t/2}^{t_1 - \Delta t/4} \varphi(t_1') \tilde{I}^+(t_1')\, \mathrm{d}t_1' \tag{1.29}$$

où

$$\tilde{I}^+ = (2\pi h)^{-n} \int_{\Omega_{t_1', k-1}} \mathscr{F}_{t_1'}(p)$$
$$\int_{D_{t_1', k}} (\tilde{J}^+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4))^{-1/2} \tilde{\sigma}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4) B_{t_1'}(\tilde{x}_0^+)$$
$$\times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h} \tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4)\right] \left[\frac{H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1') - H^+(q, \mathrm{grad}_q S^+(q,t_1'), t_1')}{H^-(\tilde{x}_0^+, p, t_1') - H^+(\tilde{x}_0^+, p, t_1')}\right]$$
$$\times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h} S_+(x_0^+, t_1')\right] \sigma_+(x_0^+, t_1')(J^+(x_0^+, t_1'))^{-1/2} \varphi(x_0^+) \Big|_{\substack{x_0^+ = x_0^+(q, t_1') \\ \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4)}}$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq/h}\, \mathrm{d}p\, \mathrm{d}q \tag{1.30}$$

Pour le calcul de $\tilde{I}^+$, on applique la méthode de la phase stationnaire. Le système d'équations pour la détermination des points stationnaires de l'intégrale (1.30) s'écrit :

$$\operatorname{grad}_q S_+(x_0^+(q, t_1'), t_1') = p, \qquad \operatorname{grad}_p \tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4) = q \tag{1.31}$$

Soit $q = q^0, p = p^0$ un point stationnaire. Posons

$$q^0 = X^+(\bar{x}_0, t_1'), \qquad p^0 = P^+(\bar{x}_0, t_1'),$$

$$x = X^+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4), \qquad \bar{x}_0 \in D_{0k}.$$

Alors

$$x_0^+(q^0, t_1') = x_0^+(X^+(\bar{x}_0, t_1'), t_1') \equiv \bar{x}_0.$$

Des définitions de $S_+(x_0^+(q, t_1'), t_1')$ et $\tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4)$ résulte que :

$$\operatorname{grad}_q S_+(x_0^+(q, t_1'), t_1') = P^+(x_0^+(q, t_1'), t_1'),$$

$$\operatorname{grad}_p \tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4) = \tilde{X}^+(\tilde{x}_0^+, t_1') = \tilde{x}_0^+.$$

Comme $p^0 = P^+(\bar{x}_0, t_1')$, alors $\tilde{x}_0^+ = X^+(\bar{x}_0, t_1')$ et le système (1.31) est vérifié identiquement. Par conséquent

$$\tilde{X}^+(\bar{x}_0, t) = X^+(\bar{x}_0, t) \qquad \text{pour} \quad t_1' \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t/4).$$

D'où

$$x_0^+(q^0, t_1') = \bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4),$$

où $\bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4)$ est la solution de l'équation

$$X^+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4) = x.$$

Par conséquent,

$$q_0 = X^+(\bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4), t_1')$$

$$p^0 = P^+(\bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4), t_1'), \qquad \tilde{X}^+(\tilde{x}_0, t) = X^+(\bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4), t)$$

$$t_1' \leqslant t \leqslant t_1 + \Delta t/4. \tag{1.32}$$

A partir de (1.32) et comme le point $(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4)$ n'est pas un foyer, on voit que pour un domaine assez petit D_{0k}, le point stationnaire q^0, p^0 est unique. Sinon, deux trajectoires « voisines » arriveraient au point x à l'instant $t = t_1 + \Delta t/4$, c'est-à-dire le point $(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4)$ serait un foyer. Il est évident que (cf. par exemple [51,1])

$$S^+(x, q, t_1', t_1 + \Delta t/4) = \tilde{S}^+(x, t_1 + \Delta t/4) - pq$$

où

$$p = p(x, q, t_1', t_1 + \Delta t/4)$$

est la solution de l'équation

$$\operatorname{grad}_p \tilde{S}_+(\tilde{x}_0, t_1 + \Delta t/4) = q.$$

Il s'ensuit que

$$S_+(x_0^+(q^0, t_1'), t_1') - p^0 q^0 + \tilde{S}_+(q^0, t_1 + \Delta t/4) = S_+(\bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4), t_1 + \Delta t/4)$$

Par la méthode de la phase stationnaire, on a :

$$\tilde{I}^+ = e^{i\pi\delta/4}\left|\det\begin{Vmatrix} A & -E \\ -E & B\end{Vmatrix}\right|^{-1/2} (\tilde{J}^+(q^0, t_1 + \Delta t/4))^{-1/2}$$

$$\tilde{\sigma}_+(q^0, t_1 + \Delta t/4)\varphi(\bar{x}_0)\ \sigma_+(\bar{x}_0, t_1')(J^+(\bar{x}_0, t_1'))^{-1/2}$$

$$\exp\left[\frac{i}{h}S_+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4)\right]\Bigg|_{\substack{q^0 = X^+(\bar{x}_0\,,\,t_1') \\ \bar{x}_0 = \bar{x}_0(x\,,\,t_1\,,\,\Delta t/4)}} + O(1) \quad (1.33)$$

où δ est la signature de la forme quadratique associée à la matrice

$$C = \begin{Vmatrix} A & -E \\ -E & B\end{Vmatrix}$$

et où

$$A = \left\|\frac{\partial^2 S_+(x_0^+(q, t_1'), t_1')}{\partial q_i \partial q_j}\right\|_{q = X^+(\bar{x}_0\,,\,t_1')}$$

$$E = \|\delta_{ij}\| \quad (1.34)$$

$$B = \left\|\frac{\partial^2 \tilde{S}_+(\tilde{x}_0^+, t_1 + \Delta t/4)}{\partial p_i \partial p_j}\right\|_{\substack{\tilde{x}_0^+ = X_0^+(\bar{x}_0\,,\,t_1') \\ p = P_+(\bar{x}_0\,,\,t_1')}} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j\end{cases}$$

En vertu de la définition de $\sigma_+(x_0, t)$ et $\tilde{\sigma}_+(\tilde{x}_0, t)$ (cf. § 3, ch. 5) et l'égalité (1.32), on a

$$\sigma_+(\bar{x}_0, t_1') = \sqrt{1 - \frac{[\dot{X}^+(\bar{x}_0, t_1')]^2}{c^2}}\exp\left\{i\int_0^{t_1'} R^+(\bar{x}_0, t)\,dt\right\} \quad (1.35)$$

$$\tilde{\sigma}_+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4) = \sqrt{1 - \frac{[\dot{X}^+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4)]^2}{c^2}}$$

$$\exp\left\{i\int_{t_1'}^{t_1 + \Delta t/4} R^+(\bar{x}_0, t)\,dt\right\} \quad (1.36)$$

De là, en utilisant l'identité (2.34), ch. 8, on obtient

$$\tilde{I}^+ = e^{i\pi\delta/4}(J^+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4))^{-1/2}\varphi(\bar{x}_0)\sqrt{1 - \frac{[\dot{X}(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4)]^2}{c^2}}$$

$$\times \exp\left\{i\int_0^{t_1 + \Delta t/4} R^+(\bar{x}_0, t)\,dt + \frac{1}{h}S_+\left(\bar{x}_0, t_1 + \frac{\Delta t}{4}\right)\right\} + O(1) \quad (1.37)$$

A cause du choix de Δt et t'_1 la signature de la forme quadratique associée à la matrice C ne dépend pas de t'_1. Il résulte donc de (1.29) et (1.21) que :

$$u(x, t_1 + \Delta t/4, h) = \frac{e^{i\pi\delta/4} \exp\{ih^{-1}S_+(\tilde{x}_0, t_1 + \Delta t/4)\}}{\sqrt{J^+\left(\bar{x}_0, t_1 + \frac{\Delta t}{4}\right)}} \sigma_+(\bar{x}_0, t_1 + \Delta t/4)\varphi(\bar{x}_0) + O(1)$$

$$\tilde{x}_0 = \bar{x}_0(x, t_1 + \Delta t/4). \tag{1.38}$$

Nous montrerons au paragraphe suivant que δ est égal à la multiplicité du zéro du jacobien J au point focal $t = t_1$.

Revenons à nouveau, en utilisant la formule (1.38), aux conditions initiales pour l'équation de Dirac au point $t = t_1 + \Delta t/4$. Puisque dans un intervalle $[t_1 + \Delta t/4, t'_2]$ il n'y a pas de points focaux, on peut appliquer les formules asymptotiques du chapitre 5. On obtient alors la formule (1.38), où $t_1 + \Delta t/4$ est changé en t'_2. Partant de l'asymptotique obtenue, posons les conditions initiales pour l'équation de Dirac au point t'_2 et déterminons l'asymptotique de la solution au point $t_2 + \Delta t/4$ par la méthode décrite plus haut. En prolongeant ce processus par induction, nous parvenons pour les solutions à une formule asymptotique au point final $t = T$ si ce point n'est pas focal.

On obtient évidemment la formule (1.38) où $t_1 + \Delta t/4$ est changé en T et δ égal à l'indice de Morse.

Si le point (x_0, T) est un foyer, la discussion précédente reste valable jusqu'au dernier pas (le point t'_k). L'étape suivante, comme nous l'avons vu, consistait à calculer l'intégrale I^+ (où $t_1 + \Delta t/4$ est changé en T et t'_1 en t'_k) par la méthode de la phase stationnaire.

Lorsque (x_0, T) est un foyer, il faut modifier le raisonnement de la façon suivante :

Soient $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_n$ les coordonnées focales du foyer (x_0, T). Comme $\tilde{I}^+ = u + O(1)$, alors

$$\Phi^{\tilde{x}_k}\tilde{I}^+ = \Phi^{\tilde{x}_k}u + O(1).$$

Supposons d'abord que les coefficients de l'équation de Dirac soient indéfiniment différentiables. Comme on l'a démontré au chapitre 7, l'expression $\Phi^{\tilde{x}_k}u$ a une asymptotique de la forme

$$\mathscr{F}_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}\mathscr{F}_2(\tilde{y}_k, T)\right\}$$

où $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont C^∞ et $\mathscr{F}_1$ à support compact. Ces fonctions sont déterminées dans ce chapitre.

Il s'ensuit (cf. ch. 6, § 2) que le déterminant J de la matrice des dérivées secondes pour la phase de l'expression sous le signe somme dans $\Phi^{\tilde{x}_k}I^+$ est différent de 0 et que la méthode de la phase stationnaire est applicable. Partant de là, on voit facilement, en répétant la discussion faite dans le lemme 7.4, que le jacobien J s'exprime de manière bien définie au moyen de la fonction $\mathscr{F}_1(\tilde{y}_k, T)$. La relation obtenue pour le jacobien s'étend par fermeture au cas où la fonction d'Hamilton est $[n/2] + 4$ fois différentiable. Il en résulte que le jacobien est aussi différent de 0 pour de tels hamiltoniens. Ce qui signifie que la méthode de la phase stationnaire est aussi applicable à l'intégrale $\Phi^{\tilde{x}_k}\tilde{I}^+$ lorsque les coefficients de l'équation de Dirac sont $([n/2] + 4)$-fois différentiable. Ainsi

$$\Phi^{\tilde{x}_k}\tilde{I}^+ = \mathscr{X}_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}\mathscr{X}_2(\tilde{y}_k, T)\right\} + O(1),$$

où $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$ sont certaines fonctions, indépendantes de h. Pour un hamiltonien C^∞, on a évidemment $\mathscr{X}_1 = \mathscr{F}_1$ et $\mathscr{X}_2 = \mathscr{F}_2$. Par fermeture, ces égalités s'étendent à l'hamiltonien $([n/2] + 4)$-fois différentiable. Il en résulte que si les coefficients de l'équation de Dirac sont $([n/2] + 4)$-fois différentiables en un point focal (x_0, T) la solution du problème (3.1), ch. 5, (1.4*a*)-(1.4*b*) s'écrit :

$$u = \Phi^{\tilde{p}_k}\mathscr{F}_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}\mathscr{F}_2(\tilde{y}_k, T)\right\} + O(1)$$

c'est-à-dire que dans ce cas le premier terme de l'asymptotique coïncide avec celui calculé au chapitre 7. Il en résulte, par renversement du temps pour le problème de Cauchy que si on se donne (pour $t = T$) une condition initiale de la forme

$$\Phi^{\tilde{p}_k}\mathscr{F}_1(\tilde{y}_k, T)\exp\left\{\frac{i}{h}\mathscr{F}_2(\tilde{y}_k, T)\right\}$$

l'asymptotique au temps $t = 0$, est de la forme (1.4*a*)-(1.4*b*) et, si le point $t = -t^0$ est un foyer de coordonnées focales $\tilde{\tilde{y}}_{k_1} = \tilde{\tilde{p}}_1, \dots, \tilde{\tilde{p}}_{k_1}, \tilde{\tilde{q}}_{k_1+1}, \dots, \tilde{\tilde{q}}_n$ elle est de la forme

$$\Phi^{\tilde{\tilde{p}}_{k_1}}\tilde{\mathscr{F}}_1(\tilde{\tilde{y}}_{k_1}, -t^0)\exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{\mathscr{F}}_2(\tilde{\tilde{y}}_{k_1}, -t_0)\right\}$$

Par conséquent, le premier terme de l'asymptotique donnée dans le théorème (3.4) servira, à $O(1)$ près, d'asymptotique pour la solution de l'équation (2.1), § 2, ch. 3, si les coefficients de cette équation sont $([n/2] + 4)$-fois différentiable. Nous avons donc démontré un théorème (*) du type 3.2-3.3 pour les équations de Klein-Gordon-Fock et Dirac.

Des considérations analogues sont aussi valables pour les équations de Schrödinger et Pauli.

Remarquons que nous n'avons utilisé pour cette démonstration que le fait que les solutions de l'équation de Dirac sont en norme L_2 inférieure à la norme du terme de droite, divisé par h. Évidemment, une telle estimation,

(*) La différence consiste en ce que, pour les équations de Klein-Gordon-Fock et Dirac, il y a deux données initiales.

d'après le lemme 4.1, est aussi valable dans le cas d'une équation quelconque de la forme

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} - A(t)\psi = \mathscr{F}(t)$$

où $A(t)$ est auto-adjoint dans L_2 dépendant continûment du paramètre t.

On sait qu'à toute fonction $H(p,x,t)$ on peut faire correspondre un opérateur auto-adjoint $\hat{H}(\hat{p},x,t)$, par exemple, par la formule :

$$\hat{H}(\hat{p},x,t)\varphi(x)$$
$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int \exp\left(\frac{i}{h}\sum_{i=1}^{n} p_i' x_i\right) \mathrm{d}p' \int \exp\left(-\frac{i}{h}\sum_{i=1}^{n} p_i' x_i'\right) H(p',x',t)\varphi(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Si $H(p,x,t)$ est une fonction suffisamment différentiable de ses arguments, alors, comme pour le lemme 6.13 et le théorème 6.1 on peut, pour le problème

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}(\hat{p},x,t)\psi = 0, \qquad \psi|_{t=0} = \varphi(x)\exp\left[\frac{i}{h}f(x)\right],$$

où $\varphi(x)$ est à support compact, obtenir une asymptotique pour t assez petit avec une estimation en norme L_2. La méthode des pas le long des trajectoires se généralise directement à ce cas et sous la condition d'une différentiabilité suffisante de $H(p,x,t)$, nous obtenons une formule analogue à (1.38) pour un temps arbitraire T, en un point non focal.

Montrons maintenant que la phase δ que nous obtenons par cette méthode coïncide avec l'indice de Morse si la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0 \qquad \text{pour } z \neq 0 \tag{1.39}$$

est définie positive. Dans le chapitre 7, nous avons montré que δ est égal à l'indice de la trajectoire, introduit au chapitre 2, § 2 pour des chemins dans un film R_t. On voit donc d'après ce que nous venons de montrer que, sous la condition (1.39), cet indice coïncide (modulo 4) avec l'indice de Morse.

§ 2 LEMMES AUXILIAIRES SUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS HAMILTONIENNES

1. **Remarques préliminaires**

1. Dans ce paragraphe, nous utiliserons de manière essentielle le théorème suivant dû à Morse.

« Si $H(p,q,t)$ est une fonction suffisamment différentiable et si

$$\sum_{i,j} H_{p_i p_j} z_i z_j > 0$$

pour $z > 0$, alors $t = t_0$ est un zéro de la fonction $J = \det \| \partial X_i(\alpha, t)/\partial\alpha_j \|$ de multiplicité égale au défaut de la matrice $\| \partial X_i(\alpha, t)/\partial\alpha_j \|$ pour $t = t_0$. »

Il résulte de là que le nombre de foyers sur un segment fini de la trajectoire est fini.

C'est pourquoi pour un point fixe quelconque (x_0, t) et ε assez petit la matrice

$$C(t, \varepsilon) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t - \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t + \varepsilon)}{\partial x_{0j}} \right\|^{-1},$$

existe.

Nous désignerons par $\lambda_i(\varepsilon, t)$, $i = 1, \dots, n$ ses valeurs propres. Introduisons encore une définition de l'indice de la trajectoire $X(x_0; O,T)$ à l'aide de cette matrice par

$$\gamma = \operatorname*{Var}_{0 < t \leqslant T} \sum_{i=1}^{n} \lim_{\varepsilon \to 0} (\lambda_i(\varepsilon, t)/|\lambda_i(\varepsilon, t)|).$$

Nous allons montrer dans le lemme 8.7 que le facteur de phase qui entre dans la formule (1.38) est égal à $\exp(i\pi\gamma/4)$. Ensuite, dans le lemme 8.8 nous montrerons que $-\gamma + n/2$ est égal à l'indice de Morse.

Le lemme 8.7 sera démontré sous une forme qui est adaptée aux bicaractéristiques de l'équation d'onde, quoique pour l'hamiltonien de l'équation d'onde la condition (1.39) ne soit pas vérifiée. Rappelons que la méthode des pas le long des trajectoires, développée au paragraphe précédent, s'étend automatiquement au cas de l'équation d'onde, sous la condition supplémentaire d'un nombre fini de points focaux sur les trajectoires. Ceci justifie le fait que la notion d'indice que nous avons introduit ici puisse être utilisé pour le calcul de l'asymptotique d'une solution d'onde.

Pour la démonstration des lemmes 8.7 et 8.8 il nous faudra des estimations des solutions du problème aux limites pour un système hamiltonien ainsi que des estimations des dérivées des solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Les lemmes 8.2 et 8.5 sont consacrés à cela.

Dans le lemme 8.3, on démontre que l'hamiltonien relativiste satisfait la condition (1.39).

Dans le lemme 8.2, nous nous appuierons sur le théorème topologique suivant :

« Soient C et C' deux applications continues de la boule fermée $T^n \subset R^n$, dans l'espace R^n, ayant dans $\bar{T}^n$ seulement un nombre fini de points fixes tous situés dans T^n. Supposons en outre que, pour les points appartenant à la frontière de la boule, l'inégalité $\rho(Cp, C'p) \leqslant \rho(Cp, p)$ soit vérifiée, (où $\rho(p, p')$ est la distance entre p et p'). Alors les applications C et C' ont dans T^n un même nombre algébrique de points fixes » (cf. [4]).

2. Sur le nombre impair de solutions

Lemme 8.2. *Supposons que* $x_i(t), y_i(t)$ $i = 1, \dots, n$ *vérifient les équations*

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \mathscr{F}_i(x, y, t) \qquad i = 1, \dots, n \\ & \qquad\qquad\qquad x = x_1, \dots, x_n \\ \dot{y}_i &= f_i(x, y, t) \\ & \qquad\qquad\qquad y = y_1, \dots, y_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

et les conditions initiales

$$x_i(0) = x_i^0, \qquad y_i(t_1) = y_i^0(x(t_1)) \tag{2.2}$$

où les fonctions $\mathscr{F}_i(x, y, t)$ *et* $f_i(x, y, t)$ *satisfont les conditions*

$$\mathscr{F}_i(x, y, t) \leqslant C_1, \qquad f_i(x, y, t) \leqslant C_2 \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{\partial y_i^0}{\partial x_j}\right| \leqslant C_3 \qquad \text{pour} \quad |x_i| \leqslant |x_i^0 + b| \qquad t \leqslant T \qquad |y_i| \leqslant |y_i^0| + (n+1)a \tag{2.4}$$

où $b > 0, a > 0, T > 0$ *sont certaines constantes* (*).

Alors, pour $t_1 \leqslant \left\{\frac{b}{c_1}, \frac{a}{c_2 + c_1 c_3 n}, T\right\}$ *le nombre des solutions est soit impair soit infini (en tenant compte des multiplicités)* (**) *et pour ces solutions, on a les estimations suivantes :*

$$\operatorname{Max}|x_i(t) - x_i^0| \leqslant b, \qquad \operatorname{Max}|y_i(t) - y_i^0(x(t_1))| \leqslant (n+1)a. \tag{2.5}$$

(*) A la place de la condition (2.4) on peut demander que les solutions $x(t), y(t)$ vérifient les estimations *a priori* (2.3). Alors, pour tout t fini, il existera un nombre impair (en tenant compte de la multiplicité) ou infini de solutions du problème (2.1)-(2.2). Pour l'équation d'Hamilton sous des conditions très larges (cf. appendice) on peut obtenir des estimations *a priori* des impulsions et, à partir de là, des membres de droite du système (2.1). Un tel problème correspond au problème des extrémales pour l'intégrale de la fonction de Lagrange correspondante avec une extrémité fixée et l'autre extrémité satisfaisant une condition de transversalité (cf. [53]).

Par conséquent, dans les conditions du lemme 1, de l'appendice, le nombre d'extrémales du problème variationnel correspondant à (2.1) (2.2) est impair (en tenant compte des multiplicités). On a un résultat analogue par la même méthode pour le problème à extrémités fixes (cf. [51,1]). Dans ce dernier cas, le théorème sur le nombre impair de solutions a été, sous certaines hypothèses, démontré par Bernstein ([7]).

(**) Posons

$$C_1 = b^{1-\delta}, \qquad 1 > \delta > 0, \qquad C_2 = C(b), \qquad a = b[C(b) + 1], \qquad b = t_1^{1/\sigma}.$$

On a le corollaire :

Corollaire. *Supposons* $\mathscr{F}_i(x, y, t), f_i(x, y, t)$ *continues et vérifiant les conditions*

$$|\mathscr{F}_i(x, y, t)| \leqslant C|x|^{1-\delta}$$

$$|f_i(x, y, t)| \leqslant C(y) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial y_i^0}{\partial x_j}\right| \leqslant C_3,$$

où $C(y)$ *est continue. Alors le nombre des solutions du problème* (2.1)-(2.2) *est soit impair, soit infini (pour tout* t_0 *fini).*

Démonstration (*). Le problème (2.1)-(2.2) se transforme par le changement

$$z = x - x_0, \qquad u = y - y^0(x) = y - y^0(z + x^0) \tag{2.6}$$

en le problème suivant :

$$\frac{dz_i}{dt} = \mathscr{F}_i(z + x^0, u + y^0, t) \tag{2.7}$$

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(z + x^0, u + y^0, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{dy^0}{dx_k}(z + x^0)\, \mathscr{F}_k(z + x^0, y^0 + u, t)$$

$$z(0) = 0, \qquad u(t_1) = 0, \qquad y^0 = y^0(z + x^0). \tag{2.8}$$

Considérons d'abord la solution du problème de Cauchy pour l'équation (2.7) avec les données initiales

$$z(0) = 0, \qquad u(0) = u^0. \tag{2.9}$$

En outre, nous supposerons (cf. [51,1]) que

$$|z_i| \leqslant b, \qquad |u_i - u_i^0| \leqslant a, \tag{2.10}$$

$$\sqrt{\sum_i |u_i^0|^2} \leqslant na \qquad (\text{d'où } \ |u_i| \leqslant (n + 1)a).$$

D'après le théorème d'existence, pour $t \leqslant \min\{b/C_1, a/C_2 + C_1C_3n, T\}$, le problème (2.7) (2.9) a une solution vérifiant la condition (2.10) et dépendant continûment de u^0 ([59,3]). Montrons de plus qu'il existe (pas obligatoirement un seul) un point $\tilde{u}_0$, appartenant à la boule

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i^0)^2} \leqslant na,$$

tel que si $u(0) = \tilde{u}_0$, alors $u(t_1) \equiv u(\tilde{u}_0, t_1) = 0$. Pour cela, considérons deux applications de la boule.

La première application, que nous notons C envoie la boule en 0. La seconde C' est donnée par la fonction $u^0 - u(u^0, t_1)$. Désignons par $\rho(p_1, p_2)$, comme à l'ordinaire, la distance entre les points p_1 et p_2. Soit p appartenant à la frontière de la boule. Évidemment, $C(p) = 0$ et $\rho(C(p), p) = na$. En outre, en vertu de (2.10)

$$\rho(C'(p), C(p)) = \rho(C'(p), 0)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i^0 - u_i(u^0, t_1'))^2} < na = \rho(C(p), p).$$

Comme C a un point fixe, alors ou le nombre des points fixes de C' est égal à l'infini ou leur nombre algébrique est égal à 1, c'est-à-dire qu'il existe un nombre

(*) Si $\det \| \partial X_i / \partial x_j^0 \| \neq 0$, la multiplicité de la solution $X(x_0, t)$ est égale à 1.

impair (en comptant la multiplicité du point u^0) de points $\tilde{u}_0$ appartenant à la boule, tels que

$$\tilde{u}_0 - u(\tilde{u}_0, t) = \tilde{u}_0 .$$

Par conséquent, $u(\tilde{u}_0, t_1) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Estimation des solutions

Lemme 8.3. *Soit*

$$H^{\pm}(x, p, t) = -\Phi(x, t) \mp c(x, t)\sqrt{[p - A(x, t)]^2 + m^2c^2(x, t)}$$

Alors la matrice $\pm \| \partial^2 H^{\pm}/\partial p_i \partial p_j \|$ *est définie positive pour* $m \neq 0$ *et non négativement définie* (*) *pour* $m = 0$.

Démonstration. Soit

$$\mathscr{F}(H, p, x, t) = [H + \Phi(x, t)]^2 - c^2(x, t)[p - A(x, t)]^2 - m^2c^4(x, t)$$

Alors

$$\frac{\delta \mathscr{F}(H, p, x, t)}{\delta p_i} = \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial p_i} = 0 \tag{2.11}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial \mathscr{F}/\partial p_i}{\partial \mathscr{F}/\partial H} \tag{2.12}$$

Ensuite

$$\frac{\delta^2 \mathscr{F}}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial H^2}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial H}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} + \frac{\partial^2 \mathscr{F}}{\partial p_i \partial p_j}.$$

En y substituant (2.12), on obtient

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial p_j}\left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial H}\right)^2 + \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial H}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} - 2c^2(x, t)\delta_{ij} = 0 .$$

D'où, posant $P = p - A(x, t)$, on obtient

$$\pm \{\sqrt{c^2(x, t)|P|^2 + m^2c^2(x, t)}\}^3 \left\|\frac{\partial^2 H^{\pm}}{\partial p_i \partial p_j}\right\| = c^4(x, t)\left\|\left\{\frac{1}{2}P_iP_j - [P^2 + m^2c^2]\delta_{ij}\right\}\right\|$$

La matrice

$$\| P_i \; P_j \| = \left\| \begin{matrix} P_1^2 & P_1P_2 \dots P_1P_n \\ P_2P_1 & P_2^2 \qquad P_2P_n \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ P_nP_1 & P_nP_2 \dots P_n^2 \end{matrix} \right\|$$

(*) C'est-à-dire son déterminant est nul, et tous les autres mineurs diagonaux sont positifs.

a toutes les lignes linéairement dépendantes et par conséquent son rang est égal à 1. Ce qui veut dire que $(n-1)$ des valeurs propres sont égales à 0, et que le polynôme caractéristique est de la forme $\lambda^n - \alpha\lambda^{n-1} = 0$. Il est évident que $\alpha = |P|^2$. Par conséquent, après avoir soustrait de $\| P_i\, P_j \|$ la matrice $\{|P|^2 + m^2 c^2(x,t)\} E$, nous obtenons pour $m \neq 0$ une matrice définie positive et pour $m = 0$ une matrice non négativement définie, d'où le lemme :

Lemme 8.4. *Faisons dans l'hamiltonien*

$$H^+(x,p,t,m),\ m = 0, \Phi = 0, A = 0.$$

Alors, si $S(x,t)$ satisfait l'équation d'Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^+(x, \nabla S, t, 0) = 0$$

et la condition $S|_{t=0} = px$, on a

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S(x,p,t)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| \equiv 0 \tag{2.13}$$

Démonstration. L'action $S(x,p,t)$ satisfait

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}(x,p,t) = -H^+ + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H^+}{\partial p_i} = |p| c(x,t) - \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{|p|} c(x,t) = 0$$

sous la condition $S|_{t=0} = px$. Par conséquent,

$$S(x,p,t) = \sum_{k=1}^n p_k x_{0k}(x,p,t).$$

D'où

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = x_{0i} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_i}.$$

Mais, d'après le théorème d'Hamilton-Jacobi ([39]) :

$$\frac{\partial S}{\partial p_j}(x,p,t) = x_{0j} \tag{2.14}$$

ce qui signifie

$$\sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x_{0k}}{\partial p_j} = 0 \qquad \text{pour tous les } j = 1, \dots, n.$$

Comme $p \neq 0$, alors $\det \| \partial x_{0k} / \partial p_j \| = 0$, ce qui, à cause de (2.14), entraîne (2.13).

Nous considérerons maintenant deux cas :

(A) l'hamiltonien $\mathscr{H}(x,p,t)$ vérifiant la condition (1.39)

(B) un hamiltonien de la forme $\pm\, c(x,t)|p|$.

Tous les résultats qui suivent se rapportent à ces cas A, B à moins que cela ne soit mentionné explicitement.

Nous désignerons par $\tilde{S}(x, p^0, t_1, t_2)$ la solution du problème

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + H(x, \nabla \tilde{S}, t) = 0, \qquad \tilde{S}\big|_{t=t_1} = p^0 x,$$

par $S(x_0, t), X(x_0, t), P(x_0, t)$ les solutions du problème

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \dot{s} = H - \sum_i p_i H_{p_i}$$

$$x(0) = x_0, \qquad p(0) = \operatorname{grad} f(x_0), \qquad s(0) = f(x_0),$$

par $x_0 = x_0(x, t)$ la solution de l'équation

$$X(x_0, t) = x.$$

E dénote la matrice unité.

Lemme 8.5. *Soient*

$$|x_i| \leqslant a, \qquad |p_i^0| \leqslant b. \tag{2.15}$$

Alors, pour tout $|t_1 - t_2| < \varepsilon$, *on a la relation*

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p^0, t_1, t_2)}{\partial x_i \partial p_j^0} \right\| = E + D(\varepsilon) \tag{2.16}$$

où $D(\varepsilon)$ *est une matrice tendant en norme vers* 0 *quand* $\varepsilon \to 0$.

Si, de plus, dans le cas B, *on a* $p_n^0 \neq 0$ (*), *alors, pour* $t_1 - t_2 < \varepsilon$ *la matrice*

$$B_\beta = -\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(p^0, x, t_1, t_2)}{\partial p_i^0 \partial p_j^0} \right\| + \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{Vmatrix} \tag{2.17}$$

est définie négative pour β *assez petit,* $\beta < 0$ (**)

Démonstration. Du théorème d'Hamilton-Jacobi, il résulte que

$$\frac{\partial \tilde{S}(p^0, x, t_1, t_2)}{\partial p_i^0} = q_i(t_1), \qquad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x_i} = p_i(t_2) \tag{2.18}$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i^0 \partial p_j^0} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0}\bigg|_{\tau=t_1} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial p_i^0} = \frac{\partial p_i}{\partial p_j^0}\bigg|_{\tau=t_2} \tag{2.19}$$

où $q(\tau), p(\tau)$ sont les solutions du système d'Hamilton

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial q_i}{\partial \tau} = \frac{\partial H(p, q, \tau)}{\partial p_i} \tag{2.20}$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad q = (q_1, \ldots, q_n), \quad p = (p_1, \ldots, p_n),$$

(*) Comme un des p_i^0, $i = 1, \ldots, n$, est différent de zéro, on peut supposer sans perte de généralité $p_n^0 \neq 0$, sinon on peut réordonner les p_i^0 et les x_i.

(**) Le lemme reste vrai si la matrice B_β vérifie la condition (1.39).

vérifiant les conditions

$$p_i(t_1) = p_i^0, \qquad q_i(t_2) = x_i. \tag{2.21}$$

Comme les conditions aux limites satisfont les inégalités

$$|p_i^0| \leqslant b, \qquad |x_i| \leqslant a \tag{2.22}$$

on a, d'après le lemme 8.2, que pour

$$t_2 - t_1 \leqslant \left[\operatorname{Max}\left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial H}{\partial q_i} \right\} \right] \tag{2.23}$$

$$|p| \leqslant b + n + 1, \qquad |q| \leqslant a + 1 \qquad \tau \leqslant T_1,$$

les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$|q(\tau)| \leqslant a + 1 \qquad |p(\tau)| \leqslant b + n + 1. \tag{2.24}$$

Soit $\mathscr{M}_1$ une constante inférieure aux dérivées premières, secondes et troisièmes de H par rapport à p et à q pour $\tau \leqslant T_1$,

$$|p| \leqslant b + n + 1, \qquad |q| \leqslant a + 1.$$

En différentiant les équations (2.20) et les conditions (2.21) par rapport à p_i^0, on obtient alors pour $\partial q_k / \partial p_i^0$ et $\partial p_k / \partial p_i^0$ le système

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right\} \tag{2.25}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} \right) = - \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right\},$$

avec les conditions

$$\left. \frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} \right|_{\tau = t_1} = \delta_{ki}, \qquad \left. \frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} \right|_{\tau = t_2} = 0 \tag{2.26}$$

Posant

$$\left| \frac{\partial q_i}{\partial p_j^0} \right| < \varepsilon, \qquad \left| \frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} - \delta_{ki} \right| < \varepsilon \tag{2.27}$$

on obtient, en vertu du lemme (8.2) avec

$$t_2 - t_1 \leqslant \min\left\{ \frac{\varepsilon}{2\mathscr{M}_1(1 + O(\varepsilon))}, T_1 \right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} \tag{2.28}$$

et pour ε assez petit, l'existence de solutions du problème (2.25)-(2.26) sous les conditions (2.27).

Intégrant par rapport à τ les équations (2.25), nous obtenons

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0} = - \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{t_2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} \right] \mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0} = \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i^0} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_i^0} \right] \mathrm{d}\tau + \delta_{ik} \tag{2.29}$$

D'où, de (2.27), (2.28) :

$$\left.\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0}\right|_{\tau=t_1} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} \mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2) \tag{2.30}$$

$$\left.\frac{\partial p_k}{\partial p_i^0}\right|_{\tau=t_1} = \delta_{ik} + O(\varepsilon) \tag{2.31}$$

La première partie du lemme est une conséquence des formules (2.19) et (2.31). Tenant compte de (2.20), on a d'après la formule de Lagrange,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} \mathrm{d}\tau = (t_2 - t_1) \left.\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i}\right|_{\tau=t_1}$$

$$+ \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 H}{\partial p_k \partial p_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_k \partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right]_{\tau=\tau'}, \qquad t_1 < \tau' < t_2 \tag{2.32}$$

D'où, de (2.27), (2.28), (2.30), (2.32) :

$$\left.\frac{\partial q_k}{\partial p_i^0}\right|_{\tau=t_1} = (t_1 - t_2) \left.\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k}\right|_{\tau=0} + O(\varepsilon^2) \tag{2.33}$$

Les constantes a, b, T apparaissent dans le terme $O(\varepsilon^2)$. De tout ceci il résulte que le signe des mineurs diagonaux de la matrice $\| \partial q_k / \partial p_i^0 \|$ pour $\tau = 0$ coïncide avec le signe des mineurs diagonaux de la matrice $- \| \partial^2 H / \partial p_i \partial p_j \|_{\tau=0}$ si ε est suffisamment petit comparé à eux.

Supposons tous les mineurs diagonaux de la matrice $- \| \partial^2 H / \partial p_i \partial p_j \|$ strictement positifs. Ceci entraîne avec (2.33) que la matrice $\| \partial q_i / \partial p_j^0 \|_{\tau=0}$ est définie positive et, par conséquent, que la matrice $- B_\beta$, pour β assez petit, $\beta = O(\varepsilon^2)$, est également définie positive.

Supposons maintenant que $H = c(x, t)|p|$.

En vertu des hypothèses du lemme $p_n^0 \neq 0$, et par conséquent, d'après le lemme 8.3, tous les mineurs diagonaux de la matrice $- \| \partial^2 H / \partial p_i \partial p_j \|$ à l'exclusion de celui du n-ième ordre ($\det \| \partial^2 H / \partial p_i \partial p_j \|$) sont plus grands que zéro.

D'où avec (2.33), on trouve que pour ε assez petit, tous les mineurs diagonaux de la matrice $\| \partial q_i / \partial p_j^0 \|_{\tau=0}$ à l'exclusion du déterminant de cette matrice, sont définis positifs. D'après le lemme 8.4, dans ce cas

$$\det \| \partial q_i / \partial p_j^0 \|_{\tau=t_1} = 0.$$

C'est pourquoi

$$\det B_\beta = \beta \det \left\| \left.\frac{\partial q_i}{\partial p_j^0}\right|_\tau \right\|_{i,j \leqslant n-1} > 0$$

pour tous les $\beta > 0$.

Pour β assez petit, $\beta < 0(\varepsilon^2)$, les mineurs diagonaux restant de la matrice $- B_\beta$ auront le même signe que les mineurs correspondant de la matrice $\| \partial q_i/\partial p_j^0 \|_{\tau=0}$, c'est-à-dire pour ε assez petit, seront positifs, ce qu'il fallait démontrer.

4. Identités fondamentales

Lemme 8.6. *On a l'égalité*

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_{\substack{p=P(x_0,t_1)\\ x=X(x_0,t_2)}} \times \det \left\| \frac{\partial X(x_0,t_2)}{\partial x_{0j}} \right\|$$

$$= - \det \left\| \begin{matrix} \left\| \dfrac{\partial^2 \tilde{S}(x,p,t_1,t_2)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| & -E \\ -E & \left\| \dfrac{\partial^2 S(x_0(\xi,t_1),t_1)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| \end{matrix} \right\|_{\substack{x=X(x_0,t_2)\\ p=P(x_0,t_1)\\ \xi=X(x_0,t_1)}} \times \det \left\| \frac{\partial X(x_0,t)}{\partial x_{0j}} \right\| \tag{2.34}$$

Démonstration. Considérons le système d'équations

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_i}(x,p,t_1,t_2) = \xi_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \xi_i}(x_0(\xi,t_1),t_1) = p_i \tag{2.35}$$

pour $x = X(x_0,t_2)$.

Ce système est vérifié par

$$p_i = P_i(x_0,t_1), \qquad \xi_i = X_i(x_0,t_1). \tag{2.36}$$

En différentiant (2.35) par rapport à x_{0k} et en tenant compte de (2.36), nous obtenons :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial P_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} = - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \frac{\partial X_j(x_0,t_2)}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial X_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial X_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} = \frac{\partial P_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}}$$

Écrivons ces égalités sous forme matricielle

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial P_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_i \partial p_j} \right\| \left\| \frac{\partial X_j(x_0,t_2)}{\partial x_{0k}} \right\| + \left\| \frac{\partial X_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \tag{2.37}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_j(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| = \left\| \frac{\partial P_i(x_0,t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \tag{2.38}$$

L'indice « 0 » signifie que, dans la matrice :

$$x = X(x_0, t_2), \qquad \xi = X(x_0, t_1), \qquad p = P(x_0, t_1).$$

Substituant (2.38) dans (2.37), on obtient

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 - E = - \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial X_j(x_0, t_2)}{\partial x_{0k}} \right\| \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\|^{-1} \tag{2.39}$$

Par conséquent

$$\det \left\{ \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0 \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 - E \right\}$$
$$= - \det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \det \left\| \frac{\partial X_j(x_0, t_2)}{\partial x_{0k}} \right\| \det^{-1} \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0k}} \right\| \tag{2.40}$$

Posons

$$B = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|, \qquad A = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0 .$$

En vertu de l'égalité (2.40), $\det(BA - E)$ est différent de 0. Appliquons sur la matrice $\begin{pmatrix} B & -E \\ -E & A \end{pmatrix}$ la transformation suivante qui laisse invariant son déterminant : on la multiplie à droite par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & B \end{pmatrix}$ On trouve $\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & BA - E \end{pmatrix}$, de déterminant $\det(BA - E)$, donc

$$\det \left\| \begin{matrix} B & -E \\ -E & A \end{matrix} \right\| = \det(BA - E) \tag{2.41}$$

On déduira alors (2.34) de (2.40) et (2.41).

Considérons un intervalle $[t_1, t_2]$ assez petit pour que la trajectoire $X(x_0, t)$ n'ait qu'un point focal (x_0, t') dans cet intervalle et tel que

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\| \neq 0$$

Lemme 8.7. *La signature de la matrice*

$$R(t_1, t_2) = \left\| \begin{matrix} \left\| \dfrac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial p_j} \right\| & -E \\ -E & \left\| \dfrac{\partial^2 S(x_0(\xi, t_1), t_1)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\| \end{matrix} \right\|_{\substack{x = X(x_0, t_2) \\ p = P(x_0, t_1)}} \tag{2.42}$$

est égale à

$$\operatorname*{Var}_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2} \sum_{i=1}^{n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, \tau)}{|\lambda_i(\varepsilon, \tau)|}$$

Démonstration. Désignons par $\gamma(t_1, t_2)$ la signature de la matrice $R(t_1, t_2)$. Montrons d'abord que

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t'_1, t'_2)$$

$$\text{si } t_1 < t'_1 < t' < t'_2 < t_2 \quad (t' \text{ étant le foyer}).$$

Changeons de façon continue t de t_1 à t'_1. Si le nombre $\gamma(t, t_2)$ change, c'est qu'en vertu de la dépendance continue en t $\det \| \partial X_i(x_0, t) / \partial x_{0j} \|$ s'annule en un certain point $t_1 \leqslant t''_1 \leqslant t'_1$.

Mais cela est impossible, puisque

$$\det R(t_1, t_2) = -\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t_1, t_2)}{\partial p_i \partial x_j} \right\|_0 \det \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_2)}{\partial x_{0j}} \right\| \det{}^{-1} \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t_1)}{\partial x_{0j}} \right\| \tag{2.43}$$

En effet, par le choix de l'intervalle $[t_1, t_2]$, le premier déterminant du membre de droite de l'égalité (2.43) est différent de 0, et si t n'est pas un point focal $\det \| \partial X_i(x_0, t) / \partial x_{0j} \|$ n'est ni nul, ni infini. On montre ainsi :

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t'_1, t'_2) \qquad \text{si } t_1 < t'_1 < t' < t'_2 < t_2 .$$

Ainsi il nous suffit de démontrer le lemme pour un intervalle $[t'_1, t'_2]$ où t'_1 et t'_2 sont aussi voisins de t' qu'on le veut.

Posons dans cet intervalle

$$\tilde{S} = \tilde{S}(x, p, t'_1, t'_2), \qquad S = S(x_0(\xi, t'_1), t')$$

et prenons-le assez petit pour que tous les mineurs diagonaux de la matrice

$$B_\beta(t'_1, t'_2) = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\| + \beta \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

soient positifs.

On peut le faire d'après le lemme 8.5. Notons

$$B = \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial p_j} \right\|_0, \qquad A = \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right\|_0, \qquad R_\beta = \begin{Vmatrix} B_\beta & -E \\ -E & A \end{Vmatrix}$$

Considérons la matrice

$$R'_\beta = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ B_\beta^{-1} & E \end{Vmatrix} \times R_\beta \times \begin{Vmatrix} E & B_\beta^{-1} \\ 0 & E \end{Vmatrix}$$

L'indice d'inertie de la forme quadratique associée à la matrice donnée R_β coïncide avec l'indice d'inertie de la forme quadratique associée à la matrice R'_β, puisqu'il s'agit de la même matrice, mais dans une autre base [21]. Il résulte de la multiplication des matrices :

$$R'_\beta = \begin{Vmatrix} B_\beta & 0 \\ 0 & A - B_\beta^{-1} \end{Vmatrix}.$$

Comme B_β est définie positive, l'indice d'inertie de R'_β coïncide avec l'indice d'inertie de la matrice

$$D(t'_1, t'_2) = A - B_\beta^{-1}.$$

Ainsi, $\gamma(t_1, t_2)$ est égal à l'indice d'inertie de la matrice $D(t'_1, t'_2)$. Mais, d'après (2.39),

$$D(t'_1, t'_2) = A - B_\beta^{-1} = B_\beta^{-1}\{(BA - E) - (B - B_\beta)A\}$$

$$= B_\beta^{-1}\left\{\left\|\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'_2)}{\partial x_{0j}}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'_1)}{\partial x_{0j}}\right\|^{-1} + (B_\beta - B)A\right\}$$

Multiplions $D(t'_1, t'_2)$ à gauche et à droite par $B_\beta^{1/2}$. Comme $B_\beta^{1/2}$ est auto-adjointe, la signature de la matrice obtenue est égale à celle de la matrice $D(t'_1, t'_2)$. Par conséquent, le nombre $\gamma(t'_1, t'_2)$ est égale à

$$\operatorname{Sign} B_\beta^{1/2} D(t'_1, t'_2) B_\beta^{1/2},$$

c'est-à-dire à la différence entre le nombre de valeurs propres positives et négatives de la matrice $B_\beta^{1/2} D(t'_1, t'_2) B_\beta^{1/2}$.

Mais les valeurs propres de cette matrice coïncident avec celles de la matrice

$$B_\beta^{1/2}\{B_\beta^{1/2} D(t'_1, t'_2) B_\beta^{1/2}\} B_\beta^{-1/2} \qquad \text{(cf. [21])}.$$

On peut donc finalement dire que $\gamma(t'_1, t'_2) - n$ est égal à la différence entre le nombre des valeurs propres positives et négatives de la matrice

$$B_\beta D(t'_1, t'_2) = -\left\|\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_i \partial x_j}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'_2)}{\partial x_{0j}}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'_1)}{\partial x_{0j}}\right\|^{-1} + I_\beta A$$

où

$$I_\beta = B_\beta - B = \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après (2.38), la matrice A est bornée, si le point t'_1 n'est pas un foyer. Aussi la matrice $I_\beta A$ tend en norme vers 0 pour $\beta \to 0$ et

$$\lim_{\beta \to 0} B_\beta D(t'_1, t'_2) = BA + E.$$

Le déterminant de la matrice limite est différent de 0 et ainsi les signes des valeurs propres des matrices

$$\lim_{\beta \to 0} B_\beta D(t'_1, t'_2) \text{ et } B_\beta D(t'_1, t'_2)$$

coïncident pour β suffisamment petit. On peut montrer de la même façon que pour β assez petit les signatures des matrices $R_\beta(t'_1, t'_2)$ et $R(t'_1, t'_2)$ coïncident si $\det R(t'_1, t'_2) \neq 0$.

Par conséquent, la signature de la matrice $R(t_1, t_2)$ (qui est égale à la signature de la matrice $R(t'_1, t'_2)$) est égale à la différence entre le nombre de valeurs propres positives et négatives de la matrice

$$C(t'_1, t'_2) = -\left\|\frac{\partial^2 \tilde{S}(x, p, t'_1, t'_2)}{\partial p_i \, \partial x_j}\right\|_0 \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'_2)}{\partial x_{0j}}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t'_1)}{\partial x_{0j}}\right\|^{-1}$$

Posant $t'_1 = t' - \varepsilon$, $t'_2 = t' + \varepsilon$, nous avons d'après le lemme 8.5 :

$$C(t'_1, t'_2) = [-E + D(\varepsilon)] \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t' + \varepsilon)}{\partial x_{0j}}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t' - \varepsilon)}{\partial x_{0j}}\right\|^{-1},$$

où $D(\varepsilon)$ est une matrice tendant vers 0 pour $\varepsilon \to 0$. Soient $\lambda_i(\varepsilon)$ $(i = 1, \dots, n)$ les valeurs propres et $\psi_i(\varepsilon)$ $(i = 1, \dots, n)$ les fonctions propres normées de la matrice

$$C(t', \varepsilon) = \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t' + \varepsilon)}{\partial x_{0j}}\right\| \left\|\frac{\partial X_i(x_0, t' - \varepsilon)}{\partial x_{0j}}\right\|^{-1}.$$

On a donc :

$$|C(t'_1, t'_2)\psi_i(\varepsilon) - \lambda_i(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon)| = |\lambda_i(\varepsilon) D(\varepsilon) \psi_i(\varepsilon)| \leqslant |\lambda_i(\varepsilon)| \, \| D(\varepsilon) \|$$

Il résulte de là (lemme 2.3, ch. 4) que

$$\left|\frac{\lambda_k(\varepsilon) - \mu_k}{\lambda_k(\varepsilon)}\right| \to 0 \tag{2.44}$$

pour $\varepsilon \to 0$, où $\mu_k(\varepsilon) = \mu_k(t'_1, t'_2)$ sont les valeurs propres de la matrice $C(t'_1, t'_2)$. Posons

$$\lambda_k(\varepsilon) = a_k(\varepsilon) + \mathrm{i}\, b_k(\varepsilon).$$

Alors

$$-\frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \frac{\operatorname{sign} a_k(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{b_k(\varepsilon)}{a_k(\varepsilon)}\right)^2}} + \mathrm{i} \frac{\operatorname{sign} b_k(\varepsilon)}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2}}$$

D'après (2.44)

$$\left(1 + \left(\frac{a_k(\varepsilon)}{b_k(\varepsilon)}\right)^2\right)^{-1/2} \to 0,$$

puisque les $\mu_k(\varepsilon)$ sont réels en vertu du caractère auto-adjoint de $D(t'_1, t'_2)$, c'est-à-dire

$$\frac{b(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Cela signifie que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu_k(\varepsilon)}{|\mu_k(\varepsilon)|} = \operatorname{sign}\mu_k(\varepsilon)$$

puisque $\operatorname{sign}\mu_k(\varepsilon)$ ne dépend pas de ε (*).

Ainsi, nous arrivons à la conclusion que $\gamma(t_1, t_2)$ est égal à

$$\sum_{k=1}^{n} \lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{\lambda_k(\varepsilon)}{|\lambda_k(\varepsilon)|}$$

où les $\lambda_k(\varepsilon)$ sont les valeurs propres de la matrice $C(t', \varepsilon)$, puisque cette expression est la différence entre le nombre de μ_k positifs et négatifs, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 8.7. *Supposons* $\sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} z_i z_j > 0$ *et soit* (x_0, t_0) *un foyer. Alors l'indice de défaut de la matrice* $\| \partial X_i(x_0, t_0)/\partial x_{0j} \|$ *est égal au nombre des termes négatifs de l'ensemble*

$$\{\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_i(\varepsilon, t_0)/|\lambda_i(\varepsilon, t_0)|\}_{i=1,\cdots,n}$$

Démonstration. Considérons la matrice

$$A(t) = \left\| \frac{\partial X_i(x_0, t)}{\partial x_{0j}} \right\| = \| a_{ij}(t) \|$$

au point $t = t_0$. Il existe des matrices $C(t)$ et $C_1(t)$, $|C| = |C_1| = 1$ telles que $\tilde{A}(t) = CAC_1$ soit diagonale pour $t = t_0$.

Si le foyer $t = t_0$ est d'ordre k, d'après le théorème de Morse, la matrice est de la forme

$$\tilde{A}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \ddots & & 0 \\ & a_{k+1} \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & 0 \cdots\cdots & a_n \end{pmatrix}, \qquad a_i = a_{ii}(t_0) \qquad i > k.$$

Considérons la matrice $\tilde{A}_k(t) = \| a_{ij}(t) \|_{i,j<k}$ et la matrice

$$B_k(t_0) = \lim (t - t_0)^{-1} \tilde{A}_k(t).$$

On a

$$|\tilde{A}_k(t)| = (t - t_0)^k |B_k(t_0)| + 0[(t - t_0)^{k+1}] \qquad (|A| = \det A)$$

Montrons que $|B_k(t_0)| \neq 0$. En soustrayant la j-ième colonne (avec $j > k$) de la matrice $\tilde{A}(t)$, multipliée par une quantité de l'ordre $O(t - t_0)$, des

(*) Car $\mu_k(\varepsilon)$ ne peut s'annuler pour $\varepsilon \to 0$ puisque $\det R(t'_1, t'_2) \neq 0$.

k-premières colonnes, nous pouvons obtenir que tous les éléments $a_{ij}(t)$, $i > k, j \leqslant k$ sont d'ordre $O[(t - t_0)^2]$.

De même, en soustrayant les lignes $i > k$, multipliées par des quantités $O(t - t_0)$ des k-premières lignes, on obtient que les coefficients

$$a_{ij}(t) \qquad i \leqslant k, j > k$$

sont du second ordre en $(t - t_0)$.

Ceci ne change ni la matrice $B_k(t_0)$ ni $\det \tilde{A}(t)$. Ainsi

$$|\tilde{A}(t)| = (t - t_0)^k |B_k(t_0)| \prod_{j=k+1}^{n} a_j + O[(t - t_0)^{k+1}]$$

Comme, d'après le théorème de Morse

$$|\tilde{A}(t)| = O[(t - t_0)^k],$$

on a

$$|B_k(t_0)| \neq 0.$$

Soient D_1 et D_2 des matrices orthogonales telles que la matrice

$$\tilde{B}_k(t_0) = D_1 B_k(t_0) D_2$$

soit diagonale. En prenant les matrices

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad \tilde{D}_2 = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C} = \tilde{D}_1 C \qquad \tilde{C}_1 = C_1 \tilde{D}_2$$

on construit une matrice

$$\tilde{\tilde{A}}(t) = \tilde{C} \tilde{A}(t) \tilde{C}_1$$

La matrice $\tilde{\tilde{A}}(t)$ s'écrit alors :

$$\tilde{\tilde{A}}(t) = \left\| \begin{array}{cccc} (t - t_0) a_1 \ldots\ldots 0 & O(t - t_0) & O(t - t_0) & \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & & & \\ 0 \ldots\ldots (t - t_0) a_k & & & \\ & a_{k+1} + O(t - t_0) & O(t - t_0) & \\ O(t - t_0) & O(t - t_0) & a_n + O(t - t_0) & \end{array} \right\| + \| O[(t - t_0)^2] \|$$

où les $a_1, \ldots, a_n$ sont différents de 0.

En soustrayant des combinaisons linéaires (à coefficients constants) des k-premières lignes des n-k dernières-lignes, on arrive à ce que les éléments $\tilde{\tilde{a}}_{ij}(t)$, $i > k, j < k$ de la matrice obtenue soient d'ordre $O[(t - t_0)^2]$. De même, en soustrayant des combinaisons linéaires (à coefficients constants) des k-premières colonnes des $(n - k)$ suivantes, on fait que dans la matrice obtenue les éléments $\tilde{\tilde{a}}_{ij}(t), i > k, j < k$ soient d'ordre $O[(t - t_0)^2]$.

Dans ce qui suit, nous conviendrons de désigner par $D_i^k(t)$ une matrice non-singulière du k-ième ordre. Nous avons montré qu'il existe des matrices constantes non-dégénérées S_1 et S_2 telles que $S_1 A(t) S_2$ soit de la forme

$$S_1 A(t) S_2 = \begin{Vmatrix} (t - t_0) W_k & 0 \\ 0 & W_{n-k} + (t - t_0) D_1^{n-k}(t) \end{Vmatrix} + D_2^n(t)(t - t_0)^2$$

où

$$W_k = \begin{Vmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_k \end{Vmatrix}, \qquad W_{n-k} = \begin{Vmatrix} a_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{Vmatrix}$$

On a (*)

$$[S_1 A(t) S_2]^{-1} = \begin{Vmatrix} (t - t_0) W_k & 0 \\ 0 & W_{n-k} + (t - t_0) D_1^{n-k}(t) \end{Vmatrix}^{-1}$$

$$\left\{ E + (t - t_0) D_3^n(t) \begin{Vmatrix} W_k^{-1} & 0 \\ 0 & (t - t_0) W_{n-k}^{-1} \end{Vmatrix} + (t - t_0)^2 D_4^n(t) \right\}^{-1}$$

D'où

$$[S_1 A(t) S_2]^{-1} = \begin{Vmatrix} (t - t_0)^{-1} W_k^{-1} & 0 \\ 0 & W_{n-k}^{-1} + (t - t_0) D_5^{n-k}(t) \end{Vmatrix} \{ E + (t - t_0) D_6^n(t) \}$$

Les valeurs propres de la matrice

$$C(\varepsilon, t_0) = A(t_0 - \varepsilon)[A(t_0 + \varepsilon)]^{-1}$$

coïncident avec les valeurs propres de la matrice

$$S_1 A(t - \varepsilon)[A(t_0 + \varepsilon)]^{-1} S_1^{-1} = S_1 A(t_0 - \varepsilon) S_2 [S_1 A(t_0 + \varepsilon) S_2]^{-1}$$

$$= \begin{Vmatrix} \varepsilon W_k & 0 \\ 0 & W_{n-k} + \varepsilon D_1(t) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varepsilon^{-1} W_k^{-1} & 0 \\ 0 & W_{n-k}^{-1} + \varepsilon D_6^{n-k}(t) \end{Vmatrix} [1 + \varepsilon D_7^n(t)] + \varepsilon^2 D_8^n(t)$$

$$= \begin{Vmatrix} -E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{Vmatrix} (1 + \varepsilon D_9^n(t))$$

(*) On utilise l'identité, valable qu'elles que soient les matrices A et B,

$$(A + B)^{-1} = \{(1 + BA^{-1})A\}^{-1} = A^{-1}(1 + BA^{-1})^{-1}$$

à la condition que les deux membres de l'identité existent.

où E_i est la matrice unité d'ordre i. Pour $\varepsilon \to 0$, le nombre des termes négatifs de l'ensemble

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_i(\varepsilon, t_0)}{|\lambda_i(\varepsilon, t_0)|} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

est égal à k.

c.q.f.d.

Des lemmes 8.7 et 8.8 résulte, en vertu du théorème de Morse, que le facteur de phase $e^{i\pi\delta/4}$ dans la formule (1.38) est égal à $\exp(i\pi n/4) \cdot \exp(-i\pi\tilde{\gamma}/2)$, où γ est l'indice de Morse de la trajectoire $X(x_0; 0, T)$.

CHAPITRE 9

RÉGULARISATION DE LA THÉORIE DES PERTURBATIONS POUR LE CALCUL DES TERMES CORRECTIFS ET FORMULE QUASI-CLASSIQUE DE BOHR

§ 1 INTRODUCTION

Ainsi que nous l'avons indiqué plusieurs fois déjà, la représentation quasi-classique ne permet que de calculer le premier terme du développement asymptotique de la solution en puissances de h. Pour aller plus loin, nous devrons tomber dans la sphère d'action des méthodes de la théorie des perturbations.

Le problème le plus complexe est celui de la régularisation des termes de la série des perturbations, régularisation nécessaire pour le calcul des termes suivants du développement des valeurs propres dans les problèmes des § 5, ch. 3, et § 4, ch. 4.

Comme exemple, considérons le calcul des termes correctifs à l'asymptotique quasi-classique pour les valeurs propres de l'équation de Schrödinger à une dimension (*) [51, 6, 7].

Considérons l'équation

$$- \varepsilon^2 u'' + v(x) u = \lambda u \tag{1.1}$$

où ε est un petit paramètre.

Nous supposerons que :

(1) le spectre de l'équation (1.1) est purement discret au voisinage du point λ;

(*) Remarquons que les méthodes de calcul des termes de la série asymptotique dans le cas multidimensionnel qui seront présentées dans une prochaine publication sont basées sur la définition de certains invariants des transformations canoniques et sur une définition invariante des éléments $e^i(x, h)$ de l'opérateur $K_{1/h, \Gamma, h}^{\gamma, \alpha^0}$. Il n'en reste pas moins que la démonstration présentée ici est utile car elle établit de manière évidente le lien entre la régularisation des termes de la série des perturbations et le calcul des corrections aux valeurs propres.

(2) il existe un domaine $v(x) - \lambda < 0$ dont une composante connexe est bornée par les points $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ qui sont des zéros simples de $v(x) - \lambda$;

(3) la fonction $v(x)$ est trois fois différentiable.

On sait qu'il existe des valeurs propres λ_n telles que $\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + O(\varepsilon^2)$ où $\lambda_n^{(1)}$ est définie par l'équation transcendantale

$$\int_{x_2(\lambda_n^{(1)})}^{x_2(\lambda_n^{(2)})} \sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}\,\mathrm{d}x = \pi(n + 1/2)\varepsilon \tag{1.2}$$

(formule de Bohr).

Sous certaines hypothèses sur $v(x)$, on démontre ([76]) que la formule (1.2) détermine le premier terme de l'asymptotique de λ_n pour $n \to \infty$.

§ 2 SECOND TERME DE L'ASYMPTOTIQUE

Dans son livre ([76]), Titchmark donne une déduction heuristique du second terme de l'asymptotique en n et pose la question d'une démonstration rigoureuse pour le cas où $v(x) = x^k$. Comme on l'a déjà démontré, on se ramène dans ce cas à l'asymptotique quasi-classique par un simple changement de variable. Quant à Titchmark il ne résout ce problème que dans les cas $v(x) = x^4$ et $v(x) = x^6$ et par des méthodes très compliquées. L'auteur a obtenu et démontré des formules de récurrence qui donnent tous les termes du développement asymptotique en h. Les expressions pour le second et troisième terme du développement sont obtenues sous une forme compacte [51, 6), 7)].

Ces formules quoiqu'en apparence différentes de celles de Titchmark, s'y ramènent à l'aide d'une transformation peu compliquée.

Nous allons décrire ici la méthode par laquelle on peut obtenir par récurrence tous les termes du développement des valeurs propres en puissances de h.

La formule obtenue dans [51,6] a la forme

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_n^{(2)} + O(\varepsilon^2) \tag{2.1}$$

avec

$$\lambda_n^{(2)} = -\frac{1}{24T}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\int_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{[v'(x)]^2}{\sqrt{\lambda - v(x)}}\mathrm{d}x\right]_{\lambda = \lambda_n^{(1)}} \tag{2.2}$$

Ici :

$$T = \frac{1}{2}\int_{x_1(\lambda_n^{(1)})}^{x_2(\lambda_n^{(1)})} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}} \tag{2.3}$$

En notant

$$\tilde{\Phi}^2 = \int_0^T \Phi^2(x(\tau))\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{x_1(\lambda)}^{x_2(\lambda)} \frac{\Phi(x)^2}{\sqrt{\lambda - v(x)}}\mathrm{d}x$$

on aboutit à la formule suivante

$$\lambda_n^{(2)} = -\frac{1}{12T}\left.\frac{d^2\tilde{\mathscr{F}}^2}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_n^{(1)}}$$

où $\mathscr{F} = -v'(x)$.

Nous donnons dans ce paragraphe une démonstration tout à fait élémentaire de la formule (2.1) valable avec une estimation plus faible que dans [(51,6)].

Pour cela, nous aurons recours à l'uniformité de l'asymptotique aux points $x_1(\lambda)$ et $x_2(\lambda)$ des fonctions propres ψ_n (cf. [15]).

Soient $W_n(x)$ les fonctions propres de l'équation

$$-\varepsilon^2 W_n'' + (x^2 - \mu_n) W_n = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} W_n^2(x)\,dx = 1. \tag{2.4}$$

On sait que $\mu_n = \pi\varepsilon(n + 1/2)$.

Posons

$$\mathscr{F}(x) = z(x)\, W_n(y(x))\,\varphi(x),$$

où y satisfait l'équation

$$y' = \sqrt{\frac{\lambda_n^{(1)} - v(x)}{\mu_n - y^2}} \tag{2.5}$$

et les conditions aux limites

$$y[x_1(\lambda_n^{(1)})] = \sqrt{\mu_n},$$
$$y[x_2(\lambda_n^{(1)})] = -\sqrt{\mu_n},$$

[cela est possible en vertu de (1.2)].

$$z(x) = (y')^{-1/2}$$

et $\varphi(x)$ est une fonction à support compact, nulle hors de l'intervalle

$$(x_1(\lambda) - 2\delta, x_2(\lambda) + 2\delta)$$

et égale à 1 pour

$$x_1(\lambda) - \delta \leqslant x \leqslant x_2(\lambda) + \delta.$$

Remarquons, tout d'abord, qu'on a la proposition suivante :

Supposons que $v'(x)$ ne s'annule pas aux points $x = x_1(\lambda_n^{(1)})$ et $x = x_2(\lambda_n^{(1)})$ et que $v(x)$ ait k dérivées continues. Alors $y(x)$ a des dérivées d'ordre k continues aux points $x = x_1(\lambda_n^{(1)})$ et $x = x_2(\lambda_n^{(1)})$.

Montrons d'abord que y' est borné aux points de rebroussement $x = x_1(\lambda_n^{(1)})$ et $x = x_2(\lambda_n^{(1)})$ et que $y(x_\nu) \neq 0$, $\nu = 1, 2$.

On a :

$$y'^2 = \frac{\lambda_n^{(1)} - v(x)}{(\sqrt{\mu_n} - y)(\sqrt{\mu_n} + y)} \tag{2.6}$$

Comme

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\lambda_n^{(1)} - v(x)}{(\sqrt{\mu_n} - y)(\sqrt{\mu_n} + y)} = \frac{v'(x_1)}{2\sqrt{\mu_n}\, y'(x_1)},$$

$$x_1 = x(\lambda_n^{(1)})$$

alors

$$y'^2 \Big|_{x = x_1} = \frac{v'(x_1)}{2\sqrt{\mu_n}\, y'(x_1)}$$

c'est-à-dire

$$y'(x_1) = \left[\frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} v'(x_1) \right]^{1/3} \neq 0$$

Par conséquent,

$$y - \sqrt{\mu_n} = O(x - x_1),$$
$$y + \sqrt{\mu_n} = O(x - x_2).$$

En développant

$$\Phi(y) = \left[\int_{\sqrt{\mu_n}}^{y} \sqrt{\mu_n - \xi^2}\, \mathrm{d}\xi \right]^{2/3}$$

en séries de $(y - \sqrt{\mu_n})$ et en se restreignant aux k-premiers termes, nous aurons, en désignant par $P_k, \tilde{P}_k, \bar{P}_k$ certains polynômes de degré k :

$$\Phi(y) = P_k(y - \sqrt{\mu_n}) + O(x - x_1)^{k+1} \qquad P_k'(0) \neq 0.$$

Puisque, d'après (2.5) :

$$\Phi(y) = \left[\int_{x_1}^{x} \sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}\, \mathrm{d}x \right]^{2/3} = \tilde{P}_k(x - x_1) + O(x - x_1)^{k+1}$$

on a

$$P_k(y - \sqrt{\mu_n}) = \tilde{P}_k(x - x_1).$$

Comme $P_k'(0) \neq 0$, la fonction inverse $P_k^{-1}(z)$ est régulière au voisinage de $z = 0$, ce qui signifie

$$\begin{aligned} y - \sqrt{\mu_n} &= P_k^{-1} \{ \tilde{P}_k(x - x_1) + O(x - x_1)^{k+1} \} \\ &= \bar{P}_k(x - x_1) + O(x - x_1)^{k+1}. \end{aligned}$$

On démontre de même la proposition pour $x = x_2$.

On voit facilement que $\mathscr{F}_n(x)$ vérifie l'équation

$$- \varepsilon^2 \mathscr{F}_n'' + [v(x) - \lambda_n^{(1)}]\, \mathscr{F}_n(x) - \varepsilon^2 \frac{z''}{z} \mathscr{F}_n(x) = \varepsilon^2 \{ \varphi'' z W_n + 2\varphi'(z W_n)'. \quad (2.7)$$

Comme φ' et φ'' sont différentes de 0 seulement dans un sous-domaine du domaine $\lambda_n^{(1)} > v(x)$ il résulte du développement asymptotique de la fonction de Weber que la partie droite de l'égalité est d'ordre $e^{-\delta/\varepsilon}$. En multipliant l'équation (2.7) par $\psi_n(x)$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$[\lambda_n - \lambda_n^{(1)}] \int_{x_1-2\delta}^{x_2+2\delta} \psi_n \mathscr{F}_n \, dx = \varepsilon^2 \int_{x_1-2\delta}^{x_2+2\delta} \frac{z''}{z} \mathscr{F}_n \psi_n \, dx + O(e^{-\delta/\varepsilon}) \quad (2.8)$$

(nous omettrons l'argument dans $x_1(\lambda_n^{(1)})$ et $x_2(\lambda_n^{(2)})$. En tenant compte de l'asymptotique pour $\varepsilon \to 0$ de la fonction ψ_n dans le sous-domaine du domaine $\lambda_n^{(1)} > v(x)$ (cf. [15]), on obtient

$$\int \psi_n^2 \, dx - \int_{-\infty}^{x_2+\delta} \psi_n^2 \, dx - \int_{x_1-\delta}^{\infty} \psi_n^2 \, dx$$

$$\to \frac{2}{T} \int_{x_1-\delta}^{x_2+\delta} \frac{1}{P} \sin^2\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x} P \, dx + \frac{\pi}{2}\right) dx \to 1 + O(\delta)$$

Ici, $P = \sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}$.

D'où, comme $\int \psi_n^2 \, dx = 1$, (2.9)

$$\int_{-\infty}^{x_2+\delta} \psi_n^2 \, dx + \int_{x_1-\delta}^{\infty} \psi_n^2 \, dx \to O(\delta) \quad (2.10)$$

On a une affirmation analogue pour $\mathscr{F}_n(x)$.

Ainsi

$$\frac{\lambda_n - \lambda_n^{(1)}}{\varepsilon^2} = \frac{\displaystyle\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{z} \frac{1}{P} \sin^2\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x} P \, dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx}{\displaystyle\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{1}{P} \sin^2\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_1}^{x} P \, dx + \frac{\pi}{4}\right\} dx} + O_\delta(\varepsilon)$$

$$+ O_\delta = \frac{1}{T} \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP} dx + \bar{O}_\delta(\varepsilon) + O(\delta)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP} dx + O_\delta(\varepsilon) + O(\delta). \quad (2.11)$$

Faisant tendre successivement $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_n - \lambda_n^{(1)}}{\varepsilon^2} - \frac{1}{T} \int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP} dx = 0 \quad (2.12)$$

puisque cette expression est indépendante de δ.

Exprimant z et z'' au moyen de y, on obtient

$$\frac{z''}{zP} = -\frac{1}{12} \frac{d^2}{d\lambda^2} \frac{(v')^2}{P} + \frac{1}{4} \frac{d}{dx} \frac{y'}{P^3} + \frac{1}{4} \frac{y'}{(\mu_n - y^2)^{3/2}} + \frac{5}{4} \frac{y^2 y'}{(\mu_n - y^2)^{3/2}}.$$

On voit facilement que

$$\int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{z''}{zP} \mathrm{d}x = -\frac{1}{12} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \int_{x_1+\delta}^{x_2-\delta} \frac{(v')^2}{P} \mathrm{d}x + O(\delta)$$

De là nous arrivons à l'identité :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{z''}{zP} \mathrm{d}x = -\frac{1}{12} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(v')^2}{P} \mathrm{d}x,$$

qui achève la démonstration de la formule (2.1). Ainsi est démontré le

Théorème 9.1. *Sous les hypothèses* 1-2-3, *il existe des valeurs propres* λ_n *de l'équation* (1.1), *qui vérifient les relations*

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + O(\varepsilon^2)$$

pour $n\varepsilon \to$ Cte, *où* $\lambda_n^{(1)}$ *et* $\lambda_n^{(2)}$ *sont définies par les formules* (1.2) *et* (2.2).

Corollaire 1. *Sous les hypothèses* 1-2-3, *le développement asymptotique de la valeur propre* v_n *de l'équation* (1.7), *ch.* 2, § 1, *n*° 4 , *est de la forme*

$$v_n = \frac{(2n+1)\pi}{2S} - \frac{\mathrm{d}^2\mathscr{F}/\mathrm{d}\lambda^2}{12\pi n} + O(1/n) \qquad (2.13)$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} P \,\mathrm{d}x$$

Pour déduire la formule (2.13), il faut faire dans le problème $\lambda_n = \lambda$ de façon à ce que ε tende vers 0 en prenant les valeurs discrètes ε_n.

Alors les formules (2.1)-(2.2) détermineront l'asymptotique de ces valeurs discrètes pour $n \to \infty$. En résolvant, à $O(\varepsilon^2)$ près, l'équation

$$\pi(n + 1/2)\,\varepsilon_n = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\lambda - \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} - v(x)}\,\mathrm{d}x + O(\varepsilon^2)$$

par rapport à $\varepsilon_n = 1/v_n$, on obtient la formule (2.13).

Corollaire 2. *L'asymptotique des valeurs propres de l'équation*

$$-\psi_n'' + x^\alpha \psi_n = \lambda_n \psi_n \qquad \alpha > 0 \qquad (2.14)$$

pour $\lambda_n \to \infty$ *est de la forme*

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} + O(\lambda_n^{(2)})$$

où $\lambda_n^{(1)}$ *et* $\lambda_n^{(2)}$ *sont définis par les formules* (1.2)-(2.2).

Par le changement de variables $x = \gamma\xi$, $\lambda_n = \beta E_n$ dans l'équation (2.14), on ramène le problème (2.14) à celui de l'asymptotique quasi-classique.

Ainsi le problème posé par Titchmark est résolu.

§ 3 TROISIÈME TERME DE L'ASYMPTOTIQUE

Supposons maintenant qu'outre les conditions 1 et 2 du § 1, la fonction $v(x)$ soit six fois continûment différentiable. Alors d'après la proposition démontrée plus haut, on sait que $y(x)$ a 6 dérivées continues aux points x_1 et x_2, et z''/z 3 dérivées continues.

Posant

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n - y^2}}\left\{ \lambda_n^{(2)} \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\lambda_n^{(1)} - v(x)}} + \int_{x_1}^{x} \frac{z''}{zP} dx \right\} \tag{3.1}$$

on a, au voisinage du point $x = x_1$,

$$\frac{z''}{z} = P_3(x - x_1) + O(x_1 - x)^3, \qquad \mu_n - y^2 = P_4(x - x_1) + O(x - x_1)^4.$$

De la forme de y_1, il résulte que y_1 est trois fois continûment différentiable au point x_1.

Notons en outre que, d'après la formule (2.12) :

$$y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n - y^2}}\left\{ \lambda_n^{(1)} \int_{x_2}^{x} \frac{dx}{P(x)} + \int_{x_2}^{x} \frac{z''}{zP} dx \right\} \tag{3.2}$$

D'où on tire, comme précédemment, que y_1 a au point $x = x_2$ trois dérivées continues.

L'équation

$$zz_1'y' + y''z_1 + y_1''z + zy_1'z' = 0$$

définit z_1 à une constante près.

Notons

$$R_n(x) = \varphi(x)[z^2 + \varepsilon^2 z_1]\, W_n(y + \varepsilon^2 y_1). \tag{3.3}$$

On voit que $R_n(x)$ vérifie l'équation

$$\begin{aligned}
&- \varepsilon R_n'' + [v(x) - \lambda_n^{(1)} - \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)}]\, R_n - \varepsilon^2 K(x)\, \varphi(x)\, W_n(y + \varepsilon^2 y_1) \\
&= \varepsilon^6 (y_1'' z_1 + 2y_1' z_1')\, \varphi(x)\, W_n'(y + \varepsilon^2 y_1) \\
&\quad + [2\varepsilon^6 \{ y_1'^2 y_1 y + y_1' y' (y_1)^2 \} + \varepsilon^8 (y_1')^2 y_1]\, R_n \\
&\quad + \varepsilon \varphi''(z^2 + \varepsilon^2 z_1)\, W_n + 2\varepsilon \varphi' [(z + \varepsilon^2 z_1)\, W_n]'
\end{aligned} \tag{3.4}$$

où

$$K(x) = z_1'' + \left[\frac{z''}{z} - \lambda_n^{(2)} \right] z_1 + (y_1')^2 (\mu_n - y^2) - 4y_1' y' y_1 y - (y')^2 y_1^2.$$

Les deux derniers termes de la partie droite de l'égalité (3.4) sont d'ordre $O(e^{-\delta/\varepsilon})$ puisque φ' et φ'' ne sont différents de zéro que dans les régions dans lesquelles la fonction de Weber est exponentiellement (pour $\varepsilon \to 0$) petite.

La norme L^2 du premier terme de la partie droite de l'égalité est d'ordre $O(\varepsilon^5)$ puisque $\| W'_n \| = O(1/\varepsilon)$. Le terme moyen de la partie droite de l'égalité est d'ordre $O(\varepsilon^6)$.

Appliquant les arguments utilisés de (2.8) à (2.12), nous obtenons

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \varepsilon^4 \lambda_n^{(3)} + O(\varepsilon^4) \tag{3.5}$$

où

$$\lambda_n^{(3)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{K(x)}{zP} \mathrm{d}x \tag{3.6}$$

expression qui s'écrit [69]

$$\begin{aligned}\lambda_n^{(3)} = {}& \lambda_n^{(2)} \frac{\mathrm{d}\lambda_n^{(2)}}{\mathrm{d}n} \Bigg/ \frac{\mathrm{d}\lambda_n^{(1)}}{\mathrm{d}n} - \frac{(\lambda_n^{(2)})^2}{2} \frac{\mathrm{d}^2\lambda_n^{(1)}}{\mathrm{d}n^2} \Bigg/ \left(\frac{\mathrm{d}\lambda_n^{(1)}}{\mathrm{d}n}\right)^2 \\ & - \frac{1}{48} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \left[\frac{1}{5} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(v'')^2}{\sqrt{\lambda - v}} \mathrm{d}x - \frac{1}{36} \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\lambda^4} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(v')^4}{\sqrt{\lambda - v}} \mathrm{d}x \right]_{\lambda = \lambda_n^{(1)}}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi, on a le

Théorème 9.2. *Sous les hypothèses des* § 1 *et* § 3, *il existe des valeurs propres* λ_n *de l'équation* (1.1), *vérifiant*

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_n^{(2)} + \varepsilon^4 \lambda_n^{(3)} + O(\varepsilon^4)$$

pour $n\varepsilon \to$ *Cte, où* $\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}$ *et* $\lambda_n^{(3)}$ *sont définis par les formules* (1.2), (2.2) *et* (3.7).

A partir de ce théorème, il n'est pas difficile d'obtenir (comme dans les corollaires 1 et 2) le troisième terme du développement asymptotique des valeurs propres des problèmes (1.7), ch. 2, et (2.14).

APPENDICE

DISCONTINUITÉS DANS L'ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DE TYPE EFFET TUNNEL

§ 1 INTRODUCTION

La méthode utilisée pour étudier les discontinuités des solutions des équations de type ondulatoire pourrait aussi être appliquée à l'étude de l'asymptotique des solutions des équations de type tunnel ou de type mixte.

Nous nous arrêterons de façon moins détaillée sur cette possibilité et nous ne considérerons que deux problèmes, étroitement liés ainsi que nous le verrons au moyen de l'asymptotique quasi-classique. Nous considérerons l'asymptotique des solutions du système des équations de Navier-Stokes avec une viscosité tendant vers zéro au voisinage des ondes de choc, ces ondes étant les discontinuités des solutions d'un système d'équations quasi linéaires du premier ordre.

Ensuite nous considérerons l'asymptotique globale pour $\omega \to \infty$ de la solution du problème

$$\Delta u - \omega^2 C^2(x, t) u = 0 \qquad x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$u|_\Gamma = f(x)$$

Γ étant une courbe régulière fermée.

L'asymptotique de la solution d'un tel problème était seulement connue ([17]) à l'ordre $O(1/\omega^N)$, où N est quelconque, c'est-à-dire dans une bande étroite (d'ordre $1/\omega$) près de la frontière. A l'intérieur du domaine borné par Γ, on savait seulement que $u = O(1/\omega^\infty)$. Nous donnerons ici un développement asymptotique global, c'est-à-dire nous trouverons une fonction $u_0(x, \omega)$ telle que

$$u(x, \omega) = u_0(x, \omega)\,(1 + O(1/\omega)).$$

Cette asymptotique, comme nous le verrons, subit également des discontinuités aux endroits où le système quasi-linéaire :

$$(u_0 \operatorname{grad}) u_0 + \operatorname{grad} C^2(x) = 0$$

a des discontinuités. Elle est déterminée par les caractéristiques de l'équation (1.1) au sens du point 4, § 3, ch. 1. Ce problème est voisin du problème concernant l'asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger dans la région d'ombre. Nous ne ferons qu'effleurer cette dernière question, liée aux solutions complexes de l'équation des caractéristiques. Les deux problèmes considérés sont seulement des cas particuliers d'une large classe d'équations du type tunnel, pour lesquelles des affirmations analogues sont valables.

§ 2 ASYMPTOTIQUE AU VOISINAGE DES ONDES DE CHOC

1. Équations de Navier-Stokes pour une suspension

1. Considérons la solution du système d'équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \operatorname{grad}) u + \operatorname{grad} v(x) = \eta \Delta u \tag{2.1}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \qquad u = \{u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\},$$

vérifiant les conditions initiales

$$u\big|_{t=0} = \operatorname{grad} f(x). \tag{2.2}$$

1a. Cette formulation du problème n'est pas habituelle. Arrêtons-nous sur le modèle physique ainsi décrit.

Considérons un mélange à deux phases : un gaz avec des gouttes de liquide ou une suspension. Pour simplifier, nous parlerons de suspension. Supposons que le volume total des particules solides soit petit en comparaison du volume du liquide et que la densité de la phase solide soit beaucoup plus grande que la densité du liquide.

Cela signifie que la viscosité effective η de la suspension diffère peu de la viscosité η du liquide. Supposons que le mélange occupe tout l'espace et se trouve dans un champ de forces changeant lentement dans le temps et dans l'espace, dont le potentiel est égal à $V_0 V(x_1/l, x_2/l, x_3/l, t/t_0)$, où V_0 est une énergie caractéristique, par unité de volume, l et t_0 les unités caractéristiques de longueur et de temps, et x_1, x_2, x_3 : les coordonnées d'un point dans l'espace à 3 dimensions. Nous considérerons que le système se trouve tout le temps dans un état d'équilibre de phase quasi-stationnaire. Ainsi nous avons un temps caractéristique t_0 plus grand que le temps de rétablissement de la pression pour l'équilibre de phase dans un tel système, de sorte que

$$\operatorname{grad} V_0 V(x_1/l, x_2/l, x_3/l, t_{/ta}) \gg \operatorname{grad} p,$$

où p est la pression.

C'est pourquoi nous négligerons dans le système classique des équations de Navier-Stockes le terme grad p, ce qui aboutit à l'équation (2.1) pour la vitesse de la phase liquide de la suspension. Cette hypothèse conduit aux relations

$$\eta / V_0 t_0 \gg 1, \qquad \rho v_0^2 \sim V_0, \qquad \text{où } v_0 = l/t_0.$$

Comme on le voit, ces relations coïncident avec celles de la section 3, § 2, ch. 1, et de plus la dimension de la viscosité est égale à la dimension de la constante de Planck, rapportée à l'unité de volume.

On peut considérer, de manière analogue, un gaz en état de saturation avec des gouttes de liquide qui y sont réparties. Ce système est constitué de deux composantes — le liquide et la vapeur. Nous ne considérerons seulement que les équations de mouvement d'une des composantes, la vapeur, puisque les gouttes de liquide jouent un rôle passif : elles maintiennent constante la pression de vapeur saturante. Les molécules de vapeur peuvent être « créées » — par évaporation des gouttes et « s'annihiler » — par condensation sur les gouttes (*).

Remarquons que l'équation de Schrödinger peut être interprétée comme une équation décrivant le comportement d'un faisceau d'électrons non interagissant (comme cela a lieu, par exemple, en optique électronique). Mais en fait le système contient en lui-même également des positrons et des photons, et des électrons peuvent être créés ou annihilés. Toutefois positrons et photons ne participent pas au modèle que décrit l'équation de Schrödinger. Mais, peut-être jouent-ils le rôle passif des gouttes.

1b. Par un changement de fonction de la forme

$$u(x,t) = \eta \operatorname{grad} \ln \psi(x,t) \tag{2.3}$$

on arrive à l'équation

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\eta^2}{2} \Delta \psi + v(x) \psi, \qquad \psi(x,0) = e^{-f(x)/\eta}. \tag{2.4}$$

Nous voyons que le système des équations de Navier-Stockes coïncide, dans une telle approche, avec l'équation de Schrödinger.

Le lien direct sous l'aspect indiqué plus haut entre l'équation de Schrödinger et le système d'équations de Navier-Stockes n'a pas été, autant que je sache, remarqué par les physiciens, quoique de nombreux travaux aient été publiés sur les rapports entre l'équation de Schrödinger et les équations du type Navier-Stockes (cf. [11]).

(*) Pour un autre modèle conduisant au même problème, cf. [74].

2. Asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes et passage à la limite pour $\eta \to 0$

2. Le système bicaractéristique au sens du § 3, ch. 1, pour l'équation (2.4) s'écrit :

$$\dot{x}_i = p_i, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{p^2}{2} - v(x) \tag{2.5}$$

Posons

$$x(0) = x_0, \qquad p(0) = \operatorname{grad} f(x_0), \qquad S(0) = f(x_0). \tag{2.6}$$

Notons

$$X(x_0, t) = x(t), \qquad P(x_0, t) = p(t), \qquad S(x_0, t) = s(t).$$

Ce problème, comme on l'a déjà indiqué, se réduit à la recherche des extrema de la fonctionnelle

$$\begin{gathered} \Phi(q(\tau)) = f(q(0)) + \int_{x_0} \left\{ \frac{\dot{q}^2}{2} - v(q) \right\} \mathrm{d}\tau \\ q(t) = x, \qquad \dot{q}(0) = \operatorname{grad} f(q(0)). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Théorème 1.1. *Supposons que le point (x, t) n'est focal pour aucune des extrémales de la fonctionnelle $\Phi(q(\tau))$, (sect. 5, § 1, ch. 2). Alors le problème (2.7) a seulement un nombre fini de solutions $q^i(\tau)$, $i = 1, \dots, k_0$ et*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\eta \operatorname{grad} \ln \sum_{i=1}^{k_0} \left| \det \left\| \frac{\partial q_k^i(0)}{\partial x_j} \right\| \right|^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{\eta} \Phi(q^i(\tau)) \right\} + O(\eta^2) \\ &= -\eta \operatorname{grad} \ln \sum_{i=1}^{k_0} \left| \det \left\| \frac{\partial X_k(x_0^i, t)}{\partial x_{0j}} \right\| \right|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{\eta} S(x_0^i, t) \right\} + O(\eta^2), \end{aligned}$$

où $x_0^i = x_0^i(x, t)$ sont définis par l'équation $X(x_0, t) = x$.

3. Corollaire. *Supposons $v(x)$ analytique :*

$$v(x) = \mathrm{Cte} + O\left(\frac{1}{|x|^{2n}}\right).$$

Alors en chaque point (x, t) il existe un minimum absolu $\Phi_{\min}(x, t)$ de la fonctionnelle Φ, qui est une fonction presque partout différentiable de x et

$$\lim_{\eta \to 0} u(x, t) = \operatorname{grad} \Phi_{\min}(x, t)$$

pour presque tout x.

On sait que $\lim\limits_{\eta \to 0} u(x,t) = \operatorname{grad} \Phi_{\min}$ est une solution discontinue du système quasi-linéaire d'équations

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + (u_0 \nabla) u_0 + \operatorname{grad} v(x) = 0,$$

donnée dans [57], [44,2], [37], [46,2], [85]. Ainsi les discontinuités de la solution u_0 ne peuvent avoir lieu que sur les surfaces

$$S(x_0^i(x,t),t) = S(x_0^j(x,t),t)$$

que nous appellerons surfaces d'équilibre et noterons Γ_{ij}. Seuls les Γ_{ij} pour lesquelles γ^i et γ^j (indices de Morse) sont nuls participent à la discontinuité de $u_0(x,t)$.

3. Ondes de choc « probabilistes » pour les solutions de l'équation de Schrödinger

4. Corollaire du théorème 2.6. *Considérons le cas* $n = 2$.

Supposons les conditions de (3, 2°, § 1) *vérifiées. Alors l'intégrale du carré du module de la solution de l'équation de Schrödinger prise le long d'une courbe* γ *telle que* $\Gamma_{ij} \cap \gamma$ *est pour tous les* (i,j) *de mesure nulle, vérifie la relation*

$$\int_\gamma |\psi(x,t)|^2 \, dl \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{k_0} \int_\gamma \frac{\varphi^2(x_0^k(x,t))}{|J(x_0^k(x,t),t)|} \, dl$$

Cela signifie que, pour $h \to 0$, on obtient l'addition classique des probabilités sur la courbe γ. L'intégrale du carré du module de la solution $\psi(x,t)$ de l'équation de Schrödinger, prise sur un segment l_{ij} de la courbe d'équilibre Γ_{ij} tel que $l_{ij} \cap \Gamma_{km}$ est de mesure nulle, si $k \neq i$ ou si $m \neq j$, vérifie la relation :

$$\int_{l_{ij}} |\psi(x,t)|^2 \, dl \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_{l_{ij}} \left| \exp\left(i \frac{\gamma^i - \gamma^j}{2} \pi \right) \frac{\varphi[x_0^i(x,t)]}{|J(x_0^i(x,t),t)|^{1/2}} + \frac{\varphi[x_0^j(x,t)]}{|J(x_0^i(x,t),t)|^{1/2}} \right|^2 dl + \sum_{m \neq i,j}^{k_0} \int_{l_{ij}} \frac{\varphi^2(x_0^m(x,t))}{|J(x_0^m(x,t),t)|} \, dl$$

Ainsi, selon les indices de Morse γ^i et γ^j, la probabilité de présence de l'électron sur la courbe Γ_{ij} sera dans l'approximation quasi-classique, par interférence, soit le double du résultat classique (si $\gamma^i - \gamma^j$ est impair) soit nulle (si $\gamma^i - \gamma^j$ est pair), si la probabilité initiale est égale à 1 dans le domaine d'influence. Cet effet qualitatif n'était pas explicité dans la littérature physique.

§ 3 PROBLÈME AUX LIMITES ET COUCHE-LIMITE

1. Considérons une équation de type tunnel de la forme

$$\Delta u - \omega^2 C^2(x) u = 0 \qquad x = (x_1, x_2) \tag{3.1}$$

$$u|_\Gamma = f(s) \qquad C^2(x) \geqslant \alpha > 0$$

où $C(x)$ et $f(s)$ sont des fonctions analytiques réelles, Γ une courbe analytique fermée de paramètre s (longueur d'arc).

Les équations des bicaractéristiques au sens de § 3, ch. 1 s'écrivent

$$\ddot{x}_i = -\frac{\partial C^2}{\partial x_i} \qquad x_0 = x_0(s) \qquad s \in \Gamma \tag{3.2}$$

$$x(0) = C[x_0(s)]\vec{n},$$

où $\vec{n}$ est la normale à la courbe Γ. Posons

$$X(s,t) = x(t).$$

On a :

Théorème 2. *Supposons que le point x, situé dans le domaine limité par la courbe Γ ne soit pas un point focal du problème* (3.2). *Alors le système d'équations $X(s,t) = x$ a un nomvre fini, k_0, de solutions*

$$s^k = s^k(x) \qquad t^k = t^k(x) \qquad k = 1, \dots, k_0$$

et la solution du problème (3.1) *peut être représentée sous la forme*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{k_0} f(s^k) \left| \frac{\partial(s^k, t^k)}{\partial(x_1, x_2)} \right|^{1/2} \exp\left[-\omega \int_0^{t_k} C^2(X(s^k, \tau))\, \mathrm{d}\tau \right] (1 + O(1/\omega))$$

où $s^k = s^k(x)$ et $t^k = t^k(x)$.

On voit facilement que dans ce cas l'asymptotique est discontinue sur les courbes Γ_{ij} telles que $\gamma^i - \gamma^j = 0$.

2. Pour l'asymptotique de solutions d'équations sont importantes non seulement les racines réelles ou imaginaires des équations caractéristiques, mais aussi les autres. L'asymptotique, dans un domaine où ne pénètre pas la particule classique (région d'ombre) de l'équation stationnaire de Schrödinger à coefficients analytiques, est déterminée par les solutions complexes des équations de Newton.

Autrement dit, s'il n'existe pas de solution réelle du problème aux limites, l'asymptotique est déterminée par les solutions complexes de ce problème. Il peut aussi exister des foyer complexes, et, de plus, l'asymptotique peut y être d'un ordre moins élevé qu'en des points voisins.

Ainsi un foyer complexe peut en certain sens se révéler plus « brillant » que les points qui l'entourent ([51,4]).

SUR L'EXISTENCE GLOBALE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS D'HAMILTON

(B. Doubnov)

Lemme. *Supposons que la fonction* $\mathscr{H}(p, y, t)$ $((p, y) \in R^n, t \in R^1)$ *continûment différentiable pour toutes les valeurs de* p, y, t, *vérifie les conditions suivantes*

$$p = O(\mathscr{H}^s) \qquad \text{pour } p \to \infty$$

$$\mathscr{H}_t = O(1 + |p|^r), \qquad \mathscr{H}_p < C(|p|),$$

où $C(x)$ *est une certaine fonction continue définie sur* $[0, \infty)$ *les nombres* r *et* s *vérifiant* $rs \leqslant 1$. *Toutes les O-estimations étant uniformes en* y *et* t.

Alors pour les fonctions $p(t), y(t)$ *vérifiant le système*

$$\begin{cases} \dot{y} = \mathscr{H}_p \\ \dot{p} = -\mathscr{H}_y \end{cases} \tag{1}$$

et les conditions

$$p(0) = p_0, \qquad y(0) = y_0 \tag{2}$$

on a les évaluations

$$|p(t)| < a(t),$$

$$|y_0 - y(t)| < b(t) \qquad \text{pour } t \geqslant 0,$$

et $a(t)$ *et* $b(t)$ *sont des fonctions définies sur* $[0, \infty)$.

Démonstration. On a

$$\dot{\mathscr{H}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathscr{H}(p(t), y(t), t) = \mathscr{H}_t.$$

Ainsi

$$\dot{\mathscr{H}} = O(1 + |\mathscr{H}|^{sr}), \qquad \text{c'est-à-dire} \quad |\dot{\mathscr{H}}| < A(1 + |\mathscr{H}|^{sr}),$$

où A est une certaine constante.

Soit

$$g(\mathcal{H}) \equiv \int_{\mathcal{H}(p_0\,.\,y_0\,.\,0)}^{\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{A(1 + |\mathcal{H}|^{sr})}$$

Il est évident que g n'est pas décroissante, a une fonction inverse g^{-1} définie sur tout l'axe réel et vérifie l'inégalité

$$|g(\mathcal{H}(p(t), y(t), t))| = \left| \int_0^t \frac{\dot{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}t}{A(1 + |\mathcal{H}|^{sr})} \right| < t\,.$$

Par conséquent,

$$|\mathcal{H}(p(t), y(t), t)| < \operatorname{Max}\{ g^{-1}(t),\ -g^{-1}(-t) \}$$

et

$$|p(t)| = 0\{[\operatorname{Max}(g^{-1}(t), -g^{-1}(-t)]^s\} \qquad \text{pour } p \to \infty,$$

ce qui démontre la première estimation du lemme. On a aussi une estimation pour $|y_0 - y(t)|$ (on peut supposer $C(x)$ décroissante).

$$|y_0 - y(t)| = \left| \int_0^t \mathcal{H}_p(p(t), y(t), t)\,\mathrm{d}t \right| < tC(a(t)) \equiv b(t)\,.$$

c.q.f.d.

Remarque. Ordinairement, si $\mathcal{H}(p, y, t)$ est une fonction algébrique de p telle que

$$\lim_{|p| \to \infty} \mathcal{H}(p, y, t) = \infty,$$

les conditions du lemme sont satisfaites.

Corollaire. *Sous les hypothèses du lemme, le problème* (1.2) *a une solution pour* $0 \leqslant t < \infty$.

1° En effet, selon le théorème de Peano, par le point $(p_0, y_0, 0)$, on peut faire passer une courbe intégrale du système (1), prolongeable jusqu'à la frontière d'une région fermée quelconque du demi-espace $t > 0$. Prenons comme région $\bar{G}$ le produit direct des trois régions suivantes

(1) $\{0 \leqslant t \leqslant T\} \subset R^1 \qquad T > 0,$

(2) $\{|P| \leqslant a(T)\} \subset R^n,$

(3) $\{|y - y_0| \leqslant b(T)\} \subset R^n.$

Des estimations du lemme résulte que la courbe intégrale du système (1), passant par $(p_0, y_0, 0)$ coupe la frontière de $\bar{G}$ en un certain point (p_1, y_1, T).

c.q.f.d.

2° Considérons le système hyperbolique faiblement connexe à caractéristiques distinctes :

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} + \sum_{k_0 + k_1 + \cdots + k_n \leqslant m} a_{k_0 k_1 \,\ldots\, k_n}(t, x) \frac{\partial^{k_0 + k_1 + \cdots + k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} u = 0 \qquad (1)$$

où

$$u = (u_1, \ldots, u_r), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

les $a_{k_0, \cdots, k_n}$ étant des matrices à r lignes et r colonnes, qui sont proportionnelles à la matrice unité pour $k_0 + k_1 + \ldots + k_n = m$. Introduisons la notation

$$A(p_0, p) \equiv A(p_0, p\,; t, x) \equiv p_0^m + \sum_{k_0 + k_1 + \cdots + k_n = m} a_{k_0 \,\ldots\, k_n}(t, x) \, p_0^{k_0} p_1^{k_1}, \ldots, p_n^{k_n} \quad (2)$$

Ici, $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Évidemment, $A(p_0, p)$ est un polynôme homogène de degré m en p_0 et dans les composantes de p.

L'équation caractéristique pour (1) est

$$A\left(\frac{\partial S}{\partial t}, \nabla S\right) = 0 \qquad (3)$$

Comme le système (1) est hyperbolique et a des caractéristiques distinctes, on peut représenter $A(p_0, p\,; t, x)$ sous la forme

$$A(p_0, p; t, x) = (p_0 + \mathscr{H}_1(p, x, t)) \ldots (p_0 + \mathscr{H}_m(p, x, t)) \qquad (3a)$$

Les fonctions $\mathscr{H}_i(p, x, t)$ seront dites fonctions d'Hamilton pour le polynôme $A(p_0, p)$.

A chaque fonction d'Hamilton correspond un système bicaractéristique pour (1) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} \qquad (4)$$

(nous omettons les indices).

Faisons les trois hypothèses suivantes :

(a) les coefficients du système (1) sont partout continûment différentiables et bornés ainsi que leurs dérivées premières en t;

(b) les racines de l'équation $A(p_0, p) = 0$, considérée comme une équation en p_0 sont, si $|p| = 1$, en modules plus grandes qu'une certaine constante $\alpha > 0$.

(c) pour $|p| = 1$, $\left|\dfrac{\partial A}{\partial p_0}\right| \geqslant \beta > 0$.

Sous ces hypothèses on a le

Lemme. *Le système* (4) *possède pour* $0 \leqslant t < \infty$ *une solution vérifiant les conditions* $x(0) = x_0$ $p(0) = p_0 \neq 0$.

Démonstration. Comme A est continûment différentiable et représentable par rapport à p_0 comme en (3a), alors $\mathscr{H}$ est continûment différentiable et en outre

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \Big/ \frac{\partial A}{\partial p_0} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial p} \Big/ \frac{\partial A}{\partial p_0} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \Big/ \frac{\partial A}{\partial p_0} \tag{7}$$

La fonction A est homogène de degré m en p_0 et p. C'est pourquoi $\mathscr{H}$ est une fonction homogène de degré un en p :

$$\mathscr{H}(p, x, t) = |p|\, \mathscr{H}(p/|p|, x, t) = |p|\, \mathscr{H}(\tilde{p}, x, t) \tag{8}$$

où $\tilde{p}$ est sur la sphère unité et par conséquent

$$|\mathscr{H}(\tilde{p}, x, t)| > \alpha .$$

Donc

$$|p| < \frac{1}{\alpha} |\mathscr{H}(p, x, t)| \tag{9}$$

$\partial \mathscr{H}/\partial t$ est également une fonction homogène de degré un en p. Par conséquent

$$\left|\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}\right| = |p| \left|\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}(p/|p|, x, t)\right| \tag{10}$$

Comme $|H| < K$ pour $|p| = 1$, où K est une certaine constante (cela résulte du caractère borné des coefficients du système (1)), en tenant compte de (b) et 5), on obtient l'inégalité

$$\left|\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}(p/|p|, x, t)\right| < M \tag{11}$$

où M est une certaine constante. C'est pourquoi

$$\left|\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}\right| < M|p| \tag{12}$$

De (6) et de l'homogénéité de A résulte l'estimation

$$\left|\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p}\right| < M_1 |p|^m \tag{13}$$

où M_1 = Cte.

Cherchons maintenant des estimations *a priori* des solutions du système (4) en utilisant les inégalités (9), (12), (13). Soient $p(t), x(t)$ vérifiant le système (4).

Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{H}(p(t), x(t), t) = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial t}$$

On le vérifie directement par substitution. Pour simplifier, nous écrirons $\dot{\mathscr{H}}$ au lieu de $\mathrm{d}\mathscr{H}/\mathrm{d}t$.

A partir de (9) et (12), nous obtenons

$$|\dot{\mathscr{H}}| < \frac{M}{\alpha}|\mathscr{H}| \tag{14}$$

d'où résulte (pour préciser, on suppose $\mathscr{H}(x_0, p_0, 0) \equiv \mathscr{H}_0 > 0$)

$$\mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{-(M/\alpha)t} < \mathscr{H} < \mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{(M/\alpha)t} \tag{15}$$

Ensuite à l'aide de (9), on obtient l'estimation

$$|p(t)| < \frac{\mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{(M/\alpha)t}}{\alpha} \tag{16}$$

mais, par (8), on obtient aussi

$$|p(t)| > \frac{\mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{-(M/\alpha)t}}{\displaystyle\operatorname*{Max}_{|p|=1} \mathscr{H}(p, t, x)} > M_2 \mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{-(M/\alpha)t} \tag{17}$$

$M_2 = \mathrm{Cte}$.

Finalement, avec (13) et la première équation du système (4), on obtient

$$|x(t) - x_0| < t_1 M_1 \mathscr{H}_0^m \mathrm{e}^{(Mm/\alpha)t} \tag{18}$$

D'après le théorème de Peano, par le point $(p_0, x_0, 0)$ on peut faire passer une courbe intégrale du système (4), que l'on peut prolonger jusqu'à la frontière d'une région fermée quelconque de l'espace (p, x, t) contenue dans $\{t > -\varepsilon\}$. Choisissons une région $\bar{G}$ qui soit le produit des trois régions suivantes :

1) la région $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (t parcourt la droite);

2) la région $M_2 \mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{-(M/\alpha)t_0} \leqslant |p| < \dfrac{1}{\alpha} \mathscr{H}_0 \mathrm{e}^{(M/\alpha)t_0}$ de l'espace (p)

3) la région $|x - x_0| \leqslant t_0 M_1 \mathscr{H}_0^m \mathrm{e}^{(Mm/\alpha)t}$ de l'espace (x).

Il résulte des estimations (16)-(18) que la courbe intégrale du système (5), passant par $(p_0, x_0, 0)$ rencontre la frontière de $\bar{G}$ en un certain point (p_1, x_1, t_0) ce qui démontre l'existence de solutions du système (4) pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$ où t_0 est quelconque.

RÉFÉRENCES

[1] R. Abraham, « Transversality in manifolds of mappings ». *Bull. Am. Math. Soc.*, 1963, vol. 63, n° 4, p. 470-474.

[2] J. Hadamard, *Leçons sur le problème de Cauchy*, 1923.

[3] L. J. Adrianova, « Sur l'irréductibilité des systèmes de n équations différentielles linéaires à coefficients quasi-périodiques ». *Vestnik Leningrad University Ser. Math. et Mec.*, 1962, n° 2, p. 14-24.

[4] P. Alexandrof, *Topologie combinatoire*, 1947.

[5] A. Alexeev, B. J. Geltchinsky, « Méthode de calcul par les rayons de l'intensité des ondes », dans : *Questions de la théorie dynamique de la propagation des ondes sismiques*. Léningrad, 1961.

[6] V. M. Babitch

1) « Solutions fondamentales des équations hyperboliques à coefficients variables ». *Math. Sborn.*, 1960, vol. 52 (94), n° **2**, n° 2.

2) « Caractère analytique du champ d'une onde non-stationnaire au voisinage d'une caustique », dans : *Questions de la théorie dynamique de la solution de l'équation des ondes dans le domaine complexe et caustique*, Léningrad, 1961, p. 115-145.

3) Idem, p. 145-153.

[7] C. N. Bernstein, *Œuvres choisies*, Tome 3. Édition Acad. Sciences U.R.S.S., 1960.

[8] G. D. Birkhoff, « Quantum mechanics and asymptotic series ». *Am. Math. Soc.*, 1933, vol. 39, p. 681-700.

[9] D. I. Blochintsev, *Acoustique d'un liquide inhomogène en mouvement*, 1946.

[10] N. N. Bogolioubov et D. V. Shirhov, *Introduction à la théorie quantique des champs*, 1957.

[11] D. Bohm, « Sur une interprétation possible de la mécanique quantique », p. 1, dans le recueil : *Questions de causalité en mécanique quantique*, 1955.

[12] M. Born, *Vorlesungen über Atom mechanic*, Berlin, 1925.

[13] M. Born, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1960.

[14] L. M. Brechovsky

1) *Ondes dans les milieux stratifiés*, Acad. Sc. U.R.S.S., 1956.

2) « Focalisation des ondes sonores dans les milieux inhomogènes ». *Journal d'Acoustique*, 1956, **2**, n° 2, p. 124-132.

[15] N. I. Vilenkin, *Analyse fonctionnelle*, 1964.

[16] M. I. Vishik, « Problème de Cauchy pour les équations à coefficients opératoriels, problème aux limites mixte pour un système d'équations différentielles et méthode approchée de solutions », *Math. Sborn.*, 1956, vol. 39 (81), n° 1, p. 51-148.

[17] M. I. Vishik et L. A. Lusternik, « Dégénérescence régulière et couche limite pour les équations différentielles linéaires avec un petit paramètre ».

[18] M. K. Gavourine
1) « Recherche approchée des valeurs propres et théorie des perturbations. »
2) « Sur l'estimation des valeurs propres et des vecteurs propres d'un opérateur perturbé ». *C. R. Acad. Science U.R.S.S.*, 1954, **96**, p. 1093-1095.

[19] A. D. Galanin, « Untersuchung der Eigenschaften des Electronen und Mesonenspins in der Klassischen Naherung », *Journal of Physics*, 1946, vol. 6, n° 1-2, p. 35 (U.R.S.S.).

[20] P. Gantmacher, *Théorie des matrices*, 1953.

[21] I. M. Gelfand, *Leçons d'algèbre linéaire*, 1951.

[22] I. M. Gelfand, E. Shilov
1) *Fonctions généralisées*, Fasc. 1 : Fonctions généralisées et opérations sur elles, 1959.
2) *Fonctions généralisées*. Fasc. 3 : Certaines questions de la théorie des équations différentielles, 1958.

[23] I. M. Glazman, *Méthodes directes d'analyse spectrale qualitative des opérateurs différentiels singuliers*, 1963.

[24] V. Glaser, *Bases de l'optique électronique*, 1957.

[25] L. Gårding, *Problème de Cauchy pour les équations hyperboliques*, 1961.

[26] L. Gårding, T. Katake, J. Leray, *Uniformisation (Problème de Cauchy)*, 1963.

[27] H. J. Groenewold, « Quasi-classical path integrals. » *Math. Fis. Medd. Kgl. danske vid. selskab*, 1956, vol. 30, n° 19, p. 1-34.

[28] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators (general theory)*, 1962.

[29] V. A. Doubrovsky et H. A. Skouridin, « Développement asymptotique en mécanique quantique ». *Journal de mathématique appliquée et de physique mathématique* 1964, **4**, n° 5, p. 848-870.

[30] N. V. Evolinski et H. A. Skouridin, « Sur la méthode asymptotique de solution des problèmes dynamiques de la théorie de l'élasticité ». *Isvestia Acad. Sc. U.R.S.S.*, série géophysique, 1956, n° 2, p. 134-143.

[31] H. Serfert et W. Threlfall, *Calcul des variations global*, 1947.

[32] A. Sommerfeld
1) *Optique*, 1953.
2) *Structure de l'atome et spectre*, 1956.

[33] E. Kamke, *Formulaire pour les équations différentielles ordinaires.*

[34] T. Kato
1) « Integration of the equation of evolution in a Banach space. » *Matematika*, 1958, **2,4**, p. 115-135.
2) Perturbation theory of semi-bounded operators. *Math. Ann.*, 1953, vol. 125, p. 435-447.

[35] A. N. Kolmogoroff et C. V. Fomin, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, fasc. 1, 1954; fasc. 2, 1960.

[36] M. G. Krein, Sur la formule des traces en théorie des perturbations. *Math. Sbornik*, 1953, vol. 33 (75), p. 597-626.

[37] N. N. Kouznetsov, B. L. Rodjestvenski, Solution du problème de Cauchy pour un système d'équations quasi-linéaires à plusieurs variables indépendantes. *Journal de math. appliquées et de physique math.*, 1961, **1**, n° 2.

[38] R. COURANT, *Équations aux dérivées partielles,* 1964.

[39] R. COURANT, D. HILBERT, *Méthodes de la Physique mathématique,* tome 2, 1951.

[40] R. COURANT, P. LAX, « The propagation of discontinuities in wave motion ». *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.,* **42,** n° 11, p. 872-876.

[41] V. KOUTCHERENKO, *Diplôme,* 1963.

[42] M. A. LAVRENTIEFF, *Sur certains problèmes incorrects de la physique mathématique,* 1962.

[43] M. A. LAVRENTIEFF et L. A. LUSTERNIK, *Bases du calcul variationnel,* vol. 1, part. 2, 1935.

[44] O. A. LADYJENSKAIA

1) « Sur les solutions des équations opérationnelles non stationnaires des équations de types différents. » *Dokl. Ac. Sc. U.R.S.S.,* 1955, vol. 102, n° 2, p. 207-210.

2) « Sur la construction des solutions discontinues des équations hyperboliques quasi-linéaires comme limites des solutions des équations paraboliques correspondantes lorsque le coefficient de viscosité tend vers 0. » *Dokl. Ac. Sc. U.R.S.S.,* 1956, vol. 111, n° 2, p. 291-294.

[45] O. A. LADYJENSKAIA et L. D. FADDEEV, « Sur la théorie des perturbations du spectre continu ». *Dokl. Ac. Sc. U.R.S.S.,* 1958, vol. 120, p. 1187-1190.

[46] P. D. LAX

1) « Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. » *Duke Math. Journal,* 1957, vol. 24, n° 4, p. 627-646.

2) « Hyperbolic systems with conservation laws, II. » *Comm. in Pure and Appl. Math.,* 1957, vol. 10, p. 537-566.

[47] L. D. LANDAU et E. M. LIFSCHITZ, *Mécanique quantique,* 1963.

[48] M. L. LEVIN et S. M. RITCHOF, « Sur le passage à l'approximation géométrique dans la théorie de l'élasticité ». *Journal d'acoustique,* 1956, vol. **2,2,** p. 173.

[49] J. LERAY, « Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients ». *Inst. for Adv. Study,* Princeton, 1952.

[50] D. LUDWIG, « Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem ». *Comm. on Pure and Appl. Math.,* 1960, vol. 13, n° 3, p. 473-508.

[51] V. P. MASLOV

1) « Asymptotique quasi-classique des solutions de certains problèmes de physique mathématique ». I, *Journal de Math. Appliquées et de Phys. math.,* 1961, vol. 1, n° 1, p. 113-128; et II, idem, vol. 1, n° 4, p. 638-663.

2) « Quasi classical asymptotic solutions of Dirac's system of equations in the large. » Outlines of the Joint Soviet American Symposium on Partial differential Equations, Acad. of Sc. of U.R.S.S., 1963.

3) « Asymptotique quasi-classique de la solution de l'équation de Dirac. » *YMH,* 1963, vol. 18, n° 4 (112), p. 220-222.

4) « Problème de la diffusion dans l'approximation quasi-classique. » *ΔAH,* 1963, vol. 151, n° 2, p. 306-309.

5) Fondations mathématiques du passage à la limite de la mécanique quantique à la mécanique classique. *Rapports Sc. des Écoles Supérieures, Sciences phys. math.,* 1958, n° 1, p. 63-67.

6) « Asymptotique des valeurs propres pour l'équation de Schrödinger dans le cas à une dimension et à symétrie radiale. » *YMH,* 1960, vol. 15, n° 4 (94), p. 220-221.

7) « Méthode de la théorie des perturbations pour la recherche du spectre des opérateurs différentiels ordinaires avec un petit paramètre comme coefficient de la dérivée du plus haut ordre. » *ΔAH*, 1956, vol. III, n° 5, p. 977-980.

8) « Sur le comportement limite de certaines grandeurs mécaniques quantiques. » *ΔAH*, 1954, vol. 44, n° 4, p. 623-626.

9) « Théorie des perturbations de l'équation multi-dimensionnelle de Schrödinger. » *YMH*, 1961, vol. 16, n° 3 (99), p. 217-218.

10) « Comportement à l'infini des fonctions propres de l'équation de Schrödinger. » *YMH*, 1964, vol. 19, n° 1 (115), p. 199-201.

11) « Théorie des perturbations des équations opérationnelles linéaires et problème du petit paramètre figurant dans les équations différentielles. » *ΔAH*, 1956, vol. III, n° 3, p. 531-534.

12) « Sur le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique dans le cas à plusieurs dimensions. » *YMH*, 1960, vol. 15, n° 1 (91), p. 213-219.

13) « Théorie des perturbations pour le passage du spectre discret au spectre continu. » *Δ AH*, 1956, vol. 109, n° 2, p. 267-270.

14) Méthode W.K.B. dans le cas multi-dimensionnel », supplément au livre d'*Introduction à la méthode de l'intégrale de phase*, 1965.

[52] J. Milnor, *Théorie de Morse*, 1965.

[53] M. Morse, « The calculus of variations in the large ». *Am. Math. Soc. Colloq. Publications*, 1934, vol. 18.

[54] P. Morse et Fesbach, *Méthode de la Physique théorique*, vol. I, 1958; vol. II, 1960.

[55] Cécile Morette, « On the definition and approximation of Feynman path integral ». *Phys. Rev.*, vol. 81, p. 848-852, 1951.

[56] I. P. Natanson, *Théorie des fonctions de variable réelle*, 1950.

[57] O. A. Oleinik

1) « Sur la construction de la solution généralisée du problème de Cauchy pour l'équation quasi-linéaire du premier ordre par l'introduction d'une viscosité non nulle. » *YMH*, 1959, vol. 14, n° 2 (86), p. 160-164.

2) « Solutions discontinues des équations différentielles non-linéaires. » *YMH*, 1959, vol. 12, n° 3 (75), p. 3-73.

[58] W. Pauli, « Dirac's Wellengleichung des Electrons und geometrisch Optik ». *Helv. Phys. Acta*. 1932, vol. 5, n° 3, p. 179.

[59] I. J. Petrovsky

1) « Über das Cauchysche Problem für system von partiellen Differential Gleichungen. » *Math. Sbornik*, **2** (49), p. 815-870.

[60] G. I. Petrochev, « Méthode de construction de solutions des problèmes pour les milieux continus ». *Questions de la théorie dynamique de la propagation des ondes sismiques*, vol. I, 1957.

[61] A. I. Pozner, I. V. Sukarski, « Sur les discontinuités de la fonction de Green du problème mixte pour l'équation des ondes ». *Mat. Sbornik*, 1960, vol. 51 (93), **1**, p. 3-26.

[62] L. C. Pontriargin

1) *Groupes continus*, 1954.

2) « Variétés lisses et leurs applications à la théorie de l'homotopie. » *Trav. de l'Inst. Math. V. A. Steklov*, vol. XLV, 1955.

[63] I. P. Pitief, « Sur le lien entre les mécaniques classique et ondulatoire ». *YMH*, 1963, vol. 149, n° 2, p. 298-301.

[65] F. Riesz et B. Sz-Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle,* 1954.

[66] J. Rubinow et J. Keller, « Asymptotic solution of Dirac equation ». *Phys. Rev.,* 1963, vol. 131, n° 6, p. 2789-2796.

[67] I. B. Rummer, *Études d'optique pentadimensionnelle,* 1956.

[68] S. M. Rytov, « Oscillations modulées et ondes ». *Travaux P.I.A.N.,* 1938, vol. 2, n° 1, p. 1.

[69] I. S. Sarrasof, « Calcul des valeurs propres pour l'équation de Schrödinger ». *Diplôme,* 1960.

[70] B. Sz-Nagy, « Spectraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes ». *Erg. der Math.,* Springer, 1942.

[71] V. I. Smirnov, *Cours de Mathématiques supérieures,* vol. IV, 1951.

[72] S. L. Sobolev

1) « Équation d'onde pour un milieu inhomogène. » *Trav. Sism. Ac. Sc. U.R.S.S.,* 1930, n° 6.

2) *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique,* 1950.

[73] M. E. Solomiak, « Sur les valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur perturbé ». *Δ AH,* 1953, vol. 90, p. 29-32.

[74] S. I. Solyan, R. V. Koklov, « Propagation des ondes acoustiques d'amplitude finie dans un milieu dissipatif ». *Vest. Univ. Moscou,* 1961, n° 3, p. 52-61.

[75] P. A. Storrocks, *Optique électronique statistique et dynamique.* Théorie de la focalisation dans les lentilles, les déflecteurs et les accélérateurs, 1958.

[76] E. C. Titchmark, *Décomposition en fonctions propres, liées aux opérateurs différentiels du second ordre,* vol. 2, 1961.

[77] A. N. Tychonov

1) « Sur la solution des problèmes incorrectement posés et la méthode de régularisation. » *Δ AH,* 1953, vol. 151, n° 3, p. 501.

2) « Sur la régularisation des problèmes incorrectement posés. » *Δ AH,* 1963, vol. 153, n° 3, p. 49.

[78] A. N. Tychonov et B. V. Glasko, « Sur la solution approchée des équations de Fredholm de première espèce ». *Journal de Math. appliquées et de Phys. math.,* 1964, vol. 4, n° 2, p. 564-570.

[79] M. V. Fedoriouk

1) « Méthode de la phase stationnaire, points du col voisins dans le cas multidimensionnel. » *Journal de Math. appliquées et phys. math.,* 1964, vol. 4, p. 671-683.

2) « Méthode de la phase stationnaire pour les intégrales multiples. » Idem, 1962, vol. 2, n° 1, p. 145-150.

[80] R. Feynmann, *Space-time approch to non-relativistic quantum mechanics.*

[81] V. A. Fock

1) Généralisation des formules de réflexion au cas d'une onde quelconque sur une surface de forme quelconque.
Journal de Phys. théorique et exp., 1950, vol. 20, n° 11, p. 966-978.

2) *Travaux sur la théorie quantique du champ,* 1957.

3) « Sur les transformations canoniques en mécanique classique et quantique. » *Vestnik Univ. Moscou,* 1959, n° 16, p. 67.

4) « Sur les transformations canoniques en mécanique classique et quantique. » Appendice au livre de Dirac : *Principes de la mécanique quantique*, 1960.

[82] F. FRIEDLANDEV, *Impulsions sonores*, 1962.

[83] K. O. FRIEDRICHS, J. B. KELLER, « Geometrical Acoustics. II, Diffraction, Reflection and refraction of a weak spherical or cylindrical shock at a plane interface ». *J. Appl. Phys.*, **26**, p. 961-966.

[84] E. HILLE, R. S. PHILIPPS, *Analyse fonctionnelle et semi-groupes*, 1962.

[85] E. HOPF, « The partial differential equations $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. » *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1950, vol. 3, n° 3, p. 201-230.

[86] S. SCHWEBER, *Introduction à la théorie quantique relativiste du champ*, 1963.

[87] L. SCHIFF, *Mécanique quantique*, 1957.

[88] E. E. SCHNOLL, « Sur le comportement des fonctions propres de l'équation de Schrödinger ». *Mat. Sborn.*, 1957, vol. 42 (84), n° 3.

[89] J. ELLIOT, « The equation of evolution in a Banach space ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 1962, vol. 103, n° 3, p. 470-483.

[90] A. ERDËLYI, *Développements asymptotiques*, 1962.

COMPLÉMENT 1

UNE CLASSE CARACTÉRISTIQUE INTERVENANT DANS LES CONDITIONS DE QUANTIFICATION

(V. I. ARNOL'D)

Récemment V. P. Maslov donna un traitement mathématiquement rigoureux à plusieurs dimensions des méthodes asymptotiques globales du type « quasi-classique », c'est-à-dire pour un nombre arbitraire de variables conjuguées [1, 2]. Il apparaissait dans les formules asymptotiques certains entiers reflétant des propriétés homologiques de courbes tracées sur des surfaces de l'espace de phase, et ayant des liens étroits avec les indices de Morse des problèmes variationnels correspondants. En particulier, Maslov définissait une classe de cohomologie à 1 dimension à valeurs entières, les valeurs sur les cycles de base intervenant dans ce qu'on appelle les « conditions de quantification ».

Dans cette note, nous donnons de nouvelles formules pour le calcul de cette classe de cohomologie. Cette classe est caractéristique dans la catégorie des fibrés vectoriels réels dont la complexification est triviale et trivialisée, et aussi dans certaines catégories plus larges.

§ 1 NOTATIONS

1.1 Espace de phase

L'espace de phase sera l'espace numérique réel à $2n$-dimensions

$$R^{2n} = \{x\}, \qquad x = q,p\ ; \qquad q = q_1,\dots,q_n; \quad p = p_1,\dots,p_n.$$

Dans R^{2n} nous considérerons les trois structures suivantes :

1. *la structure euclidienne*, donnée par la forme quadratique

$$(x,x) = p^2 + q^2;$$

2. *la structure complexe*, donnée par l'opérateur

$$I : R^{2n} \to R^{2n}, \quad I(p,q) = (-q,p); \qquad z = p + iq, \; C^n = \{z\};$$

3. *la structure symplectique*, donnée par le produit scalaire antisymétrique

$$[x,y] = (Ix,y) = -[y,x] \tag{1}$$

Les groupes d'automorphismes de R^{2n} conservant ces structures sont appelés respectivement groupe orthogonal $O(2n)$, groupe linéaire complexe $\mathrm{GL}(n,C)$, groupe symplectique $\mathrm{Sp}(n)$. De (1) on déduit le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Un automorphisme préservant deux de ces structures préserve aussi la troisième, de telle sorte que :*

$$O(2n) \cap \mathrm{GL}(n,C) = \mathrm{GL}(n,C) \cap \mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n) \cap O(2n) = U(n).$$

Les automorphismes préservant deux (et donc trois) de ces structures forment le groupe unitaire $U(n)$. Le déterminant (noté det.) d'un automorphisme unitaire est un nombre complexe de module 1. On construit ainsi une application de $U(n)$ sur le cercle

$$\mathrm{SU}(n) \to U(n) \overset{\det}{\to} S^1 \tag{2}$$

qui est évidemment une fibration (la fibre est le groupe $\mathrm{SU}(n)$ des opérateurs automorphismes unitaires de déterminant 1).

1.2 La grassmannienne lagrangienne $\Lambda(n)$

Nous considérons un n-plan $R^n \subset R^{2n}$. Il est appelé lagrangien si le produit scalaire antisymétrique de 2 vecteurs quelconques de R^n est nul. Par exemple les plans $p = 0$ et $q = 0$ sont lagrangiens (*).

La *variété* de tous les sous-espaces lagrangiens (non orientés) de R^{2n} est appelée la grassmannienne lagrangienne $\Lambda(n)$.

Du point de vue complexe, les plans lagrangiens peuvent être appelés « presque réels » puisqu'on a :

Lemme 1.2. *Le groupe unitaire $U(n)$ agit sur $\Lambda(n)$ transitivement et son sous-groupe* ***stationnaire*** *est $O(n)$.*

Démonstration. Soit λ un plan lagrangien. D'après la relation (1), cela signifie que $I\lambda$ est orthogonal à λ. Soit $\lambda' \in \Lambda(n)$, et ξ et ξ' des référentiels orthogonaux dans λ et λ'. Alors l'automorphisme de R^{2n} amenant ξ sur ξ' et $I\xi$ sur $I\xi'$ est unitaire.

(*) Le nom provient des crochets de Lagrange en mécanique classique.

De ce lemme, il découle que $\Lambda(n)$ est une variété, $\Lambda(n) = U(n)/O(n)$. Il existe donc une fibration

$$O(n) \to U(n) \to \Lambda(n) \tag{3}$$

1.3 **L'application** $\mathrm{Det}^2 : \Lambda(n) \to S^1$

Le déterminant d'un automorphisme orthogonal $A \in O(n) \subset U(n)$ vaut ± 1. Par conséquent le carré du déterminant d'un automorphisme unitaire transportant le plan $p = 0$ dans le plan lagrangien λ ne dépend que de λ. On construit de cette manière une application

$$\mathrm{Det}^2 : \Lambda(n) \to S^1 .$$

Notons $S\Lambda(n)$ l'ensemble des plans lagrangiens $\lambda \in \Lambda(n)$ tels que $\mathrm{Det}^2 \lambda = 1$. Sur cet ensemble, le groupe $\mathrm{SU}(n)$ des automorphismes unimodulaires agit transitivement et le sous-groupe stabilisateur de chaque point est isomorphe au groupe des rotations $\mathrm{SO}(n)$. Ainsi $S\,\Lambda(n) = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$ est une variété.

Nous obtenons donc un diagramme (évidemment) commutatif de six fibrations :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{SO}(n) & \to & O(n) & \xrightarrow{\det} & S^0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{SU}(n) & \to & U(n) & \xrightarrow{\det} & S^1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle z^2} \\
S\Lambda(n) & \to & \Lambda(n) & \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} & S^1
\end{array}$$

dans lequel z^2 est l'application du cercle $(z : e^{i\varphi} \to e^{2i\varphi} = z^2)$.

1.4 **La classe de cohomologie** $\alpha \in H^1(\Lambda(n), \Omega)$

Lemme 1.4.1. *Le groupe fondamental de $\Lambda(n)$ est le groupe cyclique libre :*

$$\pi_1(\Lambda(n)) = Z$$

et son générateur s'envoie sur le générateur de $\pi_1(S^1)$ par l'application induite par Det^2.

Ceci résulte des suites exactes d'homotopie de la colonne de gauche et de la ligne du bas du diagramme de la section 1.3.

Corollaire 1.4.2. *Les groupes d'homologie et de cohomologie à une dimension de $\Lambda(n)$ sont libres et cycliques :*

$$H_1(\Lambda(n), Z) \simeq H^1(\Lambda(n), Z) \simeq \pi_1(\Lambda(n)) \simeq Z .$$

Comme générateur α du groupe de cohomologie $H^1(\Lambda(n), Z)$, nous prenons le nombre de rotations de Det^2, c'est-à-dire le cocycle dont la valeur sur une courbe fermée $\gamma : S^1 \to \Lambda(n)$ est égale au degré de

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} \Lambda(n) \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} S^1$$

(Ici S^1 est le cercle $e^{i\varphi}$ orienté dans le sens des φ croissants.)

Exemple 1.4.3. Soit λ un plan lagrangien : $\lambda \in \Lambda(n)$. Considérons les automorphismes $e^{i\varphi}E \in U(n)$. Les plans lagrangiens $e^{i\varphi}\lambda$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ forment une courbe fermée $\gamma : S^1 \to \Lambda(n)$ car $e^{i\pi}E = -E$.

La valeur de la classe α sur γ vaut n.

En effet $\det(e^{i\varphi}E) = e^{in\varphi}$, et par conséquent

$$\mathrm{Det}^2\, e^{i\varphi}\lambda = e^{2in\varphi}\,\mathrm{Det}^2\,\lambda .$$

1.5 Variétés lagrangiennes

Soit M une sous-variété de dimension n de l'espace de phase R^{2n}. La variété M est dite lagrangienne si le plan tangent en chaque point est lagrangien. Par exemple, dans le cas $n = 1$, toute courbe M de l'espace de phase R^2 est lagrangienne.

Soit M une variété lagrangienne. Nous considérons l'application tangente :

$$\tau : M \to \Lambda(n)$$

qui, à chaque point $x \in M$, fait correspondre le sous-espace $\tau x \in \Lambda(n)$ parallèle au plan tangent à M en x.

La classe de cohomologie $\alpha \in H^1(\Lambda(n), Z)$ introduite précédemment induit sur M une classe de cohomologie

$$\alpha^* = \tau^*\alpha \in H^1(M, Z).$$

La valeur que prend α^* sur un lacet orienté $\gamma : S^1 \to M$ est défini comme le nombre de rotations du carré du déterminant du plan tangent, c'est-à-dire comme le degré de

$$S^1 \xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{\tau} \Lambda(n) \xrightarrow{\mathrm{Det}^2} S^1$$

Le but de cette note est la preuve de l'affirmation suivante :

Théorème 1.5. *La classe de cohomologie $\alpha^* \in H^1(M, Z)$ coïncide avec « l'indice des courbes fermées sur la variété lagrangienne M » introduit par Maslov dans* [1].

§ 2 PREUVE DU THÉORÈME 1.5

L'indice de Maslov est défini comme l'indice d'intersection avec un $(n-1)$-cycle bilatère sur M^n : le cycle singulier.

2.1 Le cycle singulier

Soit M une variété lagrangienne de dimension n. Considérons la projection $f : M \to R^n$ de la variété M sur le plan $p = 0$; $f(p, q) = q$; l'ensemble Σ des points de M où le rang de la différentielle de f est inférieur à n est appelé lieu singulier de f. Considérant le lieu singulier Σ, Maslov formule les propositions 1 à 5 suivantes (les démonstrations sont données plus loin dans les paragraphes 3 et 4).

Théorème 2.1. *Par une rotation unitaire arbitrairement petite, la variété peut être mise en « position générale » relativement à la projection f, de telle sorte que les propositions suivantes soient vraies :*

Proposition 1. *Le lieu singulier Σ se décompose en une variété Σ^1 ouverte, de dimension $n-1$ sur laquelle* df *est de rang $n-1$, et le bord $(\Sigma - \Sigma^1)$ est de dimension strictement inférieure à $n-2$, de telle sorte que Σ définit un $(n-1)$-cycle (non orienté) de M.*

Proposition 2. *Ce cycle est bilatère.*

Le choix d'un côté positif pour Σ peut être fait de la manière suivante.

Proposition 3. *Dans un voisinage d'un point $x \in \Sigma^1$, la variété lagrangienne est donnée par n équations de la forme*

$$q_k = q_k(p_k, q_{\hat{k}}),$$

$$p_{\hat{k}} = p_{\hat{k}}(p_k, q_{\hat{k}}),$$

où $\hat{k} = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ pour un certain $k : 1 \leqslant k \leqslant n$.

Manifestement, dans un voisinage d'un tel point x, le lieu singulier Σ^1 est donné par l'équation $\partial q_k / \partial p_k = 0$.

Proposition 4. *Lorsqu'on traverse Σ^1, la quantité $\partial q_k / \partial p_k$ change de signe. Pour le côté positif de Σ^1, on peut donc prendre la région pour laquelle $\partial q_k / \partial p_k > 0$.*

Proposition 5. *Une telle définition du côté positif est correcte, c'est-à-dire ne dépend pas du choix du système de coordonnées* $p_k, q_{\hat{k}}$ $(k = 1, \dots, n)$ *que nous utilisons.*

2.2 L'indice de Maslov ind $\in H^1(M, \Omega)$

Supposons donné sur la variété lagrangienne M en « position générale », au sens du théorème 2.1, un arc γ, transverse au cycle Σ et dont les points extrêmes n'appartiennent pas au lieu singulier :

$$\partial\gamma = x_1 - x_0, \qquad x_1 \notin \Sigma, \qquad x_0 \notin \Sigma.$$

Maslov appelle l'indice de γ (ind γ) son indice d'intersection avec Σ, c'est-à-dire la différence entre le nombre ν_+ de points où γ traverse Σ du côté négatif au côté positif et le nombre ν_- de points où γ traverse Σ du côté positif au côté négatif

$$\operatorname{ind}\gamma = \nu_+ - \nu_-$$

Exemple. Soit $n = 1$ et M une courbe dans le plan p, q (fig. 1). Lorsque M est en position générale, Σ est constitué de points isolés $a, b, c, \dots$ Les indices de courbes γ_i $(\partial\gamma_i = x_i - x_0)$ sont égaux respectivement à 0, 1, 0, 1, 2.

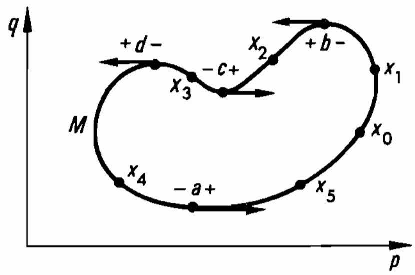


Fig. 1.

Théorème 2.2. *L'indice d'une courbe fermée orientée γ sur une variété lagrangienne en position générale ne dépend que de la classe d'homologie de γ et est la valeur sur le cycle γ d'une classe de cohomologie de M, de dimension 1 à valeurs entières :* ind $\in H^1(M, Z)$.

2.3 Indices de courbes sur la grassmannienne $\Lambda(n)$

Les démonstrations des théorèmes (1.5, 2.1, 2.2) sont basées sur la construction suivante :

dans la variété des plans lagrangiens $\Lambda(n)$, nous extrayons les ensembles $\Lambda^k(n)$ des plans ayant une intersection de dimension k avec un plan fixe $\sigma \in \Lambda(n)$

(précisément le plan $q = 0$). Il se trouve que la fermeture $\overline{\Lambda^1(n)}$ détermine un cycle (non orienté) de codimension 1 (voir 3.2.2).

Dans la section 3.5, nous démontrons :

Lemme fondamental. *Plongé dans* $\Lambda(n)$, $\Lambda^1(n)$ *est bilatère, c'est-à-dire qu'il existe un champ continu de vecteurs transverses à* $\Lambda^1(n)$ *et tangents à* $\Lambda(n)$.

Un tel champ de vecteurs est construit au moyen des orbites de $S^1 = \{e^{i\theta}\}$ dans $\Lambda(n)$. Dans le paragraphe 3, nous démontrons :

Lemme 3.5.1. *Tout cercle*

$$\theta \to e^{i\theta}\lambda, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad \lambda \in \Lambda(n) \tag{4}$$

est transverse à $\Lambda^1(n)$.

Pour côté positif de $\Lambda^1(n)$ nous choisissons celui vers lequel sont dirigés les vecteurs vitesses des courbes (4).

Le fait que $\Lambda^1(n)$ soit bilatère nous permet de définir

$$\mathrm{Ind} \in H^1(\Lambda(n), Z)$$

comme l'indice d'intersection des courbes fermées orientées de $\Lambda(n)$ avec $\overline{\Lambda^1(n)}$ (Définition 3.6.1).

L'indice Ind est relié à l'indice de Maslov ind et à la classe de cohomologie α de la section 1.4. Plus précisément, il s'avère que le choix d'un côté positif pour $\Lambda^1(n)$ au moyen des courbes (4) est cohérent avec la définition du côté positif de Σ^1 dans la section 1.2.

Dans le paragraphe 4, nous démontrons :

Lemme 4.3.1. *L'indice* Ind *engendre l'indice de Maslov* ind *par l'application tangentielle* $\tau: M^n \to \Lambda(n)$: $\mathrm{ind} = \tau^* \mathrm{Ind}$ *c'est-à-dire que pour chaque courbe* $\gamma : S^1 \to M$, *nous avons* $\mathrm{ind}\,\gamma = \mathrm{Ind}\,\tau\gamma$.

Preuve du théorème 1.5. Le calcul des indices des courbes (4) (voir l'exemple 3.6.2) donne $\mathrm{Ind}\,\gamma = n = \alpha(\gamma)$ (Exemple 1.4.3). Mais $H^1(\Lambda(n), Z) = Z$ (corollaire 1.4.2). Donc $\mathrm{Ind} = \alpha$. Par le lemme 4.3.1, $\mathrm{ind} = \tau^*\mathrm{Ind}$ et par la définition 1.5, $\alpha^* = \tau^*\alpha$. Ainsi $\mathrm{ind} = \alpha^*$. c.q.f.d.

§ 3 DÉMONSTRATION DU LEMME FONDAMENTAL

Dans cette section, nous montrons que le cycle singulier $\overline{\Lambda^1(n)}$ est bilatère et nous définissons l'indice $\mathrm{Ind} \in H^1(\Lambda(n), Z)$.

3.1 Fonctions génératrices

Soit M une variété de l'espace de phase donnée dans un voisinage simplement connexe du point $q = q_0, p = p_0$ par une équation de la forme $p = p(q)$.

Lemme 3.1.1. *La variété M est lagrangienne si et seulement s'il existe une « fonction génératrice » $s(q)$ telle que*

$$p = \frac{\partial s}{\partial q} \tag{5}$$

Démonstration. Soit $s(q) = \displaystyle\int_{q_0}^{q} p(q)\,\mathrm{d}q$; pour que cette intégrale soit indépendante du chemin, il faut et il suffit que $\mathrm{d}(p\,\mathrm{d}q) = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ soit nulle sur M. Mais la valeur de $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ sur le bivecteur $\xi \wedge \eta$ est exactement égale au produit scalaire antisymétrique $[\xi, \eta]$, de telle sorte que $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ égal à zéro sur M est une condition nécessaire et suffisante pour que M soit lagrangienne. La fonction $s(q)$ satisfait (5). Ainsi le lemme est démontré.

Remarque 3.1.2. La fonction $s(q)$ est déterminée à une constante additive près. Dans le cas particulier où M est un sous-espace linéaire, cette constante peut être choisie de telle sorte que $s(q)$ soit une forme quadratique. De ceci il suit :

Corollaire 3.1.3. *L'ensemble des sous-espaces lagrangiens de la forme $p = p(q)$ (c'est-à-dire transverses au plan $q = 0$) forme dans la variété $\Lambda(n)$ un ouvert $\Lambda^0(n)$, difféomorphe à l'espace linéaire D de toutes les matrices symétriques d'ordre n. Le difféomorphisme est donné par l'application*

$$\varphi : D \to \Lambda^0(n) \qquad \varphi(S) = \lambda_S \qquad (S \in D, \lambda_S \in \Lambda^0(n))$$

où λ_S désigne le plan $p = Sq$.

La démonstration s'obtient à partir de (5) en posant $s(q) = \frac{1}{2}(Sq, q)$.

Corollaire 3.1.4. *La variété $\Lambda(n)$ a pour dimension :*

L'espace D des matrices symétriques est $R^{n(n+1)/2}$. Ainsi nous avons démontré :

$$\dim \Lambda(n) = n(n+1)/2.$$

3.2 Le cycle singulier $\Lambda^1(n)$

Notation 3.2.0. Soit σ le plan lagrangien $q = 0$. Nous désignons par $\Lambda^k(n)$ l'ensemble des plans lagrangiens $\lambda \in \Lambda(n)$ dont l'intersection avec le plan σ est de dimension k.

Lemme 3.2.1. *L'ensemble $\Lambda^k(n)$ est une variété ouverte de codimension $k(k+1)/2$ dans la grassmanienne lagrangienne $\Lambda(n)$.*

Démonstration. Nous associons à chaque plan $\lambda \in \Lambda^k(n)$ son intersection avec le plan σ. Ceci définit une application de $\Lambda^k(n)$ sur la variété grassmanienne $G_{n,k}$ de tous les sous-espaces de dimension k du n-plan σ. Il est facile de vérifier que cette application définit une fibration

$$\Lambda^0(n-k) \to \Lambda^k(n) \to G_{n,k}.$$

D'après le corollaire 3.1.4 $\dim \Lambda^0(n-k) = \dfrac{(n-k)(n-k+1)}{2}$. Puisque $\dim G_{n,k} = k(n-k)$, on trouve :

$$\dim \Lambda^k(n) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} + k(n-k) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \dim \Lambda(n) - \frac{k(k+1)}{2}$$

c.q.f.d.

Corollaire 3.2.2. *$\overline{\Lambda^1(n)}$ détermine un cycle (non orienté) de codimension* 1 *dans $\Lambda(n)$.*

Démonstration. On peut considérer algébriquement la variété $\Lambda(n)$. La fermeture $\overline{\Lambda^1(n)} = \bigcup_{k \geqslant 1} \Lambda^k(n)$ est une sous-variété algébrique de codimension 1 ($k(k+1)/2 \geqslant 1$ pour $k \geqslant 1$). Par conséquent $\overline{\Lambda^1(n)}$ détermine une chaîne (non orientée). Le lieu singulier de la variété $\overline{\Lambda^1(n)}$ est la sous-variété algébrique $\overline{\Lambda^2(n)} = \bigcup_{k \geqslant 2} \Lambda^k(n)$ de codimension 3 dans $\Lambda(n)$ puisque $k(k+1)/2 \geqslant 3$ pour $k \geqslant 2$. Ainsi le bord de la chaîne $\overline{\Lambda^1(n)}$ est nul.

c.q.f.d.

3.3 Coordonnées sur $\Lambda(n)$

Nous considérons un plan lagrangien $\lambda \in \Lambda(n)$. Soit $\lambda \in \Lambda^k(n)$, c'est-à-dire supposons que l'intersection $\lambda \cap \sigma$ soit de dimension k. Nous introduisons des coordonnées sur $\Lambda(n)$ dans un voisinage de λ.

Notation 3.3.0. Soit K un sous-ensemble de $1, 2, \ldots, n$. Notons σ_K le plan de coordonnées lagrangien

$$\sigma_K = \{ p, q : p_k = 0, q_l = 0 \,\forall\, k \in K, \forall\, l \notin K \}.$$

Lemme 3.3.1. *Le plan $\lambda \in \Lambda^k(n)$ est transverse à l'un des C_n^k plans de coordonnées σ_K, où K a k éléments.*

Démonstration. L'intersection $\lambda \cap \sigma = \lambda_0$ est de dimension k. Par conséquent, le plan λ_0 dans σ est transverse à l'un des C_n^k plans de coordonnées à $(n - k)$-dimensions $\tau = \sigma_K \cap \sigma$, c'est-à-dire qu'il existe K pour lequel $\lambda_0 \cap \sigma_K \cap \sigma = 0$. Nous allons montrer que le plan σ_K est transverse à $\lambda : \sigma_K \cap \lambda = 0$.

Par hypothèse $\lambda_0 + \tau = \sigma$. Du fait que λ et σ_K sont lagrangiens, on a $[\lambda, \lambda_0] = 0$ (puisque $\lambda_0 \subset \lambda$) et $[\sigma_K, \tau] = 0$ (car $\tau \subset \sigma_K$). Ainsi

$$[\lambda \cap \sigma_K, \lambda_0 + \tau] = 0 \quad \text{soit} \quad [\lambda \cap \sigma_K, \sigma] = 0.$$

Mais le nombre maximum de vecteurs de R^{2n} linéairement indépendants et 2 à 2 orthogonaux pour $[\,,\,]$ est n. Par conséquent le n-plan σ est un plan simplectique maximal ce qui implique $(\lambda \cap \sigma_K) \subset \sigma$. Donc

$$(\lambda \cap \sigma_K) \subseteq (\lambda \cap \sigma \cap \sigma_K) = (\lambda_0 \cap \tau) = 0. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Du lemme qui vient d'être démontré il suit que chaque plan $\lambda \in \Lambda(n)$ est transverse à l'un des 2^n plans de coordonnées σ_K. Cela nous permet de construire un atlas de 2^n cartes pour $\Lambda(n)$.

L'une des applications a été construite dans la section 3.1.1 : la région $\Lambda^0(n)$ est difféomorphe à l'espace $D = R^{n(n+1)/2}$ des matrices symétriques, le difféomorphisme $\varphi : D \to \lambda^0(n)$ est défini par

$$\varphi(S) = \lambda_S = \{ p, q : p = Sq \} \qquad \forall\, S \in D.$$

Notation 3.3.2. Nous désignons par I_K l'opérateur multipliant par i les variables $z_\kappa = p_\kappa + iq_\kappa$, $\kappa \in K$:

$$I_K : R^{2n} \to R^{2n}$$

de sorte que si $\eta = I_K \xi$,

$$q_\kappa(\eta) = +\, p_\kappa(\xi) \qquad p_\kappa(\eta) = -\, q_\kappa(\xi) \qquad \forall\, \kappa \in K$$

$$q_\nu(\eta) = q_\nu(\xi) \qquad p_\nu(\eta) = p_\nu(\xi) \qquad \forall\, \nu \notin K$$

L'opérateur I_K est unitaire et par conséquent transforme les plans lagrangiens en plans lagrangiens. En particulier, $I_K\sigma = \sigma_K$. Ainsi I_K transforme l'ensemble $\Lambda^0(n)$ des plans transverses à σ dans l'ensemble $I_K\Lambda^0(n)$ des plans transverses à σ_K. Par la formule

$$\varphi_K(S) = I_K\lambda_S \in \Lambda(n), \qquad S \in D \tag{6}$$

on obtient donc un difféomorphisme $\varphi_K : D \to I_K\Lambda^0(n)$, où $I_K\Lambda^0(n)$ est l'ensemble de tous les plans lagrangiens transverses à σ_K.

Par le lemme 3.3.1, les 2^n régions $I_K\Lambda^0(n)$ recouvrent entièrement $\Lambda(n)$, et la formule (6) donne un atlas de $\Lambda(n)$ composé de 2^n cartes.

Lemme 3.3.3. *L'ensemble $\Lambda^k(n)$ est recouvert par C_n^k ouverts $\varphi_K D$ (K comprenant k éléments) et, dans les coordonnées $S = \varphi_K^{-1}\lambda$, est donné par $k(k+1)/2$ équations linéaires $S_{\mu\nu} = 0$ $(\forall\mu \in K, \forall\nu \in K)$.*

Démonstration : soit $k = \dim \lambda \cap \sigma$. Par le lemme 3.3.1 il existe un ensemble K de k éléments tel que $\lambda \cap \sigma_K = 0$. Par conséquent le plan $I_K\lambda = I_K^{-1}\lambda$ est transverse à σ et a une équation $p = Sq$. L'intersection $(I_K\lambda) \cap \sigma_K = I_K(\lambda \cap \sigma)$ est de dimension k. Mais sur σ_K, on a $q_l = 0$ $(\forall l \notin K)$, $p_m = 0$ $(\forall m \in K)$. Par conséquent, sur un sous-espace à k dimension $q_l = 0$ $(l \notin K)$ du plan $p = 0, k$ des fonctions p_μ $(p = Sq, \mu \in K)$ doivent s'annuler identiquement. Ceci est équivalent aux équations $S_{\mu\nu} = 0$. c.q.f.d.

3.4 Paramétrisation unitaire

Au moyen des coordonnées S introduites précédemment, il est possible d'exprimer les transformations unitaires transformant le plan « imaginaire pur » $p = 0$ en le plan $\lambda_S \in \Lambda^0(n)$.

Il est évident que l'on a :

Lemme 3.4.1. *Soient S, U, 2 matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes. Alors*

$$\left(U = \frac{E - \mathrm{i}S}{E + \mathrm{i}S}\right) \Leftrightarrow \left(S = -\mathrm{i}\frac{E - U}{E + U}\right) \tag{7}$$

et si S et U sont liées par les formules (7) :

S est auto-adjointe si et seulement si U est unitaire;

S est symétrique si et seulement si U est symétrique.

Ainsi les formules (7) établissent un difféomorphisme entre l'espace D des matrices S symétriques réelles et la variété des matrices U unitaires, symétriques, non singulières. (La matrice unitaire U est non singulière si -1 n'est pas une valeur propre; pour une matrice réelle symétrique S, on a toujours $\det(E + \mathrm{i}S) \neq 0$).

Il est toujours possible de prendre la racine carrée d'une matrice unitaire non singulière, en la définissant par continuité à partir de $\sqrt{E} = E$.

Lemme 3.4.2. *Soit $\lambda_S \in \Lambda^0(n)$ un plan $p = Sq$. Alors la matrice*

$$\sqrt{U} = \frac{E - \mathrm{i}S}{\sqrt{E + S^2}}$$

donne une transformation unitaire envoyant le plan $p = 0$ dans le plan λ_S.

Démonstration. Puisque S est symétrique et réelle, $\sqrt{E + S^2}$ est réelle, et $\sqrt{U}$ envoie le plan $p = 0$ dans la même image que $E - \mathrm{i}S$. Cette dernière transformation envoie le point

$$(0, q) \in R^{2n} \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{i}q \in \mathrm{i}R^n \subset C^n$$

dans le point

$$\mathrm{i}q + Sq \in C^n \qquad \text{i.e.} \qquad (Sq, q) \in \lambda_S \subset R^{2n}$$

c.q.f.d.

Corollaire 3.4.3. *L'application* $\mathrm{Det}^2 : \Lambda(n) \to S^1$ *de la section* 1.3 *est donnée par la formule*

$$\mathrm{Det}^2 \lambda_S = \det \frac{E - \mathrm{i}S}{E + \mathrm{i}S}$$

Corollaire 3.4.4. *La matrice U unitaire, symétrique et non singulière pour laquelle $\sqrt{U}$ envoie le plan $p = 0$ dans le plan λ est déterminée de manière unique par ce plan $\lambda \in \Lambda^0(n)$.*

En effet, par 3.4.1, U est déterminée de façon unique par S et par 3.4.2, S est déterminé de façon unique par λ.

3.5 Le cycle singulier est bilatère

Soit λ un plan lagrangien. Alors chaque plan $\mathrm{e}^{i\theta}\lambda$ est lagrangien.

Lemme 3.5.1. *Si $\lambda \in \Lambda^1(n)$, alors la courbe $\gamma : S^1 \to \Lambda(n), \mathrm{e}^{i\theta} \to \mathrm{e}^{i\theta}\lambda$ est transverse au cycle $\Lambda^1(n)$ au point $\theta = 0$.*

Ainsi les vecteurs vitesse $v(\lambda) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\mathrm{e}^{i\theta}\lambda)\Big|_{\theta=0}$ forment une structure transverse à $\Lambda^1(n)$, de laquelle suit :

Lemme fondamental. *Le cycle singulier $\overline{\Lambda^1(n)}$ plongé dans $\Lambda(n)$ est bilatère.*

La démonstration se fera en 3 étapes.

A) Tout d'abord soit $\lambda \in \Lambda^0(n), \lambda = \lambda_S$, où $S \in D$ est une matrice réelle symétrique. Nous allons calculer les coordonnées du vecteur vitesse de la courbe $e^{i\theta}\lambda$ dans ce système de coordonnées.

Lemme 3.5.2. *Pour toute matrice $S \in D$,*

$$\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} \varphi^{-1} e^{i\theta}\lambda_S = -(E + S^2).$$

Démonstration. D'après la section 3.4, au plan λ est associée de manière biunivoque une matrice symétrique unitaire non singulière U telle que :

$$\lambda = \lambda_{S(U)} \qquad S(U) = -i\frac{E - U}{E + U}.$$

et $\sqrt{U}$ envoie le plan $p = 0$ dans λ.

Soit $U(\theta) = e^{2i\theta}U$. La matrice $U(\theta)$ est unitaire, symétrique et si $|\theta|$ est petit, non singulière, de telle sorte que $\sqrt{U(\theta)} = e^{i\theta}\sqrt{U}$. Par conséquent $\sqrt{U(\theta)}$ envoie le plan $p = 0$ dans $e^{i\theta}\lambda$, et

$$\lambda_{S(U(\theta))} = e^{i\theta}\lambda_{S(U)} \qquad \text{ou} \qquad \varphi^{-1}e^{i\theta}\lambda_{S(U)} = S(U(\theta)). \tag{8}$$

Le vecteur $\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} \varphi^{-1}e^{i\theta}\lambda$ est dans l'espace tangent à l'espace D qui s'identifie naturellement à D. Par cette identification, et à l'aide des formules de 3.4.1, on a

$$-\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} S(U(\theta)) = \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} i\frac{E - e^{2i\theta}U}{E + e^{2i\theta}U} = \frac{4U}{(E + U)^2} = E + S^2$$

d'où le lemme avec les formules (8). c.q.f.d.

B) Soit maintenant $\lambda \in \Lambda^1(n)$. D'après le lemme 3.3.3, le point $\lambda \in \Lambda^1(n)$ appartient au domaine de l'une des cartes $\varphi_K D$, K étant l'ensemble constitué d'un élément κ, $1 \leqslant \kappa \leqslant n$. En d'autres termes, avec les notations de 3.3.2

$$\lambda = I_K\lambda_S, \qquad \text{où} \quad S \in D, \qquad \lambda_S \in \Lambda^0(n).$$

Il est facile de calculer le vecteur vitesse de la courbe $\gamma : S^1 \to \Lambda(n), e^{i\theta} \to e^{i\theta}\lambda$, pour $\theta = 0$ dans le système de coordonnées $\varphi_K^{-1}\lambda = S$.

Lemme 3.5.3. *Pour toute matrice $S \in D$, $\lambda = I_K\lambda_S$;*

$$\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} \varphi_K^{-1} e^{i\theta}\lambda = -(E + S^2)$$

En effet, d'après la définition 3.3.2, $\varphi_K = I_K\varphi$ et I_K commute avec $e^{i\theta}$. Par conséquent

$$\varphi_K^{-1} e^{i\theta}\lambda = \varphi^{-1} I_K^{-1} e^{i\theta} I_K \lambda_S = \varphi^{-1} e^{i\theta}\lambda_S$$

et le lemme 3.5.3 se déduit alors du lemme 3.5.2.

C) Le cycle singulier $\Lambda^1(n)$ dans les coordonnées $S = \varphi_K^{-1}\lambda$ a pour équation $S_{\kappa\kappa} = 0$ (lemme 3.3.3). Le vecteur vitesse $v = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} \varphi_K^{-1} e^{i\theta}\lambda$ est, par le lemme 3.5.3, une matrice définie négative, $-v_{\kappa\kappa} \geqslant 1$. Donc v et $\Lambda^1(n)$ sont transverses, ce qui démontre le lemme 3.5.1.

Remarque 3.5.4. Nous avons démontré en même temps que le vecteur v est dirigé vers le côté de $\Lambda^1(n)$ pour lequel $S_{\kappa\kappa} > 0$.

3.6 **L'indice** Ind **pour les courbes sur** $\Lambda(n)$

Soit γ une courbe orientée dans $\Lambda(n)$, transverse à $\Lambda^1(n)$ et soit $v(\lambda)$ le champ de vitesse du lemme 3.5.1.

Définition 3.6.1. Par Ind γ, nous désignons l'indice d'intersection de la courbe γ avec le cycle $\overline{\Lambda^1(n)}$ muni du champ $v(\lambda)$.

En d'autres termes, $\operatorname{Ind}\gamma = \nu_+ - \nu_-$, où ν_+ est le nombre de points d'intersection de γ avec $\Lambda^1(n)$ pour lesquels le vecteur $\dot\gamma$ et v sont du même côté de $\Lambda^1(n)$, et ν_- le nombre de ceux pour lesquels ils sont du côté opposé.

L'indice d'une courbe fermée γ, comme tout indice d'intersection, est déterminé par la classe d'homologie de γ et peut être considéré comme une classe de cohomologie à 1 dimension

$$\operatorname{Ind} \in H^1(\Lambda(n), Z).$$

Exemple 3.6.2. L'indice de la courbe fermée $\gamma: S^1 \to \Lambda(n)$ défini par $e^{i\theta}\lambda$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ est n :

$$\operatorname{Ind}\gamma = n.$$

Démonstration. On a codim $\Lambda^2(n) = \operatorname{codim} \overline{\Lambda^2(n)} = 2$ (Lemme 3.2.1). Par conséquent, pour presque tout λ, la courbe $e^{i\theta}\lambda$ ne coupe pas $\overline{\Lambda^2(n)}$. Une telle courbe est transverse à $\Lambda^1(n)$ en tous ses points d'intersection (Lemme 3.5.1). Dans ce cas, Ind γ est simplement le nombre de ces points d'intersection (Définition 3.6.1).

Soit $\lambda \in \Lambda^0(n)$. Par le lemme 3.4.3 nous avons $\lambda = \lambda_{S(U)}$, où U est une matrice unitaire symétrique, non singulière. On peut supposer le plan λ tel que toutes les valeurs propres de la matrice U

$$e^{i\alpha_k}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |\alpha_k| < \pi$$

soient distinctes.

Mais

$$e^{i\theta}\lambda = \lambda_{S(e^{2i\theta}U)}$$

par la formule (8) de 3.5.2, et

$$(\lambda_{S(e^{2i\theta}U)} \in \Lambda^0(n)) \quad \Leftrightarrow \quad (\det(E + e^{2i\theta}U) = 0)$$

par le lemme 3.4.2. En d'autres termes, aux points d'intersection de γ avec $\Lambda^1(n)$.

$$\theta \equiv \frac{\pi - \alpha_k}{2} \qquad (\operatorname{mod} \pi)$$

Il y a précisément n valeurs de θ dans l'intervalle $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Donc $\operatorname{Ind}\gamma = n$.
c.q.f.d.

§ 4 DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES RELATIFS A LA POSITION GÉNÉRALE

Ici, nous démontrons les théorèmes 2.1 et 2.2 du § 2.

4.1 Transversalité

Soit A une variété différentielle et soit $a \in A$. Notons par TA_a l'espace
nous notons par $f_* : TA_a \to TB_{f(a)}$ l'application tangente à f au point a.
tangent à A au point a. Si $f : A \to B$ est une application différentielle, alors

Soit $f : A \to B$ et $h : C \to B$ deux applications différentiables. Les applications f et h sont dites transverses au point $b \in B$ si

$$f_* TA_a + h_* TC_c = TB_b$$

pour tout couple de points $a \in A, c \in C$ tels que $f(a) = h(c) = b$. Les applications f et h sont dites transverses si elles sont transverses en chaque point $b \in B$.

Dans le cas particulier où f ou h sont des plongements, nous pouvons parler de la transversalité d'une application à une sous-variété ou de la transversalité de 2 sous-variétés.

La notion de transversalité s'étend aussi au cas où A est l'union de lusieurs variétés, $A = \bigcup A_k$ par exemple $\overline{\Lambda^1(n)} = \bigcup_{k \geqslant 1} \Lambda^k(n)$ dans le § 3 . Dans ce cas, la restriction de f à chaque A_k doit être transverse à h.

Il est facile de démontrer (voir, par exemple, [3]) le lemme de M. Morse et A. Sard :

Lemme 4.1.2. *Soit $f : A \to B$ une application différentiable. Alors la mesure de l'ensemble des points $b \in B$ non transverses à f est nulle (le point $b \subset B$ est une sous-variété de B de dimension 0).*

Du lemme 4.1.2, on déduit (voir par exemple [4]) :

Lemme 4.1.3. *Soit B un espace homogène sur lequel un groupe de Lie G agit transitivement : ($\forall g \in G, g : B \to B$ est un difféomorphisme). Soit $C \hookrightarrow B$ une sous-variété différentiable de B et soit $f : A \to B$ une application différentiable. Alors la mesure de l'ensemble des points $g \in G$ pour lesquels l'application*

$$f_g : A \to B, \qquad f_g(\alpha) = g f(\alpha)$$

est non transverse à C, est nulle.

Pour être complet, nous donnons la démonstration du lemme 4.1.3.

Remarque 4.1.4. Puisque l'union d'un nombre dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, il suffit de démontrer le lemme 4.1.3. pour un voisinage A_0 d'un point $a_0 \in A$, un voisinage C_0 d'un point $c_0 \in C$ et un voisinage de l'identité dans le groupe G.

De la transitivité de l'action du groupe, on déduit aisément :

Proposition 4.1.5. *Il existe un difféomorphisme*

$$u : D_1 \times D_2 \to G,$$

$$D_i = \{x \in R^{\nu_i}, |x| < 1\}, \qquad \nu_1 = \dim B - \dim C, \quad \nu_2 = \dim G - \nu_1$$

tel que $u(0,0) = e$, et l'application

$$\beta : D_1 \times D_2 \times C_0 \to B \times D_2$$

donnée par la formule

$$\beta(x, y, c) = (u(x, y)c, y) \qquad \forall x \in D_1, \quad y \in D_2, \quad c \in C_0$$

est un difféomorphisme de $D_1 \times D_2 \times C_0$ sur un voisinage E du point $(c_0, 0)$ dans $B \times D_2$.

Définissons maintenant la projection de $E \subset B \times D_2$ sur $D_1 \times D_2$

$$\Phi : E \to D_1 \times D_2 \qquad \text{par} \qquad \Phi(\beta(x, y, c)) = (x, y).$$

Définissons aussi l'application

$$\hat{f} : A \times D_2 \to B \times D_2 \qquad \text{par} \quad \hat{f}(a, y) = (f(a), y).$$

Nous appliquons le lemme 4.1.2 à l'application composée

$$\Theta = \Phi \circ \hat{f} : A_0 \times D_2 \to D_1 \times D_2.$$

Proposition 4.1.6. *Soit $x, y \in D_1 \times D_2$ un point transverse à l'application Θ. Alors, l'application*

$$f_g : A_0 \to B, \qquad g = (u(x, y))^{-1}$$

est transverse au plongement $C_0 \hookrightarrow B$.

Démonstration de la proposition 4.1.6. Considérons $\Phi^{-1}(x,y)$ $(x \in D_1, y \in D_2)$. Évidemment $\Phi^{-1}(x,y) = (C_{x,y}, y)$, où $C_{x,y} = u(x,y)C_0 \hookrightarrow B$. Le noyau de l'application tangente $\Phi_* : T(B \times D_2)_{b,y} \to T(D_1 \times D_2)_{x,y}$ est exactement l'espace tangent à $(C_{x,y}, y)$

$$\ker \Phi_* = T(C_{x,y}, y)_{b,y}.$$

Par conséquent, la transversalité de l'application $\Theta = \Phi \circ \hat{f}$ au point x, y implique

$$\hat{f}_* T(A_0 \times D_2)_{a,y} + T(C_{x,y}, y)_{f(a),y} = T(B \times D_2)_{b,y}$$

pour tout $a \in A_0$ tel que $f(a) = b \in C_{x,y}$. Ainsi l'application $f : A_0 \to B$ est transverse au plongement $C_{x,y} \hookrightarrow B$. En appliquant le difféomorphisme $g = (u(x,y))^{-1} \in G$, on voit que $gf : A_0 \to B$ est transverse à $gC_{x,y} = C_0$ c.q.f.d.

Démonstration du lemme 4.1.3. Appliquons le lemme 4.1.2. à Θ. L'ensemble des points $x, y \in D_1 \times D_2$ non transverses à Θ a une mesure nulle. L'ensemble correspondant des points $g = (u(x,y))^{-1} \in G$ a une mesure nulle dans G. Pour les éléments g restant, dans le voisinage de e, l'application f_g est transverse à C_0 d'après 4.1.6. Ceci démontre le lemme 4.1.3, d'après la remarque 4.1.4.

4.2 Démonstration du théorème 2.1

Nous appliquons le lemme 4.1.3 au cas où A est une variété lagrangienne M^n, B la grassmanienne lagrangienne $\Lambda(n)$, f l'application tangente $\tau : M^n \to \Lambda(n)$, C la sous-variété $\Lambda^k(n) \hookrightarrow \Lambda(n)$ et G le groupe unitaire $U(n)$.

D'après le lemme 4.1.3, on voit que pour presque tous les $u \in U(n)$, la variété uM^n est telle que l'application τ est transverse à chaque $\Lambda^k(n) \hookrightarrow \Lambda(n)$, $k = 1, 2, \ldots$ Montrons qu'une telle variété est en « position générale » au sens du théorème 2.1.

La proposition 1 du théorème 2.1 se déduit du théorème des fonctions implicites et des lemmes 3.2.1 et 3.2.2. La proposition 2 découle du lemme fondamental de la section 3.5. La proposition 3 est une conséquence du lemme 3.3.1 au cas $k = 1$. Finalement, la proposition 5 se déduit du lemme 3.5.1 et de la remarque 3.5.4. Ainsi le théorème 2.1 est démontré.

4.3 Démonstration du théorème 2.2

Soit M^n une variété lagrangienne en position générale et soit $\gamma : S^1 \to M^n$ une courbe fermée orientée, transverse au cycle singulier Σ.

Lemme 4.3.1. *Soit* $\tau_0\gamma : S^1 \to \Lambda(n)$. *On a*

$$\operatorname{ind}\gamma = \operatorname{Ind}\tau_0\gamma .$$

En effet, $\Sigma^1 = \tau^{-1}\Lambda^1(n)$ (définitions des sections 2.1 et 3.2). De plus, le côté positif (au sens de la section 2.1) de Σ^1 s'envoie par l'application τ dans le côté positif (au sens de la définition 3.6.1) de $\Lambda^1(n)$ (ceci découle de la remarque 3.5.4). Ainsi chaque point d'intersection de γ avec Σ^1 donne pour ind la même contribution que le point correspondant de l'intersection de $\tau_0\gamma$ avec $\Lambda^1(n)$ donne pour Ind. c.q.f.d.

En même temps, nous avons démontré le théorème 2.2, car $\operatorname{Ind}\tau_0\gamma$ ne change pas lorsqu'on remplace γ par une courbe homologue γ' (ceci suit du fait que $\dim \overline{\Lambda^2(n)} = \dim \Lambda^1(n) - 2$.

§ 5 UNE EXPRESSION ASYMPTOTIQUE DANS LE CAS QUASI-CLASSIQUE

Nous donnons ici, comme l'exemple le plus simple, sans démonstration, les formules asymptotiques de Maslov dans lesquelles l'indice joue un rôle.

5.1 Expression asymptotique, lorsque $h \to 0$, de la solution de l'équation de Schrödinger

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + U(q)\psi, \qquad \psi = \psi(q,t),\ q \in R^n \tag{9}$$

avec la condition initiale

$$\psi|_{t=0} = \varphi(q)\mathrm{e}^{ih^{-1}f(q)}, \tag{10}$$

où φ(q) est à support compact.

A l'équation de Schrödinger correspond le système dynamique classique donné dans l'espace de phase à $2n$ dimension R^{2n} par les équations d'Hamilton :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad H = \frac{1}{2}p^2 + U(q).$$

Les solutions des équations d'Hamilton définissent un groupe à un paramètre de difféomorphismes canoniques (*) de l'espace de phase : le flot $g^t : R^{2n} \to R^{2n}$.

(*) Un difféomorphisme $g : R^{2n} \to R^{2n}$ est dit canonique, si pour toute courbe fermée

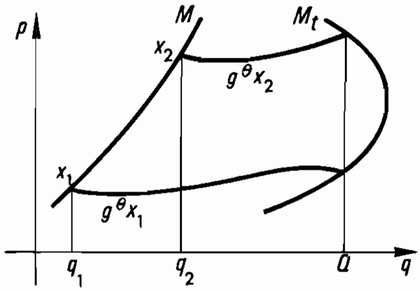
$$\gamma : S_1 \to R^{2n}, \text{ on a } \oint_\gamma p\,\mathrm{d}q = \oint_{g\gamma} p\,\mathrm{d}q.$$

La différentielle g_* a alors en chaque point une matrice symplectique : par une transformation canonique la 2-forme $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$ reste invariante. Par conséquent, une variété lagrangienne s'envoie dans une variété lagrangienne par un difféomorphisme canonique.

A la condition initiale (10) correspond une fonction $\varphi(q)$ sur une surface M^n, donnée dans l'espace de phase R^{2n} par les équations

$$M = \left\{ p, q : p(q) = \frac{\partial f}{\partial q} \right\}$$

La surface M se projette biunivoquement sur le plan q. Elle est lagrangienne d'après le lemme 3.1.1. Le flot g^t envoie M sur une autre surface lagrangienne $g^t M = M_t$. La surface M_t ne se projette plus nécessairement biunivoquement sur le plan q. D'où une application $Q(q) = q(g^t(p(q), q))$ (fig. 2).



Soit $x_j = (p_j, q_j)$ des points de M tels que $g^t x_j = (P_j, Q) \in M_t$. Supposons que le jacobien $\left.\frac{DQ}{Dq}\right|_{q=q_j}$ est non nul.

Maslov a démontré la formule asymptotique suivante pour la solution de l'équation (9) avec la condition (10).

Théorème 5.1. *Lorsque $h \to 0$,*

$$\psi(Q, t) = \sum_j \varphi(q_j) \left| \frac{DQ}{Dq_j} \right|^{-1/2} \exp\left[\frac{i}{h} S_j(Q, t) - \frac{i\pi}{2} \mu_j \right] + O(h),$$

où $S_j(Q, t)$ est l'action le long de la trajectoire $g^\theta x_j$:

$$S_j(Q, t) = f(q_j) + \int_0^t L \, d\theta, \qquad L = \frac{\dot{q}^2}{2} - U(q); \qquad (p(\theta), q(\theta)) = g^\theta x_j,$$

et μ_j est l'indice de Morse de la trajectoire $g^\theta x_j$, c'est-à-dire le nombre de points $q(g^\theta x_j)$, $0 < \theta < t$, qui sont des points focaux.

5.2 Relation entre les indices de Morse et de Maslov

Dans le théorème 5.1 est apparu l'indice de Morse μ. L'indice de Morse est un des cas particuliers de l'indice de Maslov. On a

Théorème 5.2. *Soit dans l'espace de phase à $2n + 2$ dimensions $R^{2n+2} = \{ \hat{p}, \hat{q} \}$, $\hat{p} = p_0, p$; $\hat{q} = q_0, q$; $(p, q) \in R^{2n}$, la variété de dimen-*

sion $n+1$, $\hat{M} : (p,q) \in M_t, q_0 = t, p_0 = -H(p,q)$. Alors la variété $\hat{M}$ est lagrangienne et l'indice de Morse de la trajectoire $g^\theta x, 0 < \theta < t$, est l'indice de Maslov de la courbe $(\theta, -H, g^\theta x)$ sur la variété $\hat{M}$.

La démonstration se fait aisément en utilisant les définitions des indices μ et ind : puisque $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\xi, \xi\right) > 0$, un point focal simple donne une contribution $+1$ à ind.

Corollaire. *Pour toute courbe γ sur M :*

$$\operatorname{ind} g^t\gamma - \operatorname{ind}\gamma = \mu(g^\theta\gamma^+) - \mu(g^\theta\gamma^-),$$

où $g^\theta\gamma^+, g^\theta\gamma^-$ $(0 \leqslant \theta \leqslant t)$ sont des trajectoires entre γ et $\partial\gamma = \gamma^+ - \gamma^-$.

En effet, le quadrilatère $\gamma, g^\theta\gamma^+, (g^t\gamma)^{-1}, (g^\theta\gamma^{-1})^{-1}$ sur $\hat{M}$ est naturellement homologue à 0. Par conséquent, l'indice de Maslov est nul (Théorème 2.2). Il suffit alors d'appliquer le théorème 5.2.

5.3 Conditions de quantification

Dans le théorème 5.1 apparaissent les indices de courbes non fermées. Les indices des courbes fermées interviennent dans les formules asymptotiques pour les problèmes stationnaires.

Soit M une variété lagrangienne invariante par g^t, incluse dans l'hypersurface $H = E$ (de telles variétés invariantes existent pour d'autres systèmes que les systèmes intégrables : voir [5]).

Maslov a démontré :

Théorème 5.3. *L'équation*

$$\frac{1}{2}\Delta\psi = \lambda^2(U(q) - E)\psi$$

possède une série de valeurs propres λ_N tendant vers ∞ avec pour expression asymptotique $\lambda_N = \mu_N + O(\mu_N^{-1})$ si pour tout $\gamma \in H_1(M, Z)$

$$\frac{2\mu_N}{\pi}\oint_\gamma p\,\mathrm{d}q \equiv \operatorname{ind}\gamma \qquad (\operatorname{mod} 4) \tag{11}$$

Dans ce cas, les fonctions propres correspondantes ψ_N sont également liées à la variété M (dans un sens précisé dans [1] et sous les hypothèses d'un spectre simple).

Dans le cas particulier $n = 1$, l'indice du cercle vaut 2 et la formule (11) devient la « condition de quantification » usuelle :

$$\mu_N \oint_\gamma p\,\mathrm{d}q = 2\pi\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. P. Maslov, *Theory of Perturbations and Asymptotic Methods* (en russe), izd. MGU (1965).

[2] V. P. Maslov, The WKB Method in the Multidimensional Case, Supplement to Heading's Book, *An Introduction to Phase-Integral Methods* (en russe), Biblioteka sb. « Matematika » Mir (1965).

[3] L. S. Pontryagin, Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. *Trudy V. A. Steklov Matem. inst. AN SSSR,* vol. 45 (1945).

[4] R. Abraham, Supplement to Lang's Book, *Differentiable Manifolds* (en russe). Biblioteka sb. « Matematika » Mir (1965).

[5] V. Arnol'd and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique*. G-V (1966).

COMPLÉMENT 2

INTÉGRALE GÉNÉRATRICE ET OPÉRATEUR CANONIQUE DE MASLOV POUR LA MÉTHODE W.K.B.

(V. C. BOUSLAEV)

Ce travail contient une nouvelle approche aux résultats de V. P. Maslov concernant l'asymptotique quasi-classique (méthode W.K.B.).

§ 1 ASYMPTOTIQUE QUASI-CLASSIQUE

1. Méthode W.K.B.

On réussit souvent à construire une solution asymptotique d'équations différentielles, où les coefficients des dérivées dépendent du paramètre h supposé petit, sous la forme :

$$\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k u_k \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S\right) \tag{1.1}$$

où S est une fonction à valeurs réelles, les u_k des fonctions à valeurs complexes, $\mathrm{i}^2 = -1$.

On substitue formellement (1.1) dans l'équation et en comparant les coefficients du développement en séries de h, on détermine (S, u_k). Autrement dit, on suppose que (1.1) est une solution formelle de l'équation différentielle. Une telle méthode de construction d'une solution asymptotique s'appelle ordinairement la méthode W.K.B.

En mécanique quantique, pour l'équation de Schrödinger tant sous sa forme dépendant du temps

$$\mathrm{i}h \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2 + v(t, \xi)\right]\psi, \qquad \psi = \psi(h, t, \xi) \tag{1.2}$$

que sous sa forme stationnaire

$$E\psi = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2 + v(\xi)\right]\psi \qquad \psi = \psi(h, E, \xi) \tag{1.3}$$

$t, E \in R$, $\xi \in R^n$, l'asymptotique décrite plus haut est aussi dite quasi-classique. Cela est lié au fait que les fonctions S et u_k vérifient des équations qui se construisent en fonction du système dynamique correspondant classique dans l'espace de phase $M = R^n \oplus R^n$, engendré par la fonction d'Hamilton

$$H = H(t, x) = \frac{1}{2}p^2 + v(t, q), \qquad x = \{q, p\} \in M \tag{1.4}$$

Pour (1.2), la fonction S vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \left\{q, \frac{\partial S}{\partial q}\right\}\right) = 0 \tag{1.5}$$

et, dans le cas (1.3), l'équation pour la moindre action.

En ce qui concerne les coefficients u_k, ils obéissent à un système récurrent d'équations différentielles ordinaires aux dérivées totales le long des trajectoires du système dynamique. Dans certaines conditions, on peut suivre le passage de la dynamique quantique à la dynamique classique lorsque $h \to 0$, à l'aide de ces représentations asymptotiques. Ce travail va introduire et étudier une classe plus large de représentations asymptotiques que le développement (1.1). La nécessité d'une telle extension de la classe des développements est dictée par la difficulté bien connue à laquelle se heurte l'approche ordinaire. Pour l'équation stationnaire, cette difficulté se manifeste par l'apparition des points de rebroussement, des caustiques, etc... Leur équivalent, pour l'équation non-stationnaire, est la non-invariance des solutions formelles de la forme (1.1) relativement à la dynamique. Voyons ceci plus en détails. Supposons que l'on considère une solution formelle de l'équation (1.2), de la forme (1.1), égale pour $t = 0$, à l'expression

$$\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k u_k^0 \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h}S^0\right) \tag{1.6}$$

Il faut ajouter à l'équation d'Hamilton-Jacobi (1.5) la condition initiale

$$S(t, \xi)\big|_{t=0} = S^0(\xi) \tag{1.7}$$

On sait que l'équation d'Hamilton-Jacobi est équivalente (à des composantes près, dans S, ne dépendant que du temps) au fait que la variété

$$\Gamma_t = \left\{\left\{q, \frac{\partial S(t, q)}{\partial q}\right\} \middle| \, q \in R^n\right\} \tag{1.8}$$

dans l'espace M se transforme sous l'action d'un difféomorphisme m_t de cet espace qui est engendré par le système canonique

$$J\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$
$$I = \mathrm{Id}_{R^n}$$

de sorte que

$$\Gamma_t = m_t \Gamma_0 \tag{1.10}$$

Notons que la fonction $S : R^n \to R$ se récupère à partir de la variété

$$\left\{ \left\{ q, \frac{\partial S(q)}{\partial q} \right\} \middle| \, q \in R^n \right\} \tag{1.11}$$

à une constante près.

Considérons la variété

$$\Gamma^0 = \left\{ \left\{ q, \frac{\partial S^0(q)}{\partial q} \right\} \middle| \, q \in R^n \right\} \tag{1.12}$$

Il résulte de ce qui est dit que l'équation (1.5) avec la condition initiale (1.7) a une solution unique pour les t ($t_1 < t < t_2$, $t_2 > 0$, $t_1 < 0$, tels que la variété $m_t\Gamma^0$ reste projetable biunivoquement sur le plan $Q, Q = R^n \oplus 0$, autrement dit, pour tous les t pour lesquels $m_t\Gamma^0$ garde la représentation

$$\{ \{ q, f(q) \} \mid q \in R^n \} \tag{1.13}$$

avec une application $f : R^n \to R^n$. Dans ce cas, $f = \partial S / \partial q$. On pourrait vérifier que, pour ces mêmes valeurs de t, on résout sans difficulté le système récursif des équations pour les coefficients u_k, complété par les conditions initiales $u_k|_{t=0} = u_k^0$.

Supposons que le développement (1.6) est asymptotique pour une certaine fonction $\psi^0 = \psi^0(h, \xi)$ pour $h \to 0$. Considérons la solution du problème de Cauchy déterminée par l'équation (1.2) et la condition initiale :

$$\psi(h, t, \xi)|_{t=0} = \psi^0(h, \xi) \tag{1.14}$$

Sous certaines hypothèses, la solution formelle construite plus haut sera asymptotique pour la solution exacte $\psi(h, t, \xi)$. Mais quelle sera l'asymptotique de cette solution pour $t \notin (t_1, t_2)$?

La classe introduite plus bas des développements formels est invariante par la dynamique et pourrait être utilisée pour la représentation asymptotique de la solution du problème de Cauchy (1.2) (1.4) pour tous les $t \in R$. L'invariance par la dynamique signifie que la solution formelle, appartenant à cette classe, et vérifiant une condition initiale de la même classe, existe pour tous les t. On suppose bien sûr que le difféomorphisme m_t existe pour tout t.

2. Contenu du travail

Les variétés du paragraphe précédent de la forme (1.11) constituent une sous-classe d'une classe particulière de variétés à n-dimensions dans M qu'on appelle variétés lagrangiennes : une variété de dimension n, Γ, dans M sera dite lagrangienne si la restriction à Γ de la forme différentielle $\omega = \frac{1}{2}(p\,\mathrm{d}q - q\,\mathrm{d}p)$ est fermée. Une variété lagrangienne générale a la forme (1.11) si et seulement si elle se projette biunivoquement sur Q.

La fonction S peut être caractérisée par la donnée d'une variété lagrangienne Γ qui se projette biunivoquement sur Q, et l'image Σ de la forme $\sigma = \omega + \frac{1}{2}\mathrm{d}(qp)$ sur Γ.

$$S(q) = \Sigma(\{q,p\}), \qquad \{q,p\} \in \Gamma, \qquad q \in R^n \tag{1.15}$$

Les coefficients $u_k : R^n \to C$ du développement asymptotique (1.1) peuvent être considérés comme des fonctions sur Γ.

Ainsi la représentation (1.1) devient un ensemble $\{\Gamma, \Sigma, v\}$, où v est une série formelle de fonctions sur Γ. La généralisation des développements asymptotiques considérée ici consiste en ce que ces ensembles seront constitués par une variété lagrangienne arbitraire qui ne se projette plus nécessairement biunivoquement sur Q.

Nous étudions d'abord le développement asymptotique correspondant à une variété lagrangienne, se projettant biunivoquement sur un plan lagrangien quelconque Λ, c'est-à-dire sur une variété lagrangienne linéaire. La forme générale d'un plan lagrangien est

$$\Lambda = g^{-1}Q \tag{1.16}$$

où g est une transformation du groupe G des transformations linéaires (inhomogènes) canoniques de M. La quantification de l'espace M engendre une représentation unitaire V dans $L_2(R^n)$ du groupe de transformations G. En qualité de développements asymptotiques, correspondant à des variétés lagrangiennes qui se projettent biunivoquement sur Λ, il est naturel de prendre une expression formelle

$$V(g)\varphi, \qquad \varphi = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k u_k \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S\right) \tag{1.17}$$

On peut argumenter que si l'on choisit comme plan de configuration dans M le plan Λ au lieu de Q, l'état quantique représenté par l'élément ψ, $\psi \in L_2(R^n)$, sera représenté par l'élément $V^{-1}(g)\psi$. A l'étape suivante, pour le développement asymptotique d'une fonction de $R^n \to C$, on introduit des sommes finies ou infinies d'expressions de la forme (1.17), associées à une variété lagrangienne arbitraire Γ et à l'intégrale Ω (ou Σ) de la forme ω (ou σ) sur Γ. On démontre que de tels développements asymptotiques ont déjà la propriété d'invariance par la dynamique.

Notons ces représentations par la lettre ψ. Les représentations ψ jouent dans notre exposé un double rôle. D'un côté, indépendamment des applications asymptotiques, elles figurent comme solutions formelles d'équations du type (1.1) et du type (1.2). En liaison avec cela, il est nécessaire de développer un certain calcul formel et, en particulier, de définir sur ψ des opérations linéaires et, également, la différentiation $\mathrm{i}h\,\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ et l'action d'un opérateur du type Schrödinger. D'un autre côté, les ψ doivent engendrer une suite de fonctions $\psi^N : R^n \to C \quad N = 0, 1, 2, \ldots$ qui sont utilisées pour le développement asymptotique au même sens que les fonctions

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k u_k \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S\right)$$

dans la classique méthode W.K.B. Le résultat est l'application des solutions formelles pour le développement asymptotique des solutions exactes. Le centre de gravité de notre exposé est concentré sur la construction formelle et les applications sont à peine effleurées.

Différentes sommes d'expressions de la forme (1.17) peuvent engendrer un seul et unique développement asymptotique ψ. On démontre que ψ (à une identification naturelle près) peut se mettre en correspondance biunivoque avec le triple $\{\Gamma, \Omega, \mu\}$, où $\mu = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{i}\right)^k \mu_k$, où les μ_k sont des mesures complexes différentiables sur Γ. La correspondance $\psi \leftrightarrow \{\Gamma, \Omega, \mu\}$ se réalise à l'aide de l'intégrale génératrice symbolique

$$\psi(\xi) = \int_\Gamma \mu(\mathrm{d}x) K_{\langle \Gamma . \Omega \rangle}(\xi, x) \tag{1.18}$$

où $K_{\langle \Gamma, \Omega \rangle}$ est un certain noyau universel. Nous arrivons à cette intégrale en approximant Γ par des plans lagrangiens tangents Λ_α en certains points x_α de la variété Γ et en représentant ψ par une somme de la forme $\sum_\alpha V(g_\alpha) \varphi_\alpha$ où le support de φ_α est localisé en un sens défini dans un voisinage de x_α. L'intégrale (1.18) en résulte par un passage naturel à la limite pour cette construction. On peut assez simplement décrire les opérations fondamentales sur ψ au moyen d'une telle intégrale.

Cet article résulte de l'étude des travaux de V. P. Maslov qui a réussi le premier à corriger les insuffisances de la méthode ordinaire. L'exposé de Maslov est construit sur la base de l'expression (1.17) dans laquelle g ne sert qu'à échanger le rôle de certaines composantes des vecteurs coordonnés q et impulsion p. La considération de g arbitraire conduit immédiatement à la représentation commode de ψ par l'intégrale génératrice. L'opérateur canonique qui figure chez Maslov est certes équivalent dans l'essentiel à l'intégrale génératrice (si on ne considère que les termes d'ordre le plus élevé des développements asymptotiques, comme le fait Maslov).

Mais l'intégrale génératrice présente l'avantage que sa définition est évidemment invariante et n'inclut pas de concept tel que l'indice d'une courbe sur une variété lagrangienne (indice de Maslov). Remarquons aussi que, grâce au passage des variétés lagrangiennes (sur lesquelles l'intégrale de la forme ω pourrait ne pas exister) à leurs recouvrements (cf. plus de détails au § 2), nous pouvons considérer les développements asymptotiques engendrés par des variétés lagrangiennes quelconques et pas seulement les variétés satisfaisant les « conditions de quantification » qui tiennent une place importante dans la construction de Maslov. Au contraire, on obtient immédiatement ces conditions si on considère les applications du développement asymptotique à une équation stationnaire du type (1.3) (cf. § 4).

Donnons le plan de l'exposé. Dans le § 2 sont rassemblées les notions nécessaires de mécanique classique et quantique, et on y donne aussi une nouvelle formule pour l'indice de Maslov. Sur ce dernier point, notre travail se recoupe avec les articles d'Arnold et Fuchs, consacrés à l'interprétation topologique de l'indice de Maslov. Le § 3 est central : on y construit l'intégrale génératrice et son lien avec l'opérateur canonique de Maslov y est expliqué.

Dans le § 4, on considère le problème de Cauchy pour l'équation de forme Schrödinger

$$ih\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \mathscr{H}\psi \tag{1.19}$$

et on en discute le développement asymptotique. On donne une description générale de la classe des opérateurs qui peuvent jouer dans ce cas le rôle de l'opérateur $\mathscr{H}$.

L'auteur exprime sa profonde gratitude à L. D. Faddeev pour de précieuses discussions.

§ 2 ESPACE DE PHASE ET QUANTIFICATION

1. Espace de phase

On appelle espace de phase M l'espace unitaire C^n, considéré comme réel. Les points de M seront dénotés par $x, a, \ldots$ Les parties réelles et imaginaires du produit scalaire dans $C^n, (.,.) + i[.,.]$ déterminent sur M des structures hermitiennes et simplectiques. La structure complexe est donnée par l'opérateur J, correspondant à la multiplication par i dans C^n. On a $[.,.] = (.,J.)$.

Considérons sur M la forme différentielle $\omega = \frac{1}{2}\ [x, \mathrm{d}x]$. Une sous-variété de dimension n, Γ, dans M est dite lagrangienne si la forme $\omega|_\Gamma$ est fermée. Une sous-variété lagrangienne linéaire est dite plan lagrangien. Un sous-espace Λ est un plan lagrangien si, et seulement si la forme $[.,.]$ s'y annule identiquement. L'ensemble des plans lagrangiens est noté Λ, l'ensemble des sous-espaces lagrangiens est noté Λ_0. Fixons $Q \in \Lambda$. Q sera considéré comme un espace euclidien, avec le produit scalaire, $qp = (q,p), q,p \in Q$. On peut considérer l'espace M comme la somme de deux exemplaires de l'espace Q, et en outre l'identification de $x \in M$ et de la paire $\{q,p\}$, $q,p \in Q$ est donnée par la formule $x = q + Jp$.

Les lettres q et p dénoteront toujours les composantes de la paire $x = \{q,p\}$.

2. Groupe G

Un difféomorphisme m de l'espace M est dit canonique s'il laisse invariant la forme $d\omega$. Le difféomorphisme m sera canonique si et seulement si $dm \in \mathrm{Sp}(M)$, où dm est la différentielle de M et $\mathrm{Sp}(M)$ le groupe symplectique de M, c'est-à-dire le groupe des transformations linéaires non dégénérées de M, qui conservent $[.,.]$. Un difféomorphisme canonique transforme une variété lagrangienne en une variété lagrangienne. Considérons le groupe de recouvrement universel $\widehat{\mathrm{Sp}}(M)$ du groupe $\mathrm{Sp}M$. Nous en noterons les éléments par A, et par $\mathring{A}$ leurs projections canoniques sur $\mathrm{Sp}(M)$. Les éléments de $\widehat{\mathrm{Sp}}(M)$ se paramétrisent naturellement par un triple $\{\theta,\delta,\rho\}$, où θ,δ,ρ sont des transformations linéaires de Q et où θ et δ sont symétriques. Dans ces termes,

$$\mathring{A} = \exp J\Theta \exp J\{0,\delta\}\exp\{\rho, -{}^t\rho\}$$

$\Theta = \{\theta,\theta\}$ et $\{.,.\}$ sont des matrices-blocs quasi-diagonales 2×2, définissant une transformation de M et correspondant à la décomposition $M = Q + Q$.

De $\mathring{A}$ on déduit $\exp 2J\Theta$ de manière unique. Θ étant fixé, δ et ρ sont uniquement déterminés. Soit G le produit semi-direct du groupe linéaire de l'espace M et de $\widehat{\mathrm{Sp}}(M)$. Les éléments de G seront désignés par la lettre g. Ce sont des paires $g = \{a,A\}$ où $a \in M$. Le groupe G engendre un groupe de transformations G de l'espace M, opérant selon la formule

$$gx = \mathring{g}x = a + \mathring{A}x,$$

G est le recouvrement universel de $\mathring{G}$. Le groupe $\mathring{G}$ n'est rien d'autre que le groupe des difféomorphismes linéaires (inhomogènes) canoniques de M.

La forme générale d'un plan lagrangien est $\Lambda = gQ$, où $g \in G$. L'ensemble Λ_0 des sous-espaces lagrangiens peut s'interpréter comme un espace homogène de $\mathrm{Sp}(M)$ et on établit facilement que chaque $\Lambda \in \Lambda_0$ s'écrit $\Lambda = (\exp J\Theta)Q$, où $\exp 2J\Theta$ se détermine de manière unique à partir de Λ.

3. **Paire lagrangienne**

Soit Γ une variété lagrangienne connexe. Dans ce qui suit, nous noterons E l'espace de recouvrement universel de la variété Γ. Introduisons également l'espace de recouvrement $E(\omega)$, dont le sous-groupe caractéristique est un diviseur normal $\chi(\omega)$ du groupe $\pi_1(\Gamma)$, formé par les classes de chemins γ ayant la propriété que $\int_\gamma \omega = 0$. Sur E et $E(\omega)$, la primitive $\Omega : E \to R$ de la forme ω, existe et prend des valeurs différentes aux différents points de la fibre de $E(\omega)$. Chacun des espaces E et $E(\omega)$ a ses avantages particuliers.

Ceux de $E(\omega)$ tiennent à l'unicité des correspondances du type

$$\psi \leftrightarrow E(\omega)$$

(cf. § 1) et pour plus de détails § 3) et tout l'exposé pourrait se construire avec $E(\omega)$.

Mais certaines formulations sont plus simples si l'on utilise E. Il nous sera commode dans la première partie de l'exposé, jusqu'à la section 2, § 4, de considérer E comme équivalent à $E(\omega)$. Ensuite cette convention sera abandonnée et nous considérerons seulement E.

L'ensemble $\langle \Gamma, \Omega \rangle$ sera dit « paire lagrangienne ». Supposons que l'application $\tau : E \to G$ ait la propriété $\tau x = \{x, A(x)\}$ où $A(x)Q$ est parallèle au plan tangent à E au point x.

L'ensemble $\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ sera dit « triple lagrangien ». Soit $\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ un triple lagrangien, et soit $g = \{a, A\} \in G$. Par $g\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ on entend le triple lagrangien $\langle g\Gamma, \Omega_g, g\tau \rangle$, où

$$\Omega_g(x) = \Omega(g^{-1}x) + \frac{1}{2}[a, x], \qquad x \in g\Gamma.$$

On définit de même $g\langle \Gamma, \Omega \rangle$. Une sous-variété de dimension $n\Gamma$ dans M sera dite « à projection biunivoque sur Q » si elle à la forme

$$\{\{q, f(q)\} \mid q \in D\} \qquad \text{où } f : D \to Q$$

et D est un ouvert de Q. Si D est simplement connexe, la sous-variété est lagrangienne si et seulement s'il existe une fonction $S : D \to R$ telle que $f = \partial S/\partial q$. Alors, $\langle \Gamma, \Omega \rangle$, où

$$\Omega(x) = S(q) - \frac{1}{2} q \frac{\partial S(q)}{\partial q} \qquad \text{et } x = \{q, \dots\} \in \Gamma,$$

est une paire lagrangienne.

4. **Quantification**

On entend par là (cf., par exemple, [4]) une application K de l'espace M dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoints d'un espace de Hilbert telle que les opérateurs unitaires $W(x) = \exp ih^{-1}K(x)$ forment une représentation projective du groupe linéaire de l'espace M de sorte que

$$W(x_1)\,W(x_2) = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2h}[x_1, x_2]\,W(x_1 + x_2)\right\},$$

où h est une constante donnée

$$h \in \Delta = (0, b).$$

Toutes les représentations irréductibles de quantification sont unitairement équivalentes, et les opérateurs qui réalisent cette équivalence sont définis à une phase près $C, |C| = 1$.

On appelle quantification de Schrödinger de l'espace de phase M une quantification telle que $\mathfrak{H} = L_2(Q)$ et les opérateurs $K(x)$ sont des expressions différentielles

$$(K(x)\,f)(\xi) = \left(q\xi + \frac{h}{\mathrm{i}}p\frac{\partial}{\partial\xi}\right)f(\xi), \qquad \xi \in Q$$

Cette quantification est irréductible.

Le groupe G opère naturellement sur la quantification K :

$$K \to gK = AK + aE,$$

où

$$(AK)(x) = K({}^tAx) \qquad \text{et} \qquad (aE)(x) = (a, x)\,E$$

On voit facilement que gK est une quantification irréductible, si K l'est. Il existe donc des opérateurs unitaires $V(g)$ tels que

$$KV(g) = V(g)\,gK.$$

Ils sont définis à une phase près $C, |C| = 1$. Il est évident que ces opérateurs forment une représentation unitaire du groupe G.

5. Formules explicites

Introduisons les opérateurs unitaires

$$V(a) = \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{h}K(Ja)\right\}, \qquad V(A) = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2h}[\ln AK, K]\right\} \qquad (2.1)$$

Ici,

$$[BK, K] = \sum_{p=1}^{2n} (BK)(e_p)(JK)(e_p),$$

où $\{e_p\}$ est une base orthonormée dans M et $JB = (JB)^*$, où * est la conjugaison hermitique dans la complexification de M. Normalisons $V(A)$ par continuité à partir de $V(e) = E$.

Alors les opérateurs $V(g) = V(a)\,V(A)$ vérifient la relation

$$V(g_1)\,V(g_2) = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2h}[a_1\,, A_1 a_2]\,V(g_1 g_2)\right..$$

Si $A = \{\theta, \delta, \rho\}$, alors

$$V(A) = V^{(1)}(\theta)\,V^{(2)}(\delta)\,V^{(3)}(\rho)$$

Dans la représentation de Schrödinger

$$(V(a)\,f)(\xi) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2h}qp\right)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}p(\xi - q)\right]f(\xi - q) \tag{2.2}$$

$$a = q + Jp$$

$$(V^{(3)}(\rho)\,f)(\xi) = \left|\det{}^{1/2}\,r\right|\,f(r^{-1}\xi), \qquad r = e^{\rho} \tag{2.3}$$

$V^{(1)}(\theta)\,V^{(2)}(\delta)$ est un opérateur intégral de noyau égal à

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\det\frac{2\pi h}{\mathrm{i}}(\cos\theta_\varepsilon\,\delta_\varepsilon + \sin\theta_\varepsilon)\right]^{-1/2}$$

$$\exp\left\{\left(-\frac{\mathrm{i}}{2h}\right)[\xi(-\sin\theta_\varepsilon\,\delta_\varepsilon + \cos\theta_\varepsilon)(\cos\theta_\varepsilon\,\delta_\varepsilon + \sin\theta_\varepsilon)^{-1}\xi\right.$$

$$\left. + \,\xi'(\cos\theta_\varepsilon\,\delta_\varepsilon + \sin\theta_\varepsilon)^{-1}\cos\theta_\varepsilon\,\xi' - 2\xi'(\cos\theta_\varepsilon\,\delta_\varepsilon + \sin\theta_\varepsilon)^{-1}\xi]\right\} \tag{2.4}$$

$$\text{où} \quad \theta_\varepsilon = \theta + \mathrm{i}\varepsilon; \quad \delta_\varepsilon = \delta + \mathrm{i}\varepsilon; \quad V^{(1,2)}(0) = E.$$

Quans $\cos\theta\delta + \sin\theta$ dégénère, cette expression définit une fonction généralisée. La condition de continuité et la normalisation donnent une définition unique.

On doit considérer les expressions explicites de cette section comme connues en mécanique quantique; mais malheureusement l'auteur n'a pas réussi à trouver le travail où elles soient données sous la forme qui nous est nécessaire : nous ferons donc ici quelques remarques sur leur démonstration.

En changeant, dans la relation de définition $KV(g) = V(g)gK$, l'élément g par le sous-groupe à un paramètre g_t et en différentiant par rapport à t, nous pouvons passer à l'équation équivalente suivante $KG = GK + g_0'K$ pour le générateur infinitésimal du groupe $V(g_t)$:

$$V(g_t) = \exp Gt\,.$$

En explicitant G sous la forme d'une fonctionnelle quadratique de l'opérateur K et en utilisant la définition de K, nous arrivons à la formule (2.1) pour l'opérateur $V(g)$. La relation

$$V(g_1)\,V(g_2) = \exp\ \frac{\mathrm{i}}{2h}[a_1\,, A_1 a_2]\,V(g_1 g_2)$$

s'obtient alors par simple vérification. Les formules (2.2) et (2.3) sont évidentes. Afin de comprendre (2.4), considérons à nouveau le groupe $V(g_t)$ et l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(g_t) = G V(g_t) \qquad\qquad V(g_0) = E$$

Dans la représentation de Schrödinger, G est un opérateur différentiel du second ordre avec des coefficients quadratiques dans les variables indépendantes. Le noyau de l'opérateur $V(g_t)$, c'est-à-dire la fonction de Green du problème peut se trouver sous la forme

$$\exp\{\xi A(t)\xi + \xi B(t)\xi' + \xi' C(t)\xi' + D(t)\}$$

En substituant cette expression dans l'équation, on obtient, pour les matrices A, B, C et D, un système d'équations différentielles ordinaires qu'il est facile de résoudre explicitement.

6. Indice de Maslov

L'ensemble θ des transformations symétriques θ de l'espace Q est le recouvrement universel de Λ_0 -ensemble des sous-espaces lagrangiens. La projection est donnée par la formule $\Lambda = (\exp J\Theta)Q$. Considérons sur θ la fonction

$$v_\varepsilon(\theta) = \det{}^{1/2} \cos\theta_\varepsilon \times |\det{}^{1/2}\cos\theta_\varepsilon|$$

définie par continuité et par la normalisation $v_\varepsilon(0) = 1$.

On voit facilement que le produit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon^{-1}(\theta)\, V^{(1)}(\theta)$$

est constant sur chaque fibre.

Considérons sur θ la forme $\kappa_\varepsilon = \dfrac{2}{\pi \mathrm{i}} \mathrm{d}\ln v_\varepsilon$. C'est une forme sur Λ_0. Considérons sur Λ_0 la forme singulière $\kappa = \lim \kappa_\varepsilon$. Soit γ une courbe orientée sur Λ_0, d'origine Λ_1 et d'extrémité Λ_2. Supposons que les plans lagrangiens Λ_1 et Λ_2 se projettent biunivoquement sur Q. L'indice $\operatorname{ind}\gamma$ de la courbe γ sera le nombre entier $\operatorname{ind}\gamma = \int_\gamma \kappa$. Les indices des courbes fermées définissent évidemment une certaine classe de cohomologie entière sur Λ_0 : c'est la classe caractéristique de Maslov-Arnold [2], [3]. La formule d'Arnold résulte directement de notre définition : l'indice d'une courbe fermée γ est égal au degré de l'application $\varepsilon : \gamma \to S^1$, où ε est la restriction à γ de l'application $\Lambda_0 \to S^1$ donnée par la formule $\det\exp(2\mathrm{i}\theta)$, et en plus, $\Lambda = (\exp J\Theta)Q$.

La courbe orientée γ sur la variété lagrangienne Γ induit une courbe orientée γ' dans Λ_0. L'indice $\operatorname{ind}\gamma'$ s'appelle indice de Maslov de la courbe γ. Nous le noterons aussi $\operatorname{ind}\gamma$. De même, une courbe γ sur le groupe G induit une courbe γ' sur Λ_0. On note également l'indice de cette dernière courbe $\operatorname{ind}\gamma$.

7. **Dynamique**

Soit $m_t, t \in R$, la famille de difféomorphismes canoniques, définis par l'équation

$$J\dot{x} = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad \text{où } \chi : R \times M \to R.$$

Considérons sur $R \times M$ la forme différentielle $\omega - \chi \mathrm{d}t$. Sa restriction à $\bigcup_{-\infty < t < +\infty} E_t$, où $E_t = m_t E$, E étant le revêtement universel de la variété lagrangienne Γ, est une forme fermée. Par $\Omega^{(t)}$, on désignera une primitive de cette forme.

Considérons la différentielle $\mathrm{d}m : R \times M \to \widehat{\mathrm{Sp}}(M)$, où $\mathrm{d}m$ est défini par la normalisation $\mathrm{d}m_{0,x} = e$ et la continuité. Ici, $\mathrm{d}m_{t,x}$ est la valeur de $\mathrm{d}m$ au point $\{t, x\}$. A la trajectoire $m_t a, a \in M$ et à $g = \{a, A\} \in G$ correspond un chemin dans le groupe $m_t g = \{m_t a, \mathrm{d}m_{t, m_t a} A\}$. Son indice coïncide, en général, avec l'indice de Morse de la trajectoire $m_t a$.

Désignons par un point ou par $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ la dérivée totale le long des trajectoires du système dynamique m_t. On a la relation

$$\begin{aligned} \mathrm{i}h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h}\Omega^{(t)}V(m_t g)\right)\right] = \Bigg\{\chi + \left(K - x, \frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(K - x, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(K - x)\right)\Bigg\} \times \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h}\Omega^{(t)}V(m_t g)\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Les opérations sur K sont définies comme cela a été fait à la page 370. La démonstration s'obtient par un calcul direct. Si $\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ est un triple lagrangien, on entend par $m_t \langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ le triple $\langle m_t \Gamma, \Omega^{(t)}, m_t \tau \rangle$, où $\Omega^{(t)}\big|_{t=0} = \Omega$ et $(m_t \tau) x = m_t(\tau x)$. Considérons la fonction sur E, donnée par la formule

$$K = K_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}(x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h}\Omega^{(t)}V(\tau x)\,\delta\right) \tag{2.6}$$

où δ est la fonction delta sur Q et V sont les opérateurs liés à la quantification de Schrödinger. Notons que $V(g)\delta$, pour g fixé, définit en général une fonction généralisée sur Q. On démontre qu'on a la relation

$$K_{<\Gamma, \Omega, \tau>}(x) = V(g^{-1})\, K_{g<\Gamma, \Omega, \tau>}(gx) \tag{2.7}$$

§ 3 L'INTÉGRALE GÉNÉRATRICE

Dans ce paragraphe et les suivants, les séries de la forme

$$\sum_{k \geqslant 0} (h/\mathrm{i})^k u_k$$

sont considérées comme des séries formelles en h/i. Les expressions de la forme

$$\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k u_k, \qquad \text{où} \quad u_k = \sum_{l \geqslant 0} (h/\mathrm{i})^l u_{k,l},$$

doivent se comprendre comme

$$\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k \sum_{l=0}^{k} u_{k-l,l}.$$

Une expression du type $D(\xi \mid f, \Gamma)$ dénotera un opérateur différentiel linéaire agissant sur les variables ξ, et dont les coefficients dépendent de la fonction f et de l'objet géométrique Γ dans un voisinage d'ordre fini de ξ.

1. **Expression de $V\varphi$**

Introduisons l'expression formelle

$$V(g)\, u \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S\right) \tag{3.1}$$

c'est-à-dire un ensemble $\{g, u, S\}$ tel que

(1) $g \in G$;

(2) $u = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k u_k$,
où les $u_k : Q \to C$ sont telles que $\operatorname{supp} u = \bigcup_{k \geqslant 0} \operatorname{supp} u_k$ est compact;

(3) $S \in C^\infty$ (supp u), c'est-à-dire que $S : \operatorname{supp} u \to R$ et S se prolonge à un ouvert U tel que

$$\operatorname{supp} u \subset U.$$

L'expression (3.1) s'écrira en raccourci $V\varphi$, où φ désignera $u \exp \mathrm{i} h^{-1} S$ et se notera par le symbole $\{u, S\}$. Soit S_U le prolongement de S à U. A S_U on peut associer la variété lagrangienne Γ_{S_U} qui se projette biunivoquement sur Q. Le sous-ensemble Γ_{S_U}, qui est au-dessus de supp u, sera noté Γ_S. Si pour tout prolongement S_U, la variété lagrangienne $g\Gamma_{S_U}$ se projette biunivoquement sur Q, on dira que $g\Gamma_S$ se projette biunivoquement sur Q. Par le symbole

$$\text{S.P.} \int_Q (2\pi h \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2})^{-n/2} u \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} f\right) \mathrm{d}\xi \tag{3.2}$$

où u est décrit plus haut, $f : U \to R$, avec $\operatorname{supp} u \subset U$ ouvert, n'a qu'un seul point critique non dégénéré ξ_S sur U, on comprend l'expression formelle

$$\left[\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k D_k(\xi_S \mid f)\, u\right] \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{h} f(\xi_S)\right] \tag{3.3}$$

qui s'obtient si on applique la méthode de la phase stationnaire ([5]) à l'intégrale (3.2). Utilisons la formule explicite pour l'opérateur $V(g)$ dans la représentation de Schrödinger. On peut alors faire correspondre à l'expression $V\varphi$ une intégrale symbolique de la forme (3.2). La fonction f y a alors un point critique unique non-dégénéré, si et seulement si $g\Gamma_S$ se projette biunivoquement sur Q. Sous cette condition, le symbole S.P. $V\varphi$ a un sens et définit une expression de la forme

$$\varphi_1 = u_1 \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S_1\right)$$

La relation d'équivalence $V_1\varphi_1 \sim V_2\varphi_2$ est définie par la formule

$$\varphi_1 = \mathrm{S.P.}\,(V_1^{-1} V_2)\, \varphi_2$$

2. **Classe ψ**

Nous conviendrons de noter les classes d'équivalence ainsi introduites par la lettre ψ. A chaque classe ψ, on peut associer une paire $\langle \Gamma_\psi, \Omega_\psi \rangle$. Ici, Ω_ψ est la primitive de la forme ω sur le compact Γ_ψ. Supposons que la classe ψ contienne l'expression $V(g)\, u \exp(\mathrm{i}h^{-1}S)$. Considérons la paire lagrangienne $\langle \Gamma_{S_U}, \Omega_{S_U} \rangle$. La paire $\langle \Gamma_\psi, \Omega_\psi \rangle$ est la restriction de la paire lagrangienne $g \langle \Gamma_{S_U}, \Omega_{S_U} \rangle$ au-dessus de $g\Gamma_S$.

Cette restriction ne dépend pas du choix du représentant de la classe ψ.

Considérons l'application $P_{V\varphi} : \Gamma_\psi \to \operatorname{supp} u$ définie par la formule $P_{V\varphi} = \pi_S \circ g_S^{-1}$, où π_S est la projection orthogonale de Γ_S sur Q. On a une propriété de localité : $V_1\varphi_1 = V_2\varphi_2$ alors,

$$u_1 \circ P_{V_1\varphi_1} = \left(\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k D_k(\bullet \mid P_{V_2\varphi_2}\Gamma_\psi)\, u_2\right) \circ P_{V_2\varphi_2} \tag{3.4}$$

3. **L'espace linéaire $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$**

On dira que la classe ψ est dominée par la paire lagrangienne $\langle \Gamma, \Omega \rangle$ si la paire $\langle \Gamma_\psi, \Omega_\psi \rangle$ est une restriction de la paire lagrangienne $\langle \Gamma, \Omega \rangle$ à Γ_ψ. On peut pour cela considérer Γ_ψ comme sous-ensemble de E.

Un vecteur de l'espace linéaire $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ est une somme formelle

$$\Psi = \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha \tag{3.5}$$

pour un ensemble I de classes ψ_α, dominées par la paire $\langle \Gamma, \Omega \rangle$, et à condition que chaque point $x \in E$ ait un voisinage qui n'intersecte qu'un nombre fini de Γ_{ψ_α}. Les opérations linéaires dans $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ se définissent de manière évidente. Définissons le vecteur nul. Soit $\Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$. Fixons un point $x, x \in E$ et considérons un de ses voisinages $U(x)$. On peut supposer que $U(x)$ se projette biunivoquement sur un certain plan lagrangien Λ. Soit U_0 un voisinage de x tel que $\bar{U}_0 \subset U(x)$. Introduisons la fonction support correspondante η. Posons $\eta_\alpha = \eta_0 \, P^{-1}_{V_\alpha \varphi_\alpha}$. Considérons les expressions $V(g_\alpha)(u_\alpha \eta_\alpha) \exp(ih^{-1} S_\alpha)$, où $V(g_\alpha) u_\alpha \exp(ih^{-1} S_\alpha)$ appartient à la classe ψ_α. Soit $g\Lambda = Q, g \in G$. Notons $I(x) = \{ \alpha \,|\, U(x) \cap \Gamma_{\psi_\alpha} \neq \varnothing \}$. Pour $\alpha \in I(x)$, on a

$$V(g_\alpha)(u_\alpha \eta_\alpha) \exp\left(\frac{i}{h} S_\alpha\right) = V(g) u^\alpha \exp\left(\frac{i}{h} S\right)$$

Formons l'expression

$$V\varphi = V(g)\left(\sum_{\alpha \in I(x)} u^\alpha\right) \exp\left(\frac{i}{h} S\right).$$

Le vecteur Ψ sera considéré comme nul si

$$\left(\sum_{\alpha \in I(x)} u^\alpha\right)(P_{V\varphi} x) = 0 \qquad \forall x \in E.$$

4. Intégrale génératrice

Pour préparer certaines définitions, nous commencerons par quelques transformations symboliques. Introduisons la notation fondamentale

$$T\mu = T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle} \mu \tag{3.6}$$

pour la correspondance décrite plus bas

$$T : \{\mu\} \to \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$$

où $\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ est un triplet lagrangien et

$$\mu = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{h}{i}\right)^k \mu_k,$$

avec μ_k des mesures différentiables à valeurs complexes sur E.

La notation fondamentale est explicitée de manière plus précise par le symbole

$$T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle} \mu = \widetilde{\text{S.P.}} \int_E \mu(dx) K_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}(x) \tag{3.7}$$

Nous reviendrons au rôle de $\widetilde{\text{S.P.}}$ plus tard; quant à l'expression pour K, elle est décrite au § 2. La formule (2.7) amène à l'égalité symbolique

$$T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\mu = V(g^{-1})\, T_{g\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\mu_g \tag{3.8}$$

où $g \in G$ et $\mu_g(\gamma) = \mu(g^{-1}\gamma)$, $\gamma \subset gE$.

Théorème 1. *Entre les vecteurs Ψ de l'espace $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ et les mesures μ, on peut établir une correspondance biunivoque telle que les opérations linéaires sur Ψ correspondent à des opérations linéaires sur μ.*

On va faire la démonstration en construisant simultanément la correspondance T. C'est cette construction qui sera toujours sous-entendue par la suite. Montrons comment on construit le vecteur Ψ à partir de la mesure μ.

L'inversibilité de cette construction sera évidente.

Prenons sur E un recouvrement localement fini $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ et une partition de l'unité $\{\eta_\alpha\}$ qui lui est subordonnée. Imposons les conditions suivantes :

1) Chaque E_α se projette biunivoquement sur un certain plan lagrangien Λ_α. Soit $g_\alpha \in G$ tel que $g_\alpha Q = \Lambda_\alpha$.

2) L'opérateur $\delta_\alpha(x_\alpha) + \operatorname{tg}\theta_\alpha(x_\alpha)$, où δ_α et θ_α correspondent à l'élément du groupe G,

$$g_\alpha^{-1}\tau x = \tau_\alpha x_\alpha = \{x_\alpha, A_\alpha(x_\alpha)\}, \qquad x \in E_\alpha,$$

n'est pas dégénéré sur E_α.

Le symbole $T\mu$ correspond naturellement à la somme symbolique $\sum_\alpha T(\eta_\alpha \mu)$ que nous pouvons représenter à l'aide de (3.8) :

$$\sum_\alpha V(g_\alpha)\, T_{g_\alpha^{-1}\langle \Gamma.\Omega.\tau \rangle}(\eta_\alpha \mu)_{g_\alpha^{-1}}$$

L'intégrale (3.7), associée à $(T_{g_\alpha^{-1}\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}(\eta_\alpha \mu)_{g_\alpha^{-1}})(\xi))$ a la même forme que l'intégrale dans (3.2).

Le point $x_\alpha = \{\xi, \ldots,\} \in g_\alpha^{-1}E_\alpha$ est l'unique point critique non dégénéré de la fonction f correspondante. Le symbole $\widetilde{\text{S.P.}}$ dans (3.7) signifie l'application de la méthode de la phase stationnaire relativement à ce point,

$$T_{g_\alpha^{-1}\langle \Gamma.\Omega.\tau \rangle}(\eta_\alpha \mu)_{g_\alpha^{-1}} \to \varphi_\alpha = u_\alpha \exp\left(\frac{i}{h} S_\alpha\right)$$

et au symbole $T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\mu$ correspond le vecteur (3.5), où la classe ψ_α contient l'expression $V(g_\alpha)\varphi_\alpha$.

On appellera $T\mu$ *l'intégrale génératrice* pour le vecteur Ψ et on écrira $\Psi = T\mu$.

5. Relation avec l'opérateur canonique

Remarquons que $T\mu$ se réduit à une classe ψ, contenant une expression de la forme $V(g)\varphi$, si et seulement si la variété lagrangienne $g^{-1}\Gamma$ se projette biunivoquement sur Q.

En particulier, pour g égal à l'unité, l'expression pour φ est $\varphi = u\exp(\mathrm{i}h^{-1}S)$, où

$$S(\xi) = \Omega(x_\xi) + \frac{1}{2}\xi p, \qquad x_\xi = \{\xi, p\} \in \Gamma$$

$$u_0(\xi) = \frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}s} \left| \det^{-1/2} r^{-1} \cos\theta \right| \Bigg|_{x=x_\xi} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\pi k\right)$$

où l'on a respectivement s = élément de surface sur $\Gamma, r = \mathrm{e}^{\rho}, \theta$ et ρ paramètres de τx et enfin $k = \operatorname{ind}\gamma$, où γ est la projection sur Λ_0 d'une courbe sur θ, unissant $\theta = 0$ et $\theta(x)$, pour x quelconque.

Ainsi dans l'expression pour $V(g)\varphi$ figure l'indice.

Montrons comment se décrit en ces termes l'opérateur canonique de Maslov que l'on peut utiliser pour la description asymptotique des termes d'ordre le plus élevé.

Il sera évident que la construction de Maslov utilise le concept d'indice.

Chaque classe ψ contient une expression de la forme $V^{(1)}(\mathring{\theta})\, u \exp \mathrm{i}/hS$, telle que les valeurs propres de $\mathring{\theta}$ sont nulles ou $\pi/2$. Considérons la paire lagrangienne $\langle \Gamma, \Omega \rangle$ et la fonction $v : E \to C$.

Introduisons le triplet lagrangien $\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ et la mesure

$$\mu(\gamma) = \mu_0(\gamma) = \int_\gamma v \left| \det^{1/2} r \right| s(\mathrm{d}x)$$

Introduisons le vecteur $T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\mu$ et représentons-le sous la forme (3.5), mais en choisissant dans chaque ψ_α un représentant de la forme

$$V^{(1)}(\mathring{\theta}_\alpha)\, u_\alpha \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S_\alpha\right)$$

L'*opérateur canonique de Maslov* est l'application de $\{\langle \Gamma, \Omega \rangle, v\}$ dans la fonction associée $Q \to C$ qui est de la forme

$$\sum_\alpha V^{(1)}(\mathring{\theta}_\alpha)\, u_\alpha \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{h} S_\alpha\right)$$

On suppose que v est à support compact et que $\{\alpha \,|\, \operatorname{supp} v \cap E_\alpha \neq \varnothing\}$ est fini.

§ 4 APPLICATIONS DE L'INTÉGRALE GÉNÉRATRICE

Dans les points 1, 2, on considère le problème de Cauchy pour l'équation formelle

$$ih\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Psi(t) = \mathscr{H}(t)\Psi(t) \tag{4.1}$$

avec la condition initiale

$$\Psi(0) = \Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$$

En liaison avec cela, on définit au paragraphe 1 une certaine classe d'opérateurs linéaires dans les espaces $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ et au suivant on définit l'expression $ih\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Psi(t)$. Le paragraphe 3 discute les applications au développement asymptotique.

1. Opérateur quasi-classique

Définissons dans l'espace $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ des opérateurs linéaires de forme spéciale, que nous appellerons quasi-classiques.

Un opérateur quasi-classique $\mathscr{H}$ est donné par sa fonction d'Hamilton

$$H = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k H_k ; \qquad H_k : M \to C$$

Si $H = H_0$ et $\Psi = T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\mu$,
alors

$$\mathscr{H}\Psi = T_{\langle \Gamma . \Omega . \tau \rangle}\hat{H}(\Gamma, \tau)\,\mu. \tag{4.2}$$

où

$$\hat{H}(\Gamma, \tau)\,\mu = \sum_{l \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^l D_l(x \,|\, H_0, \Gamma, \tau)\,\mu. \tag{4.3}$$

D_k dépend linéairement de H_0.

Pour les H généraux il faut poser dans (4.3),

$$\hat{H}\mu = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k \sum_{l \geqslant 0} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^l D_l(x \,|\, H_k, \Gamma, \tau)\,\mu \tag{4.4}$$

Décrivons la construction qui conduit à la forme explicite de l'expression D_l.

Il suffit de considérer $H = H_0$ et $\mu = \mu_0$. Effectuons la suite de transformations symboliques

$$\mathscr{H}\Psi \sim \widetilde{\mathrm{S.P.}} \int_E \mu(\mathrm{d}x) \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}\left(K - x, \frac{\partial}{\partial y}\right)^k H(y)|_{y=x} K_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}(x)$$

$$\sim \sum_{k\geqslant 0} \widetilde{\mathrm{S.P.}} \int_E \mu(\mathrm{d}x) K F_k \tag{4.5}$$

La définition de F_k est évidente. Il est facile de voir que F_k est un polynôme en h et ξ, dépendant linéairement de H et de ses dérivées au point x. Chaque terme peut s'expliciter comme une expression de la forme $T\mu$. Il faut pour cela utiliser la transformation du § 2, qui transforme (là $T\mu$, mais ici) ce terme dans $\Psi = \sum_\alpha \psi_\alpha$, et ensuite représenter le résultat sous la forme $T\mu$. En résumé

$$\widetilde{\mathrm{S.P.}} \int_E \mu(\mathrm{d}x) K F_k \sim T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\left(\sum_{j \geqslant E\left(\frac{k+1}{2}\right)} \left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^j d_{k,j}(x \mid H, \Gamma, \tau)\mu \right) \tag{4.6}$$

Ici $E(t), t \in R$ est la partie entière de t. Dans la définition (4.3), il faut poser

$$D_0 = H, \qquad D_l = \sum_{k=1}^{2l} d_{k,l}, \qquad l \geqslant 1$$

Débarrassons-nous maintenant de l'hypothèse que E est équivalent à $E(\omega)$ faite au § 2. En examinant ce qui précède, nous voyons que cela se manifeste seulement dans l'annulation par la transformation inverse de T de la mesure μ sur E dans Ψ. Il faut se donner le triplet lagrangien sur E. Mais la transformation inverse de T n'est nécessaire ici que pour construire les opérateurs différentiels D_1. Compte tenu de leur caractère local, il est évident que les formules obtenues peuvent aussi être prises dans le cas général comme définitions. Une remarque analogue peut aussi être faite pour le début du paragraphe suivant.

Changeons de notation. Par Ψ, on conviendra de désigner les symboles $T_{\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle}\mu$, c'est-à-dire l'ensemble des triplets lagrangiens et des mesures. Par $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, on entendra l'espace linéaire de ces symboles, pour $\langle \Gamma, \Omega, \tau \rangle$ fixé, engendré par les opérations linéaires ordinaires sur μ.

L'espace introduit au point 3 du § 3 sera maintenant distingué de $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$. On le notera $\mathscr{L}_T(\Gamma, \Omega)$. L'élément de $\mathscr{L}_T(\Gamma, \Omega)$, correspondant à Ψ, $\Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$, sera noté Ψ_T.

2. Problème de Cauchy

Considérons le problème de Cauchy (4.1). Définissons l'opération $ih\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Supposons que la dépendance $\Psi(t)$ de t ait la forme $\Psi(t) = T_{m_t\langle\Gamma.\Omega.\tau\rangle}$, où m_t est le difféomorphisme décrit au § 2. En se basant sur la formule (2.5), on arrive à une expression du type (4.5) pour $ih\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t)$. En l'explicitant, on est naturellement conduit à la définition suivante

$$ih\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Psi(t) = T_{m_t\langle\Gamma.\Omega.\tau\rangle}\left\{ih\frac{\mathrm{d}\dot{\mu}_t}{\mathrm{d}\mu_t} + \chi + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k\sum_{j=1}^{2} d_{j.k}(\bullet|\chi,\Gamma,\tau)\right\}\mu_t \quad (4.7)$$

En revenant à l'équation (4.1), supposons que $H_0 = \chi$. L'équation (4.1) est alors équivalente à l'égalité

$$\mathrm{i}h\dot{\mu}_t + H_0\mu_t + \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^k\left[\sum_{j=1}^{2} d_{j,k}(\bullet|H_0,\ldots) - \sum_{l\geqslant 0}\left(\frac{h}{\mathrm{i}}\right)^l D_l(\bullet|H_0,\ldots)\right]\mu_t = 0 \quad (4.8)$$

qui, après simplification, aboutit au système récurrent d'équations

$$(\dot{\mu}_t)_k + H_1(\mu_t)_k = N_k((\mu_t)_i, i < k), \qquad k = 0,1,2,\ldots \quad (4.9)$$

et en outre $N_0 = 0$. Dans le problème de Cauchy, ces équations sont complétées par les conditions initiales, ce qui détermine alors uniquement μ_t. Le problème de Cauchy est résolu. Le choix de τ dans le triplet lagrangien $\langle\Gamma,\Omega,\tau\rangle$ qui définit la correspondance $\mu \to \Psi_T$ est largement arbitraire. En particulier, on peut toujours se donner K sous la forme canonique

$$K = K^{(1)} = \exp\ \frac{\mathrm{i}}{h}\Omega^{(t)}V(x)\,V^{(1)}(\theta)\,\delta$$

Le changement de K à $K^{(1)}$ correspond à une transformation linéaire locale des mesures correspondantes μ et $\mu^{(1)}$, et en outre $\mu_0 = \mu_0^{(1)}|\det^{1/2}\mathrm{r}|$. Si un tel changement est effectué dans la solution du problème de Cauchy, en considérant que $H_1 = 0$, on obtient que

$$(\mu_t^{(1)})_0(m_t\,\mathrm{d}x)/(\mu_0^{(1)})_0(\mathrm{d}x) = [s_0(\mathrm{d}x)/s_t(m_t\,\mathrm{d}x)]^{1/2} \quad (4.10)$$

où s_t est l'élément de surface de Γ_t.

L'intégrale génératrice avec un noyau de la forme $K^{(1)}$ est décrite dans [6]. La formule (4.10) établit un lien entre les solutions du problème de Cauchy qui y sont données et celles obtenues ici.

3. Applications asymptotiques

Dans l'expression $V\varphi$, nous noterons $V\varphi^N$ l'élément de $L_2(Q)$ donné par la formule

$$V\varphi^N = V(g)\,u^N \exp\left(\frac{i}{h}S\right)$$

où

$$u^N = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{h}{i}\right)^k u_k \tag{4.11}$$

On voit facilement que de $V_1\varphi_1 = V_2\varphi_2$ il résulte que

$$V_1\varphi_1^N - V_2\varphi_2^N = O(h^{N+1}).$$

Par $O(h^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, nous entendrons un élément de $L_2(Q)$ tel que $h^{-k}O(h^k)$ est borné pour $h \in \Delta$.

Par ψ^N, nous entendrons la classe des fonctions $V\varphi^N$, où $V\varphi$ appartient à la classe ψ.

Notons $\mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ avec des mesures à support compact μ.

Soit

$$\Psi \in \breve{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega) \text{ et } \Psi_T = \sum_{\alpha} \Psi_\alpha.$$

Nous prendrons l'ensemble I fini (cela est possible). Posons

$$\Psi_T^N = \sum_{\alpha} \Psi_\alpha^N.$$

On dira que $\Psi^\alpha, \Psi \in \mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$ est un développement asymptotique de l'élément ψ_h, $\psi_h \in L_2(Q)$ si

$$\psi_h - \Psi_T^N = O(h^{N+1}), \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

On écrira $\psi_h \sim \Psi$.

Nous dirons que l'opérateur linéaire H dans $L_2(Q)$, qui dépend de h, engendre l'opérateur quasi-classique $\mathscr{H}$ si, $\forall N$ et $\forall \Psi \in \mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$:

1) $\Psi_T^N \in \mathscr{D}(H)$ (domaine de H),
2) $H\Psi_T^N = (\mathscr{H}\Psi)_T^N + O(h^{N+1})$.

On peut donner des critères effectifs simples pour reconnaître si H est un opérateur engendrant un opérateur quasi-classique. Ils sont en particulier vérifiés sous des hypothèses simples sur v dans le cas de l'opérateur de Schrödinger, telles que la fonction d'Hamilton correspondante soit donnée par la formule (1.4).

Supposons que $H = H(t)$ dépende de t. Considérons dans $L_2(Q)$ le problème de Cauchy

$$ih \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi(t) = H(t)\psi(t) + f(t) \qquad \psi(0) = \psi \tag{4.12}$$

Nous supposons que :

1) l'opérateur $H(t)$ engendre l'opérateur quasi-classique $\mathscr{H}(t)$;
2) le problème (4.12) est résoluble et

$$\| \psi(t) \| \leqslant C(t) [\| \psi \| + \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| f(\tau) \|]$$

en outre, $C(t)$ ne dépend pas de h.

Pour des critères efficaces de validité de 2), cf. [7]-[9].

Théorème 2. *Si H vérifie les conditions* 1), 2) *et* $f = 0$, *mais si* $\psi \sim \Psi$, *avec* $\Psi \in \mathring{\mathscr{L}}(\Gamma, \Omega)$, *alors* $\psi(t) \sim \Psi(t)$, *où* $\Psi(t)$ *est la solution du problème* (4.1).

La démonstration est évidente si on tient compte de ce que

$$ih \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi_t^N = \left(ih \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi \right)_t^N + O(h^{N+1})$$

Un résultat analogue en termes de l'opérateur canonique est contenu dans les travaux de Maslov.

En conclusion, voici quelques remarques sur l'utilisation de l'intégrale génératrice pour l'étude de l'asymptotique des éléments propres de l'opérateur engendrant l'opérateur quasi-classique.

On démontre que l'on peut associer à chaque variété lagrangienne fermée compacte Γ, invariante relativement au système dynamique m_t et vérifiant une certaine condition de stabilité, un élément Ψ, $\Psi \in \mathscr{L}(\Gamma, \Omega)$ qui, pour une certaine suite h_n, $(n = 0, 1, 2, ...)$ $h_n \to 0$ si $n \to \infty$, approche asymptotiquement une fonction propre de l'opérateur H. Cette fonction propre, pour $h_n \to 0$, se concentre en un certain sens sur Γ. La suite h_n se détermine au moyen de la classe caractéristique de Maslov-Arnold de la variété Γ.

Une modification de l'intégrale génératrice permet d'obtenir un résultat analogue pour des variétés de dimension inférieure, par exemple pour les orbites fermées de dimension 1. Le rôle des conditions de stabilité dans cet ensemble de problèmes a été observé, pour des cas particuliers, dans les travaux [10], [11], etc.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. P. MASLOV, *Théories des perturbations et méthodes asymptotiques,* 1965, Moscou; et Appendice au livre d'Heading : *Introduction à la méthode des intégrales de phases* (édition russe, 1965).

[2] V. I. ARNOLD, « Sur la classe caractéristique qui figure dans la condition de quantification ». *Analyse fonctionnelle,* **1,** n° 1 (1967), p. 1-14.

[3] D. B. FUCHS, « Sur les classes caractéristiques de Maslov-Arnold », *Δ AH CCCP,* **178,** n° 2 (1968), p. 303-306).

[4] I. SEGAL, *Problèmes mathématiques de la physique relativiste.*

[5] M. V. FEDORIUK, « Méthode de la phase stationnaire pour les intégrales multiples ». *Journal de Math. appliquées et de Physique math.,* vol. 2, n° 1 (1962), p. 145-150.

[6] V. C. BOUSLAEV, « Description invariante de l'opérateur canonique de Maslov ». *Δ AH,* **184,** n° 1 (1969), p. 59-62.

[7] O. A. LADYJENSKAIA, « Sur la solution des équations opératorielles non-stationnaires ». *Math. Sbornik,* **39** (1956), p. 491-524.

[8] C. G. KREIN, *Équations différentielles linéaires dans un espace de Banach,* 1967,

[9] J. L. LIONS, *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites,* Springer, 1961.

[10] V. C. BULDYREV, « Asymptotique aux courtes longueurs d'onde des fonctions propres de l'opérateur d'Helmoltz ». *CCCP,* vol. 163, n° 4 (1965), p. 853-856.

[11] V. M. BABITCH, V. O. LAZOUTKIN, « Sur les fonctions propres concentrées au voisinage d'une géodésique fermée ». *Problèmes de Physique mathématique,* vol. 2, 1967, p. 15-25, Léningrad.

6236. – IMPRIMERIE NOUVELLE, ORLÉANS. – 4/1972.
Dépôt légal n° 7473 (2e trimestre 1972).
Imprimé en France.