Contributions à la théorie du type simple d'homotopie

par SERGE MAUMARY[1])

Ce travail comporte une partie algébrique, et une partie géométrique. La première a été suggérée par certaines applications de la «torsion de Whitehead», conduisant à considérer des complexes de modules basiques munis d'une filtration. Le problème se pose alors de calculer, lorsqu'elle est définie, la torsion de tels complexes à l'aide de la filtration. Un cas particulier de ce problème est d'ailleurs traité dans [1]. Nous en avons fait ici une théorie très générale, à l'aide de suites spectrales de couples exacts. La seconde partie donne une description précise des équivalences homotopiques simples (cf [3]). Bien que, d'une façon indépendante, on retrouve le résultat de Wall (cf [7]), on précise ici non seulement la dimension mais aussi l'ordre des opérations formelles qui décomposent une équivalence homotopique simple. Pour cela, il a fallu considérer des CW-complexes relatifs (X, A), A et X étant 1-connexes, munis d'une action cellulaire d'un groupe Γ, admettant un système fondamental fini de cellules. Cela généralise aussi la situation classique où X est le revêtement universel d'un CW-complexe fini.

Qu'il me soit permis d'exprimer à M. le Prof. G. de Rham ma profonde reconnaissance pour ses encouragements constants. Je remercie aussi vivement M. le Prof. V. Poenaru qui s'est intéressé à mon travail et m'a conseillé dans la présentation de celui-ci.

I. Torsion de Whitehead et suites spectrales

1. *Introduction*

Nous commencerons par élargir considérablement la notion de modules quasi-basiques introduite dans [1]. Ensuite, pour tout complexe fini C, dont les modules C_k et les modules d'homologie $H_k(C)$ sont quasi-basiques, la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(C)$ sera définie dans le groupe abélien multiplicatif $\tilde{K}^1(A)$ (cf [1]). Par ailleurs, pour tout complexe fini filtré C, les termes E^r de la suite spectrale associée peuvent être considérés canoniquement comme des complexes (monogradués). S'ils sont formés de modules quasi-basiques, indépendants de r pour r assez grand, alors $\tau(E^r)\in\tilde{K}^1(A)$ est déterminée pour tout r, et devient égale à 1 pour r assez grand. Dans ce cas, les modules C_k et $H_k(C)$ sont canoniquement quasi-basiques, et on aura le

THÉORÈME (4.4): *Si la suite spectrale* (E^r) *d'un* A*-complexe fini filtré* C *est*

[1]) Ce travail a été soutenu en partie par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique (crédit n° 4241).

formée de modules quasi-basiques, indépendants de r pour r assez grand, alors $\tau(C) = \prod_r \tau(E^r)$ *dans* $\tilde{K}^1(A)$.

Nous nous bornerons à examiner deux cas particuliers de ce théorème (3.8).

a) Si la suite spectrale est dégénérée, c'est-à-dire si $E^2_{pq} = 0$ pour $q > 0$, alors $\tau(C) = \tau(E^1)$. On retrouve ainsi une version un peu plus générale du résultat obtenu dans [1].

b) Si la suite spectrale est de type sphérique, c'est-à-dire s'il existe un entier $s \geqslant 1$ tel que $E^1_{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$ ou s, alors $\tau(C) = \tau(E^1)\,\tau(\mathfrak{G})$, où $\mathfrak{G}$ est la suite exacte graduée canonique

$$\rightarrow H_k(C) \rightarrow E^2_{k,0} \rightarrow E^2_{k-s-1,s} \rightarrow H_{k-1}(C) \rightarrow$$

dite «de Gysin».

Applications

PROPOSITION (4.1): *Soit X un* CW-*complexe fini, Y un sous-complexe rétract par déformation de X, et* $Y \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = X$ *une suite croissante de sous-complexes, tels que* $H_{p+q}(X_{p+1}, X_p) = 0$ *pour* $q \neq 0$. *Alors la torsion de Whitehead* $\tau(X, Y)$ *est égale à celle du complexe quasi-basique (acyclique) canonique*

$$\rightarrow H_k(\tilde{X}_{k+1}, \tilde{X}^k) \rightarrow H_{k-1}(\tilde{X}_k, \tilde{X}_{k-1}) \rightarrow \cdots,$$

où $\tilde{X}_k$ *est le revêtement de* X_k *induit par le revêtement universel de X.*

Soit X un CW-complexe fini muni d'une action cellulaire libre d'un groupe Γ, et θ un homomorphisme de Γ dans un anneau A, tel que les A-modules $H_k(X)_\theta$ déduits de $H_k(X)$ par extension des scalaires soient quasi-basiques. Soit encore S^n la sphère standard de dimension $n \geqslant 1$.

PROPOSITION (4.2): *Pour toute action cellulaire de* Γ *sur* $X \times S^n$, *de la forme* $\gamma(x, y) = (\gamma x, y')$, *avec* $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$, $y \in S^n$, *on a* $\tau_\theta(X \times S^n) = \tau_\theta(X)^{\chi(S^n)}$.

Par exemple, si Γ est un groupe cyclique fini agissant librement sur S^{2n+1}, alors le Γ-complexe $S^{2n+1} \times S^{2n+1}$ muni de l'action $\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y)$, $\gamma \in \Gamma$, a une θ-torsion égale à 1.

Nous utiliserons [1] et [2] comme références de base pour ce texte. On y trouve en particulier les définitions et propriétés du foncteur $\tilde{K}^1$, de la $\tilde{K}^1$-torsion d'une matrice régulière et d'une suite exacte graduée de modules basiques, et enfin de la $\tilde{K}^1$-torsion d'une équivalence homotopique de complexes basiques.

2. *Modules quasi-basiques*

2.1. DÉFINITION: *On dira qu'un A-module M est quasi-libre (abrégé q-l) s'il* *admet une résolution finie libre* (L, ε), *c'est-à-dire une suite exacte*

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

où les modules L_k *sont libres, de type fini.*

Notons que, si A est un anneau principal ou local régulier, tout A-module de type fini est q-l. Par ailleurs, un A-module projectif P est q-l, si et seulement si il existe un isomorphisme de la forme $P \oplus A^r \approx A^s$. En effet, une résolution libre finie (L, ε) de P est scindée, donc il existe un isomorphisme $P \oplus_k L_{2k+1} \approx \oplus_k L_{2k}$. On retrouve ainsi les modules q-l au sens de [1].

2.2. THÉORÈME: *Si, dans une suite exacte de A-modules* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, *deux d'entre eux sont q-l, alors le troisième l'est aussi.*

La démonstration sera éclaircie par le lemme suivant et ses corollaires.

2.3. LEMME: *Soient* C *et* C' *deux complexes, formés de modules libres de type fini en degré* k *pour* $0 \leqslant k < n$, *et nuls pour* $k < 0$ *ou* $k > n$.

Soit encore $f: C \to C'$ *une équivalence homotopique. Alors il existe des complexes acycliques* T *et* T', *formés de modules libres de type fini, ainsi qu'un isomorphisme* $g: C \oplus T \approx C' \oplus T'$ *homotope à* $p' \circ f \circ i$, *où* $i: C \to C \oplus T$ *et* $p': C' \oplus T' \to C'$ *sont les équivalences homotopiques canoniques.*

Preuve: Supposons, par induction sur $k < n$, qu'il existe des complexes T et T', libres de type fini et nuls en degrés $> n$, ainsi qu'une équivalence homotopique $g: C \oplus T \to C' \oplus T'$, formée d'isomorphismes en degrés $< k$, et homotope à $p' \circ f \circ i$. Pour $k = 0$, il suffit de prendre $T = T' = 0$ et $g = f$. Notons $D = (D_j, d_j)$ le complexe $C \oplus T$ et posons $B_j = \operatorname{Im} d_j$, $Z_j^* = \operatorname{Coker} d_{j+1}$, $H_j = H_j(D)$. Avec des notations analogues pour $C' \oplus T'$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H_k & \to & Z_j^* & \xrightarrow{d_k} & B_{k-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_{k*}} & & \downarrow{\scriptstyle g_k^*} & & \downarrow{\scriptstyle g_{k-1}} & & \\
0 & \to & H'_k & \to & Z_k'^* & \xrightarrow{d'_k} & B'_{k-1} & \to & 0
\end{array}$$

où g_{k_*} et g_{k-1} sont des isomorphismes par hypothèse d'induction. Donc g_k^* est un isomorphisme. Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
D_{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & D_k & \xrightarrow{\pi} & Z_k^* & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle g_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle g_k} & & \uparrow{\scriptstyle g_k^*} & & \\
D'_{k+1} & \xrightarrow{d'_{k+1}} & D'_k & \xrightarrow{\pi'} & Z_k'^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où π et π' sont les projections canoniques. Comme D'_k est libre pour $k < n$, il existe un homomorphisme $g'_k : D'_k \to D_k$, tel que $\pi \circ g'_k = (g^*_k)^{-1} \circ \pi'$. Alors $\pi' \circ (1 - g_k \circ g_k) = 0$, donc de nouveau parce que D'_k est libre, il existe un homomorphisme $\eta'_k : D'_k \to D'_{k+1}$, tel que $1 - g_k \circ g'_k = d'_{k+1} \circ \eta'_k$.

Soient E et E' les complexes $0 \to D_k \xrightarrow{\text{id.}_{k+1}} D_k \to 0$ et $0 \to D'_k \xrightarrow{\text{id.}_{k+1}} D'_k \to 0$ respectivement, où l'indice $k+1$ à l'identité signifie qu'elle est la différentielle en degré $k+1$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
D_{k+2} \arrow[r, "d_{k+2}"] \arrow[d, "g_{k+2}"'] & D_{k+1} \arrow[d, "g_{k+1}"'] \arrow[drr, "d_{k+1}"] & \oplus & D'_k \arrow[r, "d_{k+1} \oplus \text{id.}"] \arrow[d, "-g'_k"] \arrow[dll, "\eta'_k"'] & D_k \arrow[d, "g_k"'] \arrow[drr, "\text{id.}"] & \oplus & D'_k \arrow[r, "d_k"] \arrow[d, "-g'_k"] \arrow[dll, "d_{k+1} \cdot \eta'_k"'] & D_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{k-1}"] & {} \\
D'_{k+2} \arrow[r, "d'_{k+2}"] & D'_{k+1} & \oplus & D_k \arrow[r, "d'_{k+1} \oplus \text{id.}"] & D'_k & \oplus & D_k \arrow[r, "d'_k"] & D'_{k-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

définit un morphisme de complexes $h : D \oplus E' \to D \oplus E$, tel que $h_j = g_j$ pour $j < k$, et

$$h_k = (g_k + d'_{k+1} \circ \eta'_k) \oplus (\text{id.} - g'_k) = ((\text{id.} + g_k) \oplus \text{id.}) \circ (\text{id.} \oplus (\text{id.} - g'_k)).$$

Ces deux derniers facteurs étant des isomorphismes, h_k en est aussi un. De plus, si $i : D \to D \oplus E'$ et $p' : D' \oplus E \to D'$ sont les équivalences homotopiques canoniques, on a $p' \circ h \circ i = g$, donc h est une équivalence homotopique. En remplaçant T par $T \oplus E'$ et T' par $T' \oplus E$, on achève le pas d'induction. Dès lors, on peut supposer que g est un isomorphisme en degrés $\leqslant n-1$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_n \arrow[r] \arrow[d, "g_{n*}"'] & D_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H'_n \arrow[r] & D'_n \arrow[r, "d'_n"] & B'_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

g_{n*} et g_{n-1} sont des isomorphismes, donc g_n en est aussi un. cqfd.

2.4. COROLLAIRE: *Soit M un A-module q-l, et (K, η) une résolution de M, de longueur n, libre de type fini en degré $< n$. Alors il existe un entier s tel que $K_n \oplus A^s$ soit q-l.*

Preuve: Soit (L, ε) une résolution finie libre de M et $(L^{(n)}, \varepsilon)$ la résolution tronquée, de longueur n, obtenue en remplaçant L_n par $Z_{n-1} = \operatorname{Ker}(L_{n-1} \to L_{n-2})$. Il existe une équivalence homotopique $f : K \to L^{(n)}$ relevant l'identité de M (cf [4]). Donc, d'après le lemme, il existe un isomorphisme de la forme $Z_{n-1} \oplus A^r \approx K_n \oplus A^s$. Comme Z_{n-1} est q-l, $Z_{n-1} \oplus A^r$ l'est évidemment aussi. cqfd.

2.5. COROLLAIRE: *Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de modules, M étant de type fini et M'' q-l. Alors M' est de type fini.*

Preuve: Etant donné un homomorphisme surjectif $\varepsilon: A^m \to M$ on en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & A^m & \to & M'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id.}} & & \\ 0 & \to & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \to & 0 \end{array}$$

où $K = \mathrm{Ker}(v \circ \varepsilon)$. On voit que ε' est surjectif, et il résulte du corollaire 2.4 que K est de type fini. cqfd.

2.6. *Preuve du théorème* 2.2. Dans un premier cas, supposons que M' et M'' sont q-l, et prenons-en des résolutions finies libres (L', ε') et (L'', ε''), respectivement. D'après [4], il existe une résolution (K, η) de M et une suite exacte de complexes $0 \to L' \to K \to \to L'' \to 0$ relevant la suite exacte donnée. Comme L''_k est libre, on a $K_k \approx L'_k \oplus L''_k$, donc K_k est libre de type fini, pour tout k.

Dans un deuxième cas, supposons que M et M'' sont q-l. Voyons d'abord que, pour tout entier $n > 0$, il existe une résolution (K', η') de M', de longueur n, libre de type fini en degrés $< n$. Pour $n = 1$, cela signifie que M' est de type fini, ce qui résulte du corollaire 2.5. Supposons par induction que (K', η') existe pour un entier n. Il suffit alors de montrer que K'_n est de type fini. Soit (L'', ε'') une résolution finie libre de M'', et $(L''^{(n)}, \varepsilon'')$ la résolution tronquée, de longueur n. D'après [4], il existe une résolution (K, η) de M et une suite exacte de complexes $0 \to K' \to K \to L''^{(n)} \to 0$, relevant la suite exacte donnée. Dans $0 \to K'_n \to K_n \to Z''_{n-1} \to 0$, Z''_{n-1} est q-l, et K_n est de type fini en vertu du corollaire 2.4. Donc K'_n est de type fini, d'après le corollaire 2.5, ce qui achève le pas d'induction. Choisissons alors n égal à la longueur de L''. Il vient $Z''_{n-1} = 0$, donc $K'_n \approx K_n$. D'après le corollaire 2.4, il existe un entier s, tel que $K_n \oplus A^s$ soit q-l. En ajoutant à K' le complexe $0 \to A^s \xrightarrow{\mathrm{id.}n} A^s \to 0$, on obtient une résolution de M', de longueur $n+1$, libre de type fini en degrés $< n$, et égale à $K'_n \oplus A^s$ en degré n. En la composant avec une résolution finie libre de $K'_n \oplus A^s$, on obtient une résolution finie libre de M'.

Dans le dernier cas, on suppose que M' et M sont q-l. Voyons d'abord que, pour tout entier $n > 0$, il existe une résolution (K'', η'') de M'', de longueur n, et libre de type fini en degrés $< n$. Pour $n = 1$, cela signifie que M'' est de type fini, ce qui est évidemment vrai. Supposons, par induction, que (K'', η'') existe pour un entier n. Il suffit alors de montrer que K''_n est de type fini. Soit (L', ε') une résolution finie libre de M', et $(L'^{(n)}, \varepsilon')$ la résolution tronquée, de longueur n. Comme précédemment, il existe une résolution (K, η) de M et une suite exacte de complexes $0 \to L'^{(n)} \to K \to K'' \to 0$.

Dans $0 \to Z'_{n-1} \to K_n \to K''_n \to 0$, K_n est de type fini en vertu du corollaire 2.4, donc K''_n est aussi de type fini, ce qui achève le pas d'induction. Choisissons alors n égal à la longueur de L'. Il vient $Z'_{n-1}=0$, donc $K_n \approx K''_n$. D'après le corollaire 2.4, il existe s tel que $K''_n \oplus A^s$ soit q-l, ce qui entraîne comme ci-dessus que M'' est q-l. cqfd.

2.7. COROLLAIRE: *Soit C un complexe fini de modules q-l, qui est acyclique excepté en un degré λ. Alors $H_\lambda(C)$ est un module q-l.*

Preuve: En appliquant le théorème aux suites exactes $0 \to Z_k \to C_k \to B_{k-1} \to 0$, pour des valeurs décroissantes de k, jusqu'à $k=\lambda+1$, on voit que B_λ est q-l. De même, avec des valeurs croissantes de k jusqu'à $k=\lambda$, on voit que Z_λ est q-l. Une nouvelle application du théorème à la suite exacte $0 \to B_\lambda \to Z_\lambda \to H_\lambda \to 0$ montre que H_λ est q-l. cqfd.

2.8. Rappelons (cf [1] ou [2]) qu'étant donné un anneau A ayant la propriété: $A^r \approx A^s \Rightarrow r=s$, on dit qu'un A-module M est *basique*, s'il est muni d'une famille de bases finies se déduisant les unes des autres par des matrices de $\tilde{K}^1$-torsion 1.

2.9. DÉFINITION: *Une résolution finie libre (L, ε) d'un A-module M sera dite* basique, *si les modules L_k sont basiques, pour tout k. De plus, deux telles résolutions (L, ε) et (L', ε') du même module M seront dites* équivalentes, *si les équivalences homotopiques $f: L \to L'$ relevant l'identité de M sont simples (on sait que ces f sont toutes homotopes entre elles, donc ont toutes la même torsion).*

2.10. Pour tout A-module q-l M, désignons par $\tilde{K}^1(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence de résolutions basiques de M. Le groupe $\tilde{K}^1(A)$ agit sur $\tilde{K}^1(M)$ comme suit: étant donné une matrice régulière P et une résolution basique (L, ε) de M dont on peut supposer que le rang de L_0 est égal à celui de P, quitte à ajouter à L un complexe de la forme $0 \to A^r \xrightarrow{\text{id.}_1} A^r \to 0$ et remplacer P par $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on effectue le changement de base de matrice P dans L_0. La classe d'équivalence de cette dernière résolution basique ne dépend que de celle de (L, ε), et de la $\tilde{K}^1$-torsion de P.

2.11. PROPOSITION: *L'action canonique de $\tilde{K}^1(A)$ sur $\tilde{K}^1(M)$ est simplement transitive.*

Preuve: Soient (L, ε) et (L', ε') deux résolutions basiques de M, et $f: L \to L'$ une équivalence homotopique, relevant l'identité de M. On peut supposer que la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(f)$ est égale à celle d'une matrice régulière P, de rang celui de L_0. En effectuant le changement de base de matrice P dans L_0, f devient simple. Autrement dit, P transforme la classe d'équivalence de (L, ε) dans celle de (L', ε'). cqfd.

2.12. DÉFINITION: *Un A-module q-l M sera dit* quasi-basique *(abrégé q-b) s'il est muni d'une classe d'équivalence de résolutions basiques. Les résolutions de cette classe seront dites* distinguées.

Par convention, le module nul sera considéré comme q-b, la résolution nulle étant distinguée.

2.13. Etant donné un isomorphisme de A-modules q-b $u: M \approx M'$, on peut relever u en une équivalence homotopique $f: L \to L'$ de résolutions distinguées de M et M' respectivement. Ce relèvement f est unique à homotopie près, donc la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(f) \in \tilde{K}^1(A)$ ne dépend que de u. Aussi, on posera $\tau(u) = \tau(f)$, et on appellera $\tau(u)$ la *$\tilde{K}^1$-torsion de u.*

2.14. Pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules q-b, il existe des résolutions distinguées (L', ε'), (L, ε), (L'', ε'') de M', M'' respectivement, ainsi qu'une suite exacte de complexes $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ relevant la suite exacte donnée. On le voit en prenant (L', ε') et (L'', ε'') arbitrairement, et en posant $L = L' \oplus L''$, $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, quitte à ajouter à L' un complexe de la forme $0 \to A^r \xrightarrow{\mathrm{id.1}} A^r \to 0$ pour que L devienne distinguée (prop. 2.11). En désignant par λ_k la $\tilde{K}^1$-torsion de la suite exacte de modules basiques $0 \to L'_k \to L_k \to L''_k \to 0$, le produit $\prod_k \lambda_k^{\varepsilon(k)}$, où $\varepsilon(k) = (-1)^k$, ne dépend pas des choix précédents. En effet, si $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$ est une autre suite exacte de résolutions distinguées relevant la suite exacte donnée, il existe des équivalences homotopiques $f': L' \to K'$, $f: L \to K$, $f'': L'' \to K''$ relevant l'identité de M', M, M'' respectivement, et formant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L' & \to & L & \to & L'' & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow & & \\ 0 & \to & K' & \to & K & \to & K'' & \to & 0 \end{array}$$

(cf [4]). En passant aux complexes «cônes» de ces équivalences homotopiques, on a un isomorphisme canonique $C(f) \approx C(f') \oplus C(f'')$ dont la $\tilde{K}^1$-torsion en degré k est $\lambda_k \mu_{k-1}$, où μ_k désigne le $\tilde{K}^1$-torsion de la suite exacte $0 \to K'_k \to K_k \to K''_k \to 0$. Comme f', f et f'' sont simples, on a $\prod_k (\lambda_k \mu_{k-1})^{\varepsilon(k)} = 1$, c'est-à-dire $\prod_k \lambda_k^{\varepsilon(k)} = \prod_k \mu_k^{\varepsilon(k)}$. Cet élément sera appelé la *$\tilde{K}^1$-torsion de la suite exacte* donnée. Lorsqu'elle vaut 1, on dira que la suite est *simple*. Si l'on fait agir un élément $\sigma \in K^1(A)$ sur (L', ε') ou (L'', ε''), alors λ_0 devient $\sigma \lambda_0$, et λ_k reste inchangé pour $k > 0$. Donc le produit $\prod_k \lambda_k^{\varepsilon(k)}$ est une fonction homogène de degré 1 sur $\tilde{K}^1(M')$ et $\tilde{K}^1(M'')$. On voit de même que c'est une fonction homogène de degré -1 sur $\tilde{K}^1(M)$. Par conséquent, si dans une suite exacte de modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ deux d'entre eux sont q-b, la condition que cette suite soit simple détermine le troisième module comme q-b, de manière unique.

2.15. DÉFINITION: *On appellera* complexe quasi-basique *un complexe dont les modules non nuls sont en nombre fini et sont q-b.*

2.16. Etant donné un complexe q-b $C=(C_k, d_k)$ dont les modules d'homologie H_k sont tous q-b, on voit en appliquant le théorème 2.2 alternativement aux suites exactes canoniques $0\to B_k\to Z_k\to H_k\to 0$, $0\to Z_k\to C_k\to B_{k-1}\to 0$, où $B_k=\operatorname{Im} d_{k+1}$, $Z_k=\operatorname{Ker} d_k$, que B_k et Z_k sont q-l, pour tout k. En les considérant arbitrairement comme q-b, on obtient des $\tilde{K}^1$-torsions α_k et β_k respectivement pour les suites exactes ci-dessus. Le produit $\prod_k (\alpha_k\beta_k)^{\varepsilon(k+1)}$ ne dépend pas des choix faits, car α_k est une fonction homogène de degré 1 sur $\tilde{K}^1(B_k)$, de degré -1 sur $\tilde{K}^1(Z_k)$, et β_k une fonction homogène de degré 1 sur $\tilde{K}^1(B_{k-1})$ et $\tilde{K}^1(Z_k)$. Aussi on posera $\tau(C)=\prod_k(\alpha_k\beta_k)^{\varepsilon(k+1)}$ et on appellera $\tau(C)$ la *$\tilde{K}^1$-torsion de C.* C'est une fonction homogène de degré $(-1)^{k+1}$ sur $\tilde{K}^1(H_k)$, de degré $(-1)^k$ sur $\tilde{K}^1(C_k)$.

2.17. LEMME: *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{2,2} & \to & M_{2,1} & \to & M_{2,0} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{1,2} & \to & M_{1,1} & \to & M_{1,0} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M_{0,2} & \to & M_{0,1} & \to & M_{0,0} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

un diagramme commutatif de suites exactes de modules q-b. Désignons par τ_i' et τ_i'' les $\tilde{K}^1$-torsions des suites exactes

$$0\to M_{2,i}\to M_{1,i}\to M_{0,i}\to 0$$

et

$$0\to M_{i,2}\to M_{i,1}\to M_{i,0}\to 0$$

respectivement. Alors

$$\tau_0'\tau_1'^{-1}\tau_2' = \tau_0''\tau_1''^{-1}\tau_2''.$$

Preuve: Si les modules sont tous basiques, le diagramme se scinde et la formule est évidente. Sinon, on peut trouver une résolution distinguée $(L_{i,j}, \varepsilon_{i,j})$ de $M_{i,j}$, ainsi qu'un diagramme commutatif entre les $L_{i,j}$ qui relève le diagramme ci-dessus (cf [4]). Il suffit alors d'appliquer la formule en chaque degré de ce diagramme. cqfd.

2.18. Comme application de ce lemme, on voit que la définition de la $\tilde{K}^1$-torsion $\tau(C)$ d'un complexe q-b C, d'homologie également q-b, est autoduale: si α_k^* et β_k^* désignent les $\tilde{K}^1$-torsions des suites exactes canoniques $0 \to H_k \to Z_k^* \to B_{k-1} \to 0$ et $0 \to B_k \to C_k \to Z_k^* \to 0$ respectivement, alors $\tau(C) = \prod_k (\alpha_k^* \beta_k^*)^{\varepsilon(k+1)}$. Il résulte en effet du lemme 2.17, appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B_k \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & B_k \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_k \arrow[r] \arrow[d] & C_k \arrow[r] \arrow[d] & B_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_k \arrow[r] \arrow[d] & Z_k^* \arrow[r] \arrow[d] & B_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

que $\alpha_k^{-1} \beta_k^* = (\alpha_k^*)^{-1} \beta_k$.

2.19. Considérons une suite exacte $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ de complexes q-b, dont les modules d'homologie respectifs H_k', H_k et H_k'' sont aussi tous q-b. Graduons la suite exacte d'homologie associée $\mathfrak{H}$, en posant $\mathfrak{H}_{3k} = H_k''$, $\mathfrak{H}_{3k+1} = H_k$, $\mathfrak{H}_{3k+2} = H_k'$. Alors $\tau(\mathfrak{H})$ est déterminée. C'est une fonction homogène de degré $(-1)^k$ sur $\tilde{K}^1(H_k')$ et $\tilde{K}^1(H_k'')$, et de degré $(-1)^{k+1}$ sur $\tilde{K}^1(H_k)$.

2.20. THÉORÈME: *Si* $0 \to C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C'' \to 0$ *est une suite exacte comme ci-dessus, de* $\tilde{K}^1$*-torsion* σ_k *en degré k, alors* $\tau(C) = \tau(C')\,\tau(C'')\,\tau(\mathfrak{H}) \prod_k \sigma_k^{\varepsilon(k)}$.

Preuve: En utilisant l'homogénéité des $\tilde{K}^1$-torsions précédentes, on se ramène au cas où $\tau(C) = \tau(C') = \tau(C'') = \sigma_k = 1$. Considérons d'abord les diagrammes commutatifs de suites exactes canoniques suivantes:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_k \arrow[r] \arrow[d, "\iota"'] & B_k \arrow[r, "v"] \arrow[d] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_k \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z_k \arrow[r, "v"] \arrow[d] & Z_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_k \arrow[r] \arrow[d] & H_k \arrow[r, "v"] \arrow[d] & N_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z'_k \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z_k \arrow[r, "v"] \arrow[d] & L_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & C_k \arrow[r, "v"] \arrow[d, "d"] & C''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B'_{k-1} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & B_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B''_k \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_k \arrow[r] \arrow[d] & Z''_k \arrow[r, "\partial\circ\pi''"] \arrow[d, "\pi''"'] & Q_k \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_k \arrow[r] \arrow[d] & H''_k \arrow[r] \arrow[d] & Q_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où

$$K_k = \mathrm{Ker}(B_k \xrightarrow{v} B''_k), \qquad L_k = \mathrm{Im}(Z_k \xrightarrow{v} Z''_k),$$
$$M_k = \mathrm{Im}(H'_k \xrightarrow{u_*} H_k), \qquad N_k = \mathrm{Im}(H_k \xrightarrow{v_*} H''_k),$$
$$P_k = \mathrm{Coker}(B'_k \xrightarrow{u} B_k), \qquad Q_k = \mathrm{Im}(H''_k \xrightarrow{\partial} H'_{k-1}),$$

∂ étant l'homomorphisme de connexion dans $\mathfrak{H}$. En vertu du théorème 2.2, tous les modules ci-dessus sont q-l. Les modules C'_k, C_k, C''_k, H'_k, H_k, H''_k étant déjà q-b, considérons les autres modules arbitrairement comme q-b et posons:

$\gamma_k = \tilde{K}^1$-torsion de $0 \to K_k \to Z'_k \to M_k \to 0$
$\mu_k =$ » » $0 \to B''_k \to L_k \to N_k \to 0$
$\nu_k =$ » » $0 \to Z'_k \to Z_k \to L_k \to 0$
$\chi_k =$ » » $0 \to M_k \to H_k \to N_k \to 0$
$\chi''_k =$ » » $0 \to N_k \to H''_k \to Q_k \to 0$

Les autres suites exactes peuvent d'emblée être supposées simples. En appliquant alors le lemme 2.17 aux diagrammes ci-dessus, on trouve $\gamma_k\mu_k=\chi_k\nu_k^{-1}$, $\nu_k=1$, $\chi_k''=\mu_k$.

Envisageons un moment le cas particulier où C est acyclique, et où C'' n'a qu'un module non nul C_λ''. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B'_{\lambda-1} \arrow[r] \arrow[dd, "\mathrm{id.}"'] & Z'_{\lambda-1} \arrow[r] \arrow[d, "u"', "\approx"] & H'_{\lambda-1} \arrow[r] \arrow[ddr, "\partial"'] & 0 & \\
& & Z_{\lambda-1} \arrow[d, "\mathrm{id.}"] & & & \\
0 \arrow[r] & B'_{\lambda-1} \arrow[r, "u"] & B_{\lambda-1} \arrow[r] & P_{\lambda-1} \arrow[r, "\approx"] & C''_\lambda = H''_\lambda \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les deux suites exactes horizontales sont simples, et l'isomorphisme $u:Z'_{\lambda-1}\to Z_{\lambda-1}$ est aussi simple. Donc $\tau(\partial)=1$ d'après le lemme 2.17. Comme $\mathfrak{H}$ se réduit à l'isomorphisme ∂, on a $\tau(\mathfrak{H})=1$. La formule est ainsi vérifiée dans ce cas. Elle l'est aussi dans le cas dual, où C est acyclique et C' n'a qu'un module non nul, en utilisant les suites exactes duales des précédentes, ainsi que la définition duale de la $\tilde{K}^1$-torsion d'un complexe q-b.

Revenons au cas général et interprétons les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & B'_k \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d] & B'_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z'_k \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d, "\pi'"'] & Z'_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_{k+1} \arrow[r] & H'_k \arrow[r, "u_*"] \arrow[d] & M_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B'_k \arrow[r] \arrow[d] & K_k \arrow[r, "\pi\circ\iota"] \arrow[d] & Q_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_k \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d] & Z'_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & M_k \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d] & M_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

comme des suites exactes de complexes (colonnes), entrant dans les cas particuliers envisagés ci-dessus. Si R_k désigne l'homologie de degré 1 de $0\to B'_k\to Z'_k\to M_k\to 0$, les isomorphismes de connexion $\partial: R_k\to Q_{k+1}$ et $\partial: Q_{k+1}\to R_k$, respectifs à ces diagrammes, sont inverses l'un de l'autre. En appliquant la formule à chaque diagramme, on trouve alors $\lambda_k\chi'_k=\gamma_k$, où $\lambda_k=\tilde{K}^1$-torsion de $0\to B'_k\to K_k\to Q_{k+1}\to 0$, $\chi'_k=\tilde{K}^1$-torsion de $0\to Q_{k+1}\to H'_k\to M'_k\to 0$. Un raisonnement analogue avec les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B'_k \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & B'_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & B_k \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & B_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_{k+1} \arrow[r] & P_k \arrow[r] \arrow[d] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B'_k \arrow[r] \arrow[d] & K_k \arrow[r] \arrow[d] & Q_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_k \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & B_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

où ω est tel que l'homomorphisme composé $Z''_{k+1} \xrightarrow{\partial\circ\pi''} Q_{k+1} \xrightarrow{\omega} P_k$ est induit par ∂, montre que la $\tilde{K}^1$-torsion de $0 \to Q_{k+1} \to P_k \to B''_k \to 0$ est λ_k^{-1}. Encore un raisonnement analogue avec les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & L_{k+1} \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & L_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C''_{k+1} \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & C''_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_{k+1} \arrow[r, "\omega"] & P_k \arrow[r] \arrow[d] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & Z''_{k+1} \arrow[r, "\partial\circ\pi''"] \arrow[d] & Q_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C''_{k+1} \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & C''_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B''_k \arrow[r, "\text{id.}"] \arrow[d] & B''_k \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

montre que $\lambda_k^{-1} = 1$. En rassemblant les relations trouvées, on obtient $\chi'_k \chi''_k = \chi_k$. Mais par définition,

$$\tau(\mathfrak{H}) = \prod_k \chi_k'^{\varepsilon(3k+3)} \chi_k^{\varepsilon(3k+2)} \chi_k''^{\varepsilon(3k+1)} = \prod_k (\chi'_k \chi_k^{-1} \chi''_k)^{\varepsilon(k+1)},$$

et comme chaque facteur de ce produit vaut 1, on trouve $\tau(\mathfrak{H}) = 1$. cqfd.

2.21. COROLLAIRE: *Soit $f: C \to C'$ une équivalence homotopique de complexes q-b, à homologie aussi q-b. Alors*

$$\tau(f) = \tau(C')\,\tau(C)^{-1} \prod_k \tau(f_{k*})^{\varepsilon(k+1)}, \quad \textit{où} \quad f_{k*}: H_k \xrightarrow{\approx} H'_k$$

est l'isomorphisme induit par f en homologie.

Preuve: Considérons la suite exacte canonique de complexes q-b $0 \to C' \to C(f) \to \to C^{-1} \to 0$, où $C(f)$ est le cône de f, et C^{-1} est le complexe C avec la graduation $C_k^{-1} = C_{k-1}$. En chaque degré, cette suite exacte est simple, c'est-à-dire $\sigma_k = 1$ pour tout k. La suite exacte d'homologie associée $\mathfrak{H}$ se réduit aux isomorphismes

$$f_{k*}: \mathfrak{H}_{3k+3} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{H}_{3k+2}, \quad \text{donc} \quad \tau(\mathfrak{H}) = \prod_k \tau(f_{k*})^{\varepsilon(k+1)}$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.20, en tenant compte que $\tau(C^{-1}) = \tau(C)^{-1}$. cqfd.

3. *Suites spectrales quasi-basiques*

3.1. Etant donné un entier r, un A-r-complexe bigradué E est une famille de A-modules $E_{p,q}$ pour $p, q \in \mathbf{Z}$, et d'homomorphismes $d_{p,q}: E_{p,q} \to E_{p-r,q+r-1}$ tels que $d_{p-r,q+r-1} \circ d_{p,q} = 0$ pour tout p, q. Les modules d'homologie de E sont définis par $H_{p,q}(E) = Z_{p,q}(E)/B_{p,q}(E)$, où $Z_{p,q}(E) = \operatorname{Ker} d_{p,q}$ et $B_{p,q}(E) = \operatorname{Im} d_{p+r,q-r+1}$. On considérera E comme un complexe ordinaire (E_k, d_k) en posant $E_k = \bigoplus_{p+q=k} E_{p,q}$ et $d_k = \bigoplus_{p+q=k} d_{p,q}$. Si les modules $E_{p,q}$ et $H_{p,q}(E)$ sont tous q-b, alors les modules E_k et $H_k(E) = \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}(E)$ le sont aussi canoniquement, de sorte que $\tau(E)$ est déterminée.

3.2. Un A-r-couple exact fini $\mathfrak{C}$: $\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & {}_k\nwarrow \quad \swarrow_j & \\ & E & \end{array}$ est formé par deux A-modules bigradués $D = (D_{p,q})$ et $E = (E_{p,q})$, pour $p, q \in \mathbf{Z}$, et par trois homomorphismes bigradués

$$i = (i_{p,q}: D_{p,q} \to D_{p+1,q-1}), \qquad j = (j_{p,q}: D_{p,q} \to E_{p-r+1,q+r-1}).$$
$$k = (k_{p,q}: E_{p,q} \to D_{p-1,q}),$$

tels que la suite bigraduée

$$D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} D \xrightarrow{i} D$$

soit exacte.

L'hypothèse de finitude est que $E_{p,q} = D_{p,q} = 0$ dans chacun des cas $\begin{cases} p+q<0 \\ p \quad <0 \\ q \text{ assez grand,} \end{cases}$ et encore $E_{p,q} = 0$ pour p assez grand. Il en résulte que $i_{p,q}$ est un isomorphisme pour p assez grand, puisqu'alors

$$E_{p+1,q} = E_{p-r+2,q+r-2} = 0.$$

Ainsi, en posant

$$D_k = \varinjlim_p (D_{p,k-p}, i_{p,k-p}),$$

D_k est canoniquement isomorphe à $D_{p,k-p}$ pour p assez grand. On considérera $\mathfrak{C}$ comme un complexe acyclique, défini par les modules

$$\mathfrak{C}_{3k} = \bigoplus_{p+q=k} E_{p,q}, \ \mathfrak{C}_{3k+1} = \mathfrak{C}_{3k+2} = \bigoplus_{p+q=k} D_{p,q},$$

et par les homomorphismes

$$\mathfrak{C}_{3k+2} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=k} i_{p,q}} \mathfrak{C}_{3k+1} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=k} j_{p,q}} \mathfrak{C}_{3k} \xrightarrow{\bigoplus_{p+q=k} k_{p,q}} \mathfrak{C}_{3k-1}.$$

Il se décompose en somme directe d'un nombre fini de complexes acycliques finis $\mathfrak{H}^\lambda$, et d'une infinité de complexes de la forme

$$0 \longrightarrow D_{p,q} \underset{\approx}{\xrightarrow{i_{p,q}}} D_{p+1,q-1} \longrightarrow 0,$$

p étant assez grand. Nous dirons que le *couple exact* $\mathfrak{C}$ *est quasi-basique* si tous les $E_{p,q}$ sont q-b, les $D_{p,q}$ étant tous q-l. On considérera alors ces derniers arbitrairement comme q-b, mais de manière que les isomorphismes précédents $i_{p,q}$ soient simples. En particulier, cela détermine D_k comme q-b. Le produit $\prod_\lambda \tau(\mathfrak{H}^\lambda)$ ne dépend que de ce dernier choix, car $D_{p,q}$ figure toujours en deux degrés consécutifs dans le complexe $\mathfrak{C}$. On posera alors $\tau(\mathfrak{C}) = \prod_\lambda \tau(\mathfrak{H}^\lambda)$ et on appellera $\tau(\mathfrak{C})$ la $\bar{K}^1$*-torsion du couple exact q-b* $\mathfrak{C}$, relative aux modules q-b D_k.

3.3. Etant donné un r-couple exact $\mathfrak{C}$: $\begin{tikzcd}[column sep=small] D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$, on sait lui associer un $r+1$-couple exact $\mathfrak{C}'$: $\begin{tikzcd}[column sep=small] D' \arrow[rr, "i'"] & & D' \arrow[dl, "j'"] \\ & E' \arrow[ul, "k'"] & \end{tikzcd}$ appelé couple dérivé de $\mathfrak{C}$. Pour le construire, on fait d'abord de E un r-complexe bigradué, en introduisant les homomorphismes $d_{p,q} = j_{p-1,q} \circ k_{p,q}: E_{p,q} \to \to E_{p-r,q+r-1}$. On pose ensuite $D'_{p,q} = \operatorname{Im} i_{p-1,q+1}$, $E'_{p,q} = H_{p,q}(E)$, et on définit i', j', k' par les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} D'_{p,q} \arrow[rr] \arrow[dr, "i'_{p,q}"'] & & D_{p,q} \arrow[dl, "i_{p,q}"] \\ & D_{p+1,q-1} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_{p-1,q+1} \arrow[r, "i_{p-1,q+1}"] \arrow[d, "j_{p-1,q+1}"] & D'_{p,q} \arrow[d, "j'_{p,q}"] \\ Z_{p-r,q+r}(E) \arrow[r, "\pi"] & E'_{p-r,q+r} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z_{p,q}(E) \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "k_{p,q}"'] & & E'_{p,q} \arrow[dl, "k'_{p,q}"] \\ & D'_{p-1,q} & \end{tikzcd}$$

où π est la projection canonique. Notons que D'_k, défini par $\varinjlim_p D'_{p,k-p}$, est égal à D_k, puisque $i_{p,q}$ est un isomorphisme pour p assez grand.

3.4. LEMME: *Soit* $\mathfrak{C}$: $\begin{tikzcd}[column sep=small] D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$ *un couple exact fini dont les modules* $E_{p,q}$ *sont tous* *q-b. Supposons que les deux couples dérivés successifs $\mathfrak{C}'$ et $\mathfrak{C}''$ soient q-b. Alors $\mathfrak{C}$ est q-b, et $\tau(E)=\tau(\mathfrak{C})\,\tau(\mathfrak{C}')^{-1}$ relativement aux modules q-b D_k.*

Preuve: Considérons les diagrammes commutatifs de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B_{p,q}(E) \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d] & B_{p,q}(E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} k_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{p,q}(E) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} k'_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} k'_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & E'_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} k'_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} k_{p,q} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id.}"'] & Z_{p,q}(E) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} k'_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} k_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & E_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} k_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & B_{p-r,q+r-1}(E) \arrow[r, "\mathrm{id.}"] \arrow[d] & B_{p-r,q+r-1}(E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} k'_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & D'_{p-1,q} \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & D''_{p,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} k_{p,q} \arrow[r] \arrow[d] & D_{p-1,q} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & D'_{p,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_{p-r,q+r-1}(E) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} k_{p-r,q+r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} k'_{p-r,q+r-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Il résulte de l'hypothèse et du théorème 2.2, que tous les modules ci-dessus sont q-l. En particulier, $\mathfrak{C}$ est q-b. Les modules $D_{p,q}$, $D'_{p,q}$, $D''_{p,q}$ sont à considérer comme q-b, de la manière indiquée plus haut. En considérant les modules restant arbitrairement comme q-b, posons:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{p,q} &= \tilde{K}^1\text{-torsion de } 0 \to \operatorname{Ker} k_{p,q} \to Z_{p,q}(E) \to \operatorname{Im} k'_{p,q} \longrightarrow 0\\
\nu_{p,q} &= \quad » \qquad » \quad 0 \to \operatorname{Ker} k'_{p,q} \to E'_{p,q} \to \operatorname{Im} k'_{p,q} \longrightarrow 0\\
\mu_{p,q} &= \quad » \qquad » \quad 0 \to \operatorname{Ker} k_{p,q} \to E_{p,q} \to \operatorname{Im} k_{p,q} \longrightarrow 0\\
\alpha_{p,q} &= \quad » \qquad » \quad 0 \to B_{p,q}(E) \to Z_{p,q}(E) \to E'_{p,q} \longrightarrow 0\\
\beta_{p,q} &= \quad » \qquad » \quad 0 \to Z_{p,q}(E) \to E_{p,q} \to B_{p-r,q+r-1}(E) \to 0
\end{aligned}
$$

Les autres suites exactes peuvent être supposées simples. Le lemme 2.17 appliqué aux deux premiers diagrammes, donne $\alpha_{p,q} = \sigma_{p,q} \nu_{p,q}^{-1}$ et $\beta_{p,q} = \mu_{p,q} \sigma_{p,q}^{-1}$. En utilisant la définition, on a

$$
\begin{aligned}
\tau(E) &= \prod_{p,q} (\alpha_{p,q} \beta_{p,q})^{\varepsilon(p+q+1)}.\\
\tau(\mathfrak{C}) &= \prod_{p,q} \mu_{p,q}^{\varepsilon(p+q+1)}, \qquad \tau(\mathfrak{C}') = \prod_{p,q} \nu_{p,q}^{\varepsilon(p+q+1)},
\end{aligned}
$$

et la formule annoncée résulte des relations précédentes. cqfd.

3.5. Etant donné un 1-couple exact fini $\mathfrak{C}: \begin{array}{c} D \xrightarrow{i} D \\ {}_k\nwarrow \ \swarrow_j \\ E \end{array}$, on lui associe, pour tout entier $r \geqslant 1$, le r-couple exact $\mathfrak{C}^r: \begin{array}{c} D^r \xrightarrow{i^r} D^r \\ {}_{k^r}\nwarrow \ \swarrow_{j^r} \\ E^r \end{array}$, obtenu par $r-1$ dérivations successives. Les r-complexes bigradués $(E^r, d^r = j^r \circ k^r)$ forment ce qu'on appelle la *suite spectrale* de $\mathfrak{C}$. Pour r assez grand, $d^r = 0$ puisque d^r applique $E^r_{p,q}$ dans $E^r_{p-r,q+r-1}$, et que $E_{p-r,q+r-1} = 0$ implique $E^r_{p-r,q+r-1} = 0$. Alors E^r ne dépend plus de r, et on l'écrit E^∞. Quant au complexe $\mathfrak{C}^r$, il devient lorsque r est assez grand somme directe de suites exactes courtes

$$
0 \to D^r_{p+r-2,q-r+2} \xrightarrow{i^r} D^r_{p+r-1,q-r+1} \xrightarrow{j^r} E^r_{p,q} \to 0.
$$

En effet, on a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} i^r &= \operatorname{Im}(E^r_{p+r-1,q-r+2} \xrightarrow{k^r} D^r_{p+r-2,q-r+2}),\\
\operatorname{Im} j^r &= \operatorname{Ker}(E^r_{p,q} \xrightarrow{k^r} D^r_{p-1,q})
\end{aligned}
$$

et

$$
D^r_{p-1,q} = \operatorname{Im}(D_{p-r,q+r-1} \xrightarrow{i \circ i \dots i} D_{p-1,q}),
$$

mais $E^r_{p+r-1,q-r+2}$ devient nul, comme précédemment, ainsi que $D_{p-r,q+r-1}$. Par définition, $D^r_{p+r-1,q-r+1}$ est un sousmodule de $D_{p+r-1,q-r+1}$, qui n'est autre que D_k pour r assez grand et $k = p+q$. Donc $D^r_{p+r-1,q-r+1}$ devient canoniquement un sousmodule D^p_k de D_k, tel que $D^p_k \subset D^{p+1}_k$, ce qui détermine une filtration de D_k. Les suites exactes $0 \to D^{p-1}_k \to D^p_k \to E^\infty_{p,k-p} \to 0$ déduites de $\mathfrak{C}^r$ donnent des isomorphismes canoniques $\phi_{p,k-p}: D_k^p/D_k^{p-1} \approx E^{\infty}_{p,k-p}$, c'est-à-dire un isomorphisme ϕ du module gradué $\mathrm{Gr}\, D_k$, associé à la filtration de D_k, avec E^{∞}.

3.6. DÉFINITION: *La suite spectrale* (E^r) *d'un 1-couple exact fini* $\mathfrak{C}$ *sera dite* quasi-basique, *si les modules* $E^r_{p,q}$ *sont tous q-b, et de manière indépendante de r, pour r assez grand.*

3.7. Cette définition a les conséquences suivantes:

1°) $\tau(E^r)$ est déterminé pour tout r, puisque les modules d'homologie E^{r+1} de E^r sont q-b. De plus $\tau(E^r)=1$ pour r assez grand.

2°) les modules $E^{\infty}_{p,q}$ sont canoniquement q-b.

3°) les couples dérivés $\mathfrak{C}^r$ de $\mathfrak{C}$ sont tous q-b. Il suffit de le voir pour r assez grand, d'après le lemme 3.4, autrement dit que les modules D_k^p sont q-l, D_k étant q-b. Or via l'isomorphisme ϕ, $\mathrm{Gr}\, D_k$ est q-b. D'après le théorème 2.2, si le module gradué d'un module filtré est q-l, alors les termes de la filtration le sont aussi. En exigeant que les suites exactes $0 \to D_k^{p-1} \to D_k^p \to D_k^p/D_k^{p-1} \to 0$ soient simples, chaque module D_k^p devient canoniquement q-b. Ainsi, $\tau(\mathfrak{C}^r)$ est déterminée pour tout r, et $\tau(\mathfrak{C}^r)=1$ pour r assez grand.

3.7. LEMME: *Si un 1-couple exact fini* $\mathfrak{C}$ *a une suite spectrale q-b, alors* $\tau(C)= =\prod_{r=1}^{\infty} \tau(E^r)$.

Preuve: D'après le lemme 3.4, on a $\tau(E^r)=\tau(\mathfrak{C}^r)\,\tau(\mathfrak{C}^{r+1})^{-1}$ pour tout r, donc $\tau(\mathfrak{C}^1)=\prod_{r=1}^{\infty} \tau(E^r)$. Mais $\mathfrak{C}^1=\mathfrak{C}$. cqfd.

3.8. *Cas particuliers*

a) Supposons que $E_2^{p,q}=0$ pour $q>0$. Alors $E^r_{p,q}=0$ pour tout $r \geqslant 2$ et $q>0$. Comme d^r applique $E^r_{p,q}$ dans $E^r_{p-r,r-1}$, $d^r=0$ pour $r \geqslant 2$ et alors $E^{r+1}=E^r$. Donc $E^2_{p,q}=E^{\infty}_{p,q}$. Par ailleurs, $E^{\infty}_{p,q}$ est isomorphe à D_k^p/D_k^{p-1}, où $k=p+q$, ce qui montre que $D_k^p/D_k^{p-1}=0$ pour $p<k$, c'est-à-dire $D_k^p=0$ pour $p<k$. On obtient ainsi $E^2_{k,0} \approx D_k$. En supposant que les modules q-b $E^r_{k,0}$ sont indépendants de r pour $r \geqslant 2$, on aura $\tau(E^r)=1$ pour $r \geqslant 2$, donc $\tau(\mathfrak{C})=\tau(E^1)$.

b) Supposons qu'il existe des entiers s et t, tels que $1 \leqslant s \leqslant t$, et $E^s_{p,q}=0$ pour $q \neq 0$ ou t. Alors $E^r_{p,q}=0$ pour tout $r \geqslant s$, et $q \neq 0$ ou t. Comme d^r applique $E^r_{p,q}$ dans $E^r_{p-r,q+r-1}$, $d^r=0$ pour $r \geqslant s$, sauf pour $r=1$ et $r=t+1$. Donc $E^{t+1}=E^{s+1}$ et $E^{t+2}=E^{\infty}$. Le complexe E^{t+1} est somme directe des suites

$$0 \longrightarrow E^{t+1}_{p,0} \xrightarrow{d^{t+1}} E^{t+1}_{p-t-1,t} \longrightarrow 0,$$

donc $\mathrm{Ker}\, d^{t+1}=E^{t+2}_{p,0}$, $\mathrm{Coker}\, d^{t+1}=E^{t+2}_{p-t-1,t}$ et on obtient ainsi une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^{\infty}_{p,0} \longrightarrow E^{s+1}_{p,0} \xrightarrow{d^{t+1}} E^{s+1}_{p-t-1,t} \longrightarrow E^{\infty}_{p-t-1,t} \longrightarrow 0.$$

Si γ_p désigne sa $\tilde{K}^1$-torsion, on a $\tau(E^{t+1})=\prod_p \gamma_p^{\varepsilon(p)}$ par définition de $\tau(E^{t+1})$. Par ailleurs, l'isomorphisme $\phi: \operatorname{Gr} D \approx E^\infty$ montre que $D_k^p = D_k^{p-1}$ pour $p \neq k$ ou $k-t$, c'est-à-dire $D_k^p=0$ pour $p<k-t$, $D_k^p=D_k^{k-t}$ pour $k-t \leqslant p<k$. On en déduit $E_{k,0}^\infty \approx D_k/D_k^{k-t}$, $E_{k-t,t}^\infty \approx D_k^{k-t}$, et une suite exacte canonique

$$\mathfrak{G}: \longrightarrow D_k \longrightarrow E_{k,0}^{s+1} \xrightarrow{d^{t+1}} E_{k-t-1,t}^{s+1} \longrightarrow D_{k-1} \longrightarrow E_{k-1,0}^{s+1} \longrightarrow \cdots,$$

composée des suites exactes écrites plus haut et des suites exactes simples $0 \to E_{k-t,t}^\infty \to \to D_k \to E_{k,0}^\infty \to 0$. En graduant $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}_{3k}=E_{k,0}^{s+1}$, $\mathfrak{G}_{3k+1}=D_k$, $\mathfrak{G}_{3k+2}=E_{k-t,t}^{s+1}$, on a $\tau(\mathfrak{G})=\prod_p \gamma_p^{\varepsilon(p)}$ par définition de $\tau(\mathfrak{G})$, donc $\tau(E^{t+1})=\tau(\mathfrak{G})$. En supposant que les modules q-b $E_{p,q}^r$ sont indépendants de r pour $r \geqslant s$, excepté pour $r=1$ et $r=t+1$, on aura $\tau(E^r)=1$ pour $r \neq 1$, $t+1$, donc $\tau(\mathfrak{C})=\tau(\mathfrak{G})\,\tau(E^1)\prod_{r=2}^{s-1} \tau(E^r)$. Si $s \leqslant 2$, le dernier produit tombe, ce qui donne $\tau(\mathfrak{C})=\tau(\mathfrak{G})\,\tau(E^1)$.

4. *Filtrations quasi-basiques*

4.1. Etant donné une filtration finie d'un complexe fini C, c'est-à-dire une suite croissante de sous-complexes $0 \subset C^0 \subset C^1 \subset \cdots \subset C^n = C$, on lui associe le 1-couple exact fini

$$\mathfrak{C}: \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{i} & D \\ & {}_k\nwarrow \quad \swarrow_j & \\ & E & \end{array}$$

, formé par les modules

$D_{p,q} = H_{p+q}(C^p)$, $E_{p,q} = H_{p+q}(C^p/C^{p-1})$ et par les homomorphismes

$$H_{p+q}(C^{p-1}) \xrightarrow{i_{p-1,q}} H_{p+q}(C^p) \xrightarrow{j_{p,q}} H_{p+q}(C^p/C^{p-1}) \xrightarrow{k_{p,q}=\partial} H_{p+q-1}(C^{p-1})$$

tirés de la suite exacte d'homologie $\mathfrak{H}^p$ de C^p mod. C^{p-1}. On a alors $D_k=H_k(C)$ et $D_k^p=\operatorname{Im}(H_k(C^p) \to H_k(C))$. La suite spectrale de $\mathfrak{C}$, complétée par le module bigradué $E_{p,q}^0=C_{p+q}^p/C_{p+q}^{p-1}$, s'appelle la suite spectrale de la filtration. Lorsque les modules $E_{p,q}^0$ et $E_{p,q}^1$ sont tous q-b, la $\tilde{K}^1$-torsion des complexes C^p/C^{p-1} est déterminée.

4.2. DÉFINITION: *On dira qu'une filtration d'un complexe C est* quasi-basique, *si les modules* E_{p+q}^r *de la suite spectrale associée sont tous q-b, de manière indépendante de r pour r assez grand, et que* $\tau(C^p/C^{p-1})=1$.

4.3. Les modules q-b $E_{p,k-p}^0$ déterminent, d'une manière déjà vue, les modules C_k^p comme q-b. Quant aux modules $D_{p,k-p}=H_k(C^p)$, ils sont à considérer comme q-b, de manière indépendante de p pour p assez grand. Dans ces conditions, les $\tilde{K}^1$-torsions $\tau(C)$ et $\tau(C^p)$ sont déterminées.

4.4. THÉORÈME: *Soit C un complexe fini, muni d'une filtration q-b, et* (E^r) *la suite spectrale associée. Alors* $\tau(C)=\prod_{r=1} \tau(E^r)$.

Preuve: En vertu du théorème 2.20, on a $\tau(C^p)=\tau(C^{p-1})\tau(\mathfrak{H}^p)$, donc $\tau(C)=$ $=\prod_p \tau(\mathfrak{H}^p)$. Mais le second membre est $\tau(\mathfrak{C})$ par définition, où $\mathfrak{C}$ est le couple exact associé à la filtration. La formule annoncée résulte alors du lemme 3.7. cqfd.

5. *Applications géométriques*

5.1. Rappelons d'abord que pour toute paire (X, Y) de CW-complexes, $Y\subset X$, et toute action cellulaire d'un groupe Γ sur (X, Y) qui est libre à système fondamental fini sur $X-Y$, on définit le $\mathbf{Z}\Gamma$-complexe basique $C(X, Y)$ des chaînes cellulaires de $X-Y$, dont l'homologie n'est autre que l'homologie singulière $H_*(X, Y)$ (cf [1] ou [2]). Si celle-ci est q-b, éventuellement après une extension des scalaires $\theta:\mathbf{Z}\Gamma\to A$, alors la θ-torsion $\tau_\theta(X, Y)$ est déterminée, dans le groupe quotient de $\tilde{K}^1(A)$ par le sous-groupe engendré par les unités $\theta(\Gamma)\subset A$.

5.2. PROPOSITION: *Soit $Y\subset X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n=X$ une suite croissante de sous-complexes invariants, telle que $H_{p+q}(X_p, X_{p-1})=0$ pour $q>0$. Alors la filtration induite sur $C(X, Y)_\theta$ est canoniquement q-b, et $\tau_\theta(X, Y)$ est égale à la θ-torsion du complexe q-b E^1:*

$$\to H_k(X_k, X_{k-1})_\theta \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(X_{k-1}, X_{k-2})_\theta \to\cdots$$

Preuve: D'abord, les modules $E^0_{p,q}=C_{p+q}(X_p, X_{p-1})_\theta$ sont basiques. Ensuite les modules $E^1_{p,0}=H_p(X_p, X_{p-1})_\theta$ sont q-l d'après le corollaire 2.7, appliqué au complexe $C(X_p, X_{p-1})_\theta$. La condition $\tau_\theta(X_p, X_{p-1})=1$ les détermine canoniquement comme q-b. Enfin $E^2_{p,q}$ étant nul pour $q>0$, on a $E^2_{p,0}=H_p(X, Y)_\theta$, supposé q-b. La proposition résulte alors du théorème 4.4. cqfd.

5.3. Considérons maintenant une paire polyédrale (K, L) munie d'une action de Γ, libre avec système fondamental fini sur $K-L$, et un fibré X sur K, de fibre S^n, $n\geqslant 1$. Pour toute décomposition polyédrale de S^n, X est un polyèdre dont les cellules sont les produits des cellules de K par celles de S^n. Le sous-fibré Y induit sur L est un sous-complexe. Supposons que Γ agisse cellulairement sur X, en induisant l'action donnée sur K via la projection $X\to L$. Alors cette action est libre, à système fondamental fini, sur $X-Y$. Soit X_p le sous-complexe invariant de X induit sur $K\cup L^p$, K^p étant le p-squelette de K, et E^r la suite spectrale associée à la filtration $\ldots C(X_{p-1}, Y)$ $\subset C(X_p, Y)\ldots$. Les modules $E^0_{p,q}=C_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ sont basiques. Les modules $E^1_{p,q}=H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ sont canoniquement isomorphes, par homotopie, excision et la formule de Künneth, à $H_p(K^p, K^{p-1})\otimes H_q(S^n)$ (voir aussi chap. 9.2 de [5]). En particulier, $E^1_{p,q}=0$ pour $q\neq 0$ ou n, et $E^1_{k,0}\approx H_k(K^k, K^{k-1})=C_k(K, L)$, $E^1_{k,n}\approx H_k(K^k, K^{k-1})=C_k(K, L)$. En tenant compte des différentielles et des degrés, on a un isomorphisme de complexes $E^1 \approx C(K, L) \oplus C(K, L)^{-n}$. Comme $E^2 = H(E^1)$, on a $E^2_{k,0} \approx \approx H_k(K, L)$, $E^2_{k,n} \approx H_k(K, L)$. D'après 3.8 b), la suite exacte $\mathfrak{G}$ s'écrit pour $s=1$ et $t=$n,

$$\to H_k(X, Y) \to H_k(K, L) \to H_{k-n-1}(K, L) \to H_{k-1}(X, Y) \to$$

5.4. Faisons maintenant une extension des scalaires $\theta: \mathbf{Z}\Gamma \to A$ qui respecte les suites exactes et qui rende les modules $H_k(X, Y)$ et $H_k(K, L)$ q-b. Alors les θ-torsions $\tau_\theta(X, Y)$ et $\tau_\theta(K, L)$ sont déterminées, ainsi que celle de la suite exacte $\mathfrak{G}_\theta$. On posera $\tau_\theta(\mathfrak{G}) = \tau(\mathfrak{G}_\theta)$.

5.5. PROPOSITION: *Soit* (X, Y) *une paire polyédrale et* $\theta: \mathbf{Z}\Gamma \to A$ *un homomorphisme vérifiant respectivement les hypothèses 5.3 et 5.4. Alors*

$$\tau_\theta(X, Y) = \tau_\theta(K, L)^{\chi(S^n)} \; \tau_\theta(\mathfrak{G}).$$

Preuve: D'après ce qui précède, la suite spectrale (E^r_θ) est q-b. On l'a vu en effet pour $r=0$, 1 et 2. Pour $r=\infty$, cela résulte de la suite exacte q-b $\mathfrak{G}_\theta$, dans laquelle E^∞_θ figure comme cycle. Maintenant $\tau_\theta(E^1) = \tau_\theta(K, L)^2$ si n est pair, et $\tau_\theta(E^1) = 1$ si n est impair, autrement dit $\tau_\theta(E^1) = \tau_\theta(K, L)^{\chi(S^n)}$. D'après 3.8 b), on a $\tau_\theta(X, Y) = \tau_\theta(E^1) \times \tau_\theta(\mathfrak{G})$. cqfd.

5.6. Notons que, si le fibré est trivial, on a $H_k(X, Y) \approx H_k(K, L) \oplus H_{k-n}(K, L)$ par la formule de Künneth, et $\mathfrak{G}$ se décompose dans les suites exactes triviales $0 \to H_{k-n}(K, L) \to H_k(X, Y) \to H_k(K, L) \to 0$. Si les modules $H_k(K, L)_\theta$ sont q-b, les modules $H_k(X, Y)$ le sont aussi canoniquement, et $\tau_\theta(\mathfrak{G}) = 1$. Alors $\tau_\theta(X, Y)$ et $\tau_\theta(K, L)$ sont déterminée simultanément et $\tau_\theta(X, Y) = \tau_\theta(K, L)^{\chi(S^n)}$.

II. Deformations Formelles

Notre but ici est de donner une description très précise des équivalences homotopiques simples, améliorant par une voie indépendante le résultat de Wall obtenu dans [7]. Pour cela, nous aurons besoin de relativiser la théorie classique du type simple d'homotopie, ce qui conduit par la même occasion à une généralisation de celle-ci. Nous choisirons [7] comme référence de base pour ce texte.

1. *Opérations fondamentales*

1.1. Etant donné un CW-complexe relatif (X, A) et un groupe Γ, on notera $(X, A; \Gamma)$ ce CW-complexe muni d'une action cellulaire de Γ admettant un système fondamental fini de cellules dans X-A. Lorsqu'on attachera une λ-cellule e^λ à $(X, A; \Gamma)$ par une application ϕ, on attachera simultanément toutes les λ-cellules $\gamma \times e$, $\gamma \in \Gamma$, par $\gamma \circ \phi$, ce qui donnera de nouveau un CW-complexe relatif $(X \cup \Gamma \times e, A; \Gamma)$. Avec cette catégorie de complexes, il nous faut reprendre la définition classique des déformations formelles élémentaires. Ainsi, considérons le disque standard D^λ comme formé de l'hémisphère sud $D_-^{\lambda-1}$ et des deux cellules $e^{\lambda-1} = \mathring{D}_+^{\lambda-1}$ et $e^\lambda = \mathring{D}^\lambda$. Pour toute application continue

$$\phi:(D^{\lambda-1}, S^{\lambda-2}) \to (X^{\lambda-1}, X^{\lambda-2}),$$

où X^k est le k-squelette réunion de A et des cellules de dimension $\leqslant k$, on peut former le CW-complexe relatif $(X \cup_\phi D^\lambda, A)$.

1.2. DÉFINITION: *On appelle* expansion *élémentaire de dimension λ de $(X, A; \Gamma)$ l'opération attachant à $(X, A; \Gamma)$ un disque D^λ par $\phi \mid D^{\lambda-1}$, ainsi que tous les disques $\gamma \times D^\lambda$ par $\gamma \circ \phi$, $\gamma \in \Gamma$. L'opération inverse est appelée* contraction *élémentaire de dimension λ.*

1.3. La projection orthogonale de D^λ sur $D^{\lambda-1}$ détermine une rétraction par déformation équivariante de $(X \cup \Gamma \times D^\lambda, A; \Gamma)$ sur $(X, A; \Gamma)$. Ainsi, à chacune des deux opérations précédentes, on peut associer une équivalence homotopique équivariante: l'inclusion canonique $X \to X \cup \Gamma \times D^\lambda$ pour la première, et la rétraction précédente pour la seconde. Toute suite finie d'expansions ou contractions formelles élémentaires est appelée une *déformation formelle*; il lui est associé de manière naturelle une équivalence homotopique équivariante.

1.4. DÉFINITION: *On dira qu'une équivalence homotopique équivariante est* représentable par une déformation formelle, *si elle lui est associée, à homotopie près.*

1.5. A toute équivalence homotopique équivariante $f:(X, A; \Gamma) \to (X', A'; \Gamma)$, on sait associer une W-torsion $\tau(f)$, dans le groupe de Whitehead $\mathrm{Wh}(\Gamma)$ (cf [2] ou [3]), et on dit que f est *simple* si $\tau(f) = 1$ (nous notons multiplicativement le groupe abélien $\mathrm{Wh}(\Gamma)$). On vérifie aisément que l'équivalence homotopique associée à une déformation formelle est simple. Comme $\tau(f)$ est invariante par homotopie, il en est de même pour toute équivalence homotopique représentable par une déformation formelle.

1.6. Reprenons la définition suivante due à Wall (voir [7]): soient ϕ_0 et ϕ_1 deux applications continues de $S^{\lambda-1}$ dans $X^{\lambda-1}$, qui sont homotopes dans X^λ. L'opération qui transforme $(X \cup_{\phi_0} \Gamma \times D^\lambda, A; \Gamma)$ en $(X \cup_{\phi_1} \Gamma \times D^\lambda, A; \Gamma)$ s'appelle un *glissement* formel élémentaire, de dimension λ. En fait, cette dernière opération est composée d'une expansion suivie d'une contraction élémentaire, de dimension $\lambda + 1$ (voir [7]). L'équivalence homotopique associée f induit un isomorphisme des $Z\Gamma$-complexes basiques $f_*:C(X_0, A) \xrightarrow{\approx} C(X_1, A)$, représenté en chaque degré par une matrice élémentaire, relativement à des *bases cellulaires.* Ces dernières bases sont définies comme celles qui correspondent canoniquement à un système fondamental de cellules orientées de $X_i - A$. L'assertion résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C_k(X, A) & \to & C_k(X_0, A) & \to & C_k(X_0, X) & \to 0 \\ & \downarrow \scriptstyle{\text{id.}} & & \downarrow \scriptstyle{f_*} & & \downarrow \scriptstyle{f_*} & \\ 0 \to & C_k(X, A) & \to & C_k(X_1, A) & \to & C_k(X_1, X) & \to 0 \end{array}$$

où $C_k(X_i, X) = 0$ pour $k \neq \lambda$, $C_\lambda(X_i, X)$ admettant un élément de base unique $[e_i^\lambda]$, tel que $f_* [e_0^\lambda] = [e_1^\lambda]$.

1.7. Si l'homotopie, qui définit un glissement formel élémentaire de dimension λ, a lieu dans le $(\lambda-1)$-squelette $X^{\lambda-1}$, le glissement sera plus précisément appelé une *isotopie* formelle élémentaire. Plus généralement, soit $(X, A \times I; \Gamma)$ un CW-complexe relatif, obtenu en attachant successivement des cylindres $D^\lambda \times I$ par des applications

$$S^{\lambda-1} \times I \to A \times I \ \bigcup_{\mu < \lambda} D^\mu \times I = X^{(\lambda-1)}.$$

Chaque cylindre introduit les trois cellules $e_0^\lambda = \mathring{D}^\lambda \times 0$, $e_1^\lambda = \mathring{D}^\lambda \times 1$, $e^{\lambda+1} = \mathring{D}^\lambda \times \mathring{I}$. En outre, on suppose que l'application invariante $\theta: X \to I$, égale à la projection canonique sur $A \times I$ et sur les cellules précédentes, est continue. Autrement dit, si X' et θ' sont obtenus en attachant les k premiers cylindres, l'application d'attachement $\phi: S^{\lambda-1} \times I \to$ $\to X'$ du $k+1^{\text{ème}}$ cylindre doit être compatible avec θ' et la projection sur I. Alors, pour tout $t \in I$, $(\theta^{-1}(t), A; \Gamma)$ est un CW-complexe relatif.

1.8. DÉFINITION: *En posant* $X_0 = \theta^{-1}(0)$, $X_1 = \theta^{-1}(1)$, *l'opération qui transforme* $(X_0, A; \Gamma)$ *en* $(X_1, A; \Gamma)$ *sera appelée une* isotopie formelle. *Deux cellules* e_0^λ *et* e_1^λ *de* (X_0, A) *et* (X_1, A) *respectivement seront dites* adjacentes *si elles proviennent d'un même cylindre.*

1.9. Il est clair qu'une telle opération se compose d'expansions formelles de $(X_0 \cup A \times I, A \times I; \Gamma)$ à $(X, A \times I; \Gamma)$ et de contractions formelles de $(X, A \times I; \Gamma)$ à $(X_1 \cup A \times I, A \times I; \Gamma)$. L'équivalence homotopique associée induit un isomorphisme des $\mathbf{Z}\Gamma$-complexes basiques $C(X_0, A) \xrightarrow{\approx} C(X_1, A)$, qui est cette fois représenté en chaque degré par la matrice unité, relativement à des bases cellulaires.

1.10. LEMME: *Soit* $(Y, A; \Gamma)$ *un sous-complexe de* $(X, A; \Gamma)$. *Alors toute isotopie formelle de* $(Y, A; \Gamma)$ *se prolonge à* $(X, A; \Gamma)$.

Preuve: Posons $Y = Z_0$, et soit $(Z, A \times I; \Gamma)$ un CW-complexe relatif, muni d'une application $\theta: Z \to I$, déterminant une isotopie de $(Y, A; \Gamma)$. On peut supposer que

$X = Y \cup_\phi e^\lambda$. Il existe une rétraction par déformation équivariante $r_t: Z \to Z$, $t \in I$, telle que $\theta \circ r_t(Y) = t$, $r_0 =$ identité $r_t(Z^{(k)}) \subset Z^{(k)}$. On attache alors à Z un cylindre $D^\lambda \times I$ par l'application $\Psi: S^{\lambda-1} \times I \to Z$, $\Psi(x, t) = r_t \circ \phi(x)$. cqfd.

1.11. COROLLAIRE: *Pour toute déformation formelle D de* $(Y, A; \Gamma)$ *à* $(X, A; \Gamma)$ *et toute isotopie formelle de* $(Y, A; \Gamma)$ *à* $(Y', A; \Gamma)$, *il existe une isotopie formelle de* $(X, A; \Gamma)$ *à* $(X', A; \Gamma)$, *où* $(X', A; \Gamma)$ *résulte de* $(Y', A; \Gamma)$ *par la même suite d'opérations élémentaires que celle qui compose D.*

Preuve: Dans la démonstration précédente, il suffit de remplacer $S^{\lambda-1}$ par $D_-^{\lambda-1}$. cqfd.

1.12. Rappelons maintenant le lemme classique suivant, dit *lemme des bases* (voir [7]): soit $(X, A; \Gamma)$ un CW-complexe relatif, et $(e_i'^\lambda)$ une base du $\mathbf{Z}\Gamma$-module basique $C_\lambda(X, A)$, $\lambda \geqslant 2$, qui se déduit d'une base cellulaire par une matrice élémentaire. Alors il existe un glissement formel de $(X, A; \Gamma)$ à un CW-complexe relatif $(X', A; \Gamma)$ tel que:

1°) $X^{\lambda-1}$ reste inchangé

2°) l'isomorphisme induit $C(X, A) \to C(X', A)$ est représenté en degré λ par la matrice unité, relativement à $(e_i'^\lambda)$ d'une part, et une base cellulaire de $C_\lambda(X', A)$ d'autre part, et en degrés $> \lambda$ par un produit de matrices élémentaires relativement à des bases cellulaires. Autrement dit, $(e_i'^\lambda)$ est une base cellulaire pour $C_\lambda(X', A)$.

3°) la dimension du glissement est $\leqslant \dim X$.

Il faut noter qu'on entend par glissement toute suite finie de glissements formels élémentaires définis sur un sous-complexe et prolongés au complexe entier.

2. *Décompositions des équivalences homotopiques simples*

2.1. Nous avons vu qu'un glissement formel, resp. une isotopie formelle, est représenté par un produit de matrices élémentaires, resp. par la matrice unité. Nous allons voir que cette propriété est caractéristique, lorsque les CW-complexes relatifs considérés $(X, A; \Gamma)$ vérifient les hypothèses suivantes:

(i) A et X sont 1-connexes

(ii) (X, A) ne contient pas de cellules de dimension 0 et 1. Cette restriction exclut évidemment le cas $A = \phi$.

2.2. PROPOSITION: *Soient* $(X, A; \Gamma)$ *et* $(X', A; \Gamma)$ *des* CW-*complexes relatifs, vérifiant* (i) *et* (ii), *et* $f: (X, A; \Gamma) \to (X', A; \Gamma)$ *une équivalence homotopique équivariante relative à A. Si celle-ci induit des isomorphismes* $C_k(X, A) \xrightarrow{\cong} C_k(X', A)$, *représentés par la matrice unité relativement à des bases cellulaires, alors f est représentable par une isotopie formelle.*

Preuve: Ordonnons les cellules d'un système fondamental fini de $(X, A; \Gamma)$, resp. de $(X', A; \Gamma)$, par dimension croissante et de sorte que $f_*[e_i]=[e_i']$. En posant $X_p=A\cup_{i\leqslant p}\Gamma\times e_i$, $X_p'=A\cup_{i\leqslant p}\Gamma\times e_i'$, supposons par induction que $f\,|\,X_{p-1}$ détermine une équivalence homotopique $f: X_{p-1}\to X_{p-1}'$, représentable par une isotopie formelle $(Z_{p-1}, A\times I)$, de paramètre $\theta: Z_{p-1}\to I$. Cela signifie que $f\,|\,X_{p-1}$ est homotope à $r\,|\,X_{p-1}'$, où r est l'aboutissement d'une rétraction par déformation r_t de Z_{p-1} sur X_{p-1}' telle que $\theta\circ r_t=t$, $r\circ r_t=r$. On peut supposer que $f\,|\,X_{p-1}=r\,|\,X_{p-1}$. Soit $\lambda\geqslant 2$ la dimension des cellules e_p et e_p'. Par approximation cellulaire, on peut supposer $f(X_p)\subset X'^{\lambda}$. Comme X_{p-1}' est simplement connexe (pour $\lambda=2$ il a le type d'homotopie de $A\vee S^2\vee\ldots\vee S^2$) l'isomorphisme de Hurewicz appliqué à la paire (X'^{λ}, X_{p-1}') montre qu'il existe une homotopie h entre les applications $f\circ\Phi$ et Φ' de la paire $(D^{\lambda}, S^{\lambda-1})$ dans la paire (X'^{λ}, X_{p-1}), où Φ et Φ' sont des applications caractéristiques pour e_p et e_p' respectivement. Il y a donc une isotopie $(Z', X_{p-1}'\times I; \Gamma)$ transformant $X_{p-1}'\cup_{r\circ\Phi}\Gamma\times e^{\lambda}$ en X_p'. L'équivalence homotopique associée f' est l'identité sur X_{p-1}', égale à Φ' sur un disque D^{λ} concentrique à e^{λ}, et égale à $h/S^{\lambda-1}\times I$ sur la couronne restante. Comme dans le lemme 1.10, l'isotopie Z_{p-1} se prolonge en une isotopie Z'', transformant X_p en $X_{p-1}'\cup_{r\circ\Phi}\Gamma\times e^{\lambda}$. L'équivalence homotopique associée f'' est donnée par r (ou f) sur X_{p-1}, par l'identité sur un disque D^{λ} concentrique à e_p, et par $f''(x, t)=r\circ\Phi(x)$ sur la couronne $S^{\lambda-1}\times I$ restante. Ainsi, $f'\circ f''\,|\,\bar{e}_p$ est donnée par Φ' sur D^{λ}, par $h\,|\,S^{\lambda-1}\times I$ sur une couronne entourant D^{λ} dans e_p et par $f'\circ f''(x, t)=r\circ\Phi(x)$ sur la couronne restante. En utilisant l'homotopie h de Φ' à $f\circ\Phi$, on voit qu'il existe une homotopie de $f\circ\Phi$ à $f'\circ f''\,|\,\bar{e}_p$, constante égale à $r\circ\Phi$ sur $S^{\lambda-1}$. D'où une homotopie de $f'\circ f''$ à $f\,|\,X_p$, ce qui achève le pas d'induction. cqfd.

2.3. COROLLAIRE: *Si dans l'énoncé de la proposition précédente on remplace la matrice unité par un produit de matrices élémentaires, alors f est représentable par un glissement suivi d'une isotopie formels, ou vice-versa. De plus, la dimension du glissement est* $\leqslant \sup\{\dim(X, A), \dim(X', A)\}$.

Preuve: Par induction, supposons qu'il existe un glissement formel de $(X, A; \Gamma)$, à un CW-complexe $(X_{\lambda-1}, A; \Gamma)$, tel que l'équivalence homotopique associée induise un isomorphisme $C(X, A)\xrightarrow{\approx}C(X_{\lambda-1}, A)$, représenté par la matrice unité en degrés $<\lambda$, relativement à des bases cellulaires. D'après le lemme des bases (1.12) il existe un glissement formel de $(X_{\lambda-1}, A; \Gamma)$ à un CW-complexe $(X_{\lambda}, A; \Gamma)$, tel que la dernière hypothèse soit vérifiée jusqu'en dimension λ. Ce procédé nous ramène au cas envisagé dans la proposition précédente. cqfd.

Le résultat essentiel est le suivant:

2.4. PROPOSITION: *Soient* $(Y, A; \Gamma)$ *et* $(Y', A; \Gamma)$ *des* CW-*complexes relatifs vérifiant* (i) *et* (ii) *(cf 2.1) et* $f:(Y, A; \Gamma)\to(Y', A; \Gamma)$ *une équivalence homotopique* *simple, relative à A. Alors il existe des expansions formelles transformant Y en X, Y' en X', ainsi qu'une équivalence homotopique simple $g:(X, A; \Gamma)\to(X', A; \Gamma)$ telles que:*

1°) *g induit un isomorphisme $C(X, A)\to C(X', A)$, simple en chaque dimension*

2°) *$g \mid Y$ est homotope à f dans (X', A)*

3°) $\dim(X, A)=\dim(X', A)\leqslant N=\sup\{\dim(Y, A), \dim(Y', A)\}$.

Preuve: Par induction, supposons que f induise des isomorphismes simples $C_k(Y, A)\xrightarrow{\approx} C_k(Y', A)$ pour $k\leqslant\lambda<N$. Cela est évidemment vrai pour $\lambda=1$. Pour $\lambda\geqslant 2$, la restriction $(Y^{\lambda-1}, A)\to(Y'^{\lambda-1}, A)$ de f induit des isomorphismes en homologie, puisque celle-ci est égale à l'homologie des complexes $C(Y, A)$ et $C(Y', A)$ tronqués en dimension $\geqslant\lambda$, entre lesquels f induit un isomorphisme. Comme les espaces A, $Y^{\lambda-1}$, $Y'^{\lambda-1}$ et les paires $(Y^{\lambda-1}, A)$, $(Y'^{\lambda-1}, A)$ sont 1-connexes, il en résulte que $f\mid Y^{\lambda-1}$ est une équivalence homotopique équivariante $(Y^{\lambda-1}, A)\to(Y'^{\lambda-1}, A)$. Il existe donc un inverse homotopique équivariant $f': Y'\to Y$ de f, tel que $f\circ f' \mid Y'^{\lambda-1}$ est homotope à l'identité dans $Y'^{\lambda-1}$. Soient $e_1\cup\cdots\cup e_n$ et $e'_1\cup\cdots\cup e'_{n'}$ des systèmes fondamentaux de λ-cellules de $(Y, A; \Gamma)$ et $(Y', A; \Gamma)$ respectivement. En considérant le disque standard $D^{\lambda+1}$ comme un CW-complexe, formé des trois cellules $\varepsilon^0\in S^\lambda=\partial D^{\lambda+1}$, $\varepsilon^\lambda=S^\lambda-\varepsilon^0$ et $\varepsilon^{\lambda+1}=\mathring{D}^{\lambda+1}$, attachons n' disques $D_j^{\lambda+1}$ à Y par identification des points ε_j^0 avec un point $a\in A$. Pour tout $\gamma\in\Gamma$, attachons $\gamma\times D_j^{\lambda+1}$ au point γa, et soit $(X, Y; \Gamma)$ le CW-complexe relatif ainsi obtenu. Cette opération est évidemment une expansion formelle. De même formons $(X', Y'; \Gamma)$ en attachant à Y' n disques $D_i^{\lambda+1}=\varepsilon_i^0\cup\varepsilon_i^\lambda\cup\cup\,\varepsilon_i^{\lambda+1}$, de manière équivariante. Tout d'abord, on va prolonger l'application $Y^{\lambda-1}\xrightarrow{f}\to Y'\hookrightarrow X'$ en une application équivariante $Y^\lambda\xrightarrow{g}X'$ telle que $g_*[e_i]=f_*[e_i]+[\varepsilon_i^\lambda]$ pour toute cellule e_i. Choisissons une application caractéristique $\Phi: D^\lambda\to Y$ pour une λ-cellule e_i de Y, et soit $\Psi: D^\lambda\to X'$ une application déterminée par

1°) $f\circ\Phi\circ h$ sur un petit disque concentrique $D_0^\lambda\subset\mathring{D}^\lambda$, où h est une homothétie de D_0^λ sur D^λ.

2°) une application caractéristique pour ε_i^λ sur un petit disque $D_i^\lambda\subset\mathring{D}^\lambda$ disjoint du précédent.

3°) un chemin joignant $f(\dot{e}_i)$ au point a dans $Y'^{\lambda-1}$, sur un segment rectiligne joignant $\mathring{D}_0^\lambda$ à $\mathring{D}_i$ dans $D^\lambda-\mathring{D}_0^\lambda-\mathring{D}_i^\lambda$.

4°) $f\circ\Phi \mid S^{\lambda-1}$ sur $S^{\lambda-1}=\partial D^\lambda$.

5°) $\Psi(D^\lambda-\mathring{D}_0^\lambda-\mathring{D}_\lambda^i)\subset Y'^{\lambda-1}$.

Il suffit alors de poser $g=\Psi$ sur e_i. En procédant de même pour toutes les cellules e_i, on obtient le prolongement désiré. Maintenant, on va prolonger g en une application équivariante $h: X^\lambda\to X'$, telle que $h_*[\varepsilon_j^\lambda]=(1-f_*\circ f'_*)\,[e'_j]-\sum a_i[\varepsilon_i]$ où les $a_i\in Z\Gamma$ sont déterminés par $f'_*[e'_j]=\sum a_i[e_i^\lambda]$, et $a_i\neq 0$. Posons $a_i=\sum_\gamma\mu_{ji}^\gamma\gamma$, les entiers μ_{ji}^γ étant non nuls, et choisissons une application caractéristique Φ' pour la cellule orientée fixée e'_j, et une application ϕ_i pour la cellule orientée variable ε_i^λ. Soit $\Psi: D^\lambda\to X'$ une application déterminée par

1°) sur un petit disque, homothétique par h, $D_0^\lambda \subset D^\lambda$, Ψ représente $(\Phi' - f \circ f'_\circ \Phi') \circ h$ dans le groupe $\pi_\lambda(Y'^\lambda, Y'^{\lambda-1})$, qui s'identifie canoniquement avec l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $(D^\lambda, S^{\lambda-1}) \to (Y'^\lambda, Y'^{\lambda-1})$ en vertu de la 1-connexité de $Y'^{\lambda-1}$.

2°) sur un petit disque $D^\lambda_{(i,\gamma)} \subset D^\lambda - D_0^\lambda$, associé à un entier μ^γ_{ji}, Ψ est égale à $\mu^\gamma_{ji}\, \gamma \circ \Phi_i$, les disques $D^\lambda_{(i\gamma)}$ étant mutuellement disjoints.

3°) sur un segment rectiligne $I_{(i,\lambda)}$ joignant $\mathring{D}_0^\lambda$ à $\mathring{D}^\lambda_{(i,\gamma)}$, Ψ est un chemin dans $Y'^{\lambda-1}$, reliant $\Psi(\mathring{D}_0^\lambda)$ au point γa. Les segments $I_{(i,\lambda)}$ sont pris mutuellement disjoints.

4°) sur $S^{\lambda-1} = \partial D^\lambda$, Ψ est constante sur le point a.

5°) $\Psi(D^\lambda - D_0 - \cup D_{(i,\lambda)}) \subset Y'^{\lambda-1}$.

L'existence d'une telle application Ψ résulte du fait que $f \circ f' \mid Y'^{\lambda-1}$ est homotope à l'identité dans $Y'^{\lambda-1}$. En posant $h = \Psi$ sur ε_j^λ, et en procédant de même avec les autres cellules ε_j^λ, on obtient le prolongement désiré. Comme $h \mid \varepsilon_j^\lambda$ est homotope à 0 dans X', on peut prolonger h à $Y^\lambda \cup \Gamma \times \varepsilon_j^{\lambda+1}$. Enfin, $h \mid Y^\lambda$ étant évidemment homotope à $f \mid Y^\lambda$ dans X', on peut prolonger h à tout X. L'homomorphisme induit $h_*: C_\lambda(X, A) \to C_\lambda(X', A)$ a la forme

$$\begin{tikzcd}
C_\lambda(Y, A) \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, "\mathrm{id.}"] & \oplus & C_\lambda(Y', A) \arrow[d, "f'_*"] \arrow[dl, "\mathrm{id.} - f_* f'_*"'] \\
C_\lambda(Y', A) & \oplus & C_\lambda(Y, A)
\end{tikzcd}$$

en identifiant $[\varepsilon_j]$ avec $[e_j]$ et $[\varepsilon_i]$ avec $[e_i]$. Il se décompose en deux isomorphismes $((\mathrm{id.} + f_*) \oplus \mathrm{id.}) \circ (\mathrm{id.} \oplus (\mathrm{id.} - f'_*))$, représenté chacun par des matrices strictement triangulaires. Ceci achève le pas d'induction. Pour $\lambda = N$, il résulte du fait que f induit des isomorphismes $C_k(Y, A) \approx C_k(Y', A)$ pour $k < N$ et des isomorphismes entre l'homologie des complexes $C(Y, A)$ et $C(Y', A)$ que f induit un isomorphisme $f_{*N}: C_N(Y, A) \approx C_N(Y', A)$. En vertu de la formule $\tau(f) = \prod_k \tau(f_{*k})^{\varepsilon(k)}$, $\varepsilon(k) = (-1)^k$, (cf [2]) et de l'hypothèse $\tau(f) = \tau(f_{*k}) = 1$ pour $k < N$, on a $\tau(f_{*N}) = 1$. cqfd.

2.5. COROLLAIRE: *Soient* $(Y, A; \Gamma)$ *et* $(Y', A; \Gamma)$ *des* CW-*complexes relatifs vérifiant* (i) *et* (ii) *et* $f:(Y, A; \Gamma) \to (Y', A; \Gamma)$ *une équivalence homotopique simple. Alors f est représentable, à une isotopie formelle près, par la composition d'une expansion, d'un glissement et d'une contraction formelles. De plus la dimension de ces opérations ne dépasse pas* $\sup\{N, 3\}$ avec $N = \sup\{\dim(Y, A), \dim(Y', A)\}$.

Preuve: D'après la proposition précédente, il existe des expansions, de dimension

$\leqslant N$, transformant $(Y, A; \Gamma)$ et $(Y', A; \Gamma)$ en $(X, A; \Gamma)$ et $(X', A; \Gamma)$ respectivement, ainsi qu'une équivalence homotopique $g:(X, A; \Gamma)\to(X', A; \Gamma)$ induisant un isomorphisme $g_*: C(X, A)\xrightarrow{\approx} C(X', A)$, représenté en chaque dimension $<N$ par un produit de matrices élémentaires relativement à des bases cellulaires. En dimension N, l'isomorphisme $g_*: C_N(X, A)\approx C_N(X', A)$ est seulement simple, mais il suffit de faire une expansion formelle de dimension $\sup\{N, 3\}$ sur $(X, A; \Gamma)$ et $(X', A; \Gamma)$, et de prolonger trivialement g, pour que la matrice de g_* satisfasse la condition précédente. Alors, d'après le corollaire 2.3, g est représentable par un glissement formel, à isotopie près. Comme de plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Y, A; \Gamma) & \xrightarrow{f} & (Y', A; \Gamma) \\ \cap & & \cap \\ (X, A; \Gamma) & \xrightarrow{g} & (X', A; \Gamma) \end{array}$$

est homotopiquement commutatif, f est bien représentable de la manière annoncée. cqfd.

2.6. En ce qui concerne les cellules de dimension 0 et 1, nous utiliserons le *procédé d'élimination* suivant, dû à J. H. C. Whitehead:

Soit $(X, A; \Gamma)$ un CW-complexe relatif λ-connexe, avec $\lambda\geqslant 1$. Alors il existe une déformation formelle de $(X, A; \Gamma)$ à un CW-complexe relatif $(X', A; \Gamma)$ ne contenant pas de cellules de dimension $\leqslant\lambda$. De plus, la dimension des opérations élémentaires qui la composent ne dépasse pas $\lambda+2$.

2.7. Par ce procédé, on élimine de tout CW-complexe relatif $(X, A; \Gamma)$ 1-connexe les cellules de dimension 0 et 1, à l'aide de déformations formelles de dimension $\leqslant 3$. On peut alors reprendre le corollaire 2.5, en y supprimant l'hypothèse (ii), ce qui donne:

2.8. THÉORÈME: *Soient $(Y, A; \Gamma)$ et $(Y', A; \Gamma)$ des CW-complexes relatifs, A, Y et Y' étant simplement connexes, et $f:(Y, A; \Gamma)\to(Y', A; \Gamma)$ une équivalence homotopique simple relative à A. Alors f est représentable à isotopie près par une déformation formelle $D\circ C\circ G\circ E'\circ D'$, où D et D' sont de dimension $\leqslant 3$, C est une contraction et E' une expansion, toutes deux de dimension $\leqslant N=\sup\{\dim(Y, A), \dim(Y', A)\}$, et G un glissement.*

REFERENCES

[1] J. MILNOR, *Whitehead torsion*, Am. Math. Soc. (1966).

[2] G. DE RHAM, S. MAUMARY et M. A. KERVAIRE, *Torsion et type simple d'homotopie*, Lecture Notes in Math., vol. 48 (1967).

[3] J. H. C. WHITEHEAD, *Simple homotopy type*, Bull. A.M.S., vol. 55 (1949).

[4] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra* (Princeton Univ. Press, 1956).

[5] E. H. SPANIER, *Algebraic Topology* (McGraw-Hill, 1966).
[6] B. MAZUR, *Differential topology from the point of view of simple homotopy theory*, IHES, n° 15.
[7] C. T. C. WALL, *Formal deformation*, Proc. London Math. Soc. *XVI*, part 2 (1966).

Reçu le 26. octobre 1968