Über abstrakte Topologie.

Von **Walther Mayer** in Wien.

Diese Arbeit heißt abstrakte Topologie, weil die Komplexe, von deren Eigenschaften gesprochen wird, keineswegs irgend welche geometrische Gebilde sein müssen, sondern abstrakte Dinge sind, die einem sechs Axiome umfassenden Systeme zu genügen haben.

Wenn also auf Anschaulichkeit auch Verzicht geleistet wurde, so gewinnen dadurch die Überlegungen und Resultate an Exaktheit.

Der erste Abschnitt definiert die wichtigsten Invarianten eines Komplexringes, wobei ich einen Komplex als Ring bezeichne, sobald ich ihn als Inbegriff seiner Ecken, ein- und mehrdimensionalen Seiten auffasse.

Im zweiten Abschnitt wird dann der Begriff eines Unterringes eines gegebenen Ringes erklärt und anschließend der Komplementring und Randring eines solchen Unterringes definiert. Diese Begriffe gestatten dann geometrische Probleme zu behandeln, was im dritten und vierten Abschnitte geschieht.

Im dritten Abschnitt wird das Problem der Unterteilung eines gegebenen kombinatorischen Komplexringes behandelt, und zwar das inverse Problem, unter welchen Umständen man gewisse Komplexe eines gegebenen Komplexringes zu einem Komplexe vereinigen darf, ohne die Homologiegruppen des Ringes zu verändern.

Der vierte Abschnitt behandelt einen Zusammensetzungssatz, nämlich die Frage nach den Homologiegruppen eines Ringes Σ, der als Summe zweier seiner Unterringe Σ_1 und Σ_2 gegeben ist. Von Interesse dürfte die Beziehung (96) zwischen den Bettischen Zahlen dieser Ringe sein.

Im zweiten Abschnitt wird ein Beweis einer Verallgemeinerung eines bekannten Poincaréschen Resultates skizziert.

In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte. In den vielen Gesprächen über dieses Gebiet hat mir Herr Vietoris eine Fülle Anregungen gegeben, für die ich ihm meinen besten Dank ausdrücke.

I. ABSCHNITT.

Der Komplexring Σ.

Wir definieren den Komplexring als einen Inbegriff von Dingen, die wir Komplexe nennen.

Jedem Komplex ist eine ganze Zahl ρ zwischen Null und n

$$0 \leq \rho \leq n$$

zugeordnet, die wir die Dimension des Komplexes nennen.

Die Zahl n heißt die Dimension des Ringes.

$K^{(\rho)}$ bezeichne einen ρ dimensionalen Komplex.

I. Axiom: Es bestehe eine Operation zwischen den Komplexen des Ringes Σ. Die ρ dimens. Komplexe in Σ $(0 \leq \rho \leq n)$ seien in bezug auf jene Operation Elemente einer kommutativen Gruppe, $\{K^{(\rho)}\}$ bezeichnet.

Wir wollen als Operationszeichen das $+$-Zeichen verwenden und demgemäß die Operation Addition nennen.

Das Nullelement der ρ dimens. Komplexe sei $0^{(\rho)}$ bezeichnet.

II. Axiom: In der Gruppe $\{K^{(\rho)}\}$ gebe es kein von $0^{(\rho)}$ verschiedenes Element endlicher Ordnung.

Aus $t\,k^{(\rho)} = 0^{(\rho)}$, t ganze Zahl $\neq 0$, folge also stets $k^{(\rho)} = 0^{(\rho)}$. Seien dann endlich viele, z. B. τ (τ ganze Zahl), ρ dimens. Komplexe $a_1^{(\rho)}, a_2^{(\rho)}, \ldots\; a_\tau^{(\rho)}$ von Σ gegeben, so bildet die Gesamtheit der Komplexe

$$p_i\, a_i^{(\rho)}, \quad i = 1, \ldots \tau\,^{1)},$$

p_i ganze (positive oder negative) Zahl eine Untergruppe von $\{K^{(\rho)}\}$.

III. Axiom: Es gebe in Σ zu jedem ρ $(0 \leq \rho \leq n)$ ein System von endlich vielen ρ dimens. Komplexen

$$a_1^{(\rho)}, a_2^{(\rho)}, \ldots \qquad a_\tau^{(\rho)} \tag{1}$$

der Eigenschaft, daß jeder ρ dimens. Komplex in Σ in der Gesamtheit

$$p_i\, a_i^{(\rho)}, \quad i = 1, \ldots \tau$$

enthalten sei.

Unter allen Systemen (1) dieser Eigenschaft gibt es solche mit einer Minimalzahl von Elementen. Sei α_ρ diese Zahl (sie ist bei gegebenem Ringe Σ eine Funktion von ρ), so wollen wir ein solches System

$$a_1^{(\rho)}, a_2^{(\rho)}, \ldots \qquad a_{\alpha_\rho}^{(\rho)} \tag{1'}$$

eine Basis der ρ dimens. Komplexe von Σ nennen.

---

[1]) Über gleiche Indizes ist — wo nicht ausdrücklich das Gegenteil verlangt wird — stets zu summieren.

Wir zeigen nun, daß jeder ρ dimens. Komplex $K^{(\rho)}$ in Σ in eindeutiger Weise mittels der Basis dargestellt wird.

Aus $K^{(\rho)} = p_i\, a_i^{(\rho)} = q_i\, a_i^{(\rho)}$, $i = 1, \ldots \alpha_\rho$, folgt $0^{(\rho)} = (p_i - q_i)\, a_i^{(\rho)} = \pi_i\, a_i^{(\rho)}$, wo $\pi_i = p_i - q_i$ bedeutet. Nun folgt aber aus $0^{(\rho)} = \pi_i\, a_i^{(\rho)}$, $\pi_i = 0$. Denn durch unimodulare Transformation der $a_i^{(\rho)}$ können wir $0^{(\rho)} = \pi_i\, a_i^{(\rho)}$ in die kanonische Form $E_1\, \bar{a}_1^{(\rho)} = 0^{(\rho)}$ bringen, wobei $\bar{a}_i^{(\rho)}$, $i = 1, \ldots \alpha_\rho$ eine neue Basis der ρ dimens. Komplexe in Σ und E_1 der gemeinsame Teiler der Zahlen π_i ist. Aus $E_1\, \bar{a}_1^{(\rho)} = 0^{(\rho)}$ folgt aber nach Axiom II entweder $\bar{a}_1^{(\rho)} = 0^{(\rho)}$, was unmöglich ist, da es sonst eine Basis der ρ dimens. Komplexe in Σ von $\alpha^\rho - 1$ Elementen gäbe $(\bar{a}_j^{(\rho)}$, $i = 2, \ldots \alpha_\rho)$, oder $E_1 = 0$, d. h. dann $\pi_i = 0$, q. e. d.

Die Eigenschaft einer Basis, die Komplexe eindeutig darzustellen, ist für die Basissysteme charakteristisch.

Denn sei $a_1^{(\rho)}, \ldots a_t^{(\rho)}$ ein System dieser Eigenschaft, so folgt aus $0^{(\rho)} = \pi_i a_i^{(\rho)}$, $i = 1, \ldots t$ jedenfalls $\pi_i = 0$, $i = 1, \ldots t$.

Wäre nun dieses System keine Basis, $t > \alpha_\rho$, und $\bar{a}_1^{(\rho)}, \ldots \bar{a}_{\alpha_\rho}^{(\rho)}$ eine Basis der ρ dimens. Komplexe, so gilt jedenfalls $a_i^{(\rho)} = \sigma_{ij}\, \bar{a}_j^{(\rho)}$, $i = 1 \ldots t$, $j = 1 \ldots \alpha_\rho$.

Ferner ist $\pi_i\, a_i^{(\rho)} = \pi_i\, \sigma_{ij}\, \bar{a}_j^{(\rho)} = \bar{\pi}_j\, \bar{a}_j^{(\rho)}$ und es wäre bereits $0^{(\rho)} = \pi_i a_i^{(\rho)}$, wenn $\bar{\pi}_j = \pi_i\, \sigma_{ij} = 0$, $i = 1 \ldots t$, $j = 1 \ldots \alpha_\rho$ ist. Wegen $t > \alpha_\rho$ gibt es aber immer Lösungen von $\pi_i\, \sigma_{ij} = 0$ mit $\pi_i \neq 0$, d. h. aus $0^{(\rho)} = \pi_i\, a_i^{(\rho)}$ folgte dann nicht $\pi_i = 0$. (Widerspruch.)

Somit gilt der

Satz I: Durch ein Basissystem (1′) ist jeder ρ dimens. Komplex $K^{(\rho)}$ eindeutig darstellbar; und ist jeder Komplex $K^{(\rho)}$ durch ein System (1′) eindeutig darstellbar, so ist (1′) ein Basissystem.

Ferner gilt Satz II: Zwischen zwei Basissystemen der ρ dimens. Komplexe

$$a_i^{(\rho)} \text{ und } \bar{a}_i^{(\rho)}, \quad i = 1, 2, \ldots \alpha_\rho$$

besteht eine unimodulare Transformation.

Beweis: Zunächst gilt

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{a}_i^{(\rho)} = \sigma_{ij}^{(\rho)}\, a_j^{(\rho)} \\ a_i^{(\rho)} = \tau_{ij}^{(\rho)}\, \bar{a}_j^{(\rho)}, \quad i, j = 1, \ldots \alpha_\rho. \end{cases}$$

Daraus folgt $\bar{a}_i^{(\varrho)} = \sigma_{ij}^{(\varrho)} \tau_{jh}^{(\varrho)} \bar{a}_h^{(\varrho)}$, $i, j, h = 1, \ldots \alpha_\varrho$, also $0^{(\varrho)} = (\delta_{ih} - \sigma_{ij}^{(\varrho)} \tau_{jh}^{(\varrho)}) \bar{a}_h^{(\varrho)}$, wo $\delta_{ih} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ für $\begin{cases} i \neq h \\ i = h \end{cases}$ ist. Da aber auch $0^{(\varrho)} = 0\, \bar{a}_h^{(\varrho)}$ gilt und jeder Komplex durch eine Basis eindeutig dargestellt wird, so folgt $\sigma_{ij}^{(\varrho)} \tau_{jh}^{(\varrho)} = \delta_{ih}$, q. e. d.

Der Randkomplex eines Komplexes $K^{(\varrho)}$.

Wir führen ihn ein durch das

IV. Axiom: Es sei eine Operation „Randbildung" vorhanden, die jedem ϱ dimens. Komplex $K^{(\varrho)}$ in Σ ($\varrho = 1, 2, \ldots n$) einen bestimmten $\varrho - 1$ dimens. Komplex von Σ, seinen Rand, $R\,(K^{(\varrho)})$ bezeichnet, zuordnet.

Die Operation „Randbildung" selbst genüge dabei den Axiomen:

V. Axiom: Seien t_1 und t_2 ganze Zahlen und $K_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)}$ zwei ϱ dimens. Komplexe in Σ, so gelte:

$$\underline{R\,(t_1 K_1^{(\varrho)} + t_2 K_2^{(\varrho)}) = t_1\, R\,(K_1^{(\varrho)}) + t_2\, R\,(K_2^{(\varrho)})} \tag{3}$$

VI. Axiom: Der Randkomplex eines Randes sei ein Nullkomplex:

$$\underline{R\left(R\,(K^{(\varrho)})\right) = 0^{(\varrho-2)}.} \tag{4}$$

Infolge der Festsetzung (3) ist uns der Randkomplex $R\,(K^{(\varrho)})$ eines beliebigen ϱ dimens. Komplexes $K^{(\varrho)}$ bekannt, sobald wir die Randkomplexe der Elemente einer Basis $a_i^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots \alpha_\varrho$ der ϱ dimens. Komplexe kennen.

Sei

$$R\,(a_j^{(\varrho)}) = \varepsilon_{ij}^{(\varrho)}\, a_i^{(\varrho-1)}, \quad j - 1 \ldots \alpha_\varrho, \quad i = 1, \ldots \alpha_{\varrho-1}, \tag{5}$$
$$\varepsilon_{ij}^{(\varrho)} = \text{ganze Zahl},$$

das System dieser $\varrho - 1$ dimens. Randkomplexe, dargestellt durch die Basis $a_i^{(\varrho-1)}$, $i = 1 \ldots \alpha_{\varrho-1}$ von Σ. Aus

$$K^{(\varrho)} = p_j\, a_j^{(\varrho)}, \quad j = 1, \ldots \alpha_\varrho \tag{6}$$

folgt dann nach (3) und (5)

$$R\,(K^{(\varrho)}) = p_j\, \varepsilon_{ij}^{(\varrho)}\, a_i^{(\varrho-1)}, \quad j = 1 \ldots \alpha_\varrho, \quad i = 1, \ldots \alpha_{\varrho-1}. \tag{6'}$$

Wegen (4) folgt für $K^{(\varrho)} = a_j^{(\varrho)}$:

$$0^{(\varrho-2)} = R\left(R\left(a_j^{(\varrho)}\right)\right) = R\left(\varepsilon_{ij}^{(\varrho)}\, a_i^{(\varrho-1)}\right) = \varepsilon_{ij}^{(\varrho)}\, R\left(a_i^{(\varrho-1)}\right)$$
$$= \varepsilon_{ij}^{(\varrho)}\, \varepsilon_{ki}^{(\varrho-1)}\, a_k^{(\varrho-2)},\quad j = 1, \ldots \alpha_\varrho,\quad i = 1, \ldots \alpha_{\varrho-1},\quad k = 1, \ldots \alpha_{\varrho-2},$$

und da $a_k^{(\varrho-2)}$, $k = 1 \ldots \alpha_{\varrho-2}$, Basis der $\varrho-2$ dimens. Komplexe von Σ ist, so gilt demnach:

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{\alpha_{\varrho-1}} \varepsilon_{ij}^{(\varrho)}\, \varepsilon_{ki}^{(\varrho-1)} = 0,\quad j = 1, \ldots \alpha_\varrho,\quad k = 1, \ldots \alpha_{\varrho-2}$$

Ist (7) erfüllt, so ist $R\left(R\left(a^{(\varrho)}\right)\right) = 0^{(\varrho-2)}$ und weiter $R\left(R\left(K^{(\varrho)}\right)\right) = 0^{(\varrho-2)}$.

Bemerkung: Ist für ein Basissystem $a_i^{(\varrho)}$, $\varrho = 0, 1, \ldots n$ und $i = 1, \ldots \alpha_\varrho$ das System der in (5) auftretenden Koeffizienten $\varepsilon_{ij}^{(\varrho)}$ bekannt, so erhalten wir dieses Koeffizientensystem für ein neues Basissystem (2) $\bar{a}_i^{(\varrho)}$, $\varrho = 0, 1 \ldots n$, $i = 1, \ldots \alpha_\varrho$ aus:

$$R\left(\bar{a}_i^{(\varrho)}\right) = \bar{\varepsilon}_{hi}^{(\varrho)}\, \bar{a}_h^{(\varrho-1)} = \sigma_{ij}^{(\varrho)}\, R\left(a_j^{(\varrho)}\right) = \sigma_{ij}^{(\varrho)}\, \varepsilon_{kj}^{(\varrho)}\, a_k^{(\varrho-1)}$$
$$= \sigma_{ij}^{(\varrho)}\, \varepsilon_{kj}^{(\varrho)}\, \tau_{kh}^{(\varrho-1)}\, \bar{a}_h^{(\varrho-1)} \text{ in der Form:}$$

$$(8)\qquad \bar{\varepsilon}_{hi}^{(\varrho)} = \sigma_{ij}^{(\varrho)}\, \varepsilon_{kj}^{(\varrho)}\, \tau_{kh}^{(\varrho-1)},\quad \begin{cases} h, k = 1, \ldots \alpha_{\varrho-1} \\ i, j = 1, \ldots \alpha_\varrho \end{cases}.$$

Die ϱ dimensionalen Zyklen:

Ein ϱ dimens. Komplex, dessen Randkomplex der $\varrho-1$ dimens. Nullkomplex ist, heiße ein ϱ dimens. Zyklus.

In dieser Definition ist $\varrho > 0$ vorausgesetzt, nulldimensionale Komplexe seien stets als nulldimens. Zyklen bezeichnet.

Die Gesamtheit der ϱ dimens. Zyklen in Σ bildet eine Untergruppe der Gruppe $\{K^{(\varrho)}\}$ der ϱ dimens. Komplexe in Σ, wir bezeichnen sie $\{C^{(\varrho)}\}$.

Denn nach (3) ist die Summe zweier Zyklen ein Zyklus, und ist $C^{(\varrho)}$ ein Zyklus, so auch $-C^{(\varrho)}$. Soll $K^{(\varrho)} = p_j\, a_j^{(\varrho)}$, $j = 1, \ldots \alpha_\varrho$, ein Zyklus sein, so müssen die ganzen Zahlen p_j, $j = 1, \ldots \alpha_\varrho$, nach (6′) das System linearer Gleichungen

$$(9)\qquad p_j\, \varepsilon_{ij}^{(\varrho)} = 0,\qquad j = 1 \ldots \alpha_\varrho,\qquad i = 1, \ldots \alpha_{\varrho-1},$$

erfüllen.

Mit r_ϱ bezeichnen wir den Rang der Matrix $\left\| \varepsilon_{ij}^{(\varrho)} \right\|$, dann hat (9) $\alpha_\varrho - r_\varrho$ unabhängige Lösungssysteme $p_1, p_2, \ldots p_{\alpha_\varrho}$.

Wir bestimmen nun eine Basis der ϱ dimens. Zyklen, die nach dem Vorhergehenden $\alpha_\varrho - r_\varrho$ unabhängige Elemente hat und verwenden zu diesem Behufe das System (5). Durch unimodulare Transformation der Basiselemente der ρ resp. $\rho-1$ dimens. Komplexe $a_j^{(\rho)}$, $a_i^{(\rho-1)}$ bringen wir jenes System in die kanonische Form:

$$(10)\qquad R\,(b_j^{(\rho)}) = \mathrm{E}_{ij}^{(\rho)}\, b_i^{(\rho-1)}, \quad j = 1, \ldots \alpha_\rho, \quad i = 1, \ldots \alpha_{\rho-1},$$

wo die $b_j^{(\rho)}$ eine neue Basis der ρ dimens. Komplexe in Σ,
die $b_i^{(\rho-1)}$ " " " " $\rho-1$ " " " "
und die ganzen Zahlen:

$$(11)\qquad \mathrm{E}_{11}^{(\rho)},\ \mathrm{E}_{22}^{(\rho)}, \ldots \quad \mathrm{E}_{r_\rho r_\rho}^{(\rho)},$$

die Gesamtheit der von Null verschiedenen Koeffizienten des Systemes (10), die invarianten Faktoren der Matrix $\| \varepsilon_{ij}^{(\rho)} \|$ sind. Nach (8) ist die Reihe (11) von der speziellen Basiswahl unabhängig, die von 1 verschiedenen Größen der Reihe (11) heißen die $\rho-1^{\text{ten}}$ Torsionszahlen von Σ.

Für sie gilt, daß für $p < q$ $\mathrm{E}_{pp}^{(\rho)}$ Faktor von $\mathrm{E}_{qq}^{(\rho)}$ ist.

Aus (10) folgt, da $\mathrm{E}_{ij}^{(\rho)} = 0$ ist für $i \neq j$ und $i > r_\rho$:

$$(12)\qquad R\,(b_j^{(\rho)}) = 0^{(\rho-1)}, \quad j = r_\rho + 1,\ r_\rho + 2, \ldots \alpha_\rho,$$

das besagt aber, daß das Teilsystem der Basis $b_j^{(\rho)}$, $j = 1, 2, \ldots \alpha_\rho$

$$(13)\qquad b_{r_\rho+1}^{(\rho)},\quad b_{r_\rho+2}^{(\rho)}, \ldots \quad b_{\alpha_\rho}^{(\rho)}$$

$\alpha_\rho - r_\rho$ unabhängige ρ dimens. Zyklen sind.

Sei nun $C^{(\rho)}$ ein ρ dimens. Zyklus in Σ; als ρ dimens. Komplex ist er jedenfalls darstellbar durch die Basis $b_j^{(\rho)}$, $j = 1, \ldots \alpha_\rho$:

$$(14)\qquad C^{(\rho)} = p_j\, b_j^{(\rho)}, \qquad j = 1, \ldots \alpha_\rho.$$

Die Operation „Randbildung" ergibt

$$(14')\quad R\,(C^{(\rho)}) = 0^{(\rho-1)} = p_j\, \mathrm{E}_{ij}^{(\rho)}\, b_i^{(\rho-1)}, \quad j = 1, \ldots \alpha_\rho, \quad i = 1, \ldots \alpha_{\rho-1}$$

und demnach $p_j\, \mathrm{E}_{ij}^{(\rho)} = 0$, d. h. $p_1\, \mathrm{E}_{11}^{(\rho)} = 0$, $p_2\, \mathrm{E}_{22}^{(\rho)} = 0, \ldots$ $p_{r_\rho}\, \mathrm{E}_{r_\rho r_\rho}^{(\rho)} = 0$, also $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = 0$.

Demnach treten in der Darstellung (14) nur die Elemente $b_j^{(\rho)}$, $j = r_\rho + 1, \ldots \alpha_\rho$, auf, d. h. aber, daß die Reihe (13) eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ darstellt.

Die Zyklen homolog Null.

Wegen $R\left(R\,(k^{(\rho+1)})\right) = 0^{(\rho-1)}$ ist der Randkomplex eines $\rho+1$ dimens. Komplexes ein ρ dimens. Zyklus.

Wir nennen einen ρ dimens. Zyklus $C^{(\rho)}$ in Σ homolog Null in Σ, und schreiben dies

$$C^{(\sigma)} \sim 0 \text{ in } \Sigma, \tag{15}$$

wenn er Randkomplex eines $\rho+1$ dimens. Komplexes $K^{(\rho+1)}$ von Σ ist.

$C^{(\rho)} \sim 0$ in Σ bedeutet also $C^{(\rho)} = R\,(k^{(\rho+1)})$, wo $k^{(\rho+1)}$ ein $\rho+1$ dimens. Komplex in Σ ist. Die ρ dimens. Zyklen homolog Null bilden eine Untergruppe der ρ dimens. Zyklen $\{C^{(\rho)}\}$ von Σ. Zerlegt man die Gruppe $\{C^{(\rho)}\}$ der ρ dimens. Zyklen mittels dieser Untergruppe, so erhält man als Faktorgruppe die in der Topologie bedeutsame ρ^{te} Homologiegruppe. Wir wollen jedoch diese Gruppe ohne Bezugnahme auf andere Gruppen einführen. Zu diesem Behufe definieren wir:

Wir sagen zwei ρ dimens. Zyklen $C_1^{(\rho)}$ und $C_2^{(\rho)}$ sind homolog in Σ und schreiben

$$C_1^{(\rho)} \sim C_2^{(\rho)} \text{ in } \Sigma, \text{ wenn } C_1^{(\rho)} - C_2^{(\rho)} \sim 0 \text{ in } \Sigma \text{ ist.} \tag{16}$$

Aus $C_1^{(\rho)} \sim C_2^{(\rho)}$ und $C_2^{(\rho)} \sim C_3^{(\rho)}$ folgt dann $C_1^{(\rho)} \sim C_3^{(\rho)}$.

Demnach lassen sich die ρ dimens. Zyklen in Klassen zusammenfassen der Eigenschaft, daß die Zyklen einer Klasse untereinander homolog sind, aber nicht Zyklen verschiedener Klassen.

Seien $\mathfrak{K}^{(\rho)}: \{C_1^{(\rho)}, C_2^{(\rho)}, \ldots\}$ und $\overline{\mathfrak{K}}^{(\rho)}: \{\overline{C}_1^{(\rho)}, \overline{C}_2^{(\rho)}, \ldots\}$ zwei dieser Klassen, es gelte also

$$C_i^{(\rho)} \sim C_k^{(\rho)} \text{ in } \Sigma, \text{ resp. } \overline{C}_i^{(\rho)} \sim \overline{C}_k^{(\rho)} \text{ in } \Sigma,$$

dann behaupten wir, daß die Gesamtheit der Zyklen $C_p^{(\rho)} + \overline{C}_q^{(\rho)}$ wieder eine Klasse bilden.

Denn aus $C_p^{(\rho)} - C_r^{(\rho)} = R\,(k_1^{(\rho+1)})$ und $\overline{C}_q^{(\rho)} - \overline{C}_s^{(\rho)} = R\,(k_2^{(\rho+1)})$ folgt $(C_p^{(\rho)} + \overline{C}_q^{(\rho)}) - (C_r^{(\rho)} + \overline{C}_s^{(\rho)}) = R\,(k_1^{(\rho+1)} + k_2^{(\rho+1)})$[2], q. e. d.

Somit lassen sich die Zyklenklassen addieren und die Addition ist kommutativ.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_0^{(\rho)}$ die Klasse (Gruppe in diesem Fall) der ρ dimens. Zyklen homolog Null, so ist $\mathfrak{K}_0^{(\rho)}$ das Nullelement dieser Addition. Weiter gibt es zu jeder Klasse $\mathfrak{K}^{(\rho)}$ ihre inverse $-\mathfrak{K}^{(\rho)}$, für die $\mathfrak{K}^{(\rho)} + (-\mathfrak{K}^{(\rho)}) = \mathfrak{K}_0^{(\rho)}$ ist.

---

[2]) Sei $\tilde{C}^{(\rho)}$ umgekehrt irgend ein Element der Klasse $C_p^{(\rho)} + \overline{C}_q^{(\rho)}$, so hat $\tilde{C}^{(\rho)}$ die Gestalt $C_p^{(\rho)} + \overline{C}_q^{(\rho)} + R\,(k^{(\rho+1)})$, ist also gleich $C_p^{(\rho)} + [\overline{C}_q^{(\rho)} + R\,(k^{(\rho+1)})] = C_p^{(\rho)} + \overline{C}_r^{(\rho)}$.

(Enthält $\mathfrak{K}^{(\varrho)}$ den Zyklus $C^{(\varrho)}$, so ist $-\mathfrak{K}^{(\varrho)}$ die Gesamtheit der Zyklen homolog $-C^{(\varrho)}$ in Σ.) Endlich gilt auch das assoziative Gesetz $(\mathfrak{K}_1^{(\varrho)} + \mathfrak{K}_2^{(\varrho)}) + \mathfrak{K}_3^{(\varrho)} = \mathfrak{K}_1^{(\varrho)} + (\mathfrak{K}_2^{(\varrho)} + \mathfrak{K}_3^{(\varrho)})$, denn ist $C_i^{(\varrho)}$ ein Zyklus von $\mathfrak{K}_i^{(\varrho)}$, $i = 1, 2, 3$, so ist $(C_1^{(\varrho)} + C_2^{(\varrho)}) + C_3^{(\varrho)} = C_1^{(\varrho)} + (C_2^{(\varrho)} + C_3^{(\varrho)})$ ein Zyklus der beiden Klassen $(\mathfrak{K}_1^{(\varrho)} + \mathfrak{K}_2^{(\varrho)}) + \mathfrak{K}_3^{(\varrho)}$, $\mathfrak{K}_1^{(\varrho)} + (\mathfrak{K}_2^{(\varrho)} + \mathfrak{K}_3^{(\varrho)})$, die demnach zusammenfallen.

Die so definierten Klassen der ϱ dimens. Zyklen sind demnach Elemente einer kommutativen Gruppe mit der Addition als Verknüpfung und der Klasse (Gruppe) der ϱ dimens. Zyklen homolog Null — $\mathfrak{K}_0$ — als Nullelement.

Die Gruppe hat den Namen ϱ^{te} Homologiegruppe von Σ.

Wir zeigen nun, daß es eine Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null gibt.

Jeder $\varrho + 1$ dimens. Komplex läßt sich mittels einer Basis $a_j^{(\varrho+1)}$, $j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}$ darstellen, somit jeder ϱ dimens. Zyklus homolog Null mittels der Randkomplexe

$$(17)\qquad R\,(a_j^{(\varrho+1)}) = \varepsilon_{ij}^{(\varrho+1)}\, a_i^{(\varrho)}, \quad j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}, \quad i = 1, \ldots \alpha_\varrho.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen dieser Randkomplexe ist demnach gleich der Anzahl der linear unabhängigen ϱ dimens. Zyklen homolog Null und gleich $r_{\varrho+1}$, dem Range der Matrix $\| \varepsilon_{ij}^{(\varrho+1)} \|$.

Durch unimodulare Transformation der Basissysteme $a_j^{(\varrho+1)}$, $j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}$ resp. $a_i^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots a_\varrho$, bringen wir (17) in die kanonische Form:

$$(18)\qquad R\,(d_j^{(\varrho+1)}) = E_{ij}^{(\varrho+1)}\, d_i^{(\varrho)}, \quad j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}, \quad i = 1, \ldots \alpha_\varrho,$$

wobei die $d_j^{(\varrho+1)}$ resp. $d_i^{(\varrho)}$ neue Basissysteme der $\varrho + 1$ resp. ϱ dimens. Komplexe in Σ und die ganzen Zahlen

(18') $E_{11}^{(\varrho+1)}, E_{22}^{(\varrho+1)}, \ldots E_{r_{\varrho+1} r_{\varrho+1}}^{(\varrho+1)}$, die Gesamtheit der von Null verschiedenen Koeffizienten des Systemes (18), die invarianten Faktoren der Matrix $\| \varepsilon_{ij}^{(\varrho+1)} \|$ sind.

Wir behaupten, daß die $r_{\varrho+1}$ ϱ dimens. Zyklen

$$(19)\qquad R\,(d_j^{(\varrho+1)}) = N_j^{(\varrho)}, \qquad j = 1, \ldots r_{\varrho+1}$$

eine Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null bilden.

In der Tat läßt sich jeder $\varrho + 1$ dimens. Komplex $K^{(\varrho+1)}$ eindeutig mittels der Basis $d_j^{(\varrho+1)}, j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}$ darstellen: $K^{(\varrho+1)} = \sigma_j\, d_j^{(\varrho+1)}$, $j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}$. Daher gilt $R\,(K^{(\varrho+1)}) = \sigma^j R\,(d_j^{(\delta+1)}) =$

$= \sigma_j\ N_j^{(\varrho)},\ j = 1, \ldots r_{\varrho+1}$, da $R\ (d_j^{(\varrho+1)}) = 0$ ist für $j > r_{\varrho+1}$. Da aber $R\ (K^{(\varrho+1)})$ der allgemeinste Zyklus homolog Null ist, so läßt sich jeder Zyklus ϱ^{ter} Dimension homolog Null mittels der $N_j^{(\varrho)}$, $j = 1, \ldots r_{\varrho+1}$ darstellen. Diese Darstellung ist weiter eindeutig, denn aus $\pi_j\ N_j^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)}, j = 1, \ldots r_{\varrho+1}$ folgt nach (18) $\pi_1\ E_{11}^{(\varrho)}\ d_1^{(\varrho)} + \pi_2\ E_{22}^{(\varrho)}\ d_2^{(\varrho)} + \ldots + \pi_{r_{\varrho+1}}\ E_{r_{\varrho+1}\, r_{\varrho+1}}^{(\varrho)}\ d_{r_{\varrho+1}}^{(\varrho)} = 0^{\varrho}$, und da $d_j^{(\varrho)}$, $j = 1 \ldots \alpha_\varrho$ eine Basis ist $\pi_1\, E_{11}^{(\varrho)} = \pi_2\, E_{22}^{(\varrho)} = \ldots = \pi_{r_{\varrho+1}}\ E_{r_{\varrho+1}\, r_{\varrho+1}}^{(\varrho)} = 0$, somit $\pi_1 = \pi_2 = \ldots = \pi_{r_{\varrho+1}} = 0$.

Es gibt demnach kein System von weniger als $r_{\varrho+1}$ Elementen, durch das jeder ϱ dimens. Zyklus homolog Null darstellbar wäre.

Wir notieren das Resultat: Wir können stets eine Basis der $\varrho + 1$ dimens. Komplexe in Σ $d_j^{(\varrho+1)}$, $j = 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}$, so finden, daß $d_j^{(\varrho+1)}$, $j = r_{\varrho+1} + 1, \ldots \alpha_{\varrho+1}$ eine Basis der $\varrho + 1$ dimens. Zyklen in Σ ist und $R(d_j^{(\varrho+1)})$, $j = 1, 2, \ldots r_{\varrho+1}$ eine Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null in Σ ist.

Ferner vermerken wir: Die im kanonischen Systeme (18) auftretenden ϱ dimens. Komplexe $d_i^{(\varrho)}$, $i = 1, 2, \ldots r_{\varrho+1}$ sind, wie Randbildung zeigt, ϱ dimens. Zyklen.

Für die den Zyklus $d_i^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots r_{\varrho+1}$, enthaltende Klasse ist für $E_{ii}^{(\varrho+1)} \neq 1$ charakteristisch, daß die Zyklen der Klasse nicht homolog Null sind, dagegen die mit $E_{ii}^{(\varrho+1)}$ multiplizierten bereits diese Eigenschaft besitzen.

Daraus aber folgt, daß für Ringe Σ, für die die Größen der Reihe (18¹) nicht sämtlich eins sind, es keine Basis der Klassen der ϱ dimens. Zyklen gibt[3]).

Denn wäre $\mathfrak{K}_1^{(\varrho)}, \mathfrak{K}_2^{(\varrho)}, \ldots \mathfrak{K}_\varepsilon^{(\varrho)}$ eine solche Basis und $\mathfrak{K}^{(\varrho)}$ eine Klasse der Eigenschaft $t\,\mathfrak{K}^{(\varrho)} = \mathfrak{K}_0^{(\varrho)}$, ($\mathfrak{K}_0^{(\varrho)}$ das Nullelement), so folgt aus $\mathfrak{K}^{(\varrho)} = k_i\ \mathfrak{K}_i^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots \varepsilon$ $t\,\mathfrak{K}^{(\varrho)} = t\,k_i\ \mathfrak{K}_i^{(\varrho)} = \mathfrak{K}_0^{(\varrho)}$, woraus $t\,k_i = 0$, $i = 1, \ldots \varepsilon$, also $k_i = 0$, d. h. $\mathfrak{K}^{(\varrho)} = \mathfrak{K}_0^{(\varrho)}$ geschlossen wird.

Dagegen gilt:

Die Elemente der ϱ^{ten} Homologiegruppe werden durch eine Basis der ϱ dimens. Zyklen (resp. der entsprechenden Klasse) dargestellt:

(20) $\quad C_1^{(\varrho)}, C_2^{(\varrho)} \ldots C_{\alpha_\varrho - r_\varrho}^{(\varrho)}$, wobei dann zwischen diesen Zyklen die definierenden Relationen bestehen:

(20′) $\quad N_j^{(\varrho)} = \gamma_{ji}\ C_j^{(\varrho)} \backsim 0, \quad j = 1, 2, \ldots r_{\varrho+1}$

---

[3]) Basis mit linear unabhängigen Elementen.

Die Differenz $\alpha_\varrho - r_\varrho - r_{\varrho+1}$ der Anzahl der Basiselemente der ϱ dimens. Zyklen und der der ϱ dimens. Zyklen homolog Null

(21) $$h_\varrho = \alpha_\varrho - r_\varrho - r_{\varrho+1}$$

heißt die ϱ^{te} Bettische Zahl[4]).

Sei nun

(22) $C_1^{(\varrho)},\ C_2^{(\varrho)}, \ldots \quad C_{\alpha_\varrho - r_\varrho}^{(\varrho)}$ eine Basis der ϱ dimens. Zyklen und

(23) $$M_i^{(\varrho)} = \tau_{ji}\, C_j^{(\varrho)} \sim 0,\ i = 1, \ldots r_{\varrho+1},\ j = 1, \ldots \alpha_\varrho - r_\varrho$$

eine Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null, so bringen wir (23) durch unimodulare Transformationen der beiden Basissysteme in die kanonische Form:

(24) $\overline{M}_i^{(\varrho)} = \overline{E}_{ji}\, \overline{C}_j^{(\varrho)},\ i = 1, \ldots r_{\varrho+1},\ j = 1, \ldots \alpha_\varrho - r_\varrho$, wo also

die von Null verschiedenen Koeffizienten $\overline{E}_{ji}$:

(24′) $\overline{E}_{11},\ \overline{E}_{22}, \ldots \quad \overline{E}_{r_{\varrho+1}\, r_{\varrho+1}}$, die invarianten Faktoren der

Matrix $\|\tau_{ji}\|$ sind. (Der Rang dieser Matrix kann nicht kleiner als $r_{\varrho+1}$ sein, da es sonst nach (23) eine Beziehung $\pi_i M_i^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots r_{\varrho+1}$, gäbe mit von Null verschiedenen π_i, im Widerspruch mit der Basiseigenschaft von $M_i^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots r_{\varrho+1}$.)

Wir behaupten nun die Identität der beiden Reihen (18′) und (24′).

Da die $N_j^{(\varrho)}$ und die $\overline{M}_j^{(\varrho)}$ (24), $j = 1, \ldots r_{\varrho+1}$ Basissysteme der ϱ dimens. Zyklen homolog Null sind, so gilt:

(25) $$\begin{cases} \overline{M}_j^{(\varrho)} = \sigma_{jk}\, N_k^{(\varrho)} \\ N_j^{(\varrho)} = \tau_{jk}\, \overline{M}_k^{(\varrho)}, \quad k, j = 1, \ldots r_{\varrho+1}, \end{cases}$$

wo $\|\sigma_{jk}\|$ eine unimodulare Matrix ist und $\|\tau_{jk}\|$ ihre inverse. Dies ergibt nach (18), (19) und (24):

(25′) $$\begin{cases} \overline{E}_{ij}\, \overline{C}_i^{(\varrho)} = \sigma_{jk}\, E_{ek}^{(\varrho+1)}\, d_e^{(\varrho)} \\ E_{ij}^{(\varrho+1)}\, d_i^{(\varrho)} = \tau_{jk}\, \overline{E}_{ek}\, \overline{C}_e^{(\varrho)}, \text{ alle Indizes von 1 bis } r_{\varrho+1}. \end{cases}$$

---

4) Des öfteren wird $\alpha_\varrho - r_\varrho - r_{\varrho+1} + 1$ als ϱ^{te} Bettische Zahl eingeführt.

Nun sind die $d_i^{(\varrho)}$ für $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$, ϱ dimens. Zyklen, somit darstellbar mittels der Basis $\overline{C}_1^{(\varrho)}, \ldots \overline{C}_{\alpha_\varrho - r_\varrho}^{(\varrho)}$, die $\overline{C}_i^{(\varrho)}$, $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$, wieder als ϱ dimens. Komplexe lassen sich durch die Basis $d_1^{(\varrho)}, d_2^{(\varrho)}, \ldots d_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}$ darstellen. Nach (25′) sind dann die $\overline{C}_i^{(\varrho)}$, $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$ allein durch die $d_i^{(\varrho)}$, $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$ und umgekehrt die $d_i^{(\varrho)}$, $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$ durch die $\overline{C}_i^{(\varrho)}$, $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$ allein darstellbar. Es besteht somit zwischen den $\overline{C}_i^{(\varrho)}$ und den $d_i^{(\varrho)}$, $i=1, \ldots r_{\varrho+1}$ eine unimodulare Transformation.

$$\overline{C}_e^{(\varrho)} = \varepsilon_{ei}\, d_i^{(\varrho)}, \quad i, e = 1, \ldots r_{\varrho+1}. \tag{26}$$

Dies in die zweite Relation (25′) eingesetzt, hat

$$E_{ij}^{(\varrho+1)}\, d_i^{(\varrho)} = \tau_{jk}\, \overline{E}_{ek}\, \varepsilon_{ei}\, d_i^{(\varrho)}, \text{ also:} \tag{27}$$

$$E_{ij}^{(\varrho+1)} = \tau_{jk}\, \overline{E}_{ek}\, \varepsilon_{ei}, \text{ alle Indizes von 1 bis } r_{\varrho+1}, \text{ zur Folge.} \tag{27′}$$

Da die $\|\tau_{jk}\|$ und die $\|\varepsilon_{ze}\|$ unimodulare Matrizen sind, so folgt hieraus die Identität der invarianten Faktoren, d. h. die Identität der beiden Reihen (18′) und (24′).

Hat eine Basis der ϱ dimens. Zyklen in Σ

$$C_1^{(\varrho)}, \quad C_2^{(\varrho)}, \ldots \quad C_{\alpha_\varrho - k_\varrho}^{(\varrho)} \tag{28}$$

zum System der definierenden Relationen

$$N_1^{(\varrho)} = E_{11}^{(\varrho+1)}\, C_1^{(\varrho)} \sim 0, \; N_2^{(\varrho)} = E_{22}^{(\varrho+1)}\, C_2^{(\varrho)} \sim 0, \ldots \tag{29}$$
$$N_{r_{\varrho+1}}^{(\varrho)} = E_{r_{\varrho+1} r_{\varrho+1}}^{(\varrho+1)}\, C_{r_{\varrho+1}}^{(\varrho)} \sim 0,$$

so heiße sie kanonisch.

Ist $C_i^{(\varrho)}$ Element einer kanonischen Basis der ϱ dimens. Zyklen, so folgt aus $E\, C_i^{(\varrho)} \sim 0$ $E = p\, E_{ii}^{(\varrho+1)}$. Denn $E\, C_i^{(\varrho)}$ läßt sich dann durch die Basis (29), $N_1^{(\varrho)}, \ldots N_{r_{\varrho+1}}^{(\varrho)}$ der ϱ dimens. Zyklen homolog Null darstellen, wegen der Unabhängigkeit der $C_j^{(\varrho)}$, $j=1, \ldots \alpha_\varrho - r_\varrho$ kann diese Darstellung nur $E\, C_i^{(\varrho)} = p\, E_{ii}^{(\varrho+1)}\, C_i^{(\varrho)}$ lauten, woraus $E = p\, E_{ii}^{(\varrho+1)}$ folgt.

Man kann nach (29) die ϱ^{ten} Torsionszahlen [Poincarésche Zahlen der ϱ^{ten} Homologiegruppe[5])] als das Koeffi-

[5]) Poincarésche Zahlen nach Tietze, Monatshefte f. M. Ph. 19.

zientensystem der definierenden Relationen einer kanonischen Basis bezeichnen, wobei aber nur die von 1 verschiedenen Koeffizienten berücksichtigt werden.

Sei $C^{(\varrho)}$ ein ρ dimens. Zyklus, so wollen wir die Zyklenklasse, die ihn enthält, mit $[C^{(\varrho)}]$ bezeichnen.

Sei dann (28) wieder eine kanonische Basis; zwischen den $h_\varrho = \alpha_\varrho - r_\varrho - r_{\varrho+1}$ Klassen

$$(30) \qquad [C^{(\varrho)}_{r_{\varrho+1}+1}],\ [C^{(\varrho)}_{r_{\varrho+1}+2}], \ldots \quad [C^{(\varrho)}_{\alpha_\varrho - r_\varrho}]$$

besteht keine lineare Beziehung

$$(30') \qquad A_{r_{\varrho+1}+1}[C^{(\varrho)}_{r_{\varrho+1}+1}] + \ldots + A_{\alpha_\varrho - r_\varrho}[C^{(\varrho)}_{\alpha_\varrho - r_\varrho}] = \mathfrak{K}^{(\varrho)}_o,$$

denn diese hätte

$$\Sigma A_i C^{(\varrho)}_i \backsim 0, \quad i = r_{\varrho+1} + 1, \ldots \quad \alpha_\varrho - r_\varrho, \text{ zur Folge; das}$$

hieße aber

$$\sum_{r_{\varrho+1}+1}^{\alpha_\varrho - r_\varrho} A_i C_i^{(\varrho)} = \sum_1^{r_{\varrho+1}} B_k N_k^{(\varrho)}, \text{ woraus } A_i = 0, i = r_{\varrho+1} + 1, \ldots \alpha_\varrho - r_\varrho$$

zu schließen ist.

Ist dagegen $[C^{(\varrho)}]$ irgend eine weitere ρ dimens. Zyklenklasse, so folgt aus

$$[C^{(\varrho)}] = a_j [C^{(\varrho)}_j],\ j = 1, \ldots, \alpha_\varrho - r_\varrho,\ E^{(\varrho)}_{r_{\varrho+1}\, r_{\varrho+1}} [C^{(\varrho)}] -$$

$$-\sum_{=r_{\varrho+1}+1}^{\alpha_\varrho - r_\varrho} E^{(\varrho)}_{r_{\varrho+1}\, r_{\varrho+1}} a_j [C^{(\varrho)}_i] = \mathfrak{K}^{(\varrho)}_0.$$

Wir können daher die ρ^{te} Bettische Zahl als größte Anzahl unabhängiger Zyklenklassen ρ dimens. Zyklen definieren.

Der Komplexring Σ (mod 2)[6].

Sei (1′) wieder eine Basis der ρ dimens. Komplexe in Σ.

Die Komplexe $K^{(\varrho)} = \sigma_j a_j^{(\varrho)}$, $\sigma_j \equiv 0$ (mod 2) bilden eine Untergruppe der Gruppe $\{K^{(\varrho)}\}$. Zerlegen wir die Gruppe $\{K^{(\varrho)}\}$ vermittels dieser Untergruppe, so erhalten wir eine Faktorgruppe, deren

---

[6]) Komplexe mod 2 wurden zuerst von O. Veblen betrachtet.

Elemente jene Komplexe $K^{(\varrho)} = \tau_j\, a_j^{(\varrho)}$ vereinigt, deren Darstellungszahlen mod 2 kongruent sind.

Wir gelangen zu dieser Gruppe auch in folgender Weise: Wir identifizieren zwei Komplexe

(31) $K^{(\varrho)} = \sigma_j\, a_j^{(\varrho)},\ \overline{K}^{(\varrho)} = \overline{\sigma}_j\, a_j^{(\varrho)},\ j = 1, \ldots \alpha_\varrho$ und schreiben

(32) $K^{(\varrho)} \equiv \overline{K}^{(\varrho)}$, wenn $\sigma_j \equiv \overline{\sigma}_j$ (mod 2) ist.

Aus $K_1^{(\varrho)} \equiv K_2^{(\varrho)}$ und $K_2^{(\varrho)} \equiv K_3^{(\varrho)}$ folgt dann $K_1^{(\varrho)} \equiv K_3^{(\varrho)}$.

Diese Identifizierung ist von der Wahl des Basissystems unabhängig.

Ist $\overline{a}_1^{(\varrho)}, \ldots \overline{a}_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}$ eine zweite Basis, so besteht zwischen dieser und (1′) der Zusammenhang

$$(33)\quad \begin{cases} \overline{a}_i^{(\varrho)} \equiv \sigma_{ij}^{(\varrho)}\, a_j^{(\varrho)} \pmod 2 \\ a_i^{(\varrho)} \equiv \tau_{ij}^{(\varrho)}\, \overline{a}_j^{(\varrho)} \pmod 2, \end{cases}$$

wobei $\left\|\sigma_{ij}^{(\varrho)}\right\|$ eine unimodulare Matrix ist und $\left\|\tau_{ij}^{(\varrho)}\right\|$ ihre inverse.

Aus

(34) $\varepsilon_j\, a_j^{(\varrho)} \equiv 0^{(\varrho)}$ folgt $\varepsilon_j \equiv 0$ (mod 2), $j = 1, \ldots \alpha_\varrho$, wenn $a_j^{(\varrho)}$ eine Basis der ϱ dimens. Zyklen ist.

Ferner gelten die Relationen:

Aus $K^{(\varrho)} \equiv K_1^{(\varrho)}$ und $L^{(\varrho)} \equiv L_1^{(\varrho)}$ folgt

$$t\, K^{(\varrho)} + l\, L^{(\varrho)} \equiv t\, K_1^{(\varrho)} + l\, L_1^{(\varrho)}.$$

Weiter hat $K^{(\varrho)} \equiv K_1^{(\varrho)}$ die Relation $R(K^{(\varrho)}) \equiv R\,(K_1^{(\varrho)})$ zur Folge.

Der Komplexring $\overline{\Sigma}$ (mod 2) wird gebildet durch die Gesamtheit aller Komplexe $K^{(\varrho)}$ in Σ, wobei die Gesamtheit identischer Komplexe als ein Element gezählt wird.

Ein Zyklus von $\overline{\Sigma}$ (unorientierter Zyklus) ist ein Komplex, dessen Randkomplex dem entsprechend dimensionalen Nullkomplex identisch ist.

Jeder Zyklus von Σ ist dann Zyklus von $\overline{\Sigma}$, aber nicht umgekehrt.

Betrachten wir die Basis (10) $b_1^{(\varrho)}, b_2^{(\varrho)}, \ldots b_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}$ der ϱ dimens. Komplexe in Σ und ist $E^{(\varrho)}_{s_{\varrho+1}\, s_{\varrho+1}} \equiv 0$, mod 2, dagegen nicht $E^{(\varrho)}_{s_\varrho\, s_\varrho}$, so ist

$$(35) \qquad b^{(\varrho)}_{s_\varrho+1},\ b^{(\varrho)}_{s_\varrho+2}, \ldots\ b^{(\varrho)}_{\alpha_\varrho}$$

eine Basis der ϱ dimens. Zyklen von Σ.

Ungeändert definieren wir: Die Randkomplexe $\varrho + 1$ dimens. Komplexe heißen ϱ dimens. Zyklen homolog Null.

Wir erhalten eine Basisdarstellung der ϱ dimens. Zyklen homolog Null von Σ aus (18), wobei genau jene $N_j^{(\varrho)}$ auftreten, für die $E_{jj}^{(\varrho+1)} \mathrel{\overline{\equiv}}\!\!\!\!/\ 0$, mod 2, ist.

Dies gelte bis $j = s_{\varrho+1}$, dann ist

$$(36) \qquad N_1^{(\varrho)},\ N_2^{(\varrho)}, \ldots\ N^{(\varrho)}_{s_{\varrho+1}} \quad \text{eine solche Basis.}$$

Die der Bettischen Zahl in Σ entsprechende $\alpha_\varrho - s_\varrho - s_{\varrho+1}$ heißt ϱ^{te} Zusammenhangszahl, die der ϱ^{ten} Homologiegruppe entsprechende Gruppe ϱ^{te} Zusammenhangsgruppe.

II. ABSCHNITT.

Unterring (Teilring) eines Ringes Σ.

Ein Teilsystem der Komplexe des Ringes Σ, das den Axiomen I bis VI genügt, heiße Unterring von Σ, und zwar echter Unterring, wenn es in Σ Komplexe gibt, die in diesem Teilsystem nicht enthalten sind.

Wir betrachten in der Folge Unterringe, die in bezug auf ein fest gewähltes Basissystem

$$(37) \qquad a_i^{(\varrho)}, \quad i = 1, \ldots \alpha_\varrho, \quad \varrho = 0,\ 1, \ldots\ n$$

des Ringes Σ definiert sind. Entnimmt man einem solchen Basissystem ein Teilsystem S, so bildet die Gesamtheit der durch die Elemente von S dargestellten Komplexe von Σ im allgemeinen keinen Ring, da ja der Rand eines solchen Komplexes in dieser Gesamtheit nicht enthalten sein muß.

Durch Adjunktion aller Basiselemente, die Ränder sind der Elemente von S, aber nicht zu S gehören, **erweitert** man das System S und gelangt nach endlich vielen solchen **Erweiterungen** zum **kleinsten Ringe** über S.

Ein n dimens. Ring Σ, der der kleinste Ring ist über dem System seiner n dimensionalen Basiselemente, heißt **homogen** (homogen in bezug auf die Dimension).

Sei m eine positive ganze Zahl kleiner oder gleich n, wo n die Dimension eines Ringes Σ ist und sei (37) ein Basissystem von Σ.

Die durch die Basiselemente

$$(38) \qquad a_i^{(\varrho)}, \quad i = 1, \ldots\ \alpha_\varrho, \quad \varrho = 0, 1, \ldots\ m,$$

dargestellten Komplexe bilden einen m dimens. Unterring $\Gamma^{(m)}$ von Σ, den man das m dimens. Gerüst von Σ nennt. Es ist $\Gamma^{(n)}$ mit Σ identisch.

Ist Σ ein homogener Ring, so ist auch $\Gamma^{(m)}$ homogen.

Das m dimens. Gerüst wird durch die Gesamtheit der Komplexe von Σ gebildet, deren Dimension kleiner ist als $m+1$, somit ist $\Gamma^{(m)}$ von der Wahl des Basissystems (37) von Σ unabhängig.

Der Komplementärring und der Randring eines echten Unterringes Σ_1 von Σ.

Es sei Σ_1 ein durch ein Teilsystem von (37) definierter Unterring der Dimension $m \leq n$ von Σ. (Die Definition des Komplementärringes resp. Randringes wird nur für solche Unterringe gegeben.) Σ_1 ist dann auch Unterring von $\Gamma^{(m)}$. Streichen wir in (38) alle Basiselemente von Σ_1, so wird durch das Restsystem S eine Gesamtheit von Komplexen dargestellt, die $\Gamma^{(m)} - \Sigma_1$ bezeichnet sei und die im allgemeinen keinen Ring bildet.

Als Komplementring Σ_2 von Σ_1 definieren wir dann den kleinsten Ring über S.

Ist Σ ein homogener Ring und Σ_1 ebenfalls homogen, so ist auch Σ_2 homogen. Beweis: Von den m dimens. Basiselementen von $\Gamma^{(m)}$ $a_i^{(m)}$, $i=1, \ldots \alpha_m$, mögen die Elemente $a_i^{(m)}$, $i=1, \ldots \beta$, $(\beta \leq \alpha_m)$ die m dimens. Basiselemente von Σ_1 sein, $a_i^{(m)}$, $i=\beta+1, \ldots \alpha_n$ sind dann die m dimens. Basiselemente von Σ_2. Wäre nun Σ_2 nicht mit dem kleinsten Ringe über $a_i^{(m)}$, $i=\beta+1, \ldots \alpha_n$, identisch, so müßte es in Σ_2 ein Element $a_j^{(h)}$, $h<m$, geben, das in diesem kleinsten Ringe nicht enthalten wäre, also — da Σ homogen — im kleinsten Ringe über $a_i^{(m)}$, $i=1 \ldots \beta$, d. h. in Σ_1 enthalten sein müßte.

Gemeinsam aber sind Σ_1 und Σ_2 nur solche Elemente $a_j^{(h)}$, die im Rand eines Elementes von Σ_2 der Dimension $h+1$ enthalten sind. Sei $a_k^{(h+1)}$ dieses Element von Σ_2, so könnte es ebenfalls nicht im kleinsten Ring über $a_i^{(m)}$, $i=\beta+1, \ldots \alpha_n$, enthalten sein, denn sonst wäre auch $a_j^{(h)}$ in diesem kleinsten Ringe enthalten. Unter den Elementen von Σ_2, die in diesem kleinsten Ring nicht enthalten sind, gibt es also keine Elemente höchster Dimension, d. h. es gibt überhaupt keine solchen Elemente.

Ist also Σ_1 ein m dimens. homogener Unterring im homogenen Ringe Σ der Dimension n, so ist der Komplementring Σ_2, falls er nicht leer ist $(\Gamma^{(m)} \equiv \Sigma_1)$, ebenfalls homogen von der Dimension m. Die Beziehung zwischen Ring und Komplementring ist in diesem Falle wechselseitig.

Ohne weiteres ist klar, daß der Durchschnitt zweier Unterringe von Σ selbst ein Unterring von Σ ist.

Insbesonders nennt man den Durchschnitt des Unterringes Σ_1 und seines Komplementes Σ_2 den Randring Σ_r von Σ_1.

Ist Σ_1 ein homogener Unterring im homogenen Ringe Σ, so ist Σ_r, da Σ_1 dann auch das Komplement von Σ_2 ist, gleichfalls Randring von Σ_2.

Wir wollen in der Folge fast nur homogene Ringe betrachten[7]), für sie gilt also: Der Durchschnitt $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ zweier Komplementringe Σ_1 und Σ_2 in Σ heißt Randring dieser Ringe. Sind Σ_1 und Σ_2 von der Dimension m, so ist Σ_r höchstens von der Dimension $m-1$.

Wir beweisen zwei für die Folge zu benutzende Hilfsätze:

Hilfssatz I: Ist Σ ein n dimens. Komplexring und Σ_1 ein Unterring von Σ, dessen Basissystem ein Teilsystem des Basissystems (37) von Σ ist, dann gibt es stets eine Basisdarstellung der ρ dimens. Zyklen von Σ_1, die Teilsystem ist einer Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ.

Beweis: Sei $C_1^{(\rho)}, C_2^{(\rho)}, \ldots C_s^{(\rho)}$ eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ und $D_1^{(\rho)}, D_2^{(\rho)}, \ldots, D_t^{(\rho)}$ eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ_1.

Da jeder Zyklus von Σ_1 auch Zyklus von Σ ist, gilt

$$D_i^{(\rho)} = a_{ji}\, C_j^{(\rho)}, \quad i = 1, \ldots t, \; j = 1, \ldots s.$$

Dieses System bringen wir durch unimodulare Transformationen in die kanonische Form:

$\overline{D}_1^{(\rho)} = a_1\, \overline{C}_1^{(\rho)}, \ldots \overline{D}_t^{(\rho)} = a_t\, \overline{C}_t^{(\rho)}$, wo $\overline{D}_i^{(\rho)}, i = 1, \ldots t$ eine neue Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ_1 und $\overline{C}_j^{(\rho)}, j = 1, \ldots s$, die entsprechende Basis für Σ darstellt.

Die Zyklen $\overline{C}_1^{(\rho)}, \ldots \overline{C}_t^{(\rho)}$ liegen schon im Ringe Σ_1, denn ist $a_1^{(\rho)}, \ldots a_{\alpha_\rho}^{(\rho)}$ die Basis der ρ dimens. Komplexe von Σ; $a_1^{(\rho)}, \ldots a_\beta^{(\rho)}$, $\beta < \alpha_\rho$, die entsprechende Basis von Σ_1, so gilt $\overline{C}_i^{(\rho)} = \gamma_{ik}\, a_k^{(\rho)}$, $k = 1, \ldots \alpha_\rho$, $i = 1, \ldots t$.

Ebenso gilt

$$\overline{D}_i^{(\rho)} = a_i \overline{C}_i^{(\rho)} = \varepsilon_{ie}\, a_e^{(\rho)}, \quad e = 1, \ldots \beta, \; i = 1, \ldots t$$

(über i keine Summation).

Aus den beiden letzten Gleichungen aber folgt $\gamma_{ik} = 0$, $i = 1, \ldots t$, $k = \beta + 1, \ldots \alpha_\rho$, d. h. $\overline{C}_i^{(\rho)}$, $i = 1, \ldots t$, liegt bereits in Σ_1.

---

[7]) Wir schreiben fast nur, denn der Durchschnitt homogener Unterringe des homogenen Ringes Σ, beispielsweise der Randring eines homogenen Ringes, muß selbst kein homogener Ring sein.

Da $\overline{D}_1^{(\varrho)}, \ldots \overline{D}_t^{(\varrho)}$ eine Basis der ϱ dimens. Zyklen von Σ_1 ist, gilt

$$C_h^{(\varrho)} = b_{ih}\, \overline{D}_i^{(\varrho)};\ i, h = 1, \ldots t.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit a_h, ohne über h zu summieren, so erhält man

$$\overline{D}_h^{(\varrho)} = a_h\, b_{ih}\, \overline{D}_i^{(\varrho)},\quad i, h = 1, \ldots t,$$

woraus infolge der Basiseigenschaft von $\overline{D}_i^{(\varrho)}$, $b_{ih} = 0$ für $i \neq h$ und $a_h\, b_{hh} = 1$, also $a_h = b_{hh} = \pm 1$ folgt.

Also gilt bei entsprechender Vorzeichenwahl: $\overline{D}_1^{(\varrho)} = \overline{C}_1^{(\varrho)}$, $\overline{D}_2^{(\varrho)} = \overline{C}_2^{(\varrho)}, \ldots \overline{D}_t^{(\varrho)} = \overline{C}_t^{(\varrho)}$, q. e. d.

Der Hilfssatz I gilt nicht, sobald man statt Basis der ϱ dimens. Zyklen schreibt: Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null. Denn sei

$N_1^{(\varrho)}, N_2^{(\varrho)}, \ldots N_\sigma^{(\varrho)}$ eine Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null von Σ und

$M_1^{(\varrho)}, M_2^{(\varrho)}, \ldots M_\tau^{(\varrho)}$ eine Basis der ϱ dimens. Zyklen homolog Null von Σ_1, so gilt, da jeder Zyklus von Σ_1 homolog Null in Σ_1 auch Zyklus von Σ homolog Null in Σ ist:

$M_i^{(\varrho)} = c_{ij}\, N_j^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots \tau$, $j = 1, \ldots \sigma$, welches System wir in kanonische Form bringen

$\overline{M}_1^{(\varrho)} = c_1\, \overline{N}_1^{(\varrho)}, \ldots \overline{M}_\tau^{(\varrho)} = c_\tau\, \overline{N}_\tau^{(\varrho)}$. Hier aber können wir nur behaupten, daß $\overline{N}_j^{(\varrho)}$, $j = 1, \ldots \tau$, ein ϱ dimens. Zyklus von Σ_1 ist, aber nicht, daß er homolog Null in Σ_1 ist.

Wir nennen nun einen m dimens. Ring Σ_1 **Nullring,** wenn jeder ϱ dimens. Zyklus von Σ_1, für $\varrho = 1, \ldots\, m-1$, ein Zyklus homolog Null in Σ_1 ist.

Dann aber gilt für die im Hilfssatze I besprochenen Ringe der

Hilfssatz II: Ist Σ ein n dimens. Komplexring und Σ_1 sein m dimens. Unterring, ein Nullring, so gibt es für $0 < \varrho < m$ stets eine Basis der ϱ dimens. Zyklen von Σ homolog Null in Σ, die als Teilsystem eine Basis der ϱ dimens. Zyklen von Σ_1 homolog Null in Σ_1 enthält.

Denn jetzt ist $\overline{N}_j^{(\varrho)}$, $j = 1, \ldots \tau$, da $0 < \varrho < m$, als ϱ dimens. Zyklus von Σ_1 auch homolog Null in Σ_1 und demnach linear durch die $\overline{M}_j^{(\varrho)}$, $j = 1, \ldots \tau$ darstellbar. Der weitere Schluß verläuft dann wie beim Hilfssatze I.

Der reziproke, duale Ring eines Ringes.

Ist Σ ein gegebener n dimens. Ring und (37) ein Basissystem von Σ, so kann man Σ auf mancherlei Arten Ringe zuordnen.

Setzt man z. B. $(h<n)$: $a_i^{\varrho} = b_i^{(\varrho-h)}$, $i=1, \ldots \alpha_\varrho$, $\varrho=h, \ldots n$ und definiert weiter $R(a_i^{(\varrho)}) = R(b_i^{(\varrho-h)}) = \varepsilon_{ij}^{(\varrho)} b_j^{(\varrho-h-1)}$, so kann man die $b_i^{(\sigma)}$, $\sigma=0, \ldots n-h$ als Basissystem eines $n-h$ dimens. Ringes auffassen.

Unter allen einem gegebenen Ringe zugeordneten Ringen hat für die Anwendung der reziproke (oder duale) Ring eine gewisse Bedeutung. Wir bringen im folgenden seine Definition und leiten hierauf einen Satz ab für geometrische Mannigfaltigkeiten, die man durch Komplexringe „approximieren" kann.

Sei also Σ der gegebene n dimens. Ring und

(37) $$a_i^{(\varrho)}, \quad i=1, \ldots \alpha_\varrho, \quad \varrho=0, 1, \ldots n$$

ein Basissystem von Σ. Für dieses Basissystem gelten die Randrelationen

(39) $$R(a_i^{(h)}) = \varepsilon_{ji}^{(h)} a_j^{(h-1)}, \; i=1, \ldots \alpha_h, \; j=1, \alpha_{h-1}. \text{ wobei}$$

(39′) $$\varepsilon_{ij}^{(\varrho)} \varepsilon_{ki}^{(\varrho-1)} = 0 \text{ ist}, \; j=1, \ldots \alpha_\varrho, \; i=1, \ldots \alpha_{\varrho-1}, \; k=1, \ldots \alpha_{\varrho-2}.$$

Wir definieren nun den reziproken Ring Σ^* von Σ durch die Basis

(40) $$A_i^{(n-h)} = a_i^{(h)}, \; i=1, \ldots \alpha_h, \; h=0, \ldots n,$$

die den Randrelationen

(41) $$R(A_i^{(n-h)}) = \varepsilon_{ij}^{(h+1)} A_j^{(n-h-1)}, \; i=1, \ldots \alpha_h, \; j=1, \ldots \alpha_{h+1}$$

genügen.

In der Tat ist dann:

(42) $$\begin{aligned} R(R(A_i^{(n-h)}) &= \varepsilon_{ij}^{(h+1)} R(A_j^{(n-h-1)}) \\ &= \varepsilon_{ij}^{(h+1)} \varepsilon_{jk}^{(h+2)} A_k^{(n-h-2)} = 0^{(n-h-2)}, \; i=1, \ldots\ldots \alpha_h, \\ &\qquad j=1, \ldots \alpha_{h+1}, \; k=1, \ldots \alpha_{h+2} \end{aligned}$$

da ja $\varepsilon_{jk}^{(h+2)} \varepsilon_{ij}^{(h+1)} = 0$ ist. $(k=1, \ldots \alpha_{h+2}, j=1, \ldots \alpha_{h+1} \, i=1, \ldots \alpha_h)$

Die Beziehung Σ^* zu Σ ist wechselseitig.

Nach (41) ist, wenn wir wie im Abschnitt I $R(A_i^{(n-h)}) = \varepsilon_{ji}^{*(n-h)} A_j^{(n-h-1)}$, also $\varepsilon_{ij}^{(h+1)} = \varepsilon_{ji}^{*(n-h)}$ bezeichnen, ferner mit α_{n-h}^* die Basiszahl der $n-h$ dimens. Komplexe und mit r_{n-h}^* den Rang der Matrix $\| \varepsilon_{ji}^{*(n-h)} \|$, die $n-h^{\text{te}}$ Bettische Zahl von Σ^*

$$h_{n-h}^* = \alpha_{n-h}^* - r_{n-h}^* - r_{n-h+1}^*. \tag{43}$$

Nun ist $\alpha_{n-h}^* = \alpha_h$, $r_{n-h}^* = r_{h+1}$; $r_{n-h+1}^* = r_h$, somit gilt

$$h_{n-h}^* = \alpha_h - r_h - r_{h+1} = h_h. \tag{43'}$$

Die h^{te} Bettische Zahl von Σ ist gleich der $n-h^{\text{ten}}$ Bettischen Zahl von Σ^* und umgekehrt.

Ferner sind die Torsionszahlen der ϱ^{ten} Homologiegruppe von Σ^* die von 1 verschiedenen invarianten Faktoren der Matrix $\| \varepsilon_{ij}^{*(\varrho+1)} \|$, also der Matrix $\| \varepsilon_{ij}^{(n-\varrho)} \|$ und somit identisch mit den Torsionszahlen der $n-\varrho-1^{\text{ten}}$ Homologiegruppe von Σ.

Die Torsionszahlen der ϱ^{ten} Homologiegruppe von Σ^* sind mit den Torsionszahlen der $n-\varrho-1^{\text{ten}}$ Homologiegruppe von Σ identisch.

Der von uns definierte reziproke Ring Σ^* ist von der Wahl der Basis (37) von Σ nicht unabhängig. Sei nämlich

(44) $\bar{a}_i^{(h)}$, $i = 1, \ldots \alpha_h$, $h = 0, \ldots n$ ein zweites Basissystem und

$$\bar{a}_i^{(h)} = \sigma_{ij}^{(h)} a_j^{(h)}, \quad a_i^{(h)} = \tau_{ij}^{(h)} \bar{a}_j^{(h)}, \quad i, j = 1, \ldots \alpha_h \tag{45}$$

die unimodulare Beziehung zwischen beiden Basissystemen.

Der in bezug auf die Basis $\bar{a}_i^{(h)}$ definierte reziproke Ring $\bar{\Sigma}^*$ hat das Basissystem

$$\bar{A}_i^{(n-h)} = \bar{a}_i^{(h)}, \quad i = 1, \ldots \alpha_h, \ h = 0, \ldots n \tag{46}$$

und zwischen $A_i^{(n-h)}$ (40) und $\bar{A}_i^{(n-h)}$ bestehen zufolge (45) die unimodularen Transformationen

$$\begin{cases} \bar{A}_i^{(n-h)} = \sigma_{ij}^{(h)} A_j^{(n-h)} = \sigma_{ij}^{*(n-h)} A_j^{(n-h)} \\ A_i^{(n-h)} = \tau_{ij}^{(h)} \bar{A}_j^{(n-h)} = \tau_{ij}^{*(n-h)} A_i^{(n-h)}, \end{cases} \tag{47}$$

wo $\sigma_{ij}^{(h)} = \sigma_{ij}^{*(n-h)}$ und $\tau_{ij}^{(h)} = \tau_{ij}^{*(n-h)}$ gesetzt wurde

Für den Ring $\overline{\Sigma}^*$ gelten analog (41) die Randrelationen:

$$R(\overline{A}_i^{(n-h)}) = \overline{\varepsilon}_{ij}^{(h+1)} \overline{A}_j^{(n-h-1)}, \tag{48}$$

wo zwischen den $\overline{\varepsilon}_{ij}^{(h+1)}$ und den $\varepsilon_{ij}^{(h+1)}$ — in (48) — die Relationen (8) bestehen:

$$\overline{\varepsilon}_{pq}^{(h+1)} = \sigma_{qr}^{(h+1)} \varepsilon_{sr}^{(h+1)} \tau_{sp}^{(h)}. \tag{49}$$

Faßt man dagegen nach (47) $\overline{A}_i^{(n-h)}$, $i=1, \ldots \alpha_h$, $h=0, \ldots n$ auf als Basissystem des Ringes Σ^*, so folgt aus (47)

$$\begin{aligned} R(\overline{A}_i^{(n-h)}) &= \sigma_{ij}^{(h)} R(A_j^{(n-h)}) \\ &= \sigma_{ij}^{(h)} \varepsilon_{jp}^{(h+1)} A_p^{(n-h-1)} = \sigma_{ij}^{(h)} \varepsilon_{jp}^{(h+1)} \tau_{pq}^{(h+1)} \overline{A}_q^{(n-h-1)}, \end{aligned} \tag{50}$$

somit eine von (48), (49) verschiedene Randrelation.

Bezeichnen wir

$$\tilde{\varepsilon}_{iq}^{(h+1)} = \sigma_{ij}^{(h)} \varepsilon_{jp}^{(h+1)} \tau_{pq}^{(h+1)}, \text{ so lautet (50)} \tag{51}$$

$$R(A_i^{(n-h)}) = \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(h+1)} \overline{A}_j^{(n-h-1)} \tag{51'}$$

Fassen wir $A_i^{(n-h)}$ auf als Basissystem von Σ^* und $\overline{\Sigma}^*$, so gelten für Σ^* die Randrelationen (51′), für $\overline{\Sigma}^*$ die Randrelationen (48).

Wenn wir aber im Sinne unserer abstrakten Topologie zwei Ringe Σ und $\overline{\Sigma}$ identisch nennen, wenn sich für Σ ein Basissystem $a_i^{(\varrho)}$ und für $\overline{\Sigma}$ ein solches $\overline{a}_i^{(\varrho)}$ so finden läßt, daß zugleich mit[1]

$$R(a_j^{(\varrho)}) = \varepsilon_{ij}^{(\varrho)} a_j^{(\sigma-1)} \text{ auch } R(\overline{a}_j^{(\varrho)}) = \varepsilon_{ij}^{(\varrho)} \overline{a}_j^{(\varrho-1)}$$

gilt, so sind die Ringe Σ^* und $\overline{\Sigma}^*$ identisch.

Wir bezeichnen $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(h+1)} = \tilde{\varepsilon}_{ji}^{*(n-h)}$, dann lauten die Randrelationen (51′) des Ringes Σ^*

$$R(\overline{A}_i^{(n-h)}) = \tilde{\varepsilon}_{ji}^{*(n-h)} A_j^{(n-h-1)}, \text{ wobei (51)} \tag{52}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{qi}^{*(n-h)} = \sigma_{ij}^{*(n-h)} \varepsilon_{pj}^{*(n-h)} \tau_{pq}^{*(n-h-1)} \text{ gilt.} \tag{52'}$$

Desgleichen gilt für den Ring Σ^* (48):

$$R(\overline{A}_i^{(n-h)}) = \overline{\varepsilon}_{ji}^{*(n-h)} \overline{A}_j^{(n-h-1)}, \text{ wo} \tag{53}$$

$$\overline{\varepsilon}_{qp}^{*(n-h)} = \sigma_{qr}^{*(n-h-1)} \varepsilon_{rs}^{*(n-h)} \tau_{sp}^{*(n-h)} \text{ ist.} \tag{53'}$$

Wegen $\tau_{sp}^{*(n-h)}\sigma_{pi}^{*(n-h)}=\delta_{si}$ folgt aus (53′) $\sigma_{pi}^{*(n-h)}\bar{\varepsilon}_{qp}^{*(n-h)}=$ $=\sigma_{qr}^{*(n-h-1)}\varepsilon_{ri}^{*(n-h)}$ und weiter wegen $\sigma_{qr}^{*(n-h-1)}\tau_{jq}^{*(n-h-1)}=\delta_{rj}$,

$$\varepsilon_{ji}^{*(n-h)}=\sigma_{pi}^{*(n-h)}\bar{\varepsilon}_{qp}^{*(n-h)}\tau_{jq}^{*(n-h-1)}. \tag{54}$$

Dies wird in (52′) eingesetzt und hat

$$\tilde{\varepsilon}_{qi}^{*(n-h)}=\sigma_{ij}^{*(n-h)}\sigma_{uj}^{*(n-h)}\bar{\varepsilon}_{vu}^{*(n-h)}\tau_{pv}^{*(n-h-1)}\tau_{pq}^{*(n-h-1)}. \tag{54′}$$

Nun ist $\sigma_{ij}^{*(n-h)}\sigma_{uj}^{*(n-h)}=\alpha_{iu}^{(n-h)}$ eine unimodulare Matrix und $\tau_{pv}^{*(n-h)}\tau_{pq}^{*(n-h)}=\beta_{vq}^{(n-h)}$ ihre inverse. Man schreibt also (54′)

$$\tilde{\varepsilon}_{qi}^{*(n-h)}=\alpha_{iu}^{(n-h)}\bar{\varepsilon}_{vu}^{*(n-h)}\beta_{vq}^{(n-h-1)},\quad i,u=1,\ldots\alpha_{n-}^{*}\;; \tag{55}$$
$$v,q=1,\ldots\alpha_{n-h-1}^{*}.$$

Führen wir im Ringe $\bar{\Sigma}^*$ die neue Basis

(56) $\tilde{A}_i^{(n-h)}=\alpha_{iu}\bar{A}_i^{(n-h)}$ ein, so gilt für diese Basis nach (8)

$$R(\tilde{A}_i^{(n-h)})=\tilde{\varepsilon}_{ji}^{*(n-h)}\tilde{A}_j^{(n-h-1)}, \tag{57}$$

woraus man wegen (52) auf die Identität der Ringe Σ^* und $\bar{\Sigma}^*$ schließt.

Neben dem dualen Ring ist für viele Probleme der μ dimensionale Sternring eines ν dimensionalen Komplexes $a_j^{(\nu)}$, wobei $\nu<\mu<n$ ist, von Bedeutung. Ehe wir ihn definieren, sei eine Erklärung für die Bedeutung der Aussage, „$a_j^{(\nu)}$ liegt in $a_h^{(u)}$“, oder was dem gleichbedeutend ist „$a_h^{(\mu)}$ enthält $a_j^{(\nu)}$“ gegeben.

Wir sagen: $a_h^{(\mu)}$ enthält $a_j^{(\nu)}$, wenn ein dem Rande von $a_h^{(\mu)}$ angehöriger, also $\mu-1$ dimensionaler Komplex $a_j^{(\nu)}$ enthält.

Wir vervollständigen diese Erklärung: Gehört $a_j^{(\nu)}$ dem Rande eines $\nu+1$ dimensionalen Komplexes $a_k^{(\nu+1)}$ an, so sagen wir, daß $a_k^{(\nu+1)}$ ihn enthalte.

Betrachten wir dann den μ dimensionalen Gerüstring eines n dimensionalen Ringes Σ und in ihm das Basiselement $a_j^{(\nu)}$, so gibt es ein bestimmtes Teilsystem der μ dimensionalen Basiselemente dieses Gerüstes, dessen Elemente alle $a_j^{(\nu)}$ enthalten.

Der kleinste diese Elemente umfassende Ring $S_\mu(a^{(v)})$ heißt dann μ dimensionaler Sternring von $a_i^{(v)}$.

Wir wollen noch, ehe wir diese Überlegungen verlassen, eine Anwendung des reziproken Ringes auf geometrische Mannigfaltigkeiten geben, die eine Erweiterung eines bekannten Resultates von Poincaré darstellt.

Die dabei gezogenen Schlüsse sind sicherlich nicht definitiv, sondern wollen nur die Richtung des strengeren Beweises festlegen, wobei die Voraussetzungen, für welche der Poincarésche Satz selbst wie die eben angekündigte Erweiterung richtig sind, genau herausgeschält werden müssen.

Es sei Σ ein n dimensionaler geometrischer Komplexring, z. B. ein simplizialer Ring, dessen ρ dimens. Komplexe aus nicht ausgearteten $\rho+1$ Ecken eines euklidischen R_N, $N \geq n$, zusammengesetzt seien.

Die beiden folgenden Figuren stellen solche zweidimens. Ringe im euklidischen R_2 dar, dessen Elemente Dreiecke, Strecken und Punkte sind.

In der Figur beachte man vorläufig nur die voll gezeichneten Strecken.

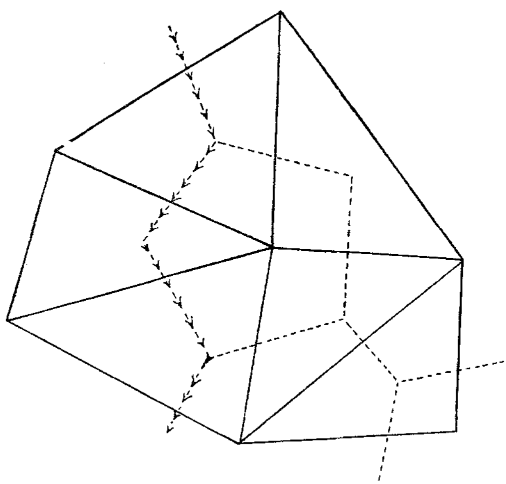

Fig. 1.

Die Bettischen Zahlen des Ringes Fig. 1 sind $h_0=1, h_1=0, h_2=0$
„ 2 „ $h_0=1, h_1=1, h_2=0$

Um den dualen Ring eines solchen geometrischen zu erhalten, ordnen wir jedem Dreieck einen seiner inneren Punkte zu, einer Dreieckseite, die nicht dem (im üblichen Sinne definierten) Rande des geometrischen Komplexringes angehört, die also Seite zweier benachbarter Dreiecke ist, ordnen wir einen Kurvenzug zu, der die beiden

Punkte verbindet, die diesen beiden Dreiecken entsprechen (z. B. die diese Punkte verbindende Strecke).

Einer Seite aber, die Rand nur eines Dreieckes des Komplexringes ist, ordnen wir eine Strecke zu, die einseitig berandet ist durch

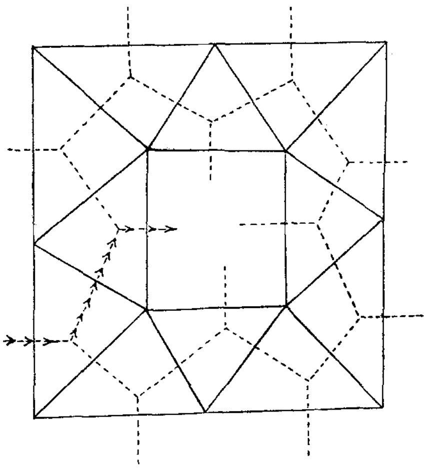

Fig 2.

den diesem Dreieck entsprechenden Punkt. Einem Punkte des Komplexes wieder sind jene zweidimens. Elemente zugeordnet, die berandet sind durch alle jene Strecken, die den Strecken zugeordnet sind, die den betreffenden Punkt enthalten.

Enthält dabei ein ρ dimens. Element $M^{(\rho)}$ des Ringes Σ das $\rho-1$ dimens. $M^{(\rho-1)}$ 0, $+1$ oder -1mal, so soll das entsprechende $n-\rho$ dimens. Element $M^{*(n-\rho)}$ des dualen Ringes im entsprechenden $n-\rho+1$ dimens. Element $M^{*(n-\rho+1)}$, 0, $+1$ oder -1mal enthalten sein.

Wir haben in Fig. 1 und Fig. 2 die dualen Komplexringe gestrichelt gezeichnet. Die durch Pfeile markierten Kurvenzüge stellen eindimens. Zyklen dar, da ja die Endpunkte dieser Kurvenzüge den dualen Ringen nicht angehören.

Die Bettischen Zahlen des dualen Ringes des Ringes der Fig. 1
sind $h^* = 0$, $h_1^* = 0$, $h_2^* = 1$ und die entsprechenden der Fig. 2
sind $h_0^* = 0$, $h_1^* = 1$, $h_2^* = 1$.

Wir sagen, daß eine (z. B. in einem euklidischen R_N liegende) n dimens. Mannigfaltigkeit M_n $(n \leq N)$ durch einen n dimens. geometrischen Komplexring (z. B. durch einen simplizialen Ring) approximiert ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jeder Komplex des Ringes gehört der Mannigfaltigkeit an.

2. Jede unberandete ρ dimens. Mannigfaltigkeit $F\rho$ dieser M_n, $\rho < n$, ist homolog einem ρ dimens. Zyklus des Komplexringes.

Wir nennen hier zwei unberandete ρ dimens. Mannigfaltigkeiten homolog, wenn es in der M_n eine $\rho+1$ dimens. Mannigfaltigkeit gibt, deren Rand die Differenz dieser beiden Mannigfaltigkeiten ist.

Die ρ dimens. Mannigfaltigkeiten lassen sich in Klassen so zusammenfassen, daß die Elemente einer Klasse unter sich homolog sind.

Sind die Bedingungen 1) und 2) erfüllt, so entsprechen dann diese Klassen den Klassen der ρ^{ten} Homologiegruppe des approximierenden Ringes eineindeutig.

Der Komplexring der Fig. 1 approximiert dann jede abgeschlossene Kreisfläche, die ihn enthält, sein dualer dagegen die offene.

Der Komplexring der Fig. 2 approximiert die Fläche eines abgeschlossenen Kreisringes, sein dualer die des offenen.

Verallgemeinern wir unsere Überlegungen für n dimens. geometrische Komplexe, so erhalten wir das Resultat:

Ist M_n eine durch geometrische Komplexringe approximierbare Mannigfaltigkeit, M_i die Menge ihrer inneren Punkte, M_{r_1} die Menge ihrer Randpunkte, die Punkte von M_n sind, und M_{r_2} die Menge der übrigen Randpunkte, so stellt $M_i+M_{r_2}$ die duale Mannigfaltigkeit unserer $M_n=M_i+M_{r_1}$ dar.

Ist M_n unberandet, so ist $M_{r_2}=M_{r_1}=0$ und M_n fällt mit seiner dualen Mannigfaltigkeit zusammen. (Letzteres Resultat stammt von Poincaré.)

III. ABSCHNITT.

Operationen an Ringen, die die Homologiegruppen unverändert lassen.

Es liege ein n dimensionaler Ring Σ vor, Σ_1 sei ein n dimensionaler echter Teilring von Σ, $\Sigma_1<\Sigma$, dessen Basissystem Teilsystem ist eines bestimmten Basissystemes von Σ. Der Randring Σ_r von Σ_1 sei $n-1$ dimensional und der Komplementring Σ_2 von Σ_1 in Σ demnach n dimensional.

Von Σ_1 und Σ_r setzen wir voraus[8]):

1) Σ_r ist ein Nullring, d. h. jeder ρ dimens. Zyklus von Σ_r für $0<\rho<n-1$ sei in Σ_r homolog Null.

Ferner sei jeder nulldimens. Zyklus von Σ_r, der in Σ homolog Null ist, in Σ_r homolog Null.

2) Σ_1 ist ein Nullring, d. h. jeder ρ dimens. Zyklus von Σ_1 für $0<\rho<n$ sei in Σ_1 homolog Null.

3) Jedem nulldimens. Zyklus von Σ_1 entspreche ein solcher in Σ_r, der mit ihm in Σ_1 homolog Null sei.

Die $n-1$ dimens. Zyklen des Ringes Σ_r haben eine Basis

$$C_{r1}^{(n-1)},\quad C_{r2}^{(n-1)},\quad \ldots\quad C_{r\alpha}^{(n-1)}, \tag{58}$$

[8]) Für $n=1$ fallen Voraussetzungen 1) und 2) weg.

deren Elemente als $n-1$ dimens. Zyklen von Σ_1 nach Voraussetzung 2) in Σ_1 homolog Null sind[9]):

$$C_{ri}^{(n-1)} = R\,(A_{1i}^{(n)}), \qquad i=1, \ldots \alpha. \tag{59}$$

Adjungieren wir zum Basissystem von Σ_2 die α Komplexe

$$A_{11}^{(n)}, \quad A_{12}^{(n)}, \ldots \quad A_{1\alpha}^{(n)} \tag{60}$$

von Σ_1, so erhalten wir ein Basissystem für einen neuen Ring Σ_3, dessen Homologiegruppen (also auch Bettische und Torsionszahlen) für $\rho<n$ mit denen des Ringes Σ identisch sind.

Weitere Elemente als die von (60) braucht man nicht zu adjungieren, da der Rand eines Elementes von (60) nach (59) bereits in Σ_r, also in Σ_2 auftritt. (Die $n-1$ dimens. Gerüste von Σ_2 und Σ_3 sind identisch.)

Die Elemente (60) sind linear unabhängig, da aus $\pi_i A_{1i}^{(n)} = 0^{(n)}$, $i=1, \ldots \alpha$, durch Randbildung $\pi_i C_{ri}^{(n-1)} = 0^{(n-1)}$ $i=1, \ldots \alpha$, folgt, d. h. $\pi_i=0$, $i=1, \ldots \alpha$, infolge der Basiseigenschaft der Elemente von (60).

Jeder ρ dimensionale Zyklus von Σ_3 ist wegen $\Sigma_3<\Sigma$ ρ dimens. Zyklus von Σ, ist er in Σ_3 homolog Null, so ist er auch in Σ homolog Null.

Jede Klasse ρ dimens. Zyklen von Σ_3 ist demnach Teil einer Klasse der ρ dimens. Zyklen von Σ.

Wir lassen nun umgekehrt für $0<\rho<n$ jedem ρ dimens. Zyklus von Σ einen solchen von Σ_3 entsprechen.

Sei $C^{(\rho)}$ dieser ρ dimens. Zyklus von Σ, so sei mit $\overline{C}^{(\rho)}$ der ihm entsprechende von Σ_3 bezeichnet, zu dem wir auf folgendem Wege gelangen:

Indem wir $C^{(\rho)}$ durch die Basis des Ringes Σ ausdrücken, unterscheiden wir die drei Teilkomplexe von $C^{(\rho)}$

$$A_1^{(\rho)} \text{ in } \Sigma_1 - \Sigma_r, \quad A_2^{(\rho)} \text{ in } \Sigma_2 - \Sigma_r \text{ und } A_r^{(\rho)} \text{ in } \Sigma_r.$$

$A_r^{(\rho)}$ spalten wir seinerseits beliebig in zwei in Σ_r liegende Komplexe $A_{r1}^{(\rho)}$ und $A_{r2}^{(\rho)}$: $A_r^{(\rho)} = A_{r1}^{(\rho)} + A_{r2}^{(\rho)}$ und haben dann eine Zerlegung von $C^{(\rho)}$

---

[9]) Für $n=1$: Die nulldimens. Zyklen von Σ_r, die homolog Null in Σ_1 sind, haben eine Basis $C_{ri}^{(0)}$, $i=1, \ldots \alpha$, usw.

Dabei berufen wir uns auf ein Resultat, das wir am Ende dieses Abschnittes in einer Bemerkung bringen: Die ρ dimens. Zyklen eines Teilringes, die im Ringe homolog Null sind, besitzen eine Basis.

(61) $$C^{(\varrho)} = k_1^{(\varrho)} + k_2^{(\varrho)},\ \text{wobei}$$

$$k_1^{(\varrho)} = A_1^{(\varrho)} + A_{r1}^{(\varrho)} \text{ und } k_2^{(\varrho)} = A_2^{(\varrho)} + A_{r2}^{(\varrho)} \text{ ist.}$$

Aus (61) erhalten wir durch Randbildung:

(61') $$0^{(\varrho-1)} = R(k_1^{(\varrho)}) + R(k_2^{(\varrho)}).$$

Der $\varrho-1$ dimens. Zyklus $R(k_1^{(\varrho)})$, der in Σ_1 und Σ_2 liegt, ist somit ein Zyklus von Σ_r, und da er in Σ homolog Null ist und $\varrho-1<n-1$, ist er nach Voraussetzung 1) in Σ_r homolog Null, d. h. es gibt in Σ_r einen ϱ dimens. Komplex $k_r^{(\varrho)}$, dessen Rand $R(k_1^{(\varrho)})$ ist:

(62) $$R(k_1^{(\varrho)}) = R(k_r^{(\varrho)}).$$

Also ist

(62') $$C_1^{(\varrho)} = k_1^{(\varrho)} - k_r^{(\varrho)}$$

ϱ dimens. Zyklus in Σ_1 und wegen $0<\varrho<n$ ist nach Voraussetzung 2) $C_1^{(\varrho)} \sim 0$ in Σ_1 also auch ~ 0 in Σ.

Als den $C^{(\varrho)}$ in Σ_3 entsprechenden ϱ dimens. Zyklus definieren wir:

(62'') $$\overline{C}^{(\varrho)} = k_2^{(\varrho)} + k_r^{(\varrho)},$$

der im $n-1$ dimens. Gerüste von Σ_2 liegt.

Aus (61), (62') und (62'') folgt:

(63) $$C^{(\varrho)} = C_1^{(\varrho)} + \overline{C}^{(\varrho)}.$$

Die Zerlegung (63) des Zyklus $C^{(\varrho)}$ in einen von Σ_1 und einen von Σ_2 ist nicht eindeutig, demnach auch nicht die Zuordnung $C^{(\varrho)} \rightarrow \overline{C}^{(\varrho)}$.

Sei neben (63) : $C^{(\varrho)} = \dot{C}_1^{(\varrho)} + \dot{\overline{C}}^{(\varrho)}$ eine solche zweite Zerlegung, also $\dot{C}_1^{(\varrho)}$ ein Zyklus von Σ_1 und $\dot{\overline{C}}^{(\varrho)}$ ein solcher von Σ_2.

Dann folgt:

$$\overline{C}^{(\varrho)} - \dot{\overline{C}}^{(\varrho)} = \dot{C}_1^{(\varrho)} - C_1^{(\varrho)},$$

wo links ein Zyklus von Σ_1 und rechts ein Zyklus von Σ_2 steht.

Somit ist

$$\overline{C}^{(\varrho)} - \dot{\overline{C}}^{(\varrho)} = C_r^{(\varrho)}$$

ein ρ dimens. Zyklus von Σ_r. Ist $\rho<n-1$, so ist $C_r^{(\varrho)} \backsim 0$ in Σ_r (Voraussetzung 1) also $\bar{C}^{(\varrho)} \backsim \dot{\bar{C}}^{(\varrho)}$ in Σ_2.

Ist $\rho=n-1$, so läßt sich $C_r^{(n-1)}$ durch die Basis (58) linear darstellen:

$$C_r^{(n-1)} = p_i\, C_{ri}^{(n-1)}\; i=1\ldots\alpha,$$

woraus $C_r^{(n-1)} = R(p_i A_{1i}^{(n)}) \backsim 0$ in Σ_3 folgt.

Es gilt somit stets

$$\bar{C}^{(\varrho)} \backsim \dot{\bar{C}}^{(\varrho)} \text{ in } \Sigma_3.$$

Jedem ρ dimens. Zyklus $C^{(\varrho)}$ $(0<\rho<n)$ von Σ sind somit ρ dimens. Zyklen einer bestimmten Zyklenklasse von Σ_3 zugeordnet.

Aus (63) wieder folgt

$$C^{(\varrho)} \backsim \bar{C}^{(\varrho)} \text{ in } \Sigma, \text{ da } C_1^{(\varrho)} \tag{64}$$

nach Voraussetzung 2) in Σ homolog Null ist.

Es wird also jedem ρ dimens. Zyklus von Σ $(0<\rho<n)$ die Klasse[10]) ρ dimens. Zyklen von Σ_3 zugeordnet, deren Elemente ganz in der diesen Zyklus enthaltenden Klasse von Σ liegen.

Wir können daraus aber noch nicht auf ein eindeutiges Entsprechen der ρ dimens. Zyklenklassen $(0<\rho<n)$ von Σ und Σ_3 schließen, da es ja möglich wäre, daß zwei verschiedenen ρ dimens. Zyklen $C_1^{(\varrho)}$ und $C_2^{(\varrho)}$, die einer Klasse in Σ angehören,

$$C_1^{(\varrho)} \backsim C_2^{(\varrho)} \text{ in } \Sigma,$$

ρ dimens. Zyklen $\bar{C}_1^{(\varrho)}$ und $\bar{C}_2^{(\varrho)}$ von Σ_3 zugeordnet sind, die in Σ_3 verschiedenen Zyklenklassen angehören.

Für letztere beiden Zyklen müßte dann gelten

$$\bar{C}_1^{(\varrho)} \backsim \bar{C}_2^{(\varrho)} \text{ in } \Sigma \text{ (nach 64) aber } \bar{C}_1^{(\varrho)} \not\backsim \bar{C}_2^{(\varrho)} \text{ in } \Sigma_3.$$

Betrachten wir dann den ρ dimens. Zyklus $\bar{Z}^{(\varrho)} = \bar{C}_1^{(\varrho)} - \bar{C}_2^{(\varrho)}$, so gälte:

$$\bar{Z}^{(\varrho)} \backsim 0 \text{ in } \Sigma,\quad \bar{Z}^{(\varrho)} \not\backsim 0 \text{ in } \Sigma_3. \tag{65}$$

Dann gäbe es in Σ einen Komplex $k^{(\varrho+1)}$, dessen Rand $\bar{Z}^{(\varrho)}$ wäre.

---

[10]) „Die Klasse“ im Sinne von „nur Elemente dieser Klasse“.

Diesen Komplex denken wir uns in zwei Teilkomplexe $k_1^{(\varrho+1)}$ in Σ_1 und $k_2^{(\varrho+1)}$ in Σ_2 zerlegt, so daß dann

$$\bar{Z}^{(\varrho)} = R(k_1^{(\varrho+1)}) + R(k_2^{(\varrho+1)}) \text{ gelten müßte.}$$

$R(k_1^{(\varrho+1)})$ kann kein Nullkomplex sein, da sonst $Z^{(\varrho)} \sim 0$ in Σ_3 wäre.

$Z^{(\varrho)} - R(k_2^{(\varrho+1)}) = R(k_1^{(\varrho+1)})$ wäre also ϱ dimens. Zyklus von Σ_r, der aber in Σ_r nicht homolog Null sein dürfte, da dies wieder $\bar{Z}^{(\varrho)} \sim 0$ in Σ_3 zur Folge hätte.

Es müßte demnach (Voraussetzung 1) $\varrho = n-1$ sein.

Dann aber gälte $R(k_1^{(n)}) = p_i C_{ri}^{(n-1)}$, $i = 1, \ldots \alpha$, also $R(k_1^{(n)}) = R(p_i A_{1i}^{(n)}) \sim 0$ in Σ_3, woraus wieder $\bar{Z}^{(\varrho)} \sim 0$ in Σ_3 folgen würde. (Widerspruch.)

Es entsprechen somit, für $0 < \varrho < n$, die ϱ dimens. Zyklenklassen von Σ und Σ_3 einander eineindeutig und damit auch die entsprechenden Homologiegruppen.

Diese Behauptung beweisen wir nun auch für $\varrho = 0$, wobei zum ersten Male die Voraussetzung 3) in Kraft tritt.

Sei $C^{(0)}$ ein nulldimens. Zyklus von Σ ($=$ nulldimens. Komplex), so zerlegen wir ihn in seine drei Teilkomplexe (nulldimens. Zyklen) $\bar{C}_1^{(0)}$ in $\Sigma_1 - \Sigma_r$, $\bar{C}_2^{0}$ in $\Sigma_2 - \Sigma_r$ und $\bar{C}_r^{(0)}$ in Σ_r.

$$C^{(0)} = \bar{C}_1^{(0)} + \bar{C}_2^{(0)} + \bar{C}_r^{(0)}.$$

Zerlegen wir $\bar{C}_r^{(0)}$ beliebig in zwei in Σ_r liegende Bestandteile: $\bar{C}_r^{(0)} = \bar{C}_{r1}^{(0)} + \bar{C}_{r2}^{(0)}$, so erhalten wir

$$(66) \quad C^{(0)} = C_1^{(0)} + C_2^{(0)}, \text{ wo } C_1^{0} = \bar{C}_1^{(0)} + \bar{C}_{r1}^{(0)} \text{ und } C_2^{(0)} = \bar{C}_2^{(0)} + \bar{C}_{r2}^{(0)} \text{ ist.}$$

Nach Voraussetzung 3) gibt es in Σ_r einen nulldimens. Zyklus $C_r^{(0)}$, der in Σ_1 mit $C_1^{(0)}$ homolog ist:

$$C_1^{(0)} \sim C_r^{(0)} \text{ in } \Sigma_1.$$

Wir ordnen dann $C^{(0)}$ den Zyklus $C_2^{(0)} + C_r^{(0)}$ von Σ_2 (also auch von Σ_3) zu.

Sei $\bar{C}_2^{(0)} + \bar{C}_r^{(0)}$ ein zweiter $C^{(0)}$ so zugeordneter Zyklus von Σ_3. Dann gilt

$$C^{(0)} = C_2^{(0)} + C_r^{(0)} + (C_1^{(0)} - C_r^{(0)}) = C_2^{(0)} + C_r^{(0)} + R(k_1^{(1)}) \text{ und ebenso}$$
$$C^{(0)} \qquad = \bar{C}_2^{(0)} + \bar{C}_r^{(0)} + R(\bar{k}^{(1)}).$$

Daraus aber folgt

$$(C_2^{(0)} + C_r^{(0)}) - (\overline{C}_2^{(0)} + \overline{C}_r^{(0)}) = R(k_1^{(1)} - \overline{k}_1^{(1)})$$

Links steht ein Zyklus von Σ_2 und rechts ein Zyklus von Σ_1. Somit ist $R(k_1^{(1)} - \overline{k}_1^{(0)})$ ein nulldimens. Zyklus von Σ_r, und da er in Σ_1 homolog Null ist, so ist er (Voraussetz. 1) homolog Null in Σ_r[11]).

Somit ist

$$C_2^{(0)} + C_r^{(0)} \backsim \overline{C}_2^{(0)} + \overline{C}_r^{(0)} \text{ in } \Sigma_r, \text{ also auch in } \Sigma_3.$$

Also sind jedem nulldimens. Zyklus $C^{(0)}$ von Σ nulldimens. Zyklen einer bestimmten Klasse von Σ_3 zugeordnet.

Was die Eineindeutigkeit der Zuordnung der nulldimens. Zyklenklassen von Σ und Σ_3 betrifft, so könnte es zwei Zyklen von Σ_2 geben, die in Σ, aber nicht in Σ_3 homolog Null wären [analog (65)].

Dann gäbe es einen nulldimens. Zyklus $Z^{(0)}$ in Σ_2, der in Σ, aber nicht in Σ_2 homolog Null wäre.

Aus $Z^{(0)} = R(k^{(1)})$ folgt, sobald man $k^{(1)} = k_1^{(1)} + k_2^{(1)}$ setzt:

$Z^{(0)} = R(k_1^{(1)}) + R(k_2^{(1)})$. $R(k_1^{(1)})$ ist dann nulldimens. Zyklus von Σ_r und (Voraussetzung 1) homolog Null in Σ_r. Somit gilt $Z^{(0)} \backsim 0$ in Σ_3, d. h. einen Zyklus $Z^{(0)}$ der beschriebenen Eigenschaft kann es nicht geben[12]).

Es entsprechen somit für $\rho < n$ die ρ dimens. Zyklenklassen und demnach die entsprechenden Homologiegruppen der Ringe Σ und Σ_3 einander eineindeutig.

Was die n^{te} Homologiegruppe betrifft, so sei

$$(67) \qquad a^{(n)}, \; a_2^{(n)}, \qquad a_\varepsilon^{(n)}$$

die Basis der n dimens. Komplexe von Σ_1. Da die Elemente von (60) n dimens. Komplexe von Σ_1 sind, so gilt

$$(68) \qquad A_{1i} = p_{ij} \; a_j^{(n)}, \quad i = 1, \ldots \alpha, \quad j = 1, \ldots \varepsilon.$$

Es sei nun vorausgesetzt:

4) Jeder n dimensionale Zyklus von Σ enthalte Basiselemente der Reihe (67) nur in der Zusammenfassung (68).

Dann ist jeder n dimens. Zyklus von Σ ein solcher von Σ_3 und auch die n^{ten} Homologiegruppen dieser Ringe sind identisch.

---

[11]) Hier ist $n > 1$ vorausgesetzt. Für $n = 1$ ist $R(k_1^{(1)} - \overline{k}_1^{(1)})$ ein nulldimens. Zyklus von $\Sigma_r \backsim 0$ in Σ_1, also durch die $C_{ri}^{(0)}$, $i = 1, \ldots \alpha$, darstellbar, somit $= R(p_i A_{1i}^{(1)})$, also $\backsim 0$ in Σ_3.

[12]) Für $n = 1$: $R(k_1^{(1)})$ ist nulldimens. Zyklus von $\Sigma_r \backsim 0$ in Σ_1 also $\backsim 0$ in Σ_3.

Sind die Voraussetzungen 1), 2), 3) und 4) für das n dimens. Gerüst Σ eines N dimens. Ringes $\overline{\Sigma}$ erfüllt und ersetzt man dieses n dimens. Gerüst durch den Ring Σ_3, so entsteht aus $\overline{\Sigma}$ ein N dimens. Ring $\overline{\Sigma}_3$.

Denn ist $a_i^{(n+1)}$ ein $n+1$ dimens. Basiselement von $\overline{\Sigma}$, so ist $R(a_i^{(n+1)})$ ein n dimens. Zyklus von Σ (dem n dimens. Gerüst von $\overline{\Sigma}$), somit ein n dimens. Zyklus von Σ_3, also in $\overline{\Sigma}_3$ enthalten.

Damit ist die Ringeigenschaft von $\overline{\Sigma}$ festgestellt.

Wir behaupten weiter die Identität aller Homologiegruppen der Ringe $\overline{\Sigma}$ und $\overline{\Sigma}_3$,

Zu beweisen ist hier nur die Identität der n^{ten} Homologiegruppen. Nun ist jeder n dimens. Zyklus von $\overline{\Sigma}$ n dimens. Zyklus von $\overline{\Sigma}_3$ und umgekehrt. Ist $C^{(n)} \sim 0$ in $\overline{\Sigma}_3$, so ist er, da $\overline{\Sigma}_3 < \overline{\Sigma}$ sicher homolog Null in $\overline{\Sigma}$. Ist $C^{(n)} \sim 0$ in $\overline{\Sigma}$, so gilt $C^{(n)} = R(k^{(n+1)})$, wo $k^{(n+1)}$ ein $n+1$ dimens. Komplex von $\overline{\Sigma}$, also auch von $\overline{\Sigma}_3$ ist, woraus $C^{(n)} \sim 0$ in $\overline{\Sigma}_3$ folgt, q. e. d.

Bemerkung: Wir erhielten den Ring Σ_3 durch Adjunktion der Elemente (60) zum Basissystem des Ringes Σ_2.

Bei aufmerksamer Lektüre unserer Überlegungen aber überzeugt man sich, daß man aus der Reihe der Elemente (58) jene hätte streichen können, die bereits in Σ_2 homolog Null sind und demzufolge die entsprechenden Elemente der Reihe (60) [13]. Um möglichst wenig n dimens. Komplexe aus (60) adjungieren zu müssen, wird man eine Basisdarstellung (58) der $n-1$ dimens. Zyklen von Σ_r suchen, für die möglichst viele Elemente bereits in Σ_2 homolog Null sind.

Nach unserem Hilfssatz I sind wir in der Lage, ein Basissystem der $n-1$ dimens. Zyklen von Σ_2 aufzustellen, das das Basissystem (58) enthält. Sei

$$(69) \qquad C_{r_1}^{(n-1)},\ C_{r_2}^{(n-1)}, \ldots \qquad C_{r_\alpha}^{(n-1)}\ C_{\alpha+1}^{(n-1)}, \ldots \qquad C_\beta^{(n-1)}$$

dieses Basissystem.

Ferner sei

$$(70) \qquad N_i^{(n-1)} = \gamma_{ji}\, C_j^{(n-1)} \quad (C_j^{(n-1)} = C_{rj}^{(n-1)} \text{ für } j = 1, \ldots \varkappa),$$
$$i = 1, \ldots \varepsilon,\ j = 1, \ldots \beta,$$

ein Basissystem der $n-1$ dimens. Zyklen von Σ_2 homolog Null in Σ_2. Jeder Zyklus von Σ_r, der in $\Sigma_2 \sim 0$ ist, hat dann die Darstellung:

$$(71) \qquad C_r^{(n-1)} = \pi_i N_i^{(n-1)} = \pi_i \gamma_{ji}\, C_j^{(n-1)}; \ i = 1, \ldots \varepsilon,\ j = 1, \ldots \beta.$$

---

[13]) Mit Ausnahme für die n^{te} Homologiegruppe.

Da er in Σ_r liegt, muß

(71′) $\pi_i \gamma_{ji} = 0$ sein, für $i = 1, \ldots \varepsilon$, $j = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots \beta$.

Ist σ der Rang der Matrix $\|\gamma_{ji}\|$, $i = 1, \ldots \varepsilon$, $j = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots \beta$, so gibt es $\gamma = \varepsilon - \sigma$ unabhängige ganzzahlige Lösungssysteme $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\varepsilon$, die eine Basis $\pi_1^{(\tau)}, \pi_2^{(\tau)}, \ldots \pi_\varepsilon^{(\tau)}$, $\tau = 1, \ldots \gamma$, besitzen, so daß dann

$$(72) \qquad Z_{r\tau}^{(n-1)} = \pi_i^{(\tau)} N_i^{(n-1)}, \quad i = 1, \ldots \varepsilon, \quad \tau = 1, \ldots \gamma$$

eine Basis der Zyklen ist von Σ_r, die in Σ_2 homolog Null sind.

Für die Zyklen (72) gilt:

$$(72') \qquad Z_{r\tau}^{(n-1)} = c_{j\tau} C_{rj}^{(n-1)}, \quad \tau = 1, \ldots \gamma, \; j = 1, \ldots \alpha,$$

welches System wir durch unimodulare Transformation der Elemente (72) und (58) in die kanonische Gestalt bringen:

$$(72'') \quad \overline{Z}_{r1}^{(n-1)} = c_1 \overline{C}_{r1}^{(n-1)}, \; \overline{Z}_{r2}^{(n-1)} = c_2 \overline{C}_{r2}^{(n-1)}, \ldots \overline{Z}_{r\gamma}^{(n-1)} = c_\gamma \overline{C}_{r\gamma}^{(n-1)}.$$

Nun lassen wir aber an Stelle des Basissystemes (58) das Basissystem $\overline{C}_{rj}^{(n-1)}$, $j = 1, \ldots \alpha$, treten und in diesem streichen wir alle Elemente $\overline{C}_{rj}^{(n-1)}$, für die $c_j = 1$ ist, denn sie sind bereits in Σ_2 homolog Null.

So können wir z. B., ohne die Homologiegruppen $\rho = 0, 1$ zu ändern, aus der Kugeloberfläche eine Kalotte herausschneiden.

IV. ABSCHNITT.

Es seien Σ_1 und Σ_2 echte n dimens. Teilringe von Σ, deren Basissysteme in einem bestimmten Basissystem von Σ enthalten sind, und weiter soll jeder ρ dimens. Basiskomplex dieses Systems von Σ entweder in Σ_1 oder in Σ_2 oder in Σ_1 und Σ_2 enthalten sein.

Mit Σ_3 bezeichnen wir den Durchschnittring von Σ_1 und Σ_2.

Dann bedeute die symbolische Gleichung:

$$(73) \qquad \Sigma = (\Sigma_1 - \Sigma_3) + (\Sigma_2 - \Sigma_3) + \Sigma_3,$$

daß jeder ρ dimens. Komplex von Σ *eindeutig* spaltbar ist in drei Teilkomplexe, die in $\Sigma_1 - \Sigma_3$, $\Sigma_2 - \Sigma_3$ und in Σ_3 liegen.

Wir ordnen dann jedem ρ dimens. Zyklus von Σ einen $\rho - 1$ dimens. Zyklus von Σ_3 zu: Sei $C^{(\rho)}$ dieser ρ dimens. Zyklus von Σ, so zerlegen wir ihn nach (73) in seine drei Bestandteile: $K_1^{(\varrho)}$ in $\Sigma_1-\Sigma_3$, $K_2^{(\varrho)}$ in $\Sigma_2-\Sigma_3$ und $K_3^{(\varrho)}$ in Σ_3

$$C^{(\varrho)} = K_1^{(\varrho)} + K_2^{(\varrho)} + K_3^{(\varrho)}. \tag{74}$$

$K_3^{(\varrho)}$ spalten wir willkürlich in zwei in Σ_3 liegende Komplexe $K_3^{(\varrho)} = K_{31}^{(\varrho)} + K_{32}^{(\varrho)}$.

Setzen wir dann $K_1^{(\varrho)} + K_{31}^{(\varrho)} = H_1^{(\varrho)}$, $K_2^{(\varrho)} + K_{32}^{(\varrho)} = H_2^{(\varrho)}$, so gilt

(74′) $C^{(\varrho)} = H_1^{(\varrho)} + H_2^{(\varrho)}$, wo $H_1^{(\varrho)}$ in Σ_1 und $H_2^{(\varrho)}$ in Σ_2 liegt.

Randbildung von (74′) ergibt

$$0^{(\varrho-1)} = R(H_1^{(\varrho)}) + R(H_2^{(\varrho)}). \tag{75}$$

Somit ist $C_3^{(\varrho-1)} = R(H_1^{(\varrho)}) = R(-H_2^{(\varrho)})$ ein $\varrho-1$ dimens. Zyklus von Σ_3, der in Σ_1 und in Σ_2 homolog Null ist.

Wir können somit jedem ϱ dimens. Zyklus $C^{(\varrho)}$ von Σ einen $\varrho-1$ dimens. Zyklus $C_3^{(\varrho-1)}$ in Σ_3 zuordnen (für $\varrho > 0$), der in Σ_1 und in Σ_2 homolog Null ist. Diese Zuordnung ist ebenso wie die Spaltung (74′) von $C^{(\varrho)}$ nicht eindeutig.

Sei $C^{(\varrho)} = \overline{H}_1^{(\varrho)} + \overline{H}_2^{(\varrho)}$ eine zweite solche Spaltung, so folgt dann

$H_1^{(\varrho)} - \overline{H}_1^{(\varrho)} = \overline{H}_2^{(\varrho)} - H_2^{(\varrho)} = H_3^{(\varrho)}$, wo $H_3^{(\varrho)}$ ein ϱ dimens. Komplex in Σ_3 ist.

Somit gilt $R(H_1^{(\varrho)}) - R(\overline{H}_1^{(\varrho)}) = R(H_3^{(\varrho)})$, d. h. $C_3^{(\varrho-1)} \sim \overline{C}_3^{(\varrho-1)}$ in Σ_3.

Alle auf obige Weise einem Zyklus $C^{(\varrho)}$ von Σ zugeordneten Zyklen $C_3^{(\varrho-1)}$, $\overline{C}_3^{(\varrho-1)}$, ... gehören einer bestimmten Zyklenklasse von Σ_3 an.

Diese Zyklenklasse hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß jeder ihrer Zyklen homolog Null ist in Σ_1 und in Σ_2.

Die Gesamtheit aller dieser Klassen stellt eine Untergruppe dar der $\varrho-1^{\text{ten}}$ Homologiegruppe von Σ_3, wir bezeichnen sie mit Γ_3.

Ihr Einheitselement ist die Klasse der $\varrho-1$ dimens. Zyklen von Σ_3 homolog Null in Σ_3.

Definition: Wir nennen einen ϱ dimens. Zyklus von Σ einen A-Zyklus, wenn er sich als Summe darstellen läßt eines ϱ dimens. Zyklus von Σ_1 und eines ϱ dimens. Zyklus von Σ_2.

Jeder ρ dimens. Zyklus von Σ homolog Null in Σ ist ein A-Zyklus.

Sei $C^{(\rho)}$ dieser Zyklus, dann gilt $C^{(\rho)} = R(K^{(\rho+1)}) = R(K_1^{(\rho+1)}) + R(K_2^{(\rho+1)})$, wo $K^{(\rho+1)} = K_1^{(\rho+1)} + K_2^{(\rho+1)}$ die Spaltung von $K^{(\rho+1)}$ in einen Komplex von Σ_1 und einen von Σ_2 darstellt. Nun ist $R(K_1^{(\rho+1)}) = C_1^{(\rho)}$ und $R(K_2^{(\rho+1)}) = C_2^{(\rho)}$.

(Wir können demnach die letzte Behauptung schärfer formulieren: Jeder ρ dimens. Zyklus von $\Sigma \sim 0$ in Σ ist als Summe darstellbar eines ρ dimens. Zyklus von $\Sigma_1 \sim 0$ in Σ_1 und eines ρ dimens. Zyklus von $\Sigma_2 \sim 0$ in Σ_2.)

Daraus folgt: Enthält eine Zyklenklasse der ρ^{ten} Homologiegruppe von Σ einen A-Zyklus, so sind alle Elemente A-Zyklen. Eine solche Klasse heiße eine A-Klasse.

Die Gesamtheit der A-Klassen der ρ^{ten} Homologiegruppe von Σ stellt eine Untergruppe dar dieser Gruppe, wir bezeichnen sie mit Γ.

Zerlegen wir die ρ^{te} Homologiegruppe von Σ vermittels dieser Untergruppe, so sei mit F die entsprechende Faktorgruppe bezeichnet.

Jedem ρ—1 dimens. Zyklus $C_3^{(\rho-1)}$ von Σ_3, der in Σ_1 und in Σ_2 homolog Null ist, entspricht stets ein ρ dimens. Zyklus $C^{(\rho)}$, dem er zugeordnet ist.

Denn nach Annahme gibt es in Σ_1 wenigstens einen ρ dimens. Komplex $K_1^{(\rho)}$ und in Σ_2 einen solchen $-K_2^{(\rho)}$, daß

$$C_3^{(\rho-1)} = R(K_1^{(\rho)}) = R(-K_2^{(\rho)}) \text{ ist.}$$

Dann ist $K_1^{(\rho)} + K_2^{(\rho)} = C^{(\rho)}$ ein ρ dimens. Zyklus, dem die Zyklenklasse von Σ_3, die $C_3^{(\rho-1)}$ enthält, zugeordnet ist.

Aber auch die Zuordnung $C_3^{(\rho-1)} \longrightarrow C^{(\rho)}$ ist nicht eindeutig.

Seien $\overline{K}_1^{(\rho)}$ in Σ_1 und $-\overline{K}_2^{(\rho)}$ in Σ_2 zwei weitere ρ dimens. Zyklen, deren Rand $C_3^{(\rho-1)}$ ist. Setzen wir dann $\overline{K}_1^{(\rho)} + \overline{K}_2^{(\rho)} = \overline{C}^{(\rho)}$, so gilt ebenfalls die Zuordnung $C_3^{(\rho-1)} \longrightarrow \overline{C}^{(\rho)}$.

Nun ist $C^{(\rho)} - \overline{C}^{(\rho)} = (K_1^{(\rho)} - \overline{K}_1^{(\rho)}) + (K_2^{(\rho)} - \overline{K}_2^{(\rho)})$.

Da aber $R(K_1^{(\rho)}) = R(\overline{K}_1^{(\rho)})$ und $-R(K_2^{(\rho)}) = -R(\overline{K}_2^{(\rho)})$ gleich $C_3^{(\rho-1)}$ ist, so ist $K_1^{(\rho)} - \overline{K}_1^{(\rho)}$ ein ρ dimens. Zyklus von Σ_1 und $K_2^{(\rho)} - \overline{K}_2^{(\rho)}$ ein solcher von Σ_2.

Daher ist $C^{(\rho)} - \overline{C}^{(\rho)}$ ein A-Zyklus.

Somit entspricht jedem ρ dimens. Zyklus von Σ_3, der in Σ_1 und in Σ_2 homolog Null ist, eine Gesamtheit von ρ dimens. Zyklen in Σ der Eigenschaft, daß die Differenz je zweier Zyklen dieser Gesamtheit ein A-Zyklus ist.

(D. h. diese Gesamtheit ist in einem bestimmten Elemente der Faktorgruppe F enthalten.)

Seien jetzt $C_3^{(\varrho-1)}$ und $\overline{C}_3^{(\varrho-1)}$ zwei Zyklen einer Klasse von Γ_3, d. h. es seien $C_3^{(\varrho-1)}$ und $\overline{C}_3^{(\varrho-1)}$ ρ—1 dimens. Zyklen von Σ_3 homolog Null in Σ_1 und in Σ_2 und $\overline{C}_3^{(\varrho-1)}$ sei in Σ_3 $C_3^{(\varrho-1)}$ homolog.

Dann gilt $$C_3^{(\varrho-1)} = R(K_1^{(\varrho)}) = R(-K_2^{(\varrho)})$$

$$\overline{C}_3^{(\varrho-1)} = R(\overline{K}_1^{(\varrho)}) = R(-\overline{K}_2^{(\varrho)}) \text{ nach Annahme.}$$

Also folgt für die zugeordneten ρ dimens. Zyklen von Σ $(C^{(\varrho)} = K_1^{(\varrho)} + K_2^{(\varrho)},\ \overline{C}^{(\varrho)} = \overline{K}_1^{(\varrho)} + \overline{K}_2^{(\varrho)})$:

$$C^{(\varrho)} - \overline{C}^{(\varrho)} = (K_1^{(\varrho)} - \overline{K}_1^{(\varrho)}) + (K_2^{(\varrho)} - \overline{K}_2^{(\varrho)}).$$

Da weiter $C_3^{(\varrho-1)} \backsim \overline{C}_3^{(\varrho-1)}$ in Σ_3 vorausgesetzt wurde, so gilt

$$R(K_1^{(\varrho)} - \overline{K}_1^{(\varrho)}) = R(K_3^{(\varrho)}) \text{ resp. } R(-K_2^{(\varrho)} + \overline{K}_2^{(\varrho)}) = R(K_3^{(\varrho)}).$$

Somit folgt

$$C^{(\varrho)} - \overline{C}^{(\varrho)} = (K_1^{(\varrho)} - \overline{K}_1^{(\varrho)} - K_3^{(\varrho)}) + (K_2^{(\varrho)} - \overline{K}_2^{(\varrho)} + K_3^{(\varrho)}) = C_1^{(\varrho)} + C_2^{(\varrho)}.$$

Es entsprechen also den ρ—1 dimens. Zyklen einer Klasse von Γ_3 ρ dimens. Zyklen in Σ, die alle in einem Elemente der Faktorgruppe F enthalten sind.

Seien umgekehrt $C^{(\varrho)}$ und $\overline{C}^{(\varrho)}$ zwei dimens. Zyklen von Σ, die zu einem Elemente dieser Faktorgruppe F gehören.

Dann gilt nach Annahme $C^{(\varrho)} - \overline{C}^{(\varrho)} = C_1^{(\varrho)} + C_2^{(\varrho)}$, wo $C_1^{(\varrho)}$ in Σ_1 und $C_2^{(\varrho)}$ in Σ_2 liegt.

Nun sei $C^{(\varrho)}$ und $\overline{C}^{(\varrho)}$ in Bestandteile von Σ_1 und Σ_2 zerlegt:

$$C^{(\varrho)} = K_1^{(\varrho)} + K_2^{(\varrho)}, \qquad \overline{C}^{(\varrho)} = \overline{K}_1^{(\varrho)} + \overline{K}_2^{(\varrho)}.$$

Dann gilt die Zuordnung

$$C^{(\varrho)} \longrightarrow R(K_1^{(\varrho)}) = R(-K_2^{(\varrho)}), \quad \overline{C}^{(\varrho)} \longrightarrow R(\overline{K}_1^{(\varrho)}) = R(-\overline{K}_2^{(\varrho)}).$$

Aus $(K_1^{(\varrho)} - \overline{K}_1^{(\varrho)}) + (K_2^{(\varrho)} - \overline{K}_2^{(\varrho)}) = C_1^{(\varrho)} + C_2^{(\varrho)}$ schließen wir $K_1^{(\varrho)} - \overline{K}_1^{(\varrho)} - C_1^{(\varrho)} = -K_2^{(\varrho)} + \overline{K}_2^{(\varrho)} + C_2^{(\varrho)} = K_3^{(\varrho)}$, wo $K_3^{(\varrho)}$ ein ρ dimens. Komplex von Σ_3 ist. Randbildung hat dann

$$R(K_1^{(\varrho)}) - R(\overline{K}_1^{(\varrho)}) = R(K_3^{(\varrho)}) \text{ zur Folge, d. h.}$$

$$R(K_1^{(\varrho)}) \backsim R(\overline{K}_1^{(\varrho)}) \text{ in } \Sigma_3.$$

Den ρ dimens. Zyklen eines Elementes der Faktorgruppe F entsprechen somit $\rho-1$ dimens. Zyklen von Σ_3, die in einem Elemente der Gruppe Γ_3 liegen.

Aus den beiden letzten Resultaten folgt dann:

Die Elemente der Faktorgruppe F und der Gruppe Γ_3 entsprechen einander ein-eindeutig.

Da noch aus $C^{(\varrho)} \longrightarrow C_3^{(\varrho-1)}$ und $\overline{C}^{(\varrho)} \longrightarrow \overline{C}_3^{(\varrho-1)}$

$$C^{(\varrho)} + \overline{C}^{(\varrho)} \longrightarrow C_3^{(\varrho-1)} + \overline{C}_3^{(\varrho-1)} \text{ folgt, so gilt der Satz:}$$

Die Gruppen F und Γ_3 sind einstufig isomorph bezogen.

Wir wollen nun eine Relation herstellen zwischen den Bettischen Zahlen der Ringe Σ_1, Σ_2, Σ_3 und Σ.

Wir haben bereits festgestellt, daß jeder ρ dimens. Zyklus in Σ homolog Null in Σ sich als Summe darstellen läßt eines ρ dimens. Zyklus in Σ_1 homolog Null in Σ_1 und eines ρ dimens. Zyklus in Σ_2 homolog Null in Σ_2.

Ist demnach

(76) $N_1^{(\varrho)}, N_2^{(\varrho)}, \ldots N_{\mu_\varrho}^{(\varrho)}$ eine Basis der ρ dimens. Zyklen von $\Sigma_1 \backsim 0$ in Σ_1

und

(76′) $M_1^{(\varrho)}, M_2^{(\varrho)}, \ldots M_{\nu_\varrho}^{(\varrho)}$ eine Basis der ρ dimens. Zyklen von $\Sigma_2 \backsim 0$ in Σ_2,

so ist jeder ρ dimens. Zyklus in Σ homolog Null in Σ durch die Größen der Reihen (76) und (76′) linear darstellbar.

Weiter können wir nach Hilfsatz I eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ_1 und eine solche der ρ dimens. Zyklen von Σ_2 bilden, die ganz eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ_3 enthalten.

Es sei

(77) $C_1^{(\varrho)}, C_2^{(\varrho)}, \ldots C_{\beta_\varrho}^{(\varrho)}$ diese Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ_3,

(77′) $C_1^{(\varrho)}, \ldots C_{\beta_\varrho}^{(\varrho)}, C_{\beta_\varrho+1}^{(\varrho)}, \ldots C_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}$ die betreffende der ϱ dimens. Zyklen von Σ_1 und

(77″) $\overline{C}_1^{(\varrho)}, \ldots \overline{C}_{\beta_\varrho}^{(\varrho)}, \overline{C}_{\beta_\varrho+1}^{(\varrho)}, \ldots \overline{C}_{\varepsilon_\varrho}^{(\varrho)}$ die betreffende der ϱ dimens.

Zyklen von Σ_2, wo $\overline{C}_k^{(\varrho)} = C_k^{(\varrho)}$ für $k = 1, \ldots \beta_\varrho$ ist.

Dann gilt

$$(78) \quad \begin{cases} N_j^{(\varrho)} = a_{jk}^{(\varrho)} \; C_k^{(\varrho)}, \; j = 1, \ldots u_\varrho, \; k = 1, \ldots \alpha_\varrho \\ M_h^{(\varrho)} = b_{hl}^{(\varrho)} \; \overline{C}_l^{(\varrho)}, \; h = 1, \ldots v_\varrho, \; l = 1, \ldots \varepsilon_\varrho. \end{cases}$$

Die ϱ dimens. Zyklen $N_j^{(\varrho)}$ und $M_h^{(\varrho)}$ sind nun im allgemeinen nicht linear unabhängig.

Aus

$$(79) \qquad p_j \, N_j^{(\varrho)} + q_h \, M_h^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)}, \; j = 1, \ldots u_\varrho, \; h = 1, \ldots v_\varrho,$$

folgt nach (78), da die Zyklen

$$(80) \qquad C_1^{(\varrho)}, C_2^{(\varrho)}, \ldots C_{\beta_\varrho}^{(\varrho)}, C_{\beta_\varrho+1}^{(\varrho)}, \ldots C_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)}, \overline{C}_{\beta_\varrho+1}^{(\varrho)}, \ldots \overline{C}_{\varepsilon_\varrho}^{(\varrho)}$$

linear unabhängig sind[14]), das System:

$$(81) \quad \begin{cases} p_j \; a_{jk}^{(\varrho)} + q_h \; b_{hk}^{(\varrho)} = 0, \; k = 1, \ldots \beta_\varrho \\ p_j \; a_{js}^{(\varrho)} \qquad\qquad = 0, \; s = \beta_\varrho + 1, \ldots \alpha_\varrho, \\ \qquad\qquad q_h \; b_{ht}^{(\varrho)} = 0, \; t = \beta_\varrho + 1, \ldots \varepsilon_\varrho. \\ \qquad j = 1, \ldots u_\varrho, \; h = 1, \ldots v_\varrho. \end{cases}$$

---

[14]) Lineare Abhängigkeit der Elemente von (80) hätte $\sum_{h\,1}^{\alpha_\varrho} a_h \, C_h^{(\varrho)} = \sum_{t=\beta_\varrho+1}^{\varepsilon_\varrho} b_t \, \overline{C}_t^{(\varrho)}$ zur Folge. Aus dieser Relation folgt, daß der Zyklus $\left\{\begin{matrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{matrix}\right.$ in Σ_1 und Σ_2, also in Σ_3 liegen müßte. Demnach gälte $\sum_{t=\beta_\varrho+1}^{\varepsilon_\varrho} b_t \; \overline{C}_t^{(\varrho)} = \sum_{j=1}^{\beta_\varrho} c_j \; \overline{C}_j^{(\varrho)}$, was, da (77″) eine Basis ist, $b_t = 0$, $t = \beta_\varrho+1, \ldots \varepsilon_\varrho$, zur Folge hat. Damit aber gilt $\sum_{h=1}^{\alpha_\varrho} a_h \; C_h^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)}$, was $a_h = 0$, $h = 1, \ldots \alpha_\varrho$ zur Folge hat.

Sei σ_ϱ der Rang des Systemes (81), $\sigma_\varrho \leq u_\varrho + v_\varrho$, so gibt es genau $u_\varrho + v_\varrho - \sigma_\varrho$ unabhängige Relationen (79), d. h. von den $u_\varrho + v_\varrho$ Zyklen $N_j^{(\varrho)}$, $M_h^{(\varrho)}$ sind $(u_\varrho + v_\varrho) - (u_\varrho + v_\varrho - \sigma_\varrho) = \sigma_\varrho$ linear unabhängig.

Wir erhalten auch sofort eine Basis der ρ dimens. Zyklen in Σ homolog Null in Σ, wenn wir durch unimodulare Transformationen der Elemente (80) und der $N_j^{(\varrho)}$ und $M_h^{(\varrho)}$ das System (78) in kanonische Form bringen.

Bezeichnen wir mit $\dot{C}_1^{(\varrho)}$, $\dot{C}_2^{(\varrho)}$, ... $\dot{C}^{(\varrho)}_{\alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho}$ das neue Basissystem (80) und mit $\dot{N}_1^{(\varrho)}$, $\dot{N}_2^{(\varrho)}$, ... $\dot{N}^{(\varrho)}_{u_\varrho + v_\varrho}$ das unimodular transformierte System der $N_j^{(\varrho)}$ und $M_h^{(\varrho)}$, so tritt an Stelle (78):

$$\dot{N}_i^{(\varrho)} = c_i \, \dot{C}_i^{(\varrho)}, \quad i = 1, \ldots \sigma_\varrho, \quad c_i \neq 0, \tag{82}$$

wogegen $\dot{N}^{(\varrho)}_{\sigma_\varrho + \tau} = 0^{(\varrho)}$ ist, für $\tau = 1, 2, \ldots$

Da sich aber jeder ρ dimens. Zyklus von Σ homolog Null in Σ durch die $\dot{N}_i^{(\varrho)}$, $i = 1, \ldots u_\varrho + v_\varrho$, ausdrücken läßt und $\dot{N}^{(\varrho)}_{\sigma_\varrho + \tau} = 0^{(\varrho)}$ ist, so ist

$$\dot{N}_1^{(\varrho)}, \qquad \dot{N}_2^{(\varrho)}, \qquad \dot{N}^{(\varrho)}_{\sigma_\varrho} \tag{83}$$

eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ homolog Null in Σ.

Somit ist σ_ϱ die Basiszahl der ρ dimens. Zyklen in Σ homolog Null in Σ.

Wir schreiben die Relation (79) in der Form:

$$\Gamma^{(\varrho)} = p_j \, N_j^{(\varrho)} = - q_h \, M_h^{(\varrho)}, \quad j = 1, \ldots u_\varrho, \quad h = 1, \ldots v_\varrho. \tag{84}$$

$\Gamma^{(\varrho)}$ ist der allgemeinste ρ dimens. Zyklus, der in Σ_1 und Σ_2, also in Σ_3 liegt und in Σ_1 und Σ_2 homolog Null ist (d. h. das allgemeinste Element einer Klasse von Γ_3).

Aus (81) gewinnt man ein Basissystem aller ganzzahligen Lösungssysteme von (81):

$$_{(t)}p_1, \; _{(t)}p_2, \; \ldots \; _{(t)}p_{u_\varrho}, \; _{(t)}q_1, \; q_{(t)2}, \; \ldots \; _{(t)}q_{v_\varrho} \tag{85}$$

$t = 1, 2, \ldots u_\varrho + v_\varrho - \sigma_\varrho$ und entsprechend ist

$$_{(t)}\Gamma^{(\varrho)} = {}_{(t)}p_j \, N_j^{(\varrho)} = - {}_{(t)}q_h \, M_h^{(\varrho)}, \; j = 1, \ldots u_\varrho, \; h = 1, \ldots v_\varrho \tag{86}$$

eine Basis der ρ dimens. Zyklen von Σ_3, die in Σ_1 und Σ_2 homolog Null sind.

Bezeichnen wir mit τ_ϱ die Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von Σ_3 homolog Null in Σ_1 und Σ_2, so gilt:

$$\tau_\varrho = u_\varrho + v_\varrho - \sigma_\varrho. \tag{87}$$

Die Differenz: Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von Σ_1 $\backsim 0$ in Σ_1 plus Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von Σ_2 $\backsim 0$ in Σ_2 minus Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von Σ $\backsim 0$ in Σ ist gleich der Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von Σ_3 homolog Null in Σ_1 und Σ_2.

Es sei nun

$$_{(t)}\Gamma^{(\varrho-1)}, \quad t = 1, \ldots \tau_{\varrho-1} \tag{86'}$$

eine Basis der $\rho-1$ dimens. Zyklen von Σ_3 homolog Null in Σ_1 und Σ_2 und

$$_{(s)}P^{(\varrho-1)}, \quad s = 1, \ldots w_{\varrho-1} \tag{86''}$$

eine Basis der $\rho-1$ dimens. Zyklen von Σ_3 homolog Null in Σ_3.

Dann gilt:

$$_{(s)}P^{(\varrho-1)} = d_{st}^{(\varrho-1)} \; _{(t)}\Gamma^{(\varrho-1)}, \quad s = 1, \ldots w_{\varrho-1}, \quad t = 1, \ldots \tau_{\varrho-1}, \tag{88}$$

denn jeder $\rho-1$ dimens. Zyklus $\backsim 0$ in Σ_3 ist natürlich auch $\backsim 0$ in Σ_1 und Σ_2.

Das System (88) bringen wir durch unimodulare Transformation der Elemente (86′) und (86″) in die kanonische Form:

$$_{(1)}\dot{P}^{(\varrho-1)} = d_1 \; _{(1)}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)}, \; \ldots \; _{(w_{\varrho-1})}\dot{P}^{(\varrho-1)} = d_{w_{\varrho-1}} \; _{(w_{\varrho-1})}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)} \tag{88'}$$

(88′) sind dann die definierenden Relationen der Elemente der Gruppe Γ_3 in bezug auf die Basis

$$_{(t)}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)}, \quad t = 1, \ldots \tau_{\varrho-1}. \tag{89}$$

Sei nun

$$_{(t)}\Gamma^{(\varrho)}, \quad t = 1, \ldots \tau_{\varrho-1} \tag{90}$$

der dem $\rho-1$ dimens. Zyklus $_{(t)}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)}$ $\backsim 0$ in Σ_1 und Σ_2 zugeordnete ρ dimens. Zyklus von Σ.

Adjungiert man diese $\tau_{\varrho-1}$ Elemente zu den $\alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho$ Elementen der Reihe (80), so erhält man $\alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1}$ ρ dimens. Zyklen in Σ der Eigenschaft, daß jeder ρ dimens. Zyklus in Σ durch sie linear darstellbar ist.

Denn sei $C^{(\varrho)}$ ein beliebiger ϱ dimens. Zyklus in Σ und $C_3^{(\varrho-1)}$ der ihm zugeordnete $\varrho-1$ dimens. Zyklus in Σ_3, der also in Σ_1 und Σ_2 homolog Null ist, so gilt

$$C_3^{(\varrho-1)} = a_t \;{}_{(t)}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)},\ t = 1, \dots \tau_{\varrho-1}.$$

Dem Zyklus $a_{t\,(t)}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)}$ sind dann in Σ der Zyklus $C^{(\varrho)}$ und auch der Zyklus $a_{t\,(t)}\Gamma^{(\varrho)}$ zugeordnet. Somit ist

$$C^{(\varrho)} - a_{t\,(t)}\Gamma^{(\varrho)},\ t = 1, \dots \tau_{\varrho-1}$$

ein A-Zyklus und somit durch die Elemente der Reihe (80) linear darstellbar. Aber diese $\alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1}$ ϱ dimens. Zyklen sind nicht linear unabhängig. Denn aus (88′) folgt, daß

$$d_{s\,(s)}\Gamma^{(\varrho)},\ s = 1, \dots w_{\varrho-1},\ \text{über } s \text{ nicht summiert}$$

für jedes $s = 1, \dots w_{\varrho-1}$, ein A-Zyklus ist. Daher gilt:

(91) $$d_{s\,(s)}\Gamma^{(\varrho)} = b_{sh}\, C_h^{(\varrho)},\ h = 1, 2, \dots \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho,\ \ s = 1, \dots w_{\varrho-1}$$

[in (91) haben wir die Zyklen der Reihe (80) fortlaufend numeriert].

Umgekehrt folgt aus $\sum\limits_{t=1}^{\tau_{\varrho-1}} p_{t\,(t)}\Gamma^{(\varrho)} = \sum\limits_{h=1}^{\alpha_\varrho+\varepsilon_\varrho-\beta_\varrho} c_h\, C_h^{(\varrho)}$, die Relation $\sum\limits_{t=1}^{\tau_{\varrho-1}} p_{t\,(t)}\dot{\Gamma}^{(\varrho-1)} \backsim 0$ in Σ_3, demnach nach (88′)

$$p_t = q_t\, d_t \text{ (über } t \text{ nicht summiert)},\ t = 1, \dots w_{\varrho-1},$$
$$p_t = 0,\ t > w_{\varrho-1}.$$

Somit sind (91) die einzigen Beziehungen zwischen $\alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1}$ ϱ dimens. Zyklen und sie sind [man beachte die Matrix (91)] linear unabhängig. Bezeichnen wir nun fortlaufend numerierend mit $C_h^{(\varrho)}$, $h = 1, 2, \dots \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1}$ diese ϱ dimens. Zyklen, so hat das System (91) die Gestalt:

(92) $$c_{hs}\, C_h^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)},\ s = 1, \dots w_{\varrho-1},\ h = 1, \dots \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1}.$$

Durch unimodulare Transformation der $C_h^{(\varrho)}$ bringen wir (92) in die kanonische Form:

(93) $$c_1\, \dot{C}_1^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)},\ c_2\, \dot{C}_2^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)}, \dots\ c_{w_{\varrho-1}}\, \dot{C}_{w_{\varrho-1}}^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)},$$

woraus, da die c_i, $i = 1, \ldots w_{\varrho-1}$, von Null verschieden sind:

(93′) $$\dot{C}_s^{(\varrho)} = 0^{(\varrho)},\ s = 1, \ldots w_{\varrho-1} \text{ folgt.}$$

Somit ist

(94) $$\dot{C}_h^{(\varrho)},\ h = w_{\varrho-1} + 1, \ldots \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1}$$

ein System von ρ dimens. Zyklen von Σ, zwischen denen es keine lineare Beziehung mehr gibt, und durch das jeder ρ dimens. Zyklus linear darstellbar ist. (94) ist somit ein Basissystem der ρ dimens. Zyklen von Σ.

Da $\sigma_\varrho = u_{(\varrho)} + v_\varrho - \tau_\varrho$ die Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von Σ homolog Null in Σ ist, so ist $h_{\varrho(\Sigma)}$, die ρ^{te} Bettische Zahl von Σ

$$h_{\varrho(\Sigma)} = \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho + \tau_{\varrho-1} - w_{\varrho-1} - u_{(\varrho)} - v_\varrho + \tau_\varrho.$$

Mit γ_ϱ bezeichnen wir die Differenz $\tau_\varrho - w_\varrho$, d. i. die Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von $\Sigma_3 \sim 0$ in Σ_1 und in Σ_2 minus der Basiszahl der ρ dimens. Zyklen von $\Sigma_3 \sim 0$ n Σ_3.

(95) $$\gamma_\varrho = \tau_\varrho - w_\varrho.$$

Dann gilt

$$h_{\varrho(\Sigma)} = (\alpha_\varrho - \mu_\varrho) + (\varepsilon_\varrho - v_\varrho) - (\beta_\varrho - w_\varrho) + (\tau_\varrho - w_\varrho) + (\tau_{\varrho-1} - w_{\varrho-1}),$$

also

(96) $$\boxed{h_{\varrho(\Sigma)} = h_{\varrho(\Sigma_1)} + h_{\varrho(\Sigma_2)} - h_{\varrho(\Sigma_3)} + \gamma_\varrho + \gamma_{\varrho-1}.}$$

In (96) bedeutet $h_{\varrho(\Sigma_i)}$ die ρ^{te} Bettische Zahl des Ringes Σ_i, $i = 1, 2, 3$.

Bemerkung: Die Formel (96) gilt, wenn man $\gamma_{-1} = 0$ setzt, auch für $\rho = 0$.

Denn ist α_0 die Basiszahl der 0 dimens. Zyklen von Σ_1

ε_0	„ „ „ „ „ „ „	Σ_2
β_0	„ „ „ „ „ „ „	Σ_3, so ist
$\alpha_0 + \varepsilon_0 - \beta_0$	„ „ „ „ „ „ „	Σ und
$\sigma_0 = \mu_0 + v_0 - \tau_0$	„ „ „ „ „ „ „	$\Sigma \sim 0$ in Σ.

Somit ist

$$h_{0(\Sigma)} = (\alpha_0 - \mu_0) + (\varepsilon_0 - v_0) - (\beta_0 - w_0) + (\tau_0 - w_0)$$
$$= h_{0(\Sigma_1)} + h_{0(\Sigma_2)} - h_{0(\Sigma_3)} + \gamma_0.$$

Neben $\gamma_{-1} = 0$ ist auch $\gamma_n = 0$, da es ja im n dimens. Ringe Σ keine n dimens. Zyklen homolog Null gibt.

Beispiel: Zwei gebogene Röhrenflächen Σ_1 und Σ_2 seien laut Figur übereinandergestülpt. Sie bilden zusammen die Ringfläche Σ. Σ_3 besteht hier aus zwei getrennten Röhrenstücken.

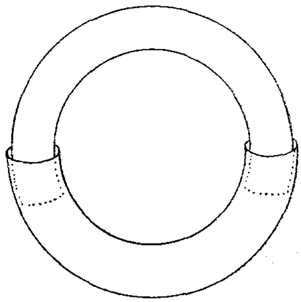

Fig. 3.

Es ist hier:
$$h_{2(\Sigma)} = 1,\ h_{2(\Sigma_1)} = h_{2(\Sigma_2)} = h_{2(\Sigma_3)} = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 = 1$$
$$h_{1(\Sigma)} = 2,\ h_{1(\Sigma_1)} = h_{1(\Sigma_2)} = 1,\ h_{1(\Sigma_3)} = 2, \gamma_1 = 1, \quad \gamma_0 = 1$$
$$h_{0(\Sigma)} = 1,\ h_{0(\Sigma_1)} = h_{0(\Sigma_2)} = 1,\ h_{0(\Sigma_3)} = 2, \gamma_0 = 1, \gamma_{-1} = 0.$$

Bemerkung: Die Relation (96) hätten wir auch folgendermaßen herleiten können. Es sei G eine kommutative Gruppe und A eine Untergruppe von G. Wir zerlegen G mittels A in Nebengruppen

$$G = (A + h_0) + (A + h_1) + (A + h_2) + \ldots,$$

die als Elemente betrachtet eine Gruppe, die Faktorgruppe von G in bezug auf A, bilden.

Es sei nun A (d. h. die Elemente von A) darstellbar durch α Elemente

$$a_1,\ a_2, \ldots a_\alpha,$$

zwischen denen α_1 definierende Relationen

$$c_{pi} a_i = 0,\ p = 1, \ldots \alpha_1, \text{ bestehen mögen.}$$

Desgleichen sei die Faktorgruppe durch β Elemente darstellbar

$$A + h_1,\ A + h_2, \ldots A + h_\beta,$$

mit β_1 definierenden Relationen

$$d_{qj}(A + b_j) = 0,\ q = 1, \ldots \beta_1.$$

Wir behaupten dann, daß die Elemente von G durch $\alpha + \beta$ Elemente darstellbar sind, zwischen denen $\alpha_1 + \beta_1$ definierende Relationen bestehen.

Beweis: Irgend ein Element von G ist in einer Nebengruppe enthalten und hat daher die Form $\tilde{a} + \tilde{h}$. Für $A + \tilde{h}$ gilt die Darstellung

$$A + \tilde{h} = e_i(A + h_i) \quad i = 1, \dots \beta$$

Nehmen wir in $A + h_i$ das beliebige Element $\bar{a}_i + h_i$ (z. B. $0 + h_i = h_i$), so ist $\sum_{i=1}^{\beta} e_i(\bar{a}_i + h_i)$ sicher in $A + \tilde{h}$ enthalten, also gleich $\tilde{\tilde{a}} + \tilde{h}$.

Ferner ist $(\tilde{a} + \tilde{h}) - (\tilde{\tilde{a}} + \tilde{h}) = \tilde{a} - \tilde{\tilde{a}} = \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i a_i$, also

$$\tilde{a} + \tilde{h} = \sum_{i=1}^{\alpha} \pi_i a_i + \sum_{i=1}^{\beta} e_i(\bar{a}_i + h_i).$$

Da aber $\bar{a}_i$ durch die a_i selbst linear darstellbar ist, so folgt hieraus, daß jedes Element von G durch die $\alpha + \beta$ Elemente a_i und h_i linear darstellbar ist. Zwischen diesen $\alpha + \beta$ Elementen bestehen als Relationen:

$c_{pi} a_i = 0$, $p = 1, \dots \alpha_1$

$d_{qj}(\bar{a}_j + h_j) =$ Nullelement, d. h. Element von $A = \tilde{f}_{qt} a_t$, oder $d_{qj} h_j = f_{qt} a_t$, $q = 1, \dots \beta_1$., q. e. d.

In unserem Fall ist G die ρ^{te} Homologiegruppe von Σ, A die Gruppe Γ und F die Faktorgruppe.

Daher ist $\alpha = \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho$, $\alpha_1 = \sigma_\varrho$, $\beta = \tau_{\varrho-1}$, $\beta_1 = w_{\varrho-1}$.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - \alpha_1 - \beta_1 &= \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho - \sigma_\varrho + \gamma_{\varrho-1}, \quad (\tau_{\varrho-1} - w_{\varrho-1} = \gamma_{\varrho-1}) \\ &= \alpha_\varrho + \varepsilon_\varrho - \beta_\varrho - \mu_\varrho - v_\varrho + \tau_\varrho + \gamma_{\varrho-1} \\ &= (\alpha_\varrho - \mu_\varrho) + (\varepsilon_\varrho - v_\varrho) - (\beta_\varrho - w_\varrho) + (\tau_\varrho - w_\varrho) + \gamma_{\varrho-1} \\ &= h_{\varrho(\Sigma_1)} + h_{\varrho(\Sigma_2)} - h_{\varrho(\Sigma_3)} + \gamma_\varrho + \gamma_{\varrho-1}. \end{aligned}$$

(Eingegangen: 16. XI. 1927.)