

Abstrakte Topologie II.

Von Walther Mayer in Wien.

I. ABSCHNITT.

Die vorliegende Abhandlung ist eine Weiterführung der Arbeit über „Abstrakte Topologie“, Monatshefte, Band XXXVI.

Im ersten Abschnitte erkläre ich den Begriff des offenen Ringes und leite einige Sätze ab, Unterringe von Nullringen betreffend.

Der zweite Abschnitt behandelt die simplizialen Ringe, er ist rein kombinatorisch aufgebaut.

Den in meiner Arbeit über „Abstrakte Topologie“ skizzierten Beweis des verallgemeinerten Poincaréschen Dualitätssatzes bringe ich für kombinatorische Mannigfaltigkeiten ohne Bezugnahme auf geometrische Simplexe (§ 5, § 6 und § 8).

§ 1. Das offene Komplement eines Unterringes $\Sigma_1^{(m)}$ des Ringes $\Sigma^{(n)}$.

$\Sigma_1^{(m)}$ sei ein Unterring von $\Sigma^{(n)}$, $\Sigma_1^{(m)} < \Sigma^{(n)}$, dessen Basissystem ein Teilsystem eines bestimmten Basissystems von $\Sigma^{(n)}$ ist.

Streicht man aus diesem Basissystem von $\Sigma^{(n)}$

$$(1) \quad a_i^{(e)}, i = 1, \dots, \alpha_e, \rho = 0, 1, \dots, n$$

das Teilbasissystem der Basiselemente von $\Sigma_1^{(m)}$, so bleibt ein Restsystem S , das im allgemeinen noch nicht das Basissystem eines Ringes ist, da ja mit $a_i^{(e)} < S$ (d. h. $a_i^{(e)}$ Komplex von S) nicht $R(a_i^{(e)}) < S$ gelten muß.

Wir wollen nun aus den Elementen von S allein durch Abänderung der Randoperation $R(\)$ einen Ring bilden. Diesen Vorgang wollen wir das Öffnen des Ringes $\Sigma^{(n)}$ in bezug auf den Unterring $\Sigma_1^{(m)}$ nennen, den gewonnenen Ring das offene Komplement von $\Sigma_1^{(m)}$ in $\Sigma^{(n)}$.

Sei $K^{(e)}$ ein Komplex in $\Sigma^{(n)}$, $K^{(e)} < \Sigma^{(n)}$, so denken wir uns ihn durch die Basis (1) dargestellt. Er zerfällt dann in zwei Komplexe:

$$(1) \quad K_1^{(q)} < \Sigma_1^{(m)} \text{ und } \dot{K}^{(q)},$$

wo $\dot{K}^{(q)}$ der Teilkomplex von $K^{(q)}$ ist, der durch die Elemente S allein aufgebaut wird. Diesen Tatbestand soll die Relation ausdrücken:

$$(2) \quad K^{(q)} \equiv \dot{K}^{(q)} \pmod{\Sigma_1^{(m)}},$$

die zwei Komplexe für kongruent modulo $\Sigma_1^{(m)}$ erklärt, sobald ihre Differenz $K^{(q)} - \dot{K}^{(q)}$ in $\Sigma_1^{(m)}$ liegt. Wir ordnen auf solche Weise jedem Komplex $K^{(q)}$ in $\Sigma^{(m)}$ einen bestimmten Komplex aus S zu, den wir $\dot{K}^{(q)}$ bezeichnen. Wir nennen das einen Komplex „punktieren“.

Die Operation „Punktierung“ löscht jeden Komplex von $\Sigma_1^{(m)}$ und läßt nur die aus S aufgebauten Komplexe ungeändert:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{K}^{(q)} = 0^{(q)}, & \text{wenn } K^{(q)} < \Sigma_1^{(m)} \\ \dot{K}^{(q)} = K^{(q)}, & \text{,, } K^{(q)} < S. \end{cases}$$

Sei $K^{(q)}$ ein Komplex aus S , sein Rand $R(K^{(q)})$ gehört im allgemeinen nicht zu S , wohl aber der punktierte: $\dot{R}(K^{(q)})$.

Dermaßen ist jedem ρ dimensionalen Komplex $K^{(q)}$ aus S wohl ein $\rho-1$ dimensionaler Komplex in bestimmter Weise zugeordnet; ob wir in $\dot{R}(\)$ aber schon eine brauchbare Randoperation haben, d. h. ob S in bezug auf die Operation $\dot{R}(\)$ einen Ring mit $\dot{R}(\)$ als Randoperation bildet, hängt davon ab, ob $\dot{R}(\dot{R}(\)) = 0$ erfüllt ist.

Das trifft nun aber zu als eine Folge der Ringeigenschaft von $\Sigma_1^{(m)}$.

Aus dieser gewinnen wir als erstes:

$$(4) \quad R(K^{(q)}) = \dot{R}(\dot{K}^{(q)}).$$

In der Tat ist ja $K^{(q)} = K_1^{(q)} + \dot{K}^{(q)}$, wo $K_1^{(q)} < \Sigma_1^{(m)}$, also

$$(4') \quad R(K^{(q)}) = R(K_1^{(q)}) + R(\dot{K}^{(q)}).$$

Da $R(K_1^{(q)}) < \Sigma_1^{(m)}$, erhalten wir (4) durch Punktierung von (4')

Sei nun $K^{(q)}$ ein Komplex aus S , aus

$$(5) \quad R(R(K^{(q)})) = 0^{(q-2)}$$

folgt

$$\dot{R}(R(K^{(q)})) = 0^{(q-2)}, \text{ also gilt wegen (4)}$$

$$(6) \quad \dot{R}(\dot{R}(K^{(q)})) = 0^{(q-2)},$$

womit die Ringeigenschaft von S , dem offenen Komplement von $\Sigma_1^{(n)}$ in $\Sigma^{(n)}$ nachgewiesen ist.

§ 2. Der Zusammenhang der Homologiegruppen von $\Sigma_1^{(n)}$ und seinem offenen Komplement in einem Nullring $\Sigma^{(n)}$.

$\Sigma^{(n)}$ sei ein Nullring, d. h. ein Ring, dessen Zyklen $C^{(q)}$ für $0 < q < n$ homolog Null sind. $\Sigma_1^{(n)}$ sei ein echter n -dimensionaler Unterring, $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ sein offenes Komplement. (Ist $\Sigma^{(n)}$ und $\Sigma_1^{(n)}$ homogen, so ist $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ das Komplement von $\Sigma_1^{(n)}$ in $\Sigma^{(n)}$, ebenfalls homogen [siehe „abstrakte Topologie“] und Σ_r , der gemeinsame Randring von $\Sigma_1^{(n)}$, $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$, der Durchschnitt dieser beiden Ringe. Öffnet man $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ in bezug auf seinen Randring Σ_r , so erhält man genau $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$.)

Es sei jetzt $C_1^{(q)}$ ein q dimensionaler Zyklus in $\Sigma_1^{(n)}$. Wir setzen ein für allemal voraus: $0 < q < n - 1$. Da $C_1^{(q)} < \Sigma^{(n)}$ und $\Sigma^{(n)}$ ein Nullring ist, so gilt:

$$(1) \quad C_1^{(q)} = R(K_1^{(q+1)} + K_2^{(q+1)}) = R(K_1^{(q+1)}) + R(K_2^{(q+1)}),$$

wo $K_1^{(q+1)} < \Sigma_1^{(n)}$, $K_2^{(q+1)} < \dot{\Sigma}_2^{(n)}$.

Die Zerlegung eines Komplexes von $\Sigma^{(n)}$ in zwei Teilkomplexe, deren einer $\Sigma_1^{(n)}$, deren anderer $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ angehört, geschieht in eindeutig bestimmter Weise, da ja jedes Basiselement (1) § 1 von $\Sigma^{(n)}$ entweder zu $\Sigma_1^{(n)}$ oder zu $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ gehört.

Durch Punktierung von (1) erhalten wir, da $\dot{C}_1^{(q)} = 0^{(q)}$ und $\dot{R}(K_1^{(q+1)}) = 0^{(q)}$ ist,

$$(1') \quad \dot{R}(K_2^{(q+1)}) = 0^{(q)}.$$

Es ist so, wenn auch nicht eindeutig, eine Zuordnung der $q + 1$ dimensionalen Zyklen $K_2^{(q+1)}$ aus $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ zu den q -dimensionalen Zyklen aus $\Sigma_1^{(n)}$ hergestellt:

$$(2) \quad C_1^{(q)} \rightarrow K_2^{(q+1)}, \quad C_1^{(q)} < \Sigma_1^{(n)}, \quad K_2^{(q+1)} < \dot{\Sigma}_2^{(n)}.$$

Wir gehen an die nähere Untersuchung dieser Zuordnung.

Ist $D_1^{(q)} < \Sigma_1^{(n)}$ in $\Sigma_1^{(n)}$ dem Zyklus $C_1^{(q)}$ homolog, gilt also $D_1^{(q)} \infty C_1^{(q)}$ in $\Sigma_1^{(n)}$ resp.

$$(2) \quad C_1^{(q)} - D_1^{(q)} = R(H_1^{(q+1)}), \quad C_1^{(q)}, D_1^{(q)}, H_1^{(q+1)} < \Sigma_1^{(n)},$$

dann wollen wir $D_1^{(q)}$ auf gleiche Art wie $C_1^{(q)}$ einen $\rho + 1$ dimensionalen Zyklus von $\Sigma_2^{(n)}$ zuordnen.

Zuerst gilt

$$(3) \quad D_1^{(q)} = R(L_1^{(q+1)}) + R(L_2^{(q+1)}), \quad L_1^{(q+1)} < \Sigma_1^{(n)}, \quad L_2^{(q+1)} < \Sigma_2^{(n)}$$

$$(9) \quad D_1^{(q)} \rightarrow L_2^{(q+1)}$$

Aus (1), (2) und (3) aber folgt

$$(4) \quad C_1^{(q)} - D_1^{(q)} = R(H_1^{(q+1)}) = \\ = R(K_1^{(q+1)} - L_1^{(q+1)}) + R(K_2^{(q+1)} - L_2^{(q+1)}).$$

Der in $\Sigma^{(n)}$ liegende $\rho + 1$ dimensionale Zyklus

$$(5) \quad K_2^{(q+1)} - L_2^{(q+1)} - S_1^{(q+1)}, \\ S_1^{(q+1)} = H_1^{(q+1)} - K_1^{(q+1)} + L_1^{(q+1)} < \Sigma_1^{(n)}$$

ist, da $\rho + 1 < n$ ist, in $\Sigma^{(n)}$ homolog Null, also gilt

$$(6) \quad K_2^{(q+1)} - L_2^{(q+1)} - S_1^{(q+1)} = R(K_1^{(q+2)}) + R(K_2^{(q+2)}), \\ K_1^{(q+2)} < \Sigma_1^{(n)}, \quad K_2^{(q+2)} < \Sigma_2^{(n)}.$$

Aus (6) erhalten wir durch Punktierung

$$(7) \quad K_2^{(q+1)} - L_2^{(q+1)} = R(K_2^{(q+2)}), \text{ d. h. } K_2^{(q+1)} \infty L_2^{(q+1)} \text{ in } \Sigma_2^{(n)}.$$

Somit werden die Zyklen einer Klasse $[C_1^{(q)}]_1$, der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ Zyklen aus $\Sigma_2^{(n)}$ zugeordnet, die einer Klasse der $\rho + 1^{\text{ten}}$ Homologiegruppe von $\Sigma_2^{(n)}$ angehören¹⁾.

Wir wollen nun die Eineindeutigkeit der Zuordnung nachweisen, aus der dann, da die zugeordnete Klasse einer Summe von Klassen gleich ist der Summe der diesen Klassen zugeordneten

¹⁾ Mit $[]_1$ wird eine Klasse von $\Sigma_1^{(n)}$, mit $[]_2$ eine Klasse von $\Sigma_2^{(n)}$ bezeichnet.

Klassen, die Isomorphie der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ mit der $\rho + 1^{\text{ten}}$ von $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ folgt.

Sei jetzt $K_2^{(q+1)}$ ein $\rho + 1$ dimensionaler Zyklus in $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$. Er ist dann jedem Zyklus $C_1^{(q)} < \Sigma_1^{(n)}$ zugeordnet, für den eine Relation besteht:

$$(8) \quad R(K_2^{(q+1)}) + R(K_1^{(q+1)}) = C_1^{(q)}.$$

Zwei solche Zyklen $C_1^{(q)}$ und $D_1^{(q)}$ sind nach (8) und

$$(8') \quad R(K_2^{(q+1)}) + R(L_1^{(q+1)}) = D_1^{(q)}$$

in $\Sigma_1^{(n)}$ homolog. Diese Klasse der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$, deren Zyklen $K_2^{(q+1)}$ entspricht, enthält $R(K_2^{(q+1)}) = C^{(q)} < \Sigma_1^{(n)}$.

Also: Ein Zyklus $K_2^{(q+1)}$ von $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ entspricht den Zyklen einer Klasse der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$, und zwar der Klasse $[R(K_2^{(q+1)})]_1$. Damit ist gezeigt, daß keine der Klassen der $\rho + 1^{\text{ten}}$ Homologiegruppe bei der Zuordnung (α) ausgelassen wird.

Sei jetzt $L_2^{(q+1)}$ ein Zyklus der Klasse $[K_2^{(q+1)}]_2$, d. h. es gelte $K_2^{(q+1)} - L_2^{(q+1)} = R(K_2^{(q+2)})$ resp.

$$(9) \quad K_2^{(q+1)} - L_2^{(q+1)} = R(K_2^{(q+2)}) + K_1^{(q+1)},$$

$$K_2^{(q+1)}, L_2^{(q+1)}, K_2^{(q+2)} < \dot{\Sigma}_2^{(n)}, K_1^{(q+1)} < \Sigma_1^{(n)}.$$

Daraus folgt dann

$$(10) \quad R(K_2^{(q+1)}) - R(L_2^{(q+1)}) = R(K_1^{(q+1)}),$$

d. h. die Identität der Klassen $[R(K_2^{(q+1)})]_1, [R(L_2^{(q+1)})]_1$.

Das besagt aber das eineindeutige Entsprechen der Elemente der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ und der $\rho + 1^{\text{ten}}$ seines offenen Komplements $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$.

Die ρ^{te} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ und die $\rho + 1^{\text{te}}$ des offenen Komplementes $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ von $\Sigma_1^{(n)}$ sind für $0 < \rho < n - 1$ isomorph.

Sind $h_{e,1}, h_{e,2}$, die ρ^{ten} Bettischen Zahlen von $\Sigma_1^{(n)}, \dot{\Sigma}_2^{(n)}$, so folgt hieraus

$$(11) \quad h_{e,1} = h_{e+1,2}, \quad \rho = 1, \dots, n-2.$$

Analoge Relationen gelten auch für die Torsionszahlen.

Wir knüpfen an die obige Überlegung noch zwei Bemerkungen:

a) Ist $\Sigma^{(n)}$ ein Ring, in dem auch jeder nulldimensionale Zyklus homolog Null ist, so gilt der Schluß auch für $\rho = 0$.

b) Gibt es in $\Sigma^{(n)}$ keinen (vom Nullzyklus verschiedenen) n dimensionalen Zyklus, dann gilt die Aussage auch für $\rho = n - 1$.

Hier wird an Formel (4) angeknüpft. Es muß dann der in $\Sigma^{(n)}$ liegende n dimensionale Zyklus $K_2^{(n)} - L_2^{(n)} - S_1^{(n)} = 0^{(n)}$ sein, woraus Punktierung $K_2^{(n)} = L_2^{(n)}$ gibt.

Der weitere Schluß verläuft wie oben, $K_2^{(n+1)}$ ist natürlich Null.

§ 3. Weitere Sätze über Unterringe eines Nullrings.

Wir fassen zwei Unterringe $\Sigma_1^{(n)}$, $\Sigma_2^{(n)}$ von $\Sigma^{(n)}$ ins Auge, deren Summe der Nullring $\Sigma^{(n)}$ ist:

$$(1) \quad \Sigma^{(n)} = \Sigma_1^{(n)} + \Sigma_2^{(n)}.$$

Die symbolische Relation drückt aus, daß jedes Basiselement $a_i^{(e)}$, $i = 1, \dots, \alpha_e$, $\rho = 0, \dots, n$ von $\Sigma^{(n)}$ Basiselement ist von $\Sigma_1^{(n)}$ oder von $\Sigma_2^{(n)}$ oder beiden Ringen $\Sigma_1^{(n)}$ und $\Sigma_2^{(n)}$ gemeinsam ist. Der Durchschnittsring $\Sigma_1^{(n)}$, $\Sigma_2^{(n)}$ sei nicht leer und mit Σ_r bezeichnet.

Im wichtigsten Falle der Anwendung sind die Ringe $\Sigma^{(n)}$, $\Sigma_1^{(n)}$, $\Sigma_2^{(n)}$ homogen und Σ_r der Randring von $\Sigma_1^{(n)}$, $\Sigma_2^{(n)}$.

Wir setzen wie im vorhergehenden Paragraphen $0 < \rho < n - 1$ voraus.

Bezeichnung: $\left\{ \begin{array}{l} []_i \\ []_r \\ [] \end{array} \right.$ bezeichnet eine Klasse in $\Sigma_i^{(n)}$, $i = 1, 2$
 Σ_r ,
 $\Sigma^{(n)}$.

Wir betrachten die ρ^{te} Homologiegruppe von Σ_r . In ihr gibt es zwei Untergruppen, die Untergruppe (A), deren Zyklen in $\Sigma_2^{(n)}$ homolog Null sind, und die Untergruppe (B), deren Zyklen in $\Sigma_1^{(n)}$ homolog Null sind.

Diese beiden Untergruppen haben nur das Nullelement der ρ^{ten} Homologiegruppe von Σ_r gemeinsam.

Beweis: ist $[C^{(e)}]_r$ eine Klasse in (A) und in (B), so gilt

$$(1') \quad C^{(e)} = R(K_1^{(e+1)}) = R(-K_2^{(e+1)}), \quad K_i^{(e+1)} < \Sigma_i^{(n)}.$$

Es ist demnach $K_1^{(q+1)} + K_2^{(q+1)}$ ein $\rho + 1$ dimensionaler Zyklus in $\Sigma^{(n)}$; da $1 < \rho + 1 < n$, so ist er in $\Sigma^{(n)}$ homolog Null.

Es gibt also einen $\rho + 2$ dimensionalen Komplex $K^{(q+2)} = K_1^{(q+2)} + K_2^{(q+2)}$, daß

$$K_1^{(q+1)} + K_2^{(q+1)} = R(K_1^{(q+2)}) + R(K_2^{(q+2)}), \quad K_i^{(q+2)} < \Sigma_i^{(n)}$$

ist, oder

$$(2) \quad K_1^{(q+1)} - R(K_1^{(q+2)}) = R(K_2^{(q+2)}) - K_2^{(q+1)}.$$

Links steht ein Komplex aus $\Sigma_1^{(n)}$, rechts ein solcher aus $\Sigma_2^{(n)}$, und da die beiden identisch sind, so stellt die linke und ebenso die ihr gleiche rechte Seite einen Komplex aus Σ_r dar. Also gilt

$$K_1^{(q+1)} - R(K_1^{(q+2)}) = K_r^{(q+1)}, \quad K_r^{(q+1)} < \Sigma_r.$$

Daraus erhalten wir durch Randbildung

$$(3) \quad R(K_1^{(q+1)}) = R(K_r^{(q+1)}),$$

also nach (1)

$$(4) \quad C^{(q)} \sim 0 \text{ in } \Sigma_r, \text{ q. e. d.}$$

Nun gilt weiter, daß jede Klasse der ρ^{ten} Homologiegruppe von Σ_r sich linear durch die Klasse der Untergruppen (A) und (B) darstellen läßt.

Sei $[C^{(q)}]_r$ eine Klasse der ρ^{ten} Homologiegruppe von Σ_r , da $C^{(q)} < \Sigma^{(n)}$ und $0 < \rho < n - 1$ ist, so gilt

$$(5) \quad C^{(q)} = R(K_1^{(q+1)}) + R(K_2^{(q+1)}).$$

Dann aber ist

$$C^{(q)} - R(K_1^{(q+1)}) = R(K_2^{(q+1)})$$

ein Zyklus von Σ_r . Also gilt $R(K_2^{(q+1)}) < \Sigma_r$, ebenso $R(K_1^{(q+1)}) < \Sigma_r$.

Also gehört $[R(K_2^{(q+1)})]_r$ zur Untergruppe (A) und

$$[R(K_1^{(q+1)})]_r \quad , \quad , \quad (B) \text{ und es gilt (5):}$$

$$(6) \quad [C^{(q)}]_r = [R(K_1^{(q+1)})]_r + [R(K_2^{(q+1)})]_r, \text{ q. e. d.}$$

Wir zeigen jetzt die Isomorphie der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ mit der Untergruppe (A) und die Isomorphie der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_2^{(n)}$ mit der Untergruppe (B) vom Σ_r .

Wir ordnen einer Klasse $[C_1^{(q)}]_1$ aus $\Sigma_1^{(n)}$ durch den folgenden Vorgang eine Klasse der Untergruppe (A) zu:

Da $C_1^{(q)} < \Sigma_1^{(n)} < \Sigma^{(n)}$, so gilt:

$$(7) \quad C_1^{(q)} = R(K_1^{(q+1)}) + R(K_2^{(q+1)}), \text{ also}$$

$$(7') \quad C_1^{(q)} - R(K_1^{(q+1)}) = R(K_2^{(q+1)}) = C_r^{(q)}, \quad C_r^{(q)} < \Sigma_r.$$

(Dies gilt auch, falls Σ_r von niedrigerer Dimension als ρ sein sollte. Dann ist $C_r^{(q)} = 0^{(q)}$ und $C_1^{(q)} \sim 0$ in $\Sigma_1^{(n)}$, d. h. die ρ^{te} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ enthält dann nur die Nullklasse.) Sei $D_1^{(q)}$ ein zweiter ρ dimensionaler Zyklus von $\Sigma_1^{(n)}$ und $D_r^{(q)}$ der ihm analog (7') zugeordnete Zyklus, der wie $C_r^{(q)}$ (7') zur Untergruppe (A) zählt, dann gilt:

$$(8) \quad D_1^{(q)} - R(L_1^{(q+1)}) = R(L_2^{(q+1)}) = D_r^{(q)}.$$

Aus (7') und (8) erhalten wir:

$$(9) \quad C_1^{(q)} - D_1^{(q)} \sim C_r^{(q)} - D_r^{(q)} \text{ in } \Sigma_1^{(n)},$$

$$(10) \quad 0 \sim C_r^{(q)} - D_r^{(q)} \text{ in } \Sigma_2^{(n)}.$$

Ordnen wir der Klasse $[C_1^{(q)}]_1$ (resp. $[D_1^{(q)}]_1$) von $\Sigma_1^{(n)}$ die Klasse der Untergruppe (A) $[C_r^{(q)}]_r$ (resp. $[D_r^{(q)}]_r$) zu, so folgt aus (9) und (10) die eindeutige Zuordnung der Klassen der ρ^{ten} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ und der Untergruppe (A) .

In der Tat: Ist $[C_1^{(q)}]_1 = [D_1^{(q)}]_1$, d. h. $C_1^{(q)} - D_1^{(q)} \sim 0$ in $\Sigma_1^{(n)}$, so ist nach (9), (10) $C_r^{(q)} - D_r^{(q)} \sim 0$ in $\Sigma_1^{(n)}$ und $\Sigma_2^{(n)}$, also ~ 0 in Σ_r .

Aus $[C_1^{(q)}]_1 = [D_1^{(q)}]_1$ folgt somit $[C_r^{(q)}]_r = [D_r^{(q)}]_r$.

Ist umgekehrt $[C_r^{(q)}]_r = [D_r^{(q)}]_r$, so ist $C_r^{(q)} \sim D_r^{(q)}$ in Σ_r , also in $\Sigma_1^{(n)}$ und nach (9) $C_1^{(q)} \sim D_1^{(q)}$ in $\Sigma_1^{(n)}$.

Aus $[C_r^{(q)}]_r = [D_r^{(q)}]_r$ folgt somit $[C_1^{(q)}]_1 = [D_1^{(q)}]_1$.

Dabei ist zu bemerken, daß der Zuordnung $[C_1^{(q)}]_1 \rightarrow [C_r^{(q)}]_r$ keine der Klassen der Untergruppe (A) entgeht.

Ist nämlich $[C_r^{(q)}]_r$ eine solche Klasse, so gilt ja $C_r^{(q)} = R(K_2^{(q+1)})$. Setzen wir in (7) für $C_1^{(q)}$ einen Zyklus der Klasse $[C_r^{(q)}]_1$, z. B. $C_r^{(q)}$ selbst, so sieht man, daß die Zuordnung $[C_r^{(q)}]_1 \rightarrow [C_r^{(q)}]_r$ gilt.

Da aus (7) und (8)

$$(11) \quad C_1^{(q)} + D_1^{(q)} - R(K_1^{(q+1)} + L_1^{(q+1)}) = C_r^{(q)} + D_r^{(q)}$$

folgt, so gilt $[C_1^{(q)}]_1 + [D_1^{(q)}]_1 \rightarrow [C_r^{(q)}]_r + [D_r^{(q)}]_r$ als Folge von $[C_1^{(q)}]_1 \rightarrow [C_r^{(q)}]_r$ und $[D_1^{(q)}]_1 \rightarrow [D_r^{(q)}]_r$. Die ρ^{te} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ und die Untergruppe (A) sind isomorph.

Jede lineare Abhängigkeit zwischen Klassen der Untergruppen (A) und (B) reduziert sich auf eine zwischen den Klassen der Untergruppe (A) und eine zwischen den Klassen der Untergruppe (B).

Denn eine solche läßt sich in die Form $[C^{(q)}]_r + [D^{(q)}]_r = 0$ bringen, wo $[C^{(q)}]_r$ in (A) und $[D^{(q)}]_r$ in (B) liegt. Da aber (A) und (B) nur das Nullelement gemeinsam haben, folgt $[C^{(q)}]_r = 0$ und $[D^{(q)}]_r = 0$.

Die Untergruppe (A) hat wie die ihr isomorphe ρ^{te} Homologiegruppe von $\Sigma_1^{(n)}$ genau $h_{q,1}$ linear unabhängige Klassen, wo $h_{q,i}$ die ρ^{te} Bettische Zahl von $\Sigma_i^{(n)}$ ist, $i = 1, 2$.

Desgleichen hat (B) genau $h_{q,2}$ linear unabhängige Klassen.

Die $h_{q,1} + h_{q,2}$ solchermaßen bestehenden Klassen linear unabhängiger Zyklen seien

$$\left\{ \begin{array}{l} [C_i^{(q)}]_r, \quad i = 1, \dots, h_{q,1} \text{ in der Gruppe (A) und} \\ [D_i^{(q)}]_r, \quad i = 1, \dots, h_{q,2} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad (B). \end{array} \right.$$

Ist nun $[H^{(q)}]_r$ eine Klasse der ρ^{ten} Homologiegruppe in Σ_r , so gilt die Spaltung

$$[H^{(q)}]_r = [C^{(q)}]_r + [D^{(q)}]_r, \quad [C^{(q)}]_r < (A), \quad [D^{(q)}]_r < (B).$$

Demnach gilt weiter wegen der beiden Darstellungen

$$p[C^{(q)}]_r = \sum_1^{h_{q,1}} a_i [C_i^{(q)}]_r, \quad q[D^{(q)}]_r = \sum_1^{h_{q,2}} b_i [D_i^{(q)}]_r$$

die Darstellung

$$(13) \quad p \cdot q \cdot [H^{(q)}]_r = \sum_1^{h_{q,1}} q a_i [C_i^{(q)}]_r + \sum_1^{h_{q,2}} p b_i [D_i^{(q)}]_r.$$

Bezeichnet $h_{q,r}$ die ρ^{te} Bettische Zahl von Σ_r , so folgt daraus

$$(14) \quad h_{q,r} = h_{q,1} + h_{q,2}, \quad \rho = 1, \dots, n-2.$$

Bemerkungen: a) Zerlegt man die ϱ^{te} Homologiegruppe von Σ_r mittels ihrer Untergruppe (A) [resp. (B)], so ist die Faktorgruppe der Gruppe (B) [resp. (A)] isomorph. Aus dieser Bemerkung folgt sofort (14).

b) Man gewinnt die Relation (14) aus der allgemeinen Formel (96) meiner Arbeit über „Abstrakte Topologie“, da wegen der Nullringeigenschaft von $\Sigma^{(n)}$ die Größen γ_τ sämtlich verschwinden. Das entspringt der im vorhergehenden bewiesenen Tatsache, daß aus $C_r^{(q)} \sim 0$ in $\Sigma_1^{(n)}$, $\Sigma_2^{(n)} : C_r^{(q)} \sim 0$ in Σ_r folgt.

Wir besprechen noch einen im folgenden wichtigen Sonderfall.

$\Sigma^{(n)}$, $\Sigma_1^{(n)}$ und $\Sigma_2^{(n)}$ seien homogen, $\Sigma_1^{(n)}$ und $\Sigma_2^{(n)}$ Komplementringe und Σ_r ihr $n-1$ dimensionaler Randring.

Ist $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ das offene Komplement von $\Sigma_1^{(n)}$ ($\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ ist zugleich der in bezug auf Σ_r geöffnete Ring $\Sigma_2^{(n)}$), so gilt, wenn $\dot{h}_{q,2}$ die Bettizahlen von $\dot{\Sigma}_2^{(n)}$ sind

$$(15) \quad h_{q,1} = \dot{h}_{q+1,2}, \quad \varrho = 1, \dots, n-2, \text{ also (14)}$$

$$(16) \quad h_{q,r} = h_{q,2} + \dot{h}_{q+1,2}, \quad \varrho = 1, \dots, n-2, \text{ und ebenso}$$

$$(17) \quad h_{q,r} = h_{q,1} + \dot{h}_{q+1,1}, \quad \varrho = 1, \dots, n-2,$$

wo $\dot{\Sigma}_1^{(n)}$ der in bezug auf seinen Randring Σ_r geöffnete Ring $\Sigma_1^{(n)}$ und $\dot{h}_{q+1,1}$ die $\varrho+1^{\text{te}}$ Bettizahl dieses Ringes ist.

Die Formel (17) werden wir in der Folge zu verwenden haben.

II. ABSCHNITT.

§ 1. Der simpliziale Ring.

Ein simplizialer Ring der Dimension m ist ein m dimensionaler Ring, in dem es eine Basis der n dimensional Komplexe gibt, $n=0, 1, \dots, m$, deren Elemente n dimensionale Simplizes sind. Ein n dimensionales Simplex ist dabei ein System von $n+1$ Elementen „Punkten“, die untereinander verschieden sind, in bestimmter Reihenfolge:

$$(1) \quad (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n+1}).$$

Zwei Simplizes sollen verschieden (ungleich) genannt werden, sobald sie nicht in sämtlichen Elementen übereinstimmen. Daher kann überhaupt nur von Gleichheit gleichdimensionaler Simplizes gesprochen werden. Simplizes, die dieselben Elemente enthalten,

sollen sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden können. Zur genaueren Formulierung definieren wir das Symbol

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n+1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \end{bmatrix}$$

in dem die $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ resp. $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ zwei Permutationen derselben $n+1$ Elemente sind. Und zwar soll das Symbol (2) den Wert $+1$ oder -1 haben, je nachdem die beiden Permutationen derselben Klasse angehören oder nicht.

Für Simplizes mit gleichen Elementen sei dann festgesetzt:

$$(2') \quad (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n+1}) = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{n+1} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{n+1} \end{bmatrix} (j_1 \ j_2 \ \dots \ j_{n+1}).$$

Als Randkomplex des dimensionalen Simplex (1) definieren wir

$$(3) \quad R(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n+1}) = \sum_{h=1}^{n+1} \begin{bmatrix} i_h & j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{n+1} \end{bmatrix} (j_1 \ j_2 \ \dots \ j_n),$$

wo die $(j_1 \ \dots \ j_n)$ eine Permutation der $i_1 \ \dots \ i_{h-1} \ i_{h+1} \ \dots \ i_{n+1}$ sind. Jedes Simplex $(i_1 \ \dots \ i_{h-1} \ i_{h+1} \ \dots \ i_{n+1})$ tritt in der Summe rechts genau einmal auf.

Wir sehen, daß der Rand eines n dimensionalen Simplex, wie es sein muß, ein $n-1$ dimensionaler Komplex ist. Da er im Ringe enthalten sein muß, müssen alle $n-1$ dimensionalen Simplizes, die man aus einem n dimensionalen Simplex (1) durch Streichen je eines Elementes erhält, der Basis der $n-1$ dimensionalen Komplexe angehören.

Um den Ringnachweis zu vervollständigen, ist nur mehr $R(R(\)) = 0$ zu zeigen, vorher sei eine bequemere Schreibart der Randoperation (3) gegeben, die man erhält, sobald man statt $(j_1 \ \dots \ j_n)$ in (3) direkt $(i_1 \ \dots \ i_{h-1} \ i_{h+1} \ \dots \ i_{n+1})$ einführt.

Wir können statt (3)

$$(3') \quad R(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n+1}) = \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{h-1} (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{h-1} \ i_{h+1} \ \dots \ i_{n+1})$$

schreiben. In der Randdefinition (3) tritt aber die notwendige Unabhängigkeit der Randoperation von der Art, ein gegebenes Simplex zu schreiben, am klarsten zu Tage.

Aus (3) folgt:

$$(4) \quad R(R(i_1 i_2 \dots i_{n+1})) = \sum_{h=1}^{n+1} \left[\begin{matrix} i_h j_1 \dots j_n \\ i_1 i_2 \dots i_{n+1} \end{matrix} \right] \left(\sum_{k=1}^n \left[\begin{matrix} j_k l_1 \dots l_{n-1} \\ j_1 j_2 \dots j_n \end{matrix} \right] \right. \\ \left. (l_1 l_2 \dots l_{n-1}) \right)$$

Das rechts angeschriebene $n-2$ dimensionale Simplex $(l_1 l_2 \dots l_{n-1})$ das die Elemente $i_1 \dots i_{n+1}$ bis auf i_h und j_k enthält, tritt in der Doppelsumme zweimal auf, und zwar mit den Koeffizienten

$$(5) \quad \left[\begin{matrix} i_h j_1 \dots j_{h-1} j_k j_{k+1} \dots j_n \\ i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n+1} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} j_k l_1 \dots l_{k-2} l_{k-1} l_k \dots l_{n-1} \\ j_1 j_2 \dots j_{k-1} j_k j_{k+1} \dots j_n \end{matrix} \right] \\ \text{resp.}$$

$$(5') \quad \left[\begin{matrix} j_k j_1 \dots j_{k-1} i_h j_{k+1} \dots j_n \\ i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} i_{k+2} \dots i_{n+1} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} i_h l_1 \dots l_{k-2} l_{k-1} l_k \dots l_{n-1} \\ j_1 j_2 \dots j_{k-1} i_h j_{k+1} \dots j_n \end{matrix} \right]$$

Die zweiten Faktoren in (5), (5') sind gleich, die ersten entgegengesetzt, also hat jedes rechts in (4) auftretende Simplex den Koeffizienten Null, d. h.

$$(6) \quad R(R(i_1 i_2 \dots i_{n+1})) = 0^{(n-2)}, \text{ q. d. e.}$$

Bemerkung: Die nulldimensionalen Komplexe $\sum_{h=1}^N a_h (i_h)$, a_h ganze Zahl, sind im Sinne unserer abstrakten Topologie Zyklen. Der nulldimensionale Zyklus homolog Null hat die Gestalt $R(\sum A_{pq}(i_p i_q)) = \sum A_{pq}(i_q) - \sum A_{pq}(i_p)$. Die Summe der Koeffizienten der einen nulldimensionalen Zyklus homolog Null darstellenden Simplexes ist demnach Null. Ist der Ring zusammenhängend, so gilt davon die Umkehrung: Ein simplizialer Ring heißt zusammenhängend, wenn je zwei seiner Punkte homolog sind. Die Zyklen $(i_k) - (i_1)$ bilden dann eine Basis der nulldimensionalen Zyklen homolog Null²⁾. Ist dann $C^{(0)} = \sum_{k=1}^N \pi_k (i_k)$ ein nulldimensionaler Zyklus, für den $\sum_{k=1}^N \pi_k = 0$ ist, so ist $C^{(0)} = \sum_{k=1}^N \pi_k [(i_k) - (i_1)] \sim 0$, q. d. e.

Ein nulldimensionaler Zyklus eines zusammenhängenden Ringes ist dann und nur dann homolog Null, wenn seine „Darstellungszahlen“ die Summe Null ergeben.

²⁾ Diese Zyklen sind linear unabhängig und weiter gilt $R(i_p i_q) = [(i_q) - (i_1)] - [(i_p) - (i_1)]$. Die nullte Bettische Zahl stellt für simpliziale Ringe die Zahl der Komponenten des Ringes dar, d. h. die Zahl der zusammenhängenden Unterringe.

§ 2. Besondere simpliziale Ringe.

Wir betrachten einen homogenen n dimensionalen Ring, dessen n dimensionale Basiselemente Simplizes mit dem gemeinsamen Element α_1 seien.

In diesem Ring ist jeder t dimensionale Zyklus homolog Null, sobald $0 < t < n$ gilt, und wir können ebenso $0 < t \leq n$ schreiben, da in unserem Ringe ein n dimensionaler Zyklus nicht auftritt.

Dies folgt aus dem Hilfssatz:

Ist $K^{(t)}$ ein nichtverschwindender t dimensionaler Komplex, in dessen Darstellung nur Simplizes auftreten, die das Element α_1 enthalten, so ist $K^{(t)}$ bestimmt kein Zyklus, wenn $t \neq 0$ ist.

Denn ist

$$(1) \quad K^{(t)} = \sum \varepsilon_{j_2 \dots j_{t+1}} (\alpha_1 \alpha_{j_2} \dots \alpha_{j_{t+1}})$$

die Darstellung, in der sämtliche auftretenden Simplizes verschieden seien, so gilt

$$(2) \quad R(K^{(t)}) = \sum \varepsilon_{j_2 \dots j_{t+1}} (\alpha_{j_2} \dots \alpha_{j_{t+1}}) + \sum' \dots (\alpha_1 \alpha_{k_2} \dots \alpha_{k_t}).$$

Die in der ersten Summe rechts auftretenden $t-1$ dimensionalen Simplizes kommen genau einmal vor, $R(K^{(t)}) = 0^{(t-1)}$ hätte also $\varepsilon_{j_2 \dots j_{t+1}}$ zur Folge, gegen die Annahme.

Es kann demnach in unserem Ringe kein n dimensionaler Zyklus auftreten.

Sei jetzt $C^{(t)}$ ein t dimensionaler Zyklus im Ringe, so müssen in seine Darstellung auch Simplizes eingehen, die α_1 nicht enthalten.

Es gilt daher die Zerlegung

$$(3) \quad C^{(t)} = \sum \gamma_{i_2 \dots i_{t+1}} (\alpha_1 \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{t+1}}) + \sum_2 \sigma_{i_1 i_2 \dots i_{t+1}} (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{t+1}}),$$

wo in der nichtverschwindenden zweiten Summe kein Simplex mit der Ecke α_1 auftritt. Wir bilden nun den $t+1$ dimensionalen Komplex ($t < n$):

$$(4) \quad K^{(t+1)} = \sum_2 \sigma_{i_1 i_2 \dots i_{t+1}} (\alpha_1 \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{t+1}})$$

und zeigen, daß sein Rand $C^{(t)}$ ist. In der Tat ist

$$(5) \quad R(K^{(t+1)}) = \sum_2 \sigma_{i_1 i_2 \dots i_{t+1}} (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_{t+1}}) + \sum_3 \tau_{j_2 \dots j_{t+1}} (\alpha_1 \alpha_{j_2} \dots \alpha_{j_{t+1}}).$$

Nun ist $R(K^{(t+1)}) - C^{(t)}$ ein Zyklus, in dessen Darstellung nach (3) und (5) nur Simplizes mit der Ecke α_1 eintreten, also gilt

$$(6) \quad R(K^{(t+1)}) = C^{(t)} \text{ q. e. d.}$$

Was die nullte Homologiegruppe betrifft, so ist jedes Simplex (α_h) dem Simplex (α_1) homolog, dagegen ist $p.(\alpha_1) \simeq 0$ nur für $p = 0$.

Die nullte Homologiegruppe enthält daher nur die Klassen $[(\alpha_1)]$ und ihre Vielfachen.

Der Ring hat alle Torsionszahlen gleich Eins und die Bettizahlen alle Null bis auf die nullte, h_0 , die Eins ist.

Ein Ring dieser Eigenschaft soll eine Zelle heißen. Ein Zelle ist natürlich stets ein Nullring.

Ein besonders einfacher Ring ist der Ring eines Simplex $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1})$, d. i. der kleinste Ring über dem Simplex $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1})$. Es ist das einfachste Beispiel einer Zelle.

Das $n-1$ dimensionale Gerüst des Simplexringes $(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$ enthält außer $[(\alpha_1)]$ noch die $n-1$ dimens. Klasse $[R(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})]$. Die $n-1$ te Homologiegruppe enthält $[R(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})]$ und die Vielfachen dieser Klasse.

Sonst enthält sie keine Klasse, da ja jeder $n-1$ dimensionale Zyklus im Ringe des Simplex homolog Null sein muß und dieser Ring von n dimensional Komplexen nur $p.(\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$ enthält.

Der Ring dieses Gerüsts hat alle Torsionszahlen gleich Eins und die Bettizahlen alle Null bis auf die nullte und die der höchsten Dimension, die beide gleich Eins sind.

Ein Ring dieser Eigenschaft soll eine Sphäre heißen.

Eine Sphäre ist ein Nullring; der Randring des Simplexringes ist eine Sphäre.

§ 3. Die reguläre Unterteilung simplizialer Ringe.

Sei $\Sigma^{(n)}$ der gegebene n dimensional homogene simpliziale Ring; mit $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0)$ bezeichnen wir seine i dimensionalen Simplizes. Wir ordnen dann jedem i dimensional Simplex $i = 0, 1 \dots n$: $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0)$ einen neuen Punkt zu, der $P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^i$ bezeichnet sei. Dem i dimensional Simplex wird derselbe Punkt zugeordnet wie seinem inversen (negativen), d. h.: $P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^i$ ist in bezug auf die unten stehenden Indizes symmetrisch.

Mittels dieser Punkte wird dann ein neuer Ring $\Sigma_1^{(n)}$ gebildet, der die „reguläre Unterteilung des Ringes $\Sigma^{(n)}$ “ heiße. Seine i dimensionalen Simplizes sind durch die Gesamtheit

$$(1) \quad (P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h_1+1}}^{h_1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h_1+1} \dots \alpha_{h_2+1}}^{h_2} P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h_1+1} \dots \alpha_{h_2+1} \dots \alpha_{h_3+1} \dots \alpha_{h_3+1} \dots}^{h_3} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h_1+1} \dots \alpha_{h_i+1} \dots \alpha_{h_{i+1}+1}}^{h_{i+1}})$$

definiert, wobei $\alpha_1 \dots \alpha_{h_1+1} \dots \alpha_{h_2+1} \dots \dots \alpha_{h_i+1} \dots \alpha_{h_{i+1}+1} \dots$ eine in einem h_{i+1} dimensional Simplex von $\Sigma^{(n)}$

$$(1') \quad (P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h_i+1}}^0 \dots P_{\alpha_{h_i+1}+1}^0)$$

auf tretende Folge ist.

Da der Randkomplex eines Simplex (1) in der Gesamtheit (1) selbst enthalten ist, d. h. durch die Simplexes dieser Gesamtheit dargestellt wird, so bildet die Gesamtheit der Simplexes (1) in der Tat das Basissystem eines Ringes $\Sigma_1^{(n)}$.

Mit $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0)$ bezeichnen wir in $\Sigma_1^{(n)}$ den i dimensional Komplex

$$(2) \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0) = \Sigma_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}]^{j_1 j_2 \dots j_{i+1}}} (P_{j_1}^0 P_{j_1 j_2}^1 P_{j_1 j_2 j_3}^2 \dots P_{j_1 j_2 \dots j_{i+1}}^i)^3)$$

Wir behaupten, daß diese Komplexe das Basissystem eines mit $\Sigma^{(n)}$ isomorphen Ringes bilden, der $\bar{\Sigma}^{(n)}$ benannt sei.

Die Zuordnung der Simplexes von $\Sigma^{(n)}$ und $\bar{\Sigma}^{(n)}$ ist durch die Bezeichnung festgelegt; wir zeigen, daß $\bar{\Sigma}^{(n)}$ ein Ring ist, und daß die Randrelationen der Ringe $\Sigma^{(n)}$ und $\bar{\Sigma}^{(n)}$ die gleichen sind (Definition der Isomorphie von Ringen).

Es ist dazu nur

$$(3) \quad R(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0) = \sum_{h=1}^{i+1} (-1)^{h-1} (P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h-1}}^0 P_{\alpha_{h+1}}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0)$$

zu beweisen, denn in (3) steckt die Ringeigenschaft von $\bar{\Sigma}^{(n)}$ sowohl wie die Isomorphie der Ringe $\Sigma^{(n)}$ und $\bar{\Sigma}^{(n)}$. Zu diesem Zwecke ist also der Rand des Komplexes (2) zu bilden.

$$(4) \quad R(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0) = \Sigma_{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}]^{j_1 j_2 \dots j_{i+1}}} (-1)^{h-1} (P_{j_1}^0 \dots P_{j_1 \dots j_{h-1}}^{h-2} P_{j_1 \dots j_{h+1}}^h \dots P_{j_1 \dots j_{i+1}}^i).$$

Für $h \neq i+1$ hat das Simplex $(-1)^{h-1} (P_{j_1}^0 \dots P_{j_1 \dots j_{h-1}}^{h-2} P_{j_1 \dots j_{h+1}}^h \dots P_{j_1 \dots j_{i+1}}^i)$ in der Summe (4) rechts, in der es, den beiden Permutationen $j_1 \dots j_{h-1} j_h j_{h+1} j_{h+2} \dots j_{i+1}$ und $j_1 \dots j_{h-1} j_{h+1} j_h j_{h+2} \dots j_{i+1}$ entsprechend, zweimal auftritt, die Koeffizienten

$$\left[\begin{matrix} j_1 \dots j_{h-1} j_h j_{h+1} \dots j_{i+1} \\ \alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_h \alpha_{h+1} \dots \alpha_{i+1} \end{matrix} \right] \text{ und } \left[\begin{matrix} j_1 \dots j_{h-1} j_{h+1} j_h \dots j_{i+1} \\ \alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_h \alpha_{h+1} \dots \alpha_{i+1} \end{matrix} \right].$$

³⁾ Jede Permutation $j_1 j_2 \dots j_{i+1}$ von $\alpha_1 \dots \alpha_{i+1}$ tritt in der Summe gerade einmal auf.

Diese Simplexes fallen also in (4) rechts weg und verbleibt

$$(5) \quad R(\overline{P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0}) = \Sigma [{}^{j_1 j_2 \dots j_{i+1}}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}] (-1)^i (P_{j_1}^0 P_{j_1 j_2}^1 \dots P_{j_1 \dots j_i}^{i-1}).$$

Um (5) mit (3) in Einklang zu bringen, bilden wir

$$(6) \quad \overline{(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h-1}}^0 P_{\alpha_{h+1}}^0 P_{\alpha_{i+1}}^0)} = \Sigma [{}^{j_1 \dots j_{h-1} j_h}_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_{h+1} \dots \alpha_{i+1}}] (P_{j_1}^0 P_{j_1 j_2}^1 \dots P_{j_1 \dots j_i}^{i-1}).$$

Wir bilden für $\alpha_h = j_{i+1}$ [j_{i+1} ist ja in (5) einem α_h gleich]

$$(7) \quad [{}^{j_1 j_2 \dots j_{i+1}}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}] = - [{}^{j_1 \dots j_{h-1} j_h}_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_{i+1}}] [{}^{j_{h+1} \dots j_i j_{i+1}}_{\alpha_h \alpha_{h+1} \dots \alpha_i}] = - [{}^{j_1 \dots j_{h-1} j_h}_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_{i+1}}] [{}^{j_{h+1} \dots j_i j_{i+1}}_{\alpha_h \alpha_{h+1} \dots \alpha_i}] = (-1)^{i-h-1} [{}^{j_1 \dots j_{h-1} j_h}_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_{h+1} \dots \alpha_{i+1}}]$$

Daher können wir (5) schreiben

$$(8) \quad \overline{R(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0)} = \Sigma [{}^{j_1 \dots j_{h-1} j_h}_{\alpha_1 \dots \alpha_{h-1} \alpha_{h+1} \dots \alpha_{i+1}}] (-1)^{h-1} (P_{j_1}^0 P_{j_1 j_2}^1 \dots P_{j_1 \dots j_i}^{i-1}) \\ = \Sigma (-1)^{h-1} (P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h-1}}^0 P_{\alpha_{h+1}}^0 \dots P_{\alpha_{i+1}}^0)$$

Es ist somit (3) bewiesen.

Wir zeigen nun, daß die Ringe $\Sigma^{(n)}$ und seine „reguläre Unterteilung“ $\Sigma_1^{(n)}$ dieselben Homologiegruppen haben. Dies gilt, falls die Homologiegruppen der Ringe $\Sigma_1^{(n)}$ und $\bar{\Sigma}^{(n)}$ die gleichen sind⁴⁾.

Ist $\Sigma^{(j)}$ irgend ein j dimensionaler simplizialer Ring, $\Sigma_1^{(j)}$ seine reguläre Unterteilung und $\bar{\Sigma}^{(j)}$ der in dieser $\Sigma^{(j)}$ isomorphe Unter-ring, so möge die Behauptung für $j=0, 1, 2, \dots, n-1$ bewiesen sein. Es seien ausführlicher die beiden Tatsachen festgestellt:

(a) Jeder i dimensionale Zyklus von $\Sigma_1^{(j)}$ liegt in einer Klasse, die auch einen Zyklus von $\bar{\Sigma}^{(j)}$ enthält. (Jede Klasse in $\Sigma_1^{(j)}$ enthält eine Klasse von $\bar{\Sigma}^{(j)}$.)

(b) Jeder i dimensionale Zyklus von $\bar{\Sigma}^{(j)}$, der in $\Sigma_1^{(j)}$ homolog Null ist, ist auch in $\bar{\Sigma}^{(j)}$ homolog Null.

Aus diesen beiden Tatsachen folgt unmittelbar die Identität der Homologiegruppen der Ringe $\Sigma_1^{(j)}$ und $\bar{\Sigma}^{(j)}$. Denn (a) besagt, daß bei regulärer Unterteilung keine neuen Klassen auftreten und (b), daß dabei auch keine wegfallen, denn jede Klasse von $\Sigma_1^{(j)}$ enthält nach (a) eine und nach (b) nur eine Klasse von $\bar{\Sigma}^{(j)}$.

Die beiden Tatsachen gelten für $j=0$ (hier fällt ja der Ring mit seiner regulären Unterteilung zusammen) und da wir sie

⁴⁾ Wir sagen im folgenden auch, $\Sigma_1^{(n)}$ sei die reguläre Unterteilung von $\bar{\Sigma}^{(n)}$, wenn wir den zwischen $\Sigma_1^{(n)}$ und $\bar{\Sigma}^{(n)}$ bestehenden Zusammenhang charakterisieren wollen.

jetzt, ihre Richtigkeit bis zu $j = n - 1$ vorausgesetzt, für $j = n$ nachweisen, so gelten sie für die simpliziale Unterteilung eines jeden simplizialen Ringes.

Beweis: $\Sigma^{(n)}$ sei der n dimensionale simpliziale Ring, $\Sigma_1^{(n)}$ seine reguläre Unterteilung und $\bar{\Sigma}^{(n)}$ der $\Sigma^{(n)}$ isomorphe Unterring von $\Sigma_1^{(n)}$.

Mit $S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots, S_N^{(n)}$ bezeichnen wir die n dimensionale Basis des Ringes $\bar{\Sigma}^{(n)}$, die den n dimensionalen Simplizes von $\Sigma^{(n)}$ entspricht. Durch das n dimensionale Element $S_a^{(n)}$ ist ein homogener n dimensionaler Ring in $\bar{\Sigma}^{(n)}$ definiert (der kleinste Ring über $S_a^{(n)}$), den wir mit $\mathfrak{S}_a^{(n)}$ bezeichnen. Den $n - 1$ dimensionalen Gerüststring von $\mathfrak{S}_a^{(n)}$ schreiben wir $\mathfrak{R}_a^{(n-1)}$. $\mathfrak{R}_a^{(n-1)}$ ist eine $n - 1$ dimensionale Sphäre (§ 2). $\mathfrak{S}_{a,1}^{(n)}$ und $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ seien die durch die reguläre Unterteilung von $\bar{\Sigma}^{(n)}$ induzierten regulären Unterteilungen von $\mathfrak{S}_a^{(n)}$ resp. $\mathfrak{R}_a^{(n-1)}$.

Jeder Ring $\mathfrak{S}_{a,1}^{(n)}, a = 1, \dots, N$ ist ein Unterring in $\Sigma_1^{(n)}$ und es besteht die symbolische Relation

$$(9) \quad \Sigma_1^{(n)} = \mathfrak{S}_{1,1}^{(n)} + \mathfrak{S}_{2,1}^{(n)} + \dots + \mathfrak{S}_{N,1}^{(n)},$$

die besagt, daß sich ein jeder Komplex aus $\Sigma_1^{(n)}$ als Summe (wenn auch nicht eindeutig) von N Komplexen darstellen läßt, wobei der α te in $\mathfrak{S}_{a,1}^{(n)}$ liegt.

Der $n - 1$ dimensionale Ring $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ enthält dabei jene Simplizes von $\mathfrak{S}_{a,1}^{(n)}$, die auch in den anderen Ringen $\mathfrak{S}_{r,1}^{(n)}$ vorkommen könnten⁵⁾, wir wollen ihn in diesem Beweise deshalb den Randring von $\mathfrak{S}_{a,1}^{(n)}$ nennen (diese Definition entspricht nicht völlig der in meiner des öfteren zitierten Arbeit gegebenen). Wir setzen vorerst $0 < i < n$ voraus⁶⁾.

Ist jetzt $C^{(i)}$ ein dimensionaler Zyklus in $\Sigma_1^{(n)}$, dann gilt die Zerlegung

$$(10) \quad C^{(i)} = K_1^{(i)} + K_2^{(i)} + \dots + K_N^{(i)}, \quad K_a^{(i)} \in \mathfrak{S}_{a,1}^{(n)}.$$

Aus ihr folgt

$$(10') \quad R(K_1^{(i)}) + R(K_2^{(i)}) + \dots + R(K_N^{(i)}) = 0^{(i-1)}.$$

$C_a^{(i-1)} = R(K_a^{(i)})$ ist nach (10') ein Zyklus von $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$, der auch der Nullzyklus sein kann. Für $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ und seine reguläre Unterteilung $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ gelten nach Voraussetzung die Tatsachen (a) und (b). In $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ liegt daher ein Zyklus $\bar{C}_a^{(i-1)}$, der in $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ dem Zyklus $C_a^{(i-1)}$ homolog ist. Da $\mathfrak{R}_{a,1}^{(n-1)}$ eine Sphäre ist, so ist in ihm für

⁵⁾ Die einen Punkt $P_{i_1 \dots i_{n+1}}^n$ nicht enthalten.

⁶⁾ Für $i = 0$ ist jeder Punkt $P_{a_1 \dots a_{n+1}}^h$ von $\Sigma_1^{(n)}$ dem Punkt $P_{a_1}^0$ homolog. Die Tatsache (a) gilt für $i = 0$.

$0 < i-1 < n-1$ der Zyklus $\bar{C}_\alpha^{(i-1)}$ homolog Null. Wegen $i < n$ ist nur $i=1$ gesondert zu behandeln. Nun ist $\bar{C}_\alpha^{(0)} \sim C_\alpha^{(0)}$ und $C_\alpha^{(0)} \sim 0$ in $\mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}$. Also ist ebenso $\bar{C}_\alpha^{(0)} \sim 0$ in $\mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}$. Die Darstellungsahlen des Zyklus $\bar{C}_\alpha^{(0)}$ durch die nulldimensionalen Simplex von $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ müssen also summiert Null ergeben. Da $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ zusammenhängend ist, muß $\bar{C}_\alpha^{(0)} \sim 0$ in $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ gelten.

Also ist für $0 < i < n$ stets $\bar{C}_\alpha^{(i-1)} \sim 0$ in $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$. Da aber $C_\alpha^{(i-1)} \sim \bar{C}_\alpha^{(i-1)}$ in $\mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$ ist, folgt

$$(11) \quad C_\alpha^{(i-1)} = R(K_\alpha^{(i)}), \quad \bar{K}_\alpha^{(i)} < \mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}.$$

Demnach ist weiter $K_\alpha^{(i)} - \bar{K}_\alpha^{(i)}$ ein i dimensionaler Zyklus in $\mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}$. Dieser Ring aber ist eine n -Zelle, da die ihn aufbauenden n dimensionalen Simplex sämtlich den $S_\alpha = (\overline{P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_{n+1}}})$ entsprechenden Punkt $P_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}}$ enthalten. In $\mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}$ liegt demnach (wegen $i < n$) ein $i+1$ dimensionaler Komplex $K_\alpha^{(i+1)}$, daß

$$(12) \quad K_\alpha^{(i)} - \bar{K}_\alpha^{(i)} = R(K_\alpha^{(i+1)}) \text{ ist. } (K_\alpha^{(i+1)} < \mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}).$$

Mit $\bar{\Gamma}^{(n-1)}$ bezeichnen wir das $n-1$ dimensionale Gerüst von $\bar{\Sigma}^{(n)}$, mit $\Gamma_1^{(n-1)}$ die reguläre Unterteilung von $\bar{\Gamma}^{(n-1)}$, die durch die von $\bar{\Sigma}^{(n)}$ in $\bar{\Gamma}^{(n-1)}$ induziert wird.

Dann gilt symbolisch:

$$(13) \quad \begin{cases} \bar{\Gamma}^{(n-1)} = \mathfrak{R}_1^{(n-1)} + \mathfrak{R}_2^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{R}_N^{(n-1)} \\ \Gamma_1^{(n-1)} = \mathfrak{R}_{1,1}^{(n-1)} + \mathfrak{R}_{2,1}^{(n-1)} + \dots + \mathfrak{R}_{N,1}^{(n-1)} \end{cases} \quad \text{resp.}$$

Der Zyklus

$$(13') \quad \bar{C}^{(i)} = \bar{K}_1^{(i)} + \bar{K}_2^{(i)} + \dots + \bar{K}_N^{(i)}$$

liegt in $\Gamma_1^{(n-1)}$, der regulären Unterteilung von $\bar{\Gamma}^{(n-1)}$. Also gibt es [Tatsache (a)] in $\bar{\Gamma}^{(n-1)}$ einen $\bar{C}^{(i)}$ in $\Gamma_1^{(n-1)}$ homologen Zyklus $\tilde{C}^{(i)}$. Nach (12) ist weiter $C^{(i)} \sim \bar{C}^{(i)}$ in $\Sigma_1^{(n)}$, somit ist $(\Gamma_1^{(n-1)} < \Sigma_1^{(n)})$:

$$(14) \quad \tilde{C}^{(i)} \sim C^{(i)} \text{ in } \Sigma_1^{(n)} \text{ und } \tilde{C}^{(i)} < \bar{\Sigma}^{(n)},$$

womit die Tatsache (a) für $i < n$ gilt.

Was die Tatsache (b) betrifft, sei $C^{(i)}$ ein i dimensionaler Zyklus in $\bar{\Sigma}^{(n)}$, der in $\Sigma_1^{(n)}$ homolog Null ist:

$$(15) \quad C^{(i)} = R(K^{(i+1)}), \quad C^{(i)} < \bar{\Sigma}^{(n)}, \quad K^{(i+1)} < \Sigma_1^{(n)}.$$

Wir zerlegen

$$(16) \quad K^{(i+1)} = K_1^{(i+1)} + \dots + K_N^{(i+1)}, \quad K_\alpha^{(i+1)} < \mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}.$$

Dann gilt

$$(17) \quad C^{(i)} = R(K_1^{(i+1)}) + \dots + R(K_N^{(i+1)}).$$

Spalten wir ebenso $C^{(i)}$, so erhalten wir

$$(17') \quad C^{(i)} = K_1^{(i)} + \dots + K_N^{(i)},$$

wobei nach Voraussetzung $K_\alpha^{(i)} < \mathfrak{R}_\alpha^{(n)} < \mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n)}$ ist. (Wegen $i < n$ ist ja $C^{(i)} < \bar{\Gamma}^{(n-1)}$.)

Aus (17) und (17') folgt $R(K_\alpha^{(i+1)}) < \mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$.

Nach Tatsache (a) gibt es in $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ einen $R(K_\alpha^{(i+1)})$ in $\mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$ homologen Zyklus. Da $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ eine Sphäre ist, so ist in $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ dieser i dimensionale Zyklus für $i < n-1$ homolog Null. Alsdann ist $R(K_\alpha^{(i+1)}) \sim 0$ in $\mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$. Für $i = n-1$ gibt es bis auf Vielfachheit in $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ nur den $n-1$ dimensionalen Zyklus $R(S_\alpha^{(n)})$, der (da nun Homologie Identität ist) bis auf einen Zahlfaktor $R(K_\alpha^{(n)})$ gleich ist:

$$R(K_\alpha^{(n)}) = R(\varepsilon_\alpha S_\alpha^{(n)}). \text{ Nach (17) folgt dann } C^{(n-1)} \sim 0 \text{ in } \bar{\Sigma}^{(n)}.$$

Für $i < n-1$ fanden wir

$$(18) \quad R(K_\alpha^{(i+1)} - \bar{K}_\alpha^{(i+1)}) = 0^{(i)}, \quad \bar{K}_\alpha^{(i+1)} < \mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}.$$

Für den $i+1$ dimensionalen Komplex aus $\Gamma_1^{(n-1)}$

$$(19) \quad \bar{K}^{(i+1)} = \bar{K}_1^{(i+1)} + \dots + \bar{K}_N^{(i+1)}$$

gilt ebenfalls $C^{(i)} = R(\bar{K}^{(i+1)})$. Nun besteht die Tatsache (b) für Ringe bis zur Dimension $n-1$. Da $C^{(i)} < \bar{\Gamma}^{(n-1)}$ in $\Gamma_1^{(n-1)}$ homolog Null ist, muß bereits

$$(20) \quad C^{(i)} \sim 0 \text{ in } \bar{\Gamma}^{(n-1)}, \text{ also } \sim 0 \text{ in } \bar{\Sigma}^{(n)}$$

gelten, womit die Tatsache (b) bewiesen ist.

Was die n^{te} Homologiegruppe betrifft, so ist jeder n dimensionale Zyklus von $\bar{\Sigma}^{(n)}$ ein solcher von $\Sigma_1^{(n)}$. Ist

$$(21) \quad C^{(n)} = K_1^{(n)} + \dots + K_N^{(n)}$$

ein n dimensionaler Zyklus von $\Sigma_1^{(n)}$, so gilt

$$(22) \quad 0^{(n-1)} = R(K_1^{(n)}) + \dots + R(K_N^{(n)}).$$

Der $n-1$ dimensionale Zyklus $R(K_\alpha^{(n)})$ liegt in $\mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$. Nach (a) liegt dann in $\mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$ ein ihm in $\mathfrak{R}_{\alpha,1}^{(n-1)}$ homologer, der, da Homologie hier Identität ist, $R(K_\alpha^{(n)})$ selbst ist. Also liegt $R(K_\alpha^{(n)})$ in $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$. Aber $\mathfrak{R}_\alpha^{(n-1)}$ ist eine Sphäre und enthält (bis auf Vielfachheit) nur den $n-1$ dimensionalen Zyklus $R(S_\alpha^{(n)})$. Also ist

$$(23) \quad R(K_\alpha^{(n)}) = R(\varepsilon_\alpha S_\alpha^{(n)})^7.$$

$K_\alpha^{(n)} - \varepsilon_\alpha S_\alpha^{(n)}$ ist in der Zelle $\mathfrak{S}_{\alpha,1}^{(n)}$ ein n dimensionaler Zyklus, der demnach der Nullzyklus sein muß. Folglich ist $K_\alpha^{(n)} = \varepsilon_\alpha S_\alpha^{(n)}$ und $C^{(n)} < \bar{\Sigma}^{(n)}$.

Der Fall $i=n$ ist demnach auch erledigt.

Bemerkung: Die Homogenität des simplizialen Ringes, die nur der Vereinfachung der Schreibweise wegen vorangesetzt wurde, ist keineswegs notwendig. An Stelle von (9) tritt eine Zerlegung des Ringes $\Sigma_1^{(n)}$, in der die rechts auftretenden Unterringe nicht sämtlich die Dimension n haben müssen. Im weiteren verläuft der Beweis genau wie oben.

§ 5. Mannigfaltigkeiten.

Ein homogener n dimensionaler simplizialer Ring $\Xi^{(n)}$ heißt eine n dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn jedes $n-1$ dimensionale Simplex im Rande von höchstens zwei n dimensionalen Simplexes enthalten ist. Da $\Xi^{(n)}$ homogen ist, ist ein $n-1$ dimensionales Simplex im Rande eines n dimensional Simplex vorhanden. Die $n-1$ dimensional Simplexes der n dimensional Mannigfaltigkeit sind demnach in zwei Klassen geteilt: in die der „inneren“ Simplexes (die zwei n dimensionale Simplexes beranden) und in die der (nur einen n dimensional Simplex berandenden) „Randsimplexes“.

Wir definieren nun den $n-1$ dimensional Randring $Y^{(n-1)}$ der Mannigfaltigkeit $\Xi^{(n)}$ als den kleinsten Ring über den $n-1$ dimensional Randsimplexes, d. i. jener homogene $n-1$ dimensionale Ring, dessen $n-1$ dimensionale Basissimplexes die $n-1$ dimensional Randsimplexes von $\Xi^{(n)}$ sind.

Wir können nunmehr zwischen inneren und Randsimplexes von einer jeden Dimension (bis n) unterscheiden, und zwar heißen die Simplexes von $Y^{(n-1)}$ Randsimplexes von $\Xi^{(n)}$.

Ist der Randring $Y^{(n-1)}$ ohne Element, so nennen wir $\Xi^{(n)}$ eine unberandete (geschlossene) Mannigfaltigkeit.

Sei $\Sigma^{(n)}$ eine reguläre Unterteilung von $\Xi^{(n)}$, dann ist $\Sigma^{(n)}$ ebenfalls eine Mannigfaltigkeit, deren Randring $\Gamma^{(n-1)}$ eine reguläre Unterteilung des Randringes $Y^{(n-1)}$ von $\Xi^{(n)}$ ist.

Beweis: Ist das $n-1$ dimensionale Simplex von $\Sigma^{(n)}$

⁷⁾ Für $n=1$: Im $R_\alpha^{(0)}$ gibt es (bis auf Vielfachheit) nur einen null-dimensionalen Zyklus $R(S_\alpha^{(1)})$, dessen Darstellungszahlen Null als Summe haben, also gilt auch (23) für $n=1$.

$$(1) \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \dots P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{n-1})$$

im Rande des n dimensionalen Simplex von $\Sigma^{(n)}$

$$(2) \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \dots P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \sigma}^n)$$

enthalten, so ist das $n-1$ dimensionale Simplex

$$(1') \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_n}^0)$$

von $\Xi^{(n)}$ im n dimensionalen Simplex

$$(2') \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_n}^0 P_{\sigma}^0)$$

von $\Xi^{(n)}$ enthalten. Es gibt aber höchstens zwei n dimensionale Simplexes $(2')$, die $(1')$ im Rande enthalten.

Es ist also (1) ein $n-1$ dimensionales inneres oder Randsimplex von $\Sigma^{(n)}$, je nachdem $(1')$ ein inneres oder Randsimplex von $\Xi^{(n)}$ ist.

Außer den $n-1$ dimensionalen Simplexes der Art (1) von $\Sigma^{(n)}$ gibt es noch $n-1$ dimensionale Simplexes

$$(3) \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_h}^{h-1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_h \alpha_{h+2}}^{h+1} \dots P_{\alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}^n), \quad h=0, 1 \dots n-1.$$

Ein solches Simplex (3) aber begrenzt genau zwei n dimensionale Simplexes von $\Sigma^{(n)}$.

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_h}^{h-1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_h \alpha_{h+1}}^h P_{\alpha_1 \dots \alpha_h \alpha_{h+1} \alpha_{h+2}}^{h+1} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}^n) \\ (P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_h}^{h-1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_h \alpha_{h+2}}^h P_{\alpha_1 \dots \alpha_h \alpha_{h+1} \alpha_{h+2}}^{h+1} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}^n) \end{array} \right.$$

und ist somit ein inneres Simplex.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ein Punkt $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h$ ist in $\Gamma^{(n-1)}$ dann und nur dann enthalten, wenn das Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$ in $Y^{(n-1)}$ auftritt. Insbesondere enthält $\Gamma^{(n-1)}$ keinen Punkt $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}^n$.

Führen wir die symbolische, nur für Mannigfaltigkeiten sinnvolle Bezeichnung ein:

$$(5) \quad \Re(\Xi^{(n)}) = Y^{(n-1)}, \quad \Re(\Sigma^{(n)}) = \Gamma^{(n-1)},$$

so können wir sie auch folgendermaßen interpretieren. Verstehen wir unter⁸⁾ $\Xi^{(n)}$ (resp. $\Sigma^{(n)}$) die Summe modulo zwei der n dimensional

⁸⁾ Summe modulo zwei bedeutet, daß jedes n dimensionale Simplex von $\Xi^{(n)}$ im „Komplex $\Xi^{(n)}$ “ plus einmal gezählt wird; dabei wird zwischen dem positiven und dem negativen Simplex nicht mehr unterschieden.

Simplizes des Ringes $\Xi^{(n)}$ (resp. $\Sigma^{(n)}$), und unter $Y^{(n-1)}$ (resp. $\Gamma^{(n-1)}$) die Summe modulo zwei der $n-1$ dimensionalen Simplizes des Ringes $Y^{(n-1)}$ (resp. $\Gamma^{(n-1)}$), so bedeutet (5), daß der Komplex (mod. 2) $Y^{(n-1)}$ (resp. $\Gamma^{(n-1)}$) der Rand (mod. 2) des Komplexes (mod. 2) $\Xi^{(n)}$ (resp. $\Sigma^{(n)}$) ist.

Wir werden diese Bezeichnung gleich verwerten, vorerst haben wir nur noch die Mannigfaltigkeiten, die uns weiterhin beschäftigen sollen, einzuschränken.

Wir definieren eine α -Mannigfaltigkeit ($\Sigma^{(n)}$) als eine Mannigfaltigkeit, deren Randring ($\Gamma^{(n-1)}$) selbst eine Mannigfaltigkeit ist. Eine unberandete Mannigfaltigkeit wird immer als α -Mannigfaltigkeit gezählt.

Nun gilt der Satz: Der Randring $\Gamma^{(n-1)}$ einer α -Mannigfaltigkeit ist unberandet, also eine α -Mannigfaltigkeit.

Beweis: Da $\Gamma^{(n-1)}$ selbst eine Mannigfaltigkeit ist, so hat $\Gamma^{(n-1)}$ einen Randring $\Gamma^{(n-2)}$, der als Basis der $n-2$ dimensionalen Simplizes jene aus $\Gamma^{(n-1)}$ besitzt, die in $\Gamma^{(n-1)}$ nur einen $n-1$ dimensionalen Simplex beranden.

Nun ist die Summe modulo zwei dieser $n-2$ dimensionalen Basissimplizes der Randkomplex (mod. 2) des Komplexes (mod. 2) $\Gamma^{(n-1)}$, der selbst Randkomplex (mod. 2) ist. Die Summe modulo zwei der $n-2$ dimensionalen Basissimplizes des Ringes $\Gamma^{(n-2)}$ ist also der Nullkomplex, d. h. $\Gamma^{(n-2)}$ enthält kein Element.

Wir schreiben symbolisch:

$$(6) \quad \Re(\Re(\)) = 0.$$

Diese Relation ist sinnvoll nur für α -Mannigfaltigkeiten.

Wir ordnen nun jedem Punkte $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h$ von $\Sigma^{(n)}$ den homogenen $n-h$ dimensionalen Sternring zu

$$(7) \quad \mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h),$$

dessen $n-h$ dimensionale Basissimplizes die sämtlichen in $\Sigma^{(n)}$ enthaltenen Simplizes der Form

$$(8) \quad (P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \alpha_{h+2} \dots \alpha_{h+1} \dots \alpha_{h+1} \dots \alpha_{n+1}}^n)$$

sind. Mit

$$(9) \quad \Re^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$$

bezeichnen wir den $n-h-1$ dimensionalen Unterring von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$, der alle Simplizes dieses Ringes enthält, in denen die Ecke $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h$ nicht vorkommt. Er ist homogen.

Ist $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h$ ein Randpunkt von $\Sigma^{(n)}$, d. h. ein Punkt von $\Gamma^{(n-1)}$, so können wir die (7) und (9) entsprechenden Ringe auch in $\Gamma^{(n-1)}$ bilden.

Analog $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ bilden wir in $\Gamma^{(n-1)}$ den $n-h-1$ dimensionalen Ring

$$(10) \quad \mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h),$$

den $n-h-1$ dimensionalen Sternring von $P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h$ in $\Gamma^{(n-1)}$, und analog $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ bilden wir den $n-h-2$ dimensionalen Unterring

$$(11) \quad \mathfrak{U}^{(n-h-2)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$$

von $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$, der die sämtlichen $P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h$ nicht enthaltenden Simplexes dieses Ringes umfaßt. Es gilt nun die symbolische Gleichung:

$$(12) \quad \mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h) = \sum_{\sigma_i} \mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1} \sigma_i}^{h+1}),$$

wo rechts über alle verschiedenen Punkten $P_{a_1 \dots a_{h+1} \sigma_i}^{h+1}$ entsprechenden Sterne zu summieren ist. Die Relation bedeutet dabei vorerst nichts anderes als die Tatsache, daß ein jedes Simplex der linken Seite auch rechts vorkommt und umgekehrt. Betrachtet man aber wie vorher $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ als Summe (modulo zwei) der $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ aufbauenden $n-h-1$ dimensionalen Simplexes und $\mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ als Summe (modulo zwei) der $\mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ aufbauenden $n-h-1$ dimensionalen Simplexes, so erhält (12) den konkreten Inhalt, daß der Komplex (mod. 2) $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ die Summe (mod. 2) der Komplexe (mod. 2) $\mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1} \sigma_i}^{h+1})$ ist. Denn jedes $n-h-1$ dimensionale Simplex links tritt nur in einem der Summanden rechts auf. Analog zu (12) gilt

$$(12') \quad \mathfrak{U}^{(n-h-2)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h) = \sum_{\tau_i} \mathfrak{T}^{(n-h-2)}(P_{a_1 \dots a_{h+1} \tau_i}^{h+1}).$$

Wir zeigen jetzt, daß $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ eine Mannigfaltigkeit ist, und daß $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ ein Unterring des Randringes von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ ist.

Zu diesem Behufe haben wir die $n-h-1$ dimensionalen Simplexes des Ringes $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ zu untersuchen. Wir erhalten diese Simplexes durch Streichung je einer Ecke in (8). Ein $n-h-1$ dimensionales Simplex der Art

$$(13) \quad (P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h \dots P_{a_1 \dots a_t}^{t-1} P_{a_t \dots a_{t+2}}^{t+1} \dots P_{a_1 \dots a_n}^n), \quad t=h+1, \dots, n-1$$

kommt in genau zwei $n-h$ dimensionalen Simplexes vor:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} (P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h \dots P_{a_1 \dots a_t}^{t-1} P_{a_1 \dots a_t a_{t+1}}^t P_{a_1 \dots a_t a_{t+1} a_{t+2}}^{t+1} \dots P_{a_1 \dots a_{n+1}}^n) \\ (P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h \dots P_{a_2 \dots a_t}^{t-1} P_{a_1 \dots a_t a_{t+2}}^t P_{a_1 \dots a_t a_{t+1} a_{t+2}}^{t+1} \dots P_{a_1 \dots a_{n+1}}^n) \end{array} \right\}$$

Die Seite:

$$(15) \quad (P_{a_1 \dots a_{h+1} a_{h+2}}^{h+1} \dots P_{a_1 \dots a_{n+1}}^n)$$

ist nur in dem einen Simplex (8) enthalten, woraus $\Re^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h) < < \Re(\mathfrak{S}^{(n-h)} P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ folgt. Die $n-h-1$ dimensionale Seite

$$(16) \quad (P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h \dots P_{a_1 \dots a_n}^{n-1})$$

ist in $(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h \dots P_{a_1 \dots a_n}^{n-1} P_{a_1 \dots a_n}^n)$ enthalten, wenn es in $\Xi^{(n)}$ ein n dimensionales Simplex $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_n}^0 P_a^0)$ gibt [das natürlich $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_n}^0)$ enthält]. Solcher Simplexes gibt es zwei, wenn $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_n}^0)$ ein inneres Simplex, und eines, wenn $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_n}^0)$ ein Randsimplex von $\Xi^{(n)}$ ist.

Eine $n-1$ dimensionale Seite (16) berandet also höchstens zwei n dimensionale Simplexes von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$, und zwar ein oder zwei Simplexes, je nachdem $P_{a_1 \dots a_n}^{n-1}$ zu $\Gamma^{(n-1)}$ gehört oder nicht.

Damit ist die Behauptung bewiesen! Darüber hinaus folgern wir weiter:

Liegt $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_{h+1}}^0)$ nicht in $Y^{(n-1)}$, so kann infolge der Ring-eigenschaft $Y^{(n-1)}$ auch $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_{h+1}}^0 \dots P_{a_n}^0)$ nicht enthalten, dann aber hat $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ nur die Randsimplizes (15) und es gilt die symbolische Randrelation:

$$(17) \quad \Re(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)) = \Re^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h), \quad P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h \text{ nicht in } \Gamma^{(n-1)}!$$

Diese symbolische Relation erhält modulo zwei wieder den konkreten Inhalt, daß der $n-h$ dimensionale Komplex (mod. 2) $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ den $n-h-1$ dimensional Komplex (mod. 2) $\Re^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$ zum Rande (mod. 2) hat. (Dabei ist der Komplex (mod. 2) immer die Summe (mod. 2) der Basiselemente höchster Dimension des entsprechenden Ringes.)

Für den $\mathfrak{S}^{(n-h)}$ entsprechend gebildeten Ring $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h)$, $P_{a_1 \dots a_{h+1}}^h < \Gamma^{(n-1)}$, gilt ebenso die Mannigfaltigkeitseigenschaft und weiter

$$(17') \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)) = \mathfrak{U}^{(n-h-2)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h), \\ I_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h < \Gamma^{(n-1)}.$$

Liegt $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$ in $Y^{(n-1)}$, so enthält der Randring $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h))$ außer den Simplexes von $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ noch $n-h-1$ dimensionale Simplexes der Art (16), wo $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0 \dots P_{\alpha_n}^0) < Y^{(n-1)}$. Diese $n-h-1$ dimensionalen Simplexes bilden aber die $n-h-1$ dimensionale Basis des Ringes $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$. Statt (17) gilt also dann:

$$(18) \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)) = \mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h) + \\ + \mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h), \quad P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h < \Gamma^{(n-1)}.$$

Die beiden homogenen Ringe $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}$ und $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}$ sind im Randring von $\mathfrak{S}^{(n-h)}$ komplementär, denn jedes $n-h-1$ dimensionale Simplex von $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ enthält einen Punkt $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}^n$ und kann nicht in $\Gamma^{(n-1)}$ liegen. Dagegen ist $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}$ ein Unterring von $\Gamma^{(n-1)}$.

Wir können demnach, da jedes $n-h-1$ dimensionale Simplex links in (18) auf der rechten Seite genau einmal auftritt, diese symbolische Gleichung als richtige Relation modulo zwei ansehen.

Wir zeigen noch die Relation:

$$(19) \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)) = \mathfrak{U}^{(n-h-2)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h), \\ P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h < \Gamma^{(n-1)}.$$

Ein $n-h-2$ dimensionales Simplex von $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$

$$(20) \quad (P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^{h+1} \alpha_{h+2} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{t-1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_{t+2}}^{t+1} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}}^n), \\ t = h+1, \dots, n$$

berandet ein oder zwei $n-h-1$ dimensionale Simplexes, je nachdem

$$(21) \quad (P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^{t-1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_{t+2}}^{t+1} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^n)$$

ein oder zwei $n-h$ dimensionale Simplexes von $\mathfrak{S}^{(n-h)}$ berandet. Nun beranden alle Simplexes (21) mit Ausnahme der Simplexes (16) zweimal. Also begrenzen auch alle Simplexes (20) zweimal mit Ausnahme von

$$(22) \quad (P_{\alpha_1 \dots \alpha_h \alpha_{h+1}}^h \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{n-1}), \text{ wenn } P_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{n-1} < \Gamma^{(n-1)}.$$

Diese Tatsache bildet aber den symbolischen Inhalt der Relation (19). Als Nebenresultat notieren wir, daß $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ und $\mathfrak{U}^{(n-h-2)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ α -Mannigfaltigkeiten sind.

Also sind auch $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ und $\mathfrak{Z}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ α -Mannigfaltigkeiten.

(Der Randring $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h))$ ist eine Mannigfaltigkeit, denn ein $n-h-2$ dimensionales Simplex gehört entweder zu $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}$ oder zu $\mathfrak{Z}^{(n-h-1)}$ oder zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{R}^{(n-h-1)}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{Z}^{(n-h-1)}) = \mathfrak{U}^{(n-h-2)}$ und berandet somit stets zwei $n-h-1$ dimensionale Simplexe.)

Für spätere Zwecke beweisen wir:

Ist $(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^0)$ ein inneres Simplex, so ist kein Simplex von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ in $\Gamma^{(n-1)}$ enthalten. Denn ein Simplex von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$ hat die Gestalt

$$(23) \quad (P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \alpha_{h+2} \dots \alpha_{t+1}}^t \quad P_{\alpha_1 \dots \alpha_{t+r+1} \dots}^{t+r}), \text{ läge es in}$$

$\Gamma^{(n-1)}$, so müßten sämtliche Ecken, also auch $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \dots \alpha_{t+1}}^t$, somit $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h$ in $\Gamma^{(n-1)}$ liegen; Widerspruch!

§ 6. Die offene Mannigfaltigkeit, reguläre Mannigfaltigkeiten.

Die Komplexe (mod. 2) $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)$, $h = 0, 1, \dots, n$ bilden im modulo zwei betrachteten Ring $\Sigma^{(n)}$ ein Teilsystem der Komplexe, das aber noch keinen Ring bildet. Wenn wir wie im § 5 mit $\mathfrak{R}(\cdot)$ die Randoperation modulo zwei bezeichnen, so gilt ja:

$$(1) \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)) = \sum_{\sigma_i} \mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \sigma_i}^{h+1}),$$

wenn $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h$ nicht in $\Gamma^{(n-1)}$ liegt und

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h)) &= \sum_{\sigma_i} \mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \sigma_i}^{h+1}) + \\ &+ \mathfrak{Z}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h), \text{ wenn } P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1}}^h < \Gamma^{(n-1) \text{ g}}. \end{aligned}$$

Öffnen wir aber $\Sigma^{(n)}$ in bezug auf seinen Randring $\Gamma^{(n-1)}$, d. h. bilden wir das offene Komplement von $\Gamma^{(n-1)}$ in $\Sigma^{(n)}$, das wir mit $\dot{\Sigma}^{(n)}$ bezeichnen, so gilt, da kein $n-h$ dimensionaler Komplex (mod. 2)

⁹⁾ Aus (1) und (2) folgt, daß die Gesamtheit der $\mathfrak{S}^{(n-h)}$, $\mathfrak{Z}^{(n-h-1)}$ einen Ring $Z^{(n)}$ bildet, denn nach (2) liegt $\mathfrak{R}(\mathfrak{Z}^{(n-h-1)}(\cdot))$ in dieser Gesamtheit. Die Elemente $\mathfrak{Z}^{(n-h-1)}$ bilden den Randring des so definierten Ringes. $\dot{Z}^{(n)}$ ist der in bezug auf den Randring geöffnete Ring.

von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ nach Definition in $\Gamma^{(n-1)}$ liegt, dagegen $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}) < \Gamma^{(n-1)}$ ist,

$$(3) \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})) = \sum_{\sigma_i} \mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i),$$

ob $P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}$ in $\Gamma^{(n-1)}$ liegt oder nicht. $\mathfrak{R}(\)$ bedeutet die Randoperation in $\dot{\Sigma}^{(n)}$.

Bemerkung: $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ als Komplex (mod. 2) ist die Summe (mod. 2) der $n-h$ dimensionalen Komplexe (8), § 5, die alle Punkte $P_{\alpha_1}^n \dots \alpha_{n+1}$ enthalten, also sicher nicht in $\Gamma^{(n-1)}$ liegen.

Nach (3) aber bilden die Komplexe (mod. 2) $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ im modulo zwei betrachteten Ringe $\dot{\Sigma}^{(n)}$, das ist der in bezug auf seinen Randring $\Gamma^{(n-1)}$ geöffnete $\dot{\Sigma}^{(n)}$, einen Unterring, dessen Randrelationen eben die Relationen (3) sind. Dieser Unterring heiße $\dot{Z}^{(n)}$.

Ordnen wir nun dem im (modulo zwei betrachteten) Ringe $\Xi^{(n)}$ liegenden h dimensionalen Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$ den im Ring $\dot{Z}^{(n)}$ liegenden $n-h$ dimensionalen Komplex $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ zu, so ist die Zuordnung eineindeutig:

$$(4) \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0) \rightleftharpoons \mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}).$$

Enthält $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ im Rande $\mathfrak{S}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma)$, so enthält das diesem zugeordnete Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0 P_{\sigma}^0)$ im Rande das jenem zugeordnete Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$.

Die beiden modulo zwei betrachteten Ringe $\Xi^{(n)}$ und $\dot{Z}^{(n)}$ sind also dual. Wir setzen nun $\Xi^{(n)}$ als reguläre Mannigfaltigkeit voraus und verstehen dies im Sinne der Definition:

Eine a -Mannigfaltigkeit heißt regulär, wenn der Ring $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ eine Sphäre oder Zelle ist, je nachdem $P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}$ innerer Punkt ist oder nicht, und wenn der Ring $\mathfrak{U}^{(n-h-2)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ eine Sphäre ist¹⁰⁾.

Bemerkung: a) Die Ringe $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$, $\mathfrak{T}^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ sind Zellen, da ihre höchst dimensionalen Simplex die Ecke $P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}$ enthalten. b) Der Rand einer regulären Mannigfaltigkeit ist eine reguläre Mannigfaltigkeit.

Man kann nun, wie für die reguläre Unterteilung (oder in der Art des Abschnittes III der Arbeit über „Abstrakte Topologie“) die Identität der Homologiegruppen von $\dot{Z}^{(n)}$ und $\dot{\Sigma}^{(n)}$ nachweisen.

¹⁰⁾ Eine 0-Sphäre soll aus zwei Punkten, eine 0-Zelle aus einem Punkte bestehen. Eine eindimens. Mannigfaltigkeit ist stets regulär.

$\dot{\Sigma}^{(n)}$ ist die reguläre Unterteilung von $\dot{\Xi}^{(n)}$, wobei die reguläre Unterteilung des geöffneten Ringes per def. der geöffnete Ring der regulären Unterteilung ist¹¹⁾.

Wir zeigen die Identität der Homologiegruppen von $\dot{\Sigma}^{(n)}$ und $\dot{\Xi}^{(n)}$ in einer beifolgenden Bemerkung. Also haben $\dot{Z}^{(n)}$ und $\dot{\Xi}^{(n)}$ dieselben Homologiegruppen oder, was das gleiche besagt:

Der in bezug auf den Randring geöffnete Ring $\dot{\Xi}^{(n)}$ hat dieselben Homologiegruppen wie der $\Xi^{(n)}$ duale Ring.

Daran ändert auch eine reguläre Unterteilung, da sie die Homologiegruppen erhält, nichts. In der letzten Behauptung ist der in meiner oben zitierten Arbeit genannte Poincarésche Satz bzw. seine Verallgemeinerung enthalten.

Eine Anwendung:

Es sei $\Sigma^{(n)}$ eine reguläre Mannigfaltigkeit, und zwar ein Nullring, $\Sigma_1^{(n)}$ ein echter Unterring von $\Sigma^{(n)}$, der selbst eine reguläre Mannigfaltigkeit ist und mit dem Randring $\Gamma^{(n-1)}$ von $\Sigma^{(n)}$ keinen Komplex gemein habe.

Sein im vorhergehenden definierter Randring Γ_r fällt dann mit dem schon früher im abstrakten Sinne definierten Randring Σ_r zusammen. (Es wurde zuerst der Komplementring $\Sigma_2^{(n)}$ von $\Sigma_1^{(n)}$ definiert und dann Σ_r als Durchschnitt der beiden Ringe $\Sigma_1^{(n)}$, $\Sigma_2^{(n)}$). Beweis:

Ist nämlich $a^{(n-1)}$ ein $n-1$ dimensionales Element des Durchschnittes von $\Sigma_1^{(n)}$ und $\Sigma_2^{(n)}$, so berandet es ein Element $a_1^{(n)}$ von $\Sigma_1^{(n)}$ und ein Element $a_2^{(n)}$ von $\Sigma_2^{(n)}$ und kann nicht mehr als ein Element von $\Sigma_1^{(n)}$ beranden, da es sonst drei Elemente der Mannigfaltigkeit $\Sigma^{(n)}$ berandete.

Ist umgekehrt $a^{(n-1)} < \Gamma_r$, so berandet $a^{(n-1)}$ nur ein Element $a_1^{(n)} < \Sigma_1^{(n)}$, da aber nach Voraussetzung $a^{(n-1)}$ kein Randelement von $\Sigma^{(n)}$ ist, so muß es noch ein Element $a_2^{(n)} < \Sigma_2^{(n)}$ beranden.

Wir haben nun im § 3 des ersten Abschnitts die Relation (17) festgestellt:

$$(5) \quad h_{q,r} = h_{q,1} + h_{q+1,1}, \quad \rho = 1, \dots, n-2.$$

Dabei war $h_{q,r}$ die ρ^{te} Bettische Zahl des Randringes Σ_r ,

$h_{q,1}$ " ρ^{te} " " " Ringes $\Sigma_1^{(n)}$,

$h_{q+1,1}$ " $\rho+1^{\text{te}}$ " " " " $\Sigma_1^{(n)}$,

wo $\dot{\Sigma}_1^{(n)}$ der in bezug auf Σ_r geöffnete Ring $\Sigma_1^{(n)}$ ist. Nun hat $\dot{\Sigma}_1^{(n)}$ die Homologiegruppen des $\Sigma_1^{(n)}$ dualen Ringes, daher gilt:

$$(6) \quad h_{q+1,1} = h_{n-q-1,1}$$

und wir erhalten

¹¹⁾ $\dot{\Xi}^{(n)}$ ist der in bezug auf $\Gamma^{(n-1)}$ geöffnete Ring $\Xi^{(n)}$.

$$(7) \quad h_{q,r} = h_{q,1} + h_{n-1-q,1}, \quad \rho = 1, \dots, n-2.$$

Aus (7) folgt $h_{q,r} = h_{n-1-q,r}$, eine Relation, die aus der Tatsache, daß Σ_r eine $n-1$ dimensionale (geschlossene) reguläre Mannigfaltigkeit ist, von selbst hervorgeht, weiter aber für ungerades $n = 2\rho + 1$, oder $\rho = n - \rho - 1$:

$$(8) \quad h_{\frac{n-1}{2},r} = 2 h_{\frac{n-1}{2},1}.$$

Es gilt also für jene (geschlossenen) regulären Mannigfaltigkeiten, die in Räumen ungerader Dimension eine reguläre Mannigfaltigkeit beranden, neben der von Poincaré entdeckten Symmetrie der Bettischen Zahlen noch die Tatsache, daß die in der Mitte stehende Bettische Zahl gerade sein muß. Für Räume gerader Dimension tritt diese Bettische Zahl nicht auf.

(Im R_3 : Das Geschlecht p ist die halbierte erste Bettische Zahl, die nach obigem gerade ist.)

Bemerkung über die reguläre Unterteilung geöffneter simplizialer Ringe.

Wir bezeichnen wie im vorhergehenden mit $\Xi^{(n)}$ den n dimensional simplizialen Ring, der eine Mannigfaltigkeit sei, und mit $Y^{(n-1)}$ seinen Randring.

$\Sigma^{(n)}$ sei die reguläre Unterteilung von $\Xi^{(n)}$, deren Randring $\Gamma^{(n-1)}$ eine reguläre Unterteilung von $Y^{(n-1)}$ ist.

$\dot{\Xi}^{(n)}$ ist der in bezug auf $Y^{(n-1)}$ geöffnete Ring $\Xi^{(n)}$ und $\dot{\Sigma}^{(n)}$ der in bezug auf $\Gamma^{(n-1)}$ geöffnete Ring $\Sigma^{(n)}$.

Wir nennen dann $\dot{\Sigma}^{(n)}$ die reguläre Unterteilung von $\dot{\Xi}^{(n)}$ und beweisen unter Bezugnahme auf die Ergebnisse des § 3 die Identität der Homologiegruppen dieser zwei Ringe.

Ist $C^{(q)}$ ein Zyklus in $\dot{\Sigma}^{(n)}$, dann gilt in $\Sigma^{(n)}$: $R(C^{(q)}) = C^{(q-1)}$, $C^{(q-1)} < \Gamma^{(n-1)}$. $\Gamma^{(n-1)}$ ist die reguläre Unterteilung von $Y^{(n-1)}$, also gibt es in $Y^{(n-1)}$ einen Zyklus $C_1^{(q-1)} < Y^{(n-1)}$, daß $C^{(q-1)} \sim C_1^{(q-1)}$ in $\Gamma^{(n-1)}$ ist:

$$R(K_1^{(q)}) = C^{(q-1)} - C_1^{(q-1)}, \quad K_1^{(q)} < \Gamma^{(n-1)}.$$

$C^{(q)} - K_1^{(q)}$ ist dann in $\Sigma^{(n)}$ ein Komplex, dessen Rand $C_1^{(q-1)}$ ist. Da $C_1^{(q-1)} < Y^{(n-1)} < \dot{\Xi}^{(n)}$ in $\Sigma^{(n)}$ homolog Null ist, so ist $C_1^{(q-1)}$ auch in $\Xi^{(n)}$ homolog Null, also gilt:

$$R(C^{(q)} - K_1^{(q)}) = R(K_2^{(q)}) = C_1^{(q-1)}, \quad K_2^{(q)} < \Xi^{(n)}.$$

Nun ist $C^{(q)} - K_1^{(q)} - K_2^{(q)}$ ein Zyklus in $\Sigma^{(n)}$. Somit existiert in $\Xi^{(n)}$ ein Zyklus $C_3^{(q)}$, der ihm in $\Sigma^{(n)}$ homolog ist:

$$C^{(q)} - K_1^{(q)} - K_2^{(q)} - C_3^{(q)} = R(K^{(q+1)}), \quad C_3^{(q)} < \Xi^{(n)}, \quad K^{(q+1)} < \Sigma^{(n)}.$$

Durch Punktierung erhalten wir:

$$(z) \quad C^{(e)} - (\dot{K}_2^{(e)} + \dot{C}_3^{(e)}) = \dot{R}(\dot{K}^{(e+1)}).$$

In obiger Relation ist $\dot{K}_2^{(e)} + \dot{C}_3^{(e)} < \dot{\Xi}^{(n)}$ ein Zyklus von $\dot{\Xi}^{(n)}$. Bei der regulären Unterteilung entstehen daher keine neuen Klassen. (In (α) ist die Tatsache (a) des § 3 für den geöffneten Ring festgestellt.) Wir gehen an die Feststellung der Tatsache (b).

Sei jetzt $C^{(e)}$ ein Zyklus in $\dot{\Xi}^{(n)}$, der in $\dot{\Sigma}^{(n)}$ homolog Null ist: $\dot{R}(K^{(e+1)}) = C^{(e)}$, $K^{(e+1)} < \dot{\Sigma}^{(n)}$, also $R(K^{(e+1)}) = C^{(e)} + K_1^{(e)}$, $K_1^{(e)} < \Gamma^{(n-1)}$. Daraus folgt $R(C^{(e)}) = R(-K_1^{(e)})$. Da $R(C^{(e)}) < Y^{(n-1)}$, so ist $R(K_1^{(e)})$ ein Zyklus von $Y^{(n-1)}$, der in $\Gamma^{(n-1)}$ homolog Null ist. Er ist somit schon in $Y^{(n-1)}$ homolog Null und es gilt $R(K_2^{(e)}) = R(K_1^{(e)})$, $K_2^{(e)} < Y^{(n-1)}$. Es ist weiter $K_2^{(e)} - K_1^{(e)}$ ein Zyklus in $\Gamma^{(n-1)}$, daher gibt es in $Y^{(n-1)}$ einen ihm in $\Gamma^{(n-1)}$ homologen $C_2^{(e)}$: $K_2^{(e)} - K_1^{(e)} - C_2^{(e)} = R(K_1^{(e+1)})$, $K_1^{(e+1)} < \Gamma^{(n-1)}$. Bilden wir jetzt $K_1^{(e+1)} + K^{(e+1)}$, so gilt $R(K^{(e+1)} + K_1^{(e+1)}) = C^{(e)} + (K_2^{(e)} - C_2^{(e)}) < \dot{\Xi}^{(n)}$. Also ist $C^{(e)} - (K_2^{(e)} - C_2^{(e)})$ bereits in $\dot{\Xi}^{(n)}$ homolog Null: $R(K_3^{(e+1)}) = C^{(e)} - (K_2^{(e)} - C_2^{(e)})$, $K_3^{(e+1)} < \dot{\Xi}^{(n)}$.

Durch Punktierung erhalten wir daraus: $\dot{R}(\dot{K}_3^{(e+1)}) = C^{(e)}$, $\dot{K}^{(e+1)} < \dot{\Xi}^{(n)}$. Also ist $C^{(e)}$ bereits in $\dot{\Xi}^{(n)}$ homolog Null, womit auch die Tatsache (b) des § 3 festgestellt erscheint.

§ 7. Der t dimensionale Unterring der n dimensionalen randlosen regulären Mannigfaltigkeit.

Die Überlegung dieses Paragraphen betreffen wie die der vorhergehenden Ringe modulo zwei. $\Xi^{(n)}$ sei eine n dimensionale randlose reguläre Mannigfaltigkeit, $\Sigma^{(n)}$ ihre reguläre Unterteilung, $Z^{(n)}$ der im vorhergehenden Paragraphen definierte Ring, dessen Basiselemente die Komplexe (mod. 2) $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{a_1}^h \dots P_{a_{h+1}}^h)$ sind und $\mathfrak{M}^{(t)}$ ein t dimensionaler Unterring in $\Xi^{(n)}$.

Der Ring $\mathfrak{M}^{(t)}$ sei von der Eigenschaft, daß er jedes Simplex $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_{h+1}}^0)$ von $\Xi^{(n)}$ enthalte, dessen Punkte zu $\mathfrak{M}^{(t)}$ gehören.

Diese Einschränkung des Ringes $\mathfrak{M}^{(t)}$ ist nicht wesentlicher Natur. Hat $\mathfrak{M}^{(t)}$ diese Eigenschaft nicht, so betrachten wir statt $\Xi^{(n)}$ den Ring der regulären Unterteilung von $\Xi^{(n)}$, dadurch wird eine für $\mathfrak{M}^{(t)}$ reguläre Unterteilung induziert, die (in bezug auf die reguläre Unterteilung von $\Xi^{(n)}$) bereits die Eigenschaft besitzt.

Die Basiselemente von $Z^{(n)}$ haben in bezug auf $\mathfrak{M}^{(t)}$ dreierlei Charakter und zerfallen demgemäß in drei Klassen. Dies gilt vorerst von den Simplex von $\Xi^{(n)}$. Ein Simplex

$$(1) \quad (P_{a_1}^0 \ P_{a_2}^0 \ \dots \ P_{a_{h+1}}^0)$$

gehört zur Klasse (a), (b) oder (c), je nachdem sämtliche Eckpunkte, kein Eckpunkt oder nur einige Eckpunkte $P_{\alpha_i}^0, i=1, \dots, h+1$ zu $\mathfrak{M}^{(t)}$ gehören.

Da zwischen den Simplizes (1) von $\Xi^{(n)}$ und den Basiselementen von $Z^{(n)}$

$$(1') \quad \mathfrak{S}^{(n-h)} (P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$$

eine eindeutige Zuordnung besteht, überträgt sich diese Klasseneinteilung (a), (b) und (c) auf die Basiselemente von $Z^{(n)}$. Infolge der Randrelation

$$(2) \quad \mathfrak{R} (\mathfrak{S}^{(n-h)} (P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})) = \sum_{\sigma_i} \mathfrak{S}^{(n-h-1)} (P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i)$$

bilden nur die Elemente der (c)-Klasse einen Ring, der mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet sei. Die Dimension von $\mathfrak{B}$ ist kleiner als n , da dieser Ring definitionsgemäß ein n dimensionales Element, das zur Klasse (a) oder (b) zählt, nicht enthält.

Gibt es in $\Xi^{(n)}$ ein Simplex $(P_\alpha P_\beta)$ so, daß $P_\alpha < \mathfrak{M}^{(t)}$, $P_\beta < \mathfrak{M}^{(t)}$, so enthält $\mathfrak{B}$ das $n-1$ dimensionale Element $\mathfrak{S}^{(n-1)} (P_{\alpha\beta}^1)$. (Dies trifft zu, wenn z. B. $\Xi^{(n)}$ zusammenhängend und $\mathfrak{M}^{(t)}$ ein echter Unterring ist.)

Bilden wir den kleinsten Ring $\mathfrak{U}^{(n)}$ über den Elementen der Klasse (a) in $Z^{(n)}$ und den kleinsten Ring $\mathfrak{B}^{(n)}$ über den Elementen der Klasse (b) in $Z^{(n)}$, so sind sie in $Z^{(n)}$ komplementär und $\mathfrak{B}$ ist ihr gemeinsamer Randring.

Denn der zum kleinsten Ring führende Prozeß der Adjunktion von Randkomplexen, angewendet auf die Elemente (a) oder (b), ergänzt diese nach (2) nur um Elemente (c).

Öffnen wir nun $\mathfrak{U}^{(n)}$ in bezug auf seinen Randring $\mathfrak{B}$, so erhalten wir einen Ring $\dot{\mathfrak{U}}^{(n)}$, der, wie man leicht zeigt, ein zu $\mathfrak{M}^{(t)}$ dualer Ring ist.

Denn jetzt sind die Simplizes (a), das sind die von $\mathfrak{M}^{(t)}$, und die Komplexe (1') der Klasse (a) nicht bloß eindeutig zugeordnet, sondern sie bilden in bezug auf die modifizierte Randzuordnung der letzteren Komplexe [mit $\mathfrak{R} ()$ bezeichnet]

$$(3) \quad \mathfrak{R} (\mathfrak{S}^{(n-h)} (P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})) = \sum_{\sigma_i} \mathfrak{S}^{(n-h-1)} (P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i)$$

zwei duale Ringe. [Rechts in der Summe sind alle $\mathfrak{S}^{(n-h-1)} (P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i)$ Null, sobald $\mathfrak{S}^{(n-h-1)} (P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i) < \mathfrak{B}$.]

Hat demnach $\mathfrak{M}^{(t)}$ die Bettischen Zahlen $h_i, i=0, 1, \dots, n$; $h_{i+1} = h_{i+2} = \dots = h_n = 0$, so gilt, wenn $\dot{h}$ die Bettizahlen von $\dot{\mathfrak{U}}^{(n)}$ sind:

$$(4) \quad \dot{h}_i = h_{n-i}, i = 0, 1, \dots, n.$$

Ist nun $\Xi^{(n)}$ als Nullring vorausgesetzt, dann sind $\Sigma^{(n)}$ und $Z^{(n)}$ Nullringe.

Die Bettischen Zahlen von $\mathfrak{B}^{(n)}$, dem Komplement von $\mathfrak{U}^{(n)}$, seien mit k_i , $i = 0, 1, \dots, n$ bezeichnet.

Nach § 2, Abschnitt 1, gilt, da $\mathfrak{U}^{(n)}$ das offene Komplement von $\mathfrak{B}^{(n)}$ im Nullringe $Z^{(n)}$ ist:

$$(5) \quad k_i = h_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Aus (4) und (5) folgt dann die wichtige Relation:

$$(6) \quad k_i = h_{n-i-1}, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Beispiel: Die Kurven im R_3 ; $i = 1, n = 3$, also $k_1 = h_1$.

Dieses Beispiel für den einfachsten Fall veranschaulicht die Bedeutung der Relation (6).

§ 8. Orientierbare Mannigfaltigkeiten.

Eine α -Mannigfaltigkeit $\Xi^{(n)}$ heißt orientierbar, sobald es möglich ist, jedem n dimensionalen Simplex von $\Xi^{(n)}$ den Faktor ± 1 so zuzuordnen, daß der dann durch Summenbildung entstehende n dimensionale Komplex $K^{(n)}$ einen Rand(zyklus) $R(K^{(n)})$ hat, der aus den $n-1$ dimensionalen Simplizes des Randringes $Y^{(n-1)}$ von $\Xi^{(n)}$, jedes Randsimplex plus oder minus einmal gezählt, allein aufgebaut ist.

Der Randring $Y^{(n-1)}$ der orientierbaren Mannigfaltigkeit ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit, da ja $\mathfrak{R}(Y^{(n-1)}) = 0$ und ebenso $R(R(K^{(n)})) = 0^{(n-2)}$ ist.

Die n dimensionalen Simplizes $(P_\alpha^0 \dots P_{\alpha_n}^0 P_\sigma^0)$, $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_n}^0 P_\tau^0)$ haben beide das Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_n}^0)$ im Rande, da das $n-1$ dimensionale Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_n}^0)$ demnach nicht zu $Y^{(n-1)}$ gehört, so muß $K^{(n)}$ die beiden n dimensionalen Simplizes mit entgegengesetztem Vorzeichen enthalten.

Ist $\Sigma^{(n)}$ die reguläre Unterteilung von $\Xi^{(n)}$ und $\Gamma^{(n-1)}$ der Randring von $\Sigma^{(n)}$, so ordnen wir dem n dimensionalen Simplex von $\Sigma^{(n)}$

$$(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_1 \alpha_2}^1 P_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^2 \dots P_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1}}^n)$$

das Vorzeichen zu, das der Faktor des Simplex $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{n+1}}^0)$ in $K^{(n)}$ ist.

Bilden wir dann in $\Sigma^{(n)}$ den $K^{(n)}$ analog gebildeten Komplex $L^{(n)}$, so wird $R(L^{(n)})$ nach (2) und (8), § 3 aus den Simplizes von $\Gamma^{(n-1)}$ allein aufgebaut sein, oder:

Die reguläre Unterteilung einer orientierbaren Mannigfaltigkeit ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

In der Tat ist $L^{(n)}$ aus den Komplexen $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{n+1}}^0)$ in völlig gleicher Weise aufgebaut wie $K^{(n)}$ aus den Simplexes $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{n+1}}^0)$. Da die Randrelationen nach § 3, (8) identisch sind, folgt die Behauptung.

Wir wollen, um die die Orientierung kennzeichnenden Gedanken recht klar hervortreten zu lassen, vorerst annehmen, daß $\Xi^{(n)}$ (also auch $\Sigma^{(n)}$) randlose Mannigfaltigkeiten seien. Wir betrachten dann den Sternring $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$.

Wir wollen jedem seiner $n-h$ dimensionalen Simplexes, z. B.

$$(1) \quad (P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1} P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \alpha_{h+2}}^{h+1} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \dots \alpha_{n+1}}^n)$$

ein bestimmtes Vorzeichen $+1$ oder -1 zuordnen. Wir fixieren zu diesem Behufe eine bestimmte Folge der $h+1$ Punkte $P_{\alpha_1}^0, P_{\alpha_2}^0, \dots, P_{\alpha_{h+1}}^0$, z. B. die soeben geschriebene.

Dem Simplex (1) wird dann das Vorzeichen $+1$ oder -1 zugeordnet, je nachdem $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0 P_{\alpha_{h+2}}^0 \dots P_{\alpha_{n+1}}^0)$ in $K^{(n)}$ den Faktor $+1$ oder -1 besitzt.

Die Vorzeichenzuordnung hängt somit weniger von der Folge $P_{\alpha_1}^0, \dots, P_{\alpha_{h+1}}^0$ ab, als vom Simplex $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$. Je nachdem man es selbst oder das negative zugrunde legt, gibt es zwei verschiedene Vorzeichenzuordnungen.

Mit $S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ bezeichnen wir dann den durch Summation über alle (mit den zugehörigen Vorzeichen versehenen) Simplexes (1) gebildeten $n-h$ dimensionalen Komplex, wobei wir jetzt aber auf die Permutationen $\alpha_1, \dots, \alpha_{h+1}$ achten. Wir schreiben $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{h+1}$, wenn das fixierte Simplex $(P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$ ist, oder durch eine gerade Zahl von Transpositionen (die beim Simplex erlaubt sind) diese Darstellung erhält.

Damit ist eine eindeutige Zuordnung

$$(2) \quad S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \alpha_2 \dots \alpha_{h+1}) \xrightarrow{\quad} (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_2}^0 \dots P_{\alpha_{h+1}}^0)$$

hergestellt, die wir jetzt weiter verfolgen.

$S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ ändert das Vorzeichen bei jeder Transposition der Folge $\alpha_1, \dots, \alpha_{h+1}$.

Nach § 5 unterscheiden wir in $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ drei Arten $n-h-1$ dimensional Simplexes. Da wir $\Xi^{(n)}$ als randlose Mannigfaltigkeit voraussetzen, so bilden die $n-h-1$ dimensional Simplexes

$$(3) \quad (P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \alpha_{h+2} P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+1} \alpha_{h+2} \alpha_{h+3}}^{h+2} \dots P_{\alpha_1 \dots \alpha_{h+2} \dots \alpha_{n+1}}^{n+1})$$

nach § 5, (13), (15) und (16) den Randring von $\mathfrak{S}^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$.

Bilden wir nun $R(S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}))$, so fallen alle $n-h-1$ -dimensionalen Simplexes § 5, (13) wegen § 5, (14) weg und ebenso die Simplexes § 5 (16).

Es verbleiben allein die Simplexes (3), die $\sum_i S^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i)$ als Summe ergeben. (Dabei ist die Indizesfolge bis auf eine gerade Anzahl von Permutationen fixiert.) Denn (3) hat in $S^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i)$ das Vorzeichen von $(P_{\alpha_1}^0 \dots P_{\alpha_h+1}^0 P_{\alpha_h+2}^0 \dots P_{\alpha_n+1}^0)$ in $K^{(n)}$, dasselbe Vorzeichen aber hat das Simplex (1) in $S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$.

Also gilt in der Tat

$$(4) \quad R(S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})) = \sum_i S^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i).$$

Wenn wir jetzt an Stelle von (2) die neue Zuordnung

$$(5) \quad S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}) \xrightarrow{\quad} (P_{\alpha_h+1}^0 P_{\alpha_h}^0 \dots P_{\alpha_1}^0)$$

festlegen, so folgt aus (4) die Dualität des Ringes $Z^{(n)}$, dessen Elemente die $S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ sind, und des Ringes $\Xi^{(n)}$.

Denn es liegt $S^{(n-h-1)}(P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \sigma_i)$ plus einmal in $R(S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}))$, genau so wie $R(P_{\sigma_i}^0 P_{\alpha_h+1}^0 \dots P_{\alpha_1}^0)$ plus einmal $(P_{\alpha_h+1}^0 \dots P_{\alpha_1}^0)$ enthält.

Ist nun $\Xi^{(n)}$ nicht randlos, so gilt die Relation (4) nur für innere Punkte $P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}$. Öffnen wir dann $\Xi^{(n)}$ in bezug auf seinen Randring $Y^{(n-1)}$, so gilt die Relation (4) in bezug auf den neuen Randoperator $\hat{R}(\)$ ohne Ausnahme.

Die Dualität des Ringes $\hat{Z}^{(n)}$, dessen Elemente die $S^{(n-h)}(P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ sind, und des Ringes $\Xi^{(n)}$ besteht dann wie zuvor, jetzt aber ist $\hat{R}(\)$ die Randoperation des Ringes $\hat{Z}^{(n)}$. Für orientierbare reguläre Mannigfaltigkeiten gilt dann der im § 6 (mod. 2) bewiesene Poincarésche Satz, ebenso wie die am Ende des § 6 nur für Komplexe modulo zwei abgeleitete Anwendung.

Ebenso gilt die Entwicklung des § 7 für orientierbare reguläre Mannigfaltigkeiten.

§ 9. Produkttringe.

Als Simplexprodukte der Simplexes $(x_{i_1} \dots x_{i_v+1})$, $(\beta_{j_1} \dots \beta_{j_\mu+1})$ definieren wir

$$(1) \quad (x_{i_1} \dots x_{i_v+1}) \cdot (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_\mu+1}) = (x_{i_1} \dots x_{i_v+1} \beta_{j_1} \dots \beta_{j_\mu+1}).$$

Die Multiplikation (1) ist assoziativ, aber nicht kommutativ. Es gilt:

$$(2) \quad (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}}) \cdot (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\nu+1}}) = (-1)^{\mu\nu} (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\nu+1}}) \cdot (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}}).$$

Haben wir zwei simpliziale Komplexe

$$(3) \quad K^{(\varrho)} = \Sigma k_{i_1 \dots i_{\varrho+1}} (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\varrho+1}}), \quad L^{(\sigma)} = \Sigma l_{j_1 \dots j_{\sigma+1}} (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\sigma+1}}),$$

so definieren wir als Produkt $K^{(\varrho)} \cdot L^{(\sigma)}$ den $\varrho + \sigma + 1$ dimensionalen Komplex

$$(4) \quad K^{(\varrho)} \cdot L^{(\sigma)} = \Sigma k_{i_1 \dots i_{\varrho+1}} l_{j_1 \dots j_{\sigma+1}} (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\varrho+1}}) \cdot (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\sigma+1}}).$$

Für die Randoperation gilt dann¹²⁾

$$(5) \quad \begin{aligned} R[(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\nu+1}}) \cdot (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}})] &= R(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\nu+1}}) \cdot (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}}) \\ &\quad + (-1)^{\nu+1} (\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\nu+1}}) \cdot R(\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}}), \end{aligned}$$

und daher allgemein:

$$(6) \quad R[K^{(\varrho)} \cdot L^{(\sigma)}] = R(K^{(\varrho)}) \cdot L^{(\sigma)} + (-1)^{\varrho+1} K^{(\varrho)} \cdot R(L^{(\sigma)}).$$

Man kann natürlich, (6) als Definition betrachtend, zur Produktbildung abstrakter Ringe schreiten. Wir wollen aber im folgenden nur einen recht speziellen Produktring betrachten.

Vorerst machen wir noch eine Bemerkung.

$\Sigma^{(\varrho)}$ und $\Sigma^{(\tau)}$ seien zwei simpliziale Ringe. Die Simplexes von $\Sigma^{(\varrho)}$ seien mit $(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{\nu+1}})$, die von $\Sigma^{(\tau)}$ mit $(\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}})$ bezeichnet. Der Produktring wird durch die Produkte der einzelnen Simplexes gebildet und hat die Dimension $\varrho + \tau + 1$, er sei mit $\Sigma^{(\varrho+\tau+1)}$ bezeichnet.

Wir nehmen nun an, $\Sigma^{(\varrho)}$ und $\Sigma^{(\tau)}$ seien Mannigfaltigkeiten, dann gibt es einen Randring $\Gamma^{(\varrho-1)}$ von $\Sigma^{(\varrho)}$ und einen Randring $\Gamma^{(\tau-1)}$ von $\Sigma^{(\tau)}$.

Da jedes $\varrho + \tau$ dimensionale Simplex von $\Sigma^{(\varrho+\tau+1)}$ als Produkt eines ϱ resp. $\varrho-1$ dimensionalen Simplex von $\Sigma^{(\varrho)}$ mit einem $\tau-1$ resp. τ dimensionalen Simplex von $\Sigma^{(\tau)}$ entsteht, so ist der Produktring ebenfalls eine Mannigfaltigkeit, für deren Randring die symbolische Gleichung $\Gamma^{(\varrho+\tau)} = \Sigma^{(\varrho)} \cdot \Gamma^{(\tau-1)} + \Sigma^{(\tau)} \Gamma^{(\varrho-1)}$ resp.

$$(7) \quad \Re(\Sigma^{(\varrho)} \cdot \Sigma^{(\tau)}) = \Sigma^{(\varrho)} \cdot \Re(\Sigma^{(\tau)}) + \Sigma^{(\tau)} \Re(\Sigma^{(\varrho)}) \text{ gilt.}$$

Wir gehen nun an die Betrachtung eines sehr einfachen Falles der Produktbildung von Ringen.

¹²⁾ Dabei ist $R(\alpha) \cdot (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}}) = (\beta_{j_1} \dots \beta_{j_{\mu+1}}) \cdot R(\alpha) = 0(-1)$ ist das Einheitsselement dieser Multiplikation: $R[\Sigma p_i(\alpha_i)] = \Sigma p_i \cdot 0(-1)$. In (6) darf nicht $\Sigma p_i \cdot 0(-1) = 0(-1)$ gesetzt werden. Die Elemente $k \cdot 0(-1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sind sämtlich als verschieden zu denken.

Es sei $\Sigma^{(e)}$ eine zusammenhängende ρ dimensionale homogene Mannigfaltigkeit ohne Randring. Ihre Simplexes seien im folgenden mit $(\beta_{i_1} \dots \beta_{i_\rho})$ bezeichnet. $\Sigma^{(v)}$ sei der kleinste Ring über dem Simplex $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{v+1})$. Die Punkte α_i und β_j werden als fremd vorausgesetzt.

Betrachtet wird der Produktring $\Sigma^{(e)} \cdot \Sigma^{(v)} = \Sigma^{(e+v+1)}$.

Er ist nach der vorhergehenden Bemerkung eine Mannigfaltigkeit, deren Rand der Produktring des Randringes von $\Sigma^{(v)}$ mit $\Sigma^{(e)}$ ist:

$$(8) \quad \Gamma^{(e+v)} = \Re(\Sigma^{(e+v+1)}) = \Sigma^{(e)} \cdot \Re(\Sigma^{(v)}).$$

Der Ring $\Sigma^{(e+v+1)}$ ist eine $\rho + v + 1$ Zelle, da seine $\rho + v + 1$ dimensionalen Simplexes alle die Ecke α_1 haben. Was $\Gamma^{(e+v)}$ betrifft, gilt der Satz:

Die p^{te} Homologiegruppe von $\Gamma^{(e+v)}$ ist für $p > v$ isomorph mit der $p - v^{\text{ten}}$ Homologiegruppe von $\Sigma^{(e)}$.

Beweis: $C^{(p)}$ sei ein p dimensionaler Zyklus von $\Gamma^{(e+v)}$. Da die ihn aufbauenden Simplexes nicht alle die Ecke α_1 haben können, gilt die Darstellung

$$(9) \quad C^{(p)} = \Sigma C_{i_2 \dots i_t \sigma_{t+1} \dots \sigma_{p+2}} (\alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_t}) \cdot \beta_{\sigma_{t+1}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}} + \Sigma \dots (\alpha_1 \dots) \cdot (\beta \dots),$$

wo die erste Summe rechts, die nicht verschwindet, alle Simplexes umfaßt, die α_1 nicht enthalten. Wir bilden nun den $p + 1$ dimensionalen Komplex

$$(10) \quad K^{(p+1)} = \Sigma C_{i_2 \dots i_t \sigma_{t+1} \dots \sigma_{p+2}} (\alpha_1 \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_t}) \cdot (\beta_{\sigma_{t+1}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}}).$$

(Er entsteht durch linksseitige Multiplikation der ersten Summe (9) rechts mit (α_1) . Wenn wir das Produkt $(\gamma_1 \dots \gamma_r) \cdot (\delta_1 \dots \delta_s)$ gleich Null setzen, sobald ein γ_i einem δ_j gleich ist, ist (10) einfach $(\alpha_1) C^{(p)}$).

Für ihn gilt $R(K^{(p+1)}) = C^{(p)}$.

Enthält $C^{(p)}$ nur Simplexes, wo jedes höchstens $v-1$ der $\alpha_1, \dots, \alpha_{v+1}$ umfaßt, so enthält $K^{(p+1)}$ nur Simplexes, wo jedes höchstens v der α umfaßt, d. h. $K^{(p+1)}$ liegt dann in $\Gamma^{(e+v)}$.

Im allgemeinen liegt aber $K^{(p+1)}$ nicht in $\Gamma^{(e+v)}$ und es gilt die Zerlegung

$$(11) \quad K^{(p+1)} = K_1^{(p+1)} + K_2^{(p+1)}, \text{ wo } K_1^{(p+1)} \not\subset \Gamma^{(e+v)} \text{ und } K_2^{(p+1)} \subset \Gamma^{(e+v)}, \text{ und}$$

$$(12) \quad K_1^{(p+1)} = \Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2} \dots \sigma_{p+2} (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{v+1}) \cdot (\beta_{\sigma_{v+2}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}}) = (\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot \Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2} \dots \sigma_{p+2} (\beta_{\sigma_{v+2}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}}) \text{ ist.}$$

Aus (12) erhält man durch Randbildung:

$$(13) \quad R(K_1^{(p+1)}) = K_1^{(p)} + K_2^{(p)}, \text{ wo } K_1^{(p)} \triangleleft \Gamma^{(q+v)} \text{ und } K_2^{(p)} < \Gamma^{(q+v)}$$

ist:

$$(14) \quad K_1^{(p)} = (-1)^{v+1} \cdot (\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot R[\Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2} \dots \sigma_{p+2} \\ (\beta_{\sigma_{v+2}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}})]$$

$$(15) \quad K_2^{(p)} = R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot \Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2} \dots \sigma_{p+2} (\beta_{\sigma_{v+2}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}}).$$

Wegen $R(K^{(p+1)}) = C^{(p)}$, (11) und (12) gilt nun:

$$(16) \quad C^{(p)} = R(K_2^{(p+1)}) + K_2^{(p)} + K_1^{(p)}.$$

Außer $K_1^{(p)}$ (14) liegen alle in (16) vorkommenden Komplexe in $\Gamma^{(q+v)}$, somit ist $K_1^{(p)} = 0^{(p)}$ und weiter nach (16): $K_2^{(p)}$ ein $C^{(p)}$ in $\Gamma^{(q+v)}$ homologer Zyklus.

Nach (14) ist aber $K_1^{(p)}$ dann und nur dann Null, wenn

$$(17) \quad C_1^{(p-v)} = \Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2} \dots \sigma_{p+2} (\beta_{\sigma_{v+2}} \dots \beta_{\sigma_{p+2}})$$

ein $p-v$ dimensionaler Zyklus von $\Sigma^{(q)}$ ist.

Wir schließen noch eine Bemerkung an, $p=v$ betreffend:

Für $p=v$ muß $\Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2} = 0$ sein, da $R(K_2^{(v)}) = \pm R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot \Sigma C_2 \dots v+1 \sigma_{v+2}$ sonst kein Zyklus wäre. Da $\Sigma^{(q)}$ zusammenhängend ist, folgt $C_1^{(0)} \sim 0$ in $\Sigma^{(q)}$. Wir zeigen: Ist $C_1^{(p-v)} \sim 0$ in $\Sigma^{(q)}$, so ist $C^{(p)} \sim 0$ in $\Gamma^{(q+v)}$.

Es sei also $C_1^{(p-v)} \sim 0$ in $\Sigma^{(q)}$. Dann gibt es in $\Sigma^{(q)}$ einen $p-v+1$ dimensionalen Komplex.

$$(18) \quad K_3^{(p-v+1)} = \Sigma A_{\tau_{v+2}} \dots \tau_{p+3} (\beta_{\tau_{v+2}} \dots \beta_{\tau_{p+3}}), \text{ daß}$$

$$(19) \quad R(K_3^{(p-v+1)}) = C_1^{(p-v)} \text{ ist. Wir bilden nun den } p+1 \text{ dimens. Komplex von } \Gamma^{(q+v)}:$$

$$(20) \quad L^{(p+1)} = R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot K_3^{(p-v+1)}. \text{ Dann gilt:}$$

$$(21) \quad R(L^{(p+1)}) = (-1)^v R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot R(K_3^{(p-v+1)}) \\ = (-1)^v R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot C_1^{(p-v)} = (-1)^v K_2^{(p)}.$$

Also ist $K_2^{(p)} \sim 0$ in $\Gamma^{(q+v)}$. Wegen $K_2^{(p)} \sim C^{(p)}$ in $\Gamma^{(q+v)}$ ist dann auch $C^{(p)} \sim 0$ in $\Gamma^{(q+v)}$, q. e. d.

Ist umgekehrt $C^{(p)} \infty 0$ in $\Gamma^{(q+v)}$, so ist $C_1^{(p-v)} \infty 0$ in $\Sigma^{(q)}$.

Es muß dann auch $K_2^{(p)} \infty 0$ in $\Gamma^{(q+v)}$ sein. Nun ist der allgemeinste $p+1$ dimensionale Komplex von $\Gamma^{(q+v)}$

$$(22) \quad \Sigma B_{r, \tau_{v+2} \dots \tau_{p+3}} (\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_{r+1} \dots \alpha_{v+1}) \cdot (\beta_{\tau_{v+2}} \dots \beta_{\tau_{p+3}}) + \Sigma \dots,$$

wo in der angedeuteten Summe die Simplizes höchstens $v-1$ der α enthalten.

Der allgemeinste p dimensionale Randzyklus muß demnach eine (22) analoge Darstellung:

$$(23) \quad (-1)^v \Sigma B_{r, \tau_{v+2} \dots \tau_{p+3}} (\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_{r+1} \dots \alpha_{v+1}) \cdot R(\beta_{\tau_{v+2}} \dots \beta_{\tau_{p+3}}) + \Sigma \dots$$

haben. Nun ist $K_2^{(p)} = R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot C_1^{(p-v)}$ (21), also muß, soll (23) $K_2^{(p)}$ darstellen

$$(24) \quad R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot C_1^{(p-v)} = (-1)^v \Sigma B_{r, \tau_{v+2} \dots \tau_{p+3}} (\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_{r+1} \dots \alpha_{v+1}) \cdot R(\beta_{\tau_{v+2}} \dots \beta_{\tau_{p+3}})$$

sein. (Die anderen Summanden enthalten ja Simplizes, in denen schon zwei der α fehlen.) Aus (24) folgt durch Vergleich des Faktors des Simplex $(\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_{r+1} \dots \alpha_{v+1})$ auf beiden Seiten:

$$(25) \quad (-1)^{r-1} C_1^{(p-v)} = (-1)^v \Sigma B_{r, \tau_{v+2} \dots \tau_{p+3}} R(\beta_{\tau_{v+2}} \dots \beta_{\tau_{p+3}}) \\ = (-1)^v R(\Sigma B_{r, \tau_{v+2} \dots \tau_{p+3}} (\beta_{\tau_{v+2}} \dots \beta_{\tau_{p+3}})),$$

d. h. aber $C_1^{(p-v)} \infty 0$ in $\Sigma^{(q)}$.

Es entsprechen einander somit bei der Zuordnung $C^{(p)} \rightarrow C_1^{(p-v)}$ die Nullklassen.

Da $C_1^{(p-v)}$ von $\Sigma^{(q)}$ dem Zyklus $R(\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot C_1^{(p-v)}$ von $\Gamma^{(q+v)}$ entspricht, wird keine Zyklenklasse der $p-v$ ten Homologiegruppe von $\Sigma^{(q)}$ bei dieser Zuordnung vergessen.

Wegen dieser Eigenschaften und der weiteren, daß aus $C^{(p)} \rightarrow C_1^{(p-v)}$ und $D^{(p)} \rightarrow D_1^{(p-v)}$ auch $C^{(p)} \pm D^{(p)} \rightarrow C_1^{(p-v)} \pm D_1^{(p-v)}$ folgt, können wir auf die Isomorphie der p ten, resp. $p-v$ ten Homologiegruppen von $\Gamma^{(q+v)}$ resp. $\Sigma^{(q)}$ schließen.

Denn sind $C^{(p)} \infty D^{(p)}$ in $\Gamma^{(q+v)}$, so ist $C^{(p)} D^{(p)}$ ein Zyklus homolog Null in $\Gamma^{(q+v)}$, also $C_1^{(p-v)} - D_1^{(p-v)} \infty 0$ in $\Sigma^{(q)}$, also $C_1^{(p-v)} \infty D_1^{(p-v)}$ in $\Sigma^{(q)}$ und umgekehrt.

Wir haben jetzt nur noch die Homologiegruppen des Ringes $\Gamma^{(q+v)}$ für $p \leq v$ zu erledigen.

Was $p = v$ anlangt, ist $C_1^{(0)}$ im zusammenhängenden Ringe $\Sigma^{(e)}$ homolog Null, also $C^{(p)} \sim 0$ in $\Gamma^{(e+v)}$. Die v^{te} Homologiegruppe von $\Gamma^{(e+v)}$ enthält also nur die Nullklasse. (Dagegen hat die nullte Homologiegruppe von $\Sigma^{(e)}$ ein von Null verschiedenes Element.)

Ist $0 < p < v$, so erledigen wir $p = v - 1$ gesondert.

$0 < p < v - 1$: Jeder Zyklus $C^{(p)}$ von $\Gamma^{(e+v)}$ ist durch Simplizes aufgebaut, in denen zumindest zwei der α fehlen. Daher ist $C^{(p)} \sim 0$ in $\Gamma^{(e+v)}$.

Die p^{te} Homologiegruppe enthält nur das Nullelement für $0 < p < v - 1$.

$p = v - 1$: Die Zyklen $C^{(v-1)}$, die möglicherweise in $\Gamma^{(e+v)}$ nicht beranden, sind von der Art

$$(26) \quad C^{(v-1)} = C_2 \dots v+1 (\alpha_2 \dots \alpha_{v+1}) + \Sigma \dots (\alpha_1 \dots).$$

Dann ist $K^{(v)} = K_1^{(v)} = C_2 \dots v+1 (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{v+1})$, $K_2^{(v)} = 0^{(v)}$.

Weiter ist $K_2^{(v-1)} = C_2 \dots v+1 R (\alpha_1 \dots \alpha_{v+1})$, $K_1^{(v-1)} = 0^{(v-1)}$.

Nach (16) ist $C^{(v-1)} = K_2^{(v-1)}$, also gilt

$$C^{(v-1)} = k R (\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}), \quad k \text{ ganze Zahl.}$$

Der v dimensionale Komplex in $\Gamma^{(e+v)}$

$$(27) \quad k R (\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) \cdot (\beta_i)$$

wo β_i ein beliebiger Punkt von $\Sigma^{(e)}$ ist, hat $\pm k \cdot R (\alpha_1 \dots \alpha_{v+1}) = \pm C^{v-1}$ als Randkomplex.

Also ist $C^{(v-1)} \sim 0$ in $\Gamma^{(e+v)}$. Die $v - 1^{\text{te}}$ Homologiegruppe von $\Gamma^{(e+v)}$ enthält ebenfalls nur das Nullelement.

Da je zwei Punkte $\alpha_i, \alpha_k; \alpha_i, \beta_p; \beta_p, \beta_q$ in $\Gamma^{(e+v)}$ homolog sind [$\Gamma^{(e+v)}$ enthält ja $(\alpha_i \alpha_k)$, $(\alpha_i \beta_p)$ und $K^{(1)}$, daß $R(K^{(1)}) = (\beta_p) - (\beta_q)$ ist], so ist $\Gamma^{(e+v)}$ zusammenhängend, die nullte Homologiegruppe enthält eine von der Nullklasse unabhängige Klasse.

Die wichtige Folgerung, die wir nun ziehen, ist, daß $\Sigma^{(e)}$ und $\Gamma^{(e+v)}$ zugleich Sphärenringe sind oder nicht.

Wir wollen dieses Resultat sogleich verwenden.

Wir definieren im Ringe der regulären Unterteilung $\Sigma^{(n)}$ eines Ringes $\Xi^{(n)}$:

Der n dimensionale Sternring eines Punktes $P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}$ ist der kleinste Ring über den Simplizes

$$(28) \quad (P_{\alpha_1}^0 P_{\alpha_1 \alpha_2}^1 \dots P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1} P_{\alpha_1}^{h+1} \dots \alpha_{h+1} \alpha_{h+2} \dots P_{\alpha_1}^n \dots \alpha_{n+1})$$

die sämtlich $P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1}$ enthalten. Er sei $\mathfrak{S}^{(n)} (P_{\alpha_1}^h \dots \alpha_{h+1})$ bezeichnet.

Wir setzen nun, um nicht weitläufig zu werden, $\Xi^{(n)}$ als randlose Mannigfaltigkeit voraus.

Der Sternring $\mathfrak{S}^{(n)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ ist nach (28) der Produktring von $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ und dem kleinsten Ringe Σ^h über den h dimensionalen Simplex

$$(29) \quad (P_{a_{i_1}}^0 \ P_{a_{i_1} a_{i_2}}^1 \dots P_{a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{h+1}}}^h)$$

wo $i_1, i_2, \dots, i_{h+1}$ alle Permutationen von $1, 2, \dots, h+1$ durchlaufen.

Der Ring Σ^h ist die reguläre Unterteilung des kleinsten Ringes über dem Simplex:

$$(P_{a_1}^0 \ P_{a_2}^0 \dots P_{a_{h+1}}^0).$$

Nun ist der Ring $(P_{a_1}^0 \ P_{a_2}^0 \dots P_{a_{h+1}}^0) \cdot \mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ eine Zelle, sein Randring ist eine Sphäre oder nicht, je nachdem dies für den (randlosen) Ring $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ zutrifft oder nicht.

Der Produktring $\Sigma^h \cdot \mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ ist eine — wenn auch nicht reguläre — Unterteilung von $(P_{a_1}^0 \dots P_{a_{h+1}}^0) \cdot \mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$.

Bei einer solchen Unterteilung eines simplizialen Ringes werden, wie man — wie für die reguläre Unterteilung — zeigt, die Homologiegruppen nicht geändert. Also ist der Sternring $\mathfrak{S}^{(n)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ eine Zelle, sein Randring $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^{(n)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1}))$ aber eine Sphäre oder nicht, je nachdem letzteres für $\mathfrak{R}^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ zutrifft.

Eine randlose Mannigfaltigkeit ist also regulär, wenn der Randring eines jeden n dimensional Sternrings der regulären Unterteilung eine Sphäre ist.

Nachtrag (während der Korrektur):

Der Seite 246 geführte Nachweis, die Identität der Ringe Γ_r und Σ_r betreffend, ist erst vollständig, sobald Σ_r als homogener Ring festgestellt ist.

Sei $S^{(h)} = (P_{a_1} \dots P_{a_{h+1}})$ ein h dimens. Simplex in Σ_r , das in keinem höher dimensional Simplex von Σ_r enthalten ist. Jedes $S^{(h)}$ enthaltende Simplex $S^{(h+i)}$ gehört dann zu $\Sigma_1^{(n)}$ oder $\Sigma_2^{(n)}$ und da diese Ringe homogen sind, muß es $S^{(h+i)}$ dieser Art in $\Sigma_1^{(n)}$ und in $\Sigma_2^{(n)}$ geben. Jeder Punkt $P_{a_1 \dots a_{h+1} \sigma_1 \dots \sigma_i}^{h+i}$ von $R^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ gehört also entweder zur regulären Unterteilung von $\Sigma_1^{(n)}$ oder zu der von $\Sigma_2^{(n)}$ und in $R^{(n-h-1)}$ sind beide Arten von Punkten vertreten.

$R^{(n-h-1)}(P_{a_1}^h \dots a_{h+1})$ ist daher eine Summe zweier Ringe ohne gemeinsames Element, also nicht zusammenhängend. Als $n-h-1$ dimens. Sphäre trifft dies nur für $h=n-1$ zu, d. h. Σ_r ist homogen.

(Eingegangen: 5. II. 1929.)