

Über eine topologische und zahlentheoretische Anwendung von Hirzebruchs Spitzenauflösung

W. Meyer und R. Sczech

Mathematisches Institut der Universität, Wegelerstraße 10, D-5300 Bonn, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung	69
§ 1 Definitionen, Bezeichnungen	70
§ 2 Die α -Invariante im 4-dim. Fall	72
§ 3 Die Funktion φ	73
§ 4 Der Umgebungsrand einer Spitze	74
§ 5 Fortsetzung der Aktion auf die Auflösung einer Spitze	76
§ 6 Der Kozykel γ	77
§ 7 Signaturdefekte und Dedekindsummen	82
§ 8 Perioden der Integrale von $\wp$ -Teilwerten	83
§ 9 L-Reihen zu total-imaginären biquadratischen Körpern	86
§ 10 Beweis einer Vermutung von Saito	91

Einleitung

Sei $E(A)$ das T^2 -Bündel über S^1 , welches durch die Verklebungsmatrix $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}^+(T^2, 0)$ gegeben wird. Ein Element $s \in T^2$, $s \neq 0$, operiert genau dann durch faserweise Translation auf $E(A)$, wenn A zu der Gruppe $\Gamma(s) = \{B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid Bs = s\}$ gehört [dies ist für s von endlicher Ordnung eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$]. Diese Operation ist frei, differenzierbar und orientierungserhaltend, so daß die α -Invariante $\alpha(s, E(A))$ von Atiyah-Singer [1] definiert ist. In [15] wurde bewiesen, daß die Differenz $\alpha(s, E(A)) - \varphi(A)$ als Funktion von A einen Homomorphismus $\bar{\gamma}: \Gamma(s) \rightarrow \mathbb{R}$ liefert. Dabei ist $\varphi(A)$ ebenfalls eine Signaturinvariante des Torusbündels $E(A)$, die auch in [8] und [12] untersucht wurde. In dieser Arbeit berechnen wir $\bar{\gamma}$ und geben im Falle $\mathrm{Spur}(A) > 2$ Beziehungen der α -Invariante $\alpha(s, E(A))$ zur Theorie reell-quadratischer Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{(\mathrm{Spur} A)^2 - 4})$. Dieser unerwartete Zusammenhang kommt dadurch zustande, daß die Mannigfaltigkeit $E(A)$ für $\mathrm{Spur}(A) > 2$ Umgebungsrand einer Spitzensingularität auf einer zu $\mathbb{Q}(\sqrt{(\mathrm{Spur} A)^2 - 4})$ assoziierten Hilbertschen Modulfläche ist. Die von Hirzebruch konstruierte Auflösung solcher Singularitäten dient uns auch als berandende Mannigfaltigkeit zur Berechnung der α -Invariante. Unser Hauptergebnis im Falle $\mathrm{Spur}(A) > 2$ ist, daß die Zahlen $\alpha(s, E(A))$ mit Summanden übereinstimmen, die in

der von Hecke 1921 entdeckten Klassenzahlformel für gewisse biquadratische Zahlkörper auftreten [3, 4].

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. In §§ 1–5 stellen wir die benötigten Tatsachen über α -Invarianten und Spitzenauflösungen zusammen und folgern hieraus eine Rekursionsformel für $\bar{\gamma}$ (Satz 5 in § 5). In § 6 wird dann $\bar{\gamma}$ zu einem 1-Kozykel $\gamma: \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow F$ mit Werten in dem $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ -Modul $F = \{f | f: \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}\}$ fortgesetzt und für $\gamma(A)$ eine Darstellung in den Koeffizienten der Matrix A durch Kotangenssummen gegeben. Die Kozykeleigenschaft von γ impliziert insbesondere eine Reziprozitätsformel für diese Summen. In § 8 wird für $A \in \Gamma(s)$ gezeigt, daß $\pi^2 \gamma(A^T)(s)$ gleich dem Integral $\int_{Az}^z \wp_{Js} d\tau$ über einen Teilwert der Weierstraßschen $\wp$ -Funktion ist. Der Integrand ist hier eine holomorphe Modulform vom Gewicht 2 für die Gruppe $\Gamma(s)$ und der Integrationsweg ist in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zu wählen. Der Beweis dieses Satzes geschieht durch explizite Berechnung des Integrals nach einer neuen, elementaren Methode. Andererseits hat Hecke [4] gezeigt, daß diese Integrale die Differenz gewisser L -Reihen an der Stelle 1 sind. Da diese Reihenwerte gerade die erwähnten Summanden in der Heckeschen Klassenzahlformel darstellen, erhalten wir so in § 9 die Beziehung zwischen α -Invariante und Klassenzahlen.

Im letzten Teil der Arbeit wenden wir unsere Ergebnisse auf Hilbertsche Modulformen an und verallgemeinern damit ein klassisches Ergebnis von Hecke [5]. Sei $\mathfrak{f}$ ein Primideal der Norm q in $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D > 0$, Γ die Hilbertsche Modulgruppe zu K und $\Gamma(\mathfrak{f})$ die Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe $\mathfrak{f}$. Dann operiert $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q) = \Gamma/\Gamma(\mathfrak{f})$ auf dem Raum $S_{2k}(\Gamma(\mathfrak{f}))$ der Spitzenformen vom Gewicht $2k$. Man erhält so eine Darstellung π von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$. Laut Schur [18] gibt es genau zwei irreduzible Darstellungen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ vom Grad $(q + \varepsilon)/2$, $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$. y_1 und y_2 seien die Multiplizitäten von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ in der Darstellung π . Saito und Yoshida bewiesen im Falle $k \geq 2$ und $(\mathfrak{f}, 6D) = 1$ den Satz: $|y_1 - y_2| = 2 \sum H(L)/H(K)$, wobei die Summe über alle Relativklassenzahlen $H(L)/H(K)$ total imaginärer quadratischer Erweiterungen L von K mit der Relativdiskriminante $\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist. Ihr Beweis beruht auf der Selbergschen Spurformel, die aus Konvergenzgründen nur im Falle $k \geq 2$ anwendbar ist. In § 10 beweisen wir die Richtigkeit des Satzes im Falle $k = 1$ und bestätigen damit eine Vermutung von Saito [16]. Wir benutzen den „holomorphen“ Lefschetz-Satz von Atiyah-Singer, mittels dessen $y_1 - y_2$ auf die Berechnung gewisser Fixpunktbeiträge zurückgeführt wird. Es zeigt sich, daß diese Beiträge unabhängig vom Gewicht $2k$ sind. Zusammen mit dem Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen folgt hieraus schon die Richtigkeit des Satzes für alle $k \geq 1$. Andererseits können aber die Fixpunktbeiträge durch α -Invarianten ausgedrückt werden, und wir erhalten so einen von der Selbergschen Spurformel unabhängigen Beweis dieses Satzes, wobei wir die Voraussetzung $(\mathfrak{f}, 6D) = 1$ noch zusätzlich abschwächen können zu $(\mathfrak{f}, 6) = 1$ und $\mathfrak{f} \neq (\sqrt{5})$. Ohne Beweis sei hier mitgeteilt, daß im Falle $\mathfrak{f} = (\sqrt{5})$ $y_2 - y_1 = 2$ oder 0, je nachdem $2k \equiv 1(5)$ oder $2k \not\equiv 1(5)$ wird.

§ 1. Definitionen, Bezeichnungen

Sei $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der zweidimensionale Torus. Der Homomorphismus $\chi: \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}^+(\pi_1(T))$ mit $\chi(1) = A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ definiert eine $\mathbb{Z}$ -Rechts-

operation auf $\mathbb{R} \times T$ durch $(x, t)z = (x + z, \chi(z)^{-1}t)$, wenn $x \in \mathbb{R}$, $t \in T$, $z \in \mathbb{Z}$ ist. Das Torusbündel $\xi(A) = (E(A), p, S^1)$ über der Kreislinie $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}: T \rightarrow E(A) \xrightarrow{p} S^1$ ist dann definiert als das zum $\mathbb{Z}$ -Prinzipalbündel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ assoziierte Faserbündel mit Faser T , d. h. $E(A) = \mathbb{R} \times T/\mathbb{Z}$. Es ist üblich, diese Definition kürzer zu notieren durch $E(A) = \mathbb{R} \times T/\sim$ mit $(x, t) \sim (x + 1, A^{-1}t)$. Der Homomorphismus χ heißt auch charakteristischer Homomorphismus für das Bündel $E(A)$. Da $\mathbb{Z}$ vermöge χ auf $\mathbb{R} \times T$ orientierungserhaltend operiert, induzieren die Standardorientierungen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ eine Orientierung für $E(A)$ und diese Orientierung ist im folgenden stets gemeint, wenn von der Orientierung für $E(A)$ die Rede ist. Wir geben noch eine zweite Beschreibung für $E(A)$. Sei $G := \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\chi^{-1}} \mathbb{Z}$ das vermöge des Homomorphismus $\chi^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, $\chi^{-1}(1) = A^{-1}$ gegebene semidirekte Produkt von $\mathbb{Z}^2$ mit $\mathbb{Z}$. G operiert frei auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ von links durch $(m, v)(x, t) = (x + v, \chi^{-1}(v)t + m)$, falls $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ und $(m, v) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$. Dann ist $E(A) \simeq G \backslash \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ orientierungstreu diffeomorph. Hieraus folgt $\pi_1(E(A)) \simeq G$, sogar, daß $E(A)$ ein Eilenberg-MacLane Raum $K(G, 1)$ ist. Genauer gilt folgendes kommutative Diagramm für die exakte Homotopiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \pi_1(T) & \rightarrow & \pi_1(E(A)) & \rightarrow & \pi_1(S^1) & \rightarrow & 0 \\ & \wr & & \wr & & \wr & \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\chi^{-1}} \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Die hier eingeführte Terminologie ist nicht immer gebräuchlich, z. B. wird in [15] das Bündel $E(A)$ mit $E_{A^{-1}}$ bezeichnet.

Für $s \in T$ mit $A \in \Gamma(s)$ werde nun $s[x, t] = [x, t + s]$ gesetzt, wenn $[x, t]$ die zu $(x, t) \in \mathbb{R} \times T$ gehörige Klasse in $E(A)$ bezeichnet. Dies definiert eine orientierungstreue und differenzierbare Aktion der von s erzeugten Gruppe auf dem Bündel $E(A)$. $s \in T$ operiert also genau dann durch faserweise Translation auf $E(A)$, wenn $A \in \Gamma(s)$ ist.

Wir werden in der Folge fünf periodische Funktionen benutzen, die charakteristische Funktion von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}$

$$c_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.1)$$

die trigonometrischen Funktionen

$$c_1(x) = \begin{cases} \cot \pi x & \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad (1.2)$$

$$c_2(x) = \begin{cases} \sin^{-2} \pi x & \text{für } x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \\ 1/3 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1.3)$$

und die Bernoullischen „Polynome“

$$P_1(x) = \begin{cases} x - [x] - 1/2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad (1.4)$$

$$P_2(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + 1/6, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

c_1 und P_1 bzw. c_2 und P_2 sind auf $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zueinander fouriertransformiert, d. h.

$$c_1\left(\frac{a}{b}\right) = 2i \sum_{k(\bmod b)} e^{2\pi i a k/b} P_1\left(\frac{k}{b}\right), \quad (1.6)$$

$$c_2\left(\frac{a}{b}\right) = 2b \sum_{k(b)} e^{2\pi i a k/b} P_2\left(\frac{k}{b}\right). \quad (1.7)$$

Die Definition von $c_1(x)$ und $c_2(x)$ für ganzzahlige x wird durch diese beiden Formeln sowie durch die Additionsformel

$$\left. \begin{aligned} & c_1(x)c_1(y) + c_1(y)c_1(z) + c_1(z)c_1(x) \\ & = 1 - c_0(x)c_2(y) - c_0(y)c_2(z) - c_0(z)c_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

falls $x, y, z \in \mathbb{C}$ und $x + y + z \in \mathbb{Z}$

und die Multiplikationsformeln

$$\sum_{k(n)} c_j\left(\frac{x+k}{n}\right) = n^j c_j(x), \quad j=0, 1, 2 \quad (1.9)$$

falls $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ und $x \in \mathbb{C}$,

die alle später gebraucht werden, gerechtfertigt. Schließlich definieren wir noch die Dedekindsche Summe

$$\begin{aligned} s(a, c) &= \sum_{\mu(c)} P_1\left(\frac{a\mu}{c}\right) P_1\left(\frac{\mu}{c}\right) \\ &= \frac{1}{4|c|} \sum_{\mu(c)} c_1\left(\frac{a\mu}{c}\right) c_1\left(\frac{\mu}{c}\right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

sowie ihre Verallgemeinerung (die nach einem Vorschlag von Carlitz Dedekind-Rademacher Summe heißt)

$$s(a, c; x, y) = \sum_{\mu(c)} P_1\left(\frac{a\mu + ax + cy}{c}\right) P_1\left(\frac{\mu + x}{c}\right). \quad (1.11)$$

Hier sind $a, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$.

Ist $n > 1$ eine natürliche Zahl, so bezeichne ${}_nT$ die Gruppe der n -Teilungspunkte von T , also ${}_nT = \{t \in T \mid nt = 0\}$. Weiter sei $T^* = T \setminus \{0\}$ und ${}_nT^* = {}_nT \setminus \{0\}$.

Die Transponierte einer Matrix A bezeichnen wir mit A^T .

§ 2. Die α -Invariante im 4-dim. Fall

Sei Y^4 eine G -Mannigfaltigkeit mit freier, orientierungserhaltender Aktion von G auf ∂Y . Dann ist für $g \in G, g \neq 1$, die α -Invariante für die Aktion von g auf ∂Y durch die reelle Zahl $\alpha(g, \partial Y) := \text{sign}(g, Y) - L(g, Y)$ definiert, wobei $\text{sign}(g, Y)$ und $L(g, Y)$ diejenigen Terme sind, deren Gleichheit der äquivariante Signatursatz [1, 10] im Falle $\partial Y = \emptyset$ behauptet. Die α -Invariante ist also ein „Maß“ für die Abweichung vom Signatursatz. Sie hängt nur von dem Paar $(g, \partial Y)$ ab, also nicht von der berandenden G -Mannigfaltigkeit Y . Die Zahl $L(g, Y)$ hängt nur von der Fixpunkt-

menge Y^g und der Operation von g auf dem Normalenbündel $\nu(Y^g)$ ab. Y^g besteht aus 0- und 2-dimensionalen Komponenten. Für einen isolierten Fixpunkt $x_j \in Y^g$ sei die Aktion von g auf dem Tangentialraum von Y in x_j gegeben durch die Matrix (bzgl. einer orientierten Basis von $T_{x_j}Y$)

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha_j & -\sin 2\pi\alpha_j \\ \sin 2\pi\alpha_j & \cos 2\pi\alpha_j \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \cos 2\pi\beta_j & -\sin 2\pi\beta_j \\ \sin 2\pi\beta_j & \cos 2\pi\beta_j \end{pmatrix}.$$

Für jede 2-dim. Fixpunktmannigfaltigkeit Y_k von g induziere der Diffeomorphismus g eine Drehung im Normalenbündel von Y_k um den Winkel $\pm 2\pi\theta_k$. $Y_k \circ Y_k$ sei die Selbstschnittzahl von Y_k . Mit diesen Bezeichnungen gilt dann [1, 9, 10] der

Satz 1. *G operiere orientierungserhaltend und effektiv auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit Y^4 . Dann ist*

$$L(g, Y) = \begin{cases} -\sum_j c_1(\alpha_j)c_1(\beta_j) + \sum_k Y_k \circ Y_k c_2(\theta_k), & g \neq 1 \\ \text{sign}(Y), & \text{falls } g = 1. \end{cases}$$

§ 3. Die Funktion φ

Wir geben jetzt die Definition einer Funktion $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow 1/3\mathbb{Z}$, die in Wahrheit schon eine Funktion auf den Konjugationsklassen ist, d. h., es gilt $\varphi(ABA^{-1}) = \varphi(B)$ für $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. φ wurde in der Zahlentheorie bereits mehrfach studiert, ihr Auftreten in der Topologie ist dagegen erst jüngerer Datums. Es ist

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} -\frac{a+d}{3c} + 4\text{sign}(c)s(a, c) - \frac{1}{2}\{1 - \text{sign}((a+d)^2 - 4)\}\text{sign } c \\ \quad + \frac{1}{2}\{1 + \text{sign}((a+d)^2 - 4)\}\text{sign } c(a+d), & c \neq 0 \\ -\frac{b}{3d} + \frac{1}{2}(1 + \text{sign } d)\text{sign } b, & \text{falls } c = 0. \end{cases}$$

Den Hauptbeitrag zu $\varphi(A)$ im Falle $c \neq 0$ bildet hier die Dedekind-Summe $s(a, c)$, die in (1.10) erklärt ist.

Es seien nun $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ ganze Zahlen, alle $b_i \geq 2$ und mindestens ein $b_j \geq 3$. Folgendes Matrizenprodukt werden wir oft gebrauchen

$$A = \prod_{i=0}^n \begin{pmatrix} b_{n-i} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Für solche Matrizen gilt die hübsche Formel

$$\varphi(A) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^n (b_i - 3). \quad (3.2)$$

In [19] wurde allgemeiner bewiesen:

Satz 2. *Seien $b_0, \dots, b_n$ beliebige ganze Zahlen und die Matrix A wie in (3.1). Dann ist*

$$\varphi(A) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^n b_i + \text{sign } B_n,$$

wobei

$$B_n = \begin{cases} (2-b_0), & \text{falls } n=0 \\ \begin{pmatrix} -b_0 & 2 \end{pmatrix}, & n=1 \\ \begin{pmatrix} -b_0 & 1 & & & & 1 \\ 1 & -b_1 & 1 & & & \\ & 1 & -b_2 & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & & 1 & -b_n \end{pmatrix}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Reziprozitätsformel für Dedekind-Summen (vgl. § 7) und einem Diagonalisierungsverfahren für die Matrix B_n . Sind nun alle $b_i \geq 2$, mindestens ein $b_j \geq 3$, dann ist die Matrix B_n negativ definit, also die Signatur von B_n gleich $-(n+1)$, und man hat als Korollar zu Satz 2 die Formel (3.2).

In [14] hat der erste Autor gezeigt, daß $\varphi(AB) - \varphi(A) - \varphi(B)$ gleich der Signatur einer 4-dim. Mannigfaltigkeit ist. Es handelt sich um ein Torusbündel über einer dreifach gelochten 2-Sphäre, dessen Rand aus den Torusbündeln $E(AB)$, $E(A^{-1})$, $E(B^{-1})$ besteht. Ferner wurde der folgende Satz bewiesen, der den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet,

Satz 3. Sei $t \in T^*$. Die Abbildung $\bar{\gamma}: \Gamma(t) \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Matrix $A \in \Gamma(t)$ die Zahl $\alpha(t, E(A)) - \varphi(A)$ zuordnet, ist ein Homomorphismus.

Ein Ziel dieser Arbeit ist nun, diesen Homomorphismus explizit zu berechnen. Dabei werden wir benutzen, daß die α -Invariante $\alpha(t, E(A))$ vom Basiswechsel in der Homologie $H_1(T, \mathbb{Z})$ unabhängig ist, d. h., es gilt $\alpha(t, E(A)) = \alpha(Bt, E(BAB^{-1}))$ für $B \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Außerdem setzen wir zunächst voraus, daß $\text{Spur } A > 2$ ist. Wir werden später in § 6 sehen, daß dies tatsächlich keinerlei Einschränkung bedeutet.

§ 4. Der Umgebungsrand einer Spitze

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein reell-quadratischer Körper und $M \subset K$ ein $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang 2. Ein solcher Modul heißt auch vollständig. V sei eine Einheitengruppe von endlichem Index in U_M^+ , der Gruppe der totalpositiven Einheiten η im Ring der ganzen Zahlen von K mit $\eta M = M$ (U_M^+ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$). Das Paar (M, V) definiert die Gruppe $G = G(M, V)$ aller Matrizen $\begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\eta \in V$ und $\mu \in M$. Dann ist $G = M \rtimes V$ semidirektes Produkt, wobei V durch Multiplikation auf M operiert. G operiert nun frei und diskontinuierlich auf $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ die obere Halbebene von $\mathbb{C}$) mit einer Spitzensingularität ∞ in $\mathfrak{H}^2/G := \mathfrak{H}^2/G \cup \{\infty\}$ vermöge $(z_1, z_2) \rightarrow (\eta z_1 + \mu, \eta' z_2 + \mu')$, wobei Strichbildung die Anwendung des nichttrivialen

Automorphismus von K bedeutet. Wir nennen die Spitze ∞ auch vom Typ (M, V) . Ein vollständiges Umgebungssystem dieser Spitze wird durch die Mengen $W/G \cup \{\infty\}$ gegeben, wo

$$W = W(d) := \{(z_1, z_2) \in \mathfrak{H}^2 \mid \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 \geq d > 0\}.$$

W geht nämlich unter der Operation von G in sich über, insbesondere ist W/G eine komplexe Mannigfaltigkeit. Der Rand $\partial W/G$ von W/G ist ein Torusbündel über einer Kreislinie. Dies folgt aus dem

Lemma 1. Sei $\eta_0 \in V$ erzeugendes Element von V mit $0 < \eta_0 < 1$ und $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, 2$. Dann ist $f: \partial W \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(z_1, z_2) = (\log y_1 / \log \eta_0, x_1, x_2)$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, wenn $\mathbb{R}^3$ mit der kanonischen und ∂W mit der von W induzierten Orientierung versehen ist.

Eine Orientierung des Randes ∂W heißt dabei von W induziert, wenn ein äußerer Tangentialvektor in einem Randpunkt p gefolgt von einer orientierten Basis von $T_p \partial W$ eine orientierte Basis von $T_p W$ liefert. Die Aktion von G auf ∂W läßt sich mittels f nun auf $\mathbb{R}^3$ liften, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ geht dabei in $(x_1 + \log \eta / \log \eta_0, \eta x_2 + \mu, \eta' x_3 + \mu')$ über. Da M Normalteiler in G ist, erhält man so

$$\partial W/G \simeq (\mathbb{R}^3/M)/V \simeq \mathbb{R} \times_V (\mathbb{R}^2/\tilde{M}) \simeq \mathbb{R} \times_V T,$$

wobei $\tilde{M} = \{(\mu, \mu') \mid \mu \in M\} \subset \mathbb{R}^2$ ist. Im Hinblick auf die Anwendungen wollen wir jetzt eine Matrix aus $\operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$ bestimmen, mittels derer η_0 auf T operiert. Einfachheit halber nehmen wir dabei an, daß M sich in der Form $M = \mathbb{Z}w + \mathbb{Z}$ mit $0 < w' < 1 < w$ schreiben läßt und $V = U_M^+$ ist (jeder vollständige Modul M läßt sich als λM_1 schreiben, wobei M_1 diese Gestalt hat, λ totalpositiv und $U_M^+ = U_{M_1}^+$ ist; die Torusbündel für M und M_1 sind dann orientierungstreu diffeomorph). Die quadratische Irrationalität w besitzt dann eine unendliche, rein periodische Kettenbruchentwicklung der Form

$$w = b_0 - \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \dots}}}$$

wo alle $b_i \geq 2$ und mindestens ein $b_j \geq 3$. Wie in [8] schreiben wir für einen solchen Kettenbruch $\overline{[b_0, b_1, \dots, b_{r-1}]}$, wo der Zahlenzyklus $((b_0, b_1, \dots, b_{r-1}))$ die kürzeste Periode darstellt. Die Zahlen p_k, q_k werden jetzt induktiv definiert durch $p_{-1} = 0$, $p_0 = 1$, $p_{k+1} = b_k p_k - p_{k-1}$ und $q_{-1} = -1$, $q_0 = 0$, $q_{k+1} = b_k q_k - q_{k-1}$ für alle $k \geq 0$.

Dann ist $A_r := p_r - q_r w$ erzeugendes Element von U_M^+ mit $A_r < 1$ [8, Lemma 2.5]. Bezüglich der Standard-Basis des $\mathbb{R}^2$ agiert daher $\eta_0 = A_r$ auf T mittels der Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} w & 1 \\ w' & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & 1 \\ w' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_{r-1} & -q_r \\ p_{r-1} & p_r \end{pmatrix}.$$

Für $(x, t) \in \mathbb{R} \times T$ können wir somit auch schreiben $\eta_0(x, t) = (x + 1, A^{-1}t)$. Nach Definition des Bündels $E(A)$ bedeutet dies aber $\partial W/G \simeq \mathbb{R} \times_V T = E(A)$. Wir fassen diese Überlegungen zusammen in

Satz 4. Sei $M = \mathbb{Z}w + \mathbb{Z}$ mit $w = \overline{[b_0, \dots, b_{r-1}]}$, wobei alle $b_i \geq 2$ und wenigstens ein $b_j \geq 3$ ist. V habe in U_M^+ den Index $l \geq 1$. Dann sind orientierungserhaltend diffeomorph $\partial W/G \simeq E(A')$, wo

$$A = \begin{pmatrix} p_r & q_r \\ -p_{r-1} & -q_{r-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^r \begin{pmatrix} b_{r-i} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Durch Induktion findet man leicht, daß stets $\text{Spur } A' > 2$ ist. Umgekehrt gilt aber auch, daß jedes Bündel $E(B)$ mit $\text{Spur } B > 2$ orientierungstreu diffeomorph zum Umgebungsrand einer Spitze ist, weil in der $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ -Konjugationsklasse von B dann immer eine Matrix der Gestalt A' liegt, A wie in Satz 4. Zur Berechnung von $\bar{\gamma}$ genügt es daher, weiterhin nur die Situation von Satz 4 zu betrachten. Dies ist insofern günstig, als die dort auftretenden T -Bündel auf natürliche Weise eine Mannigfaltigkeit beranden, nämlich die Spitzenauflösung von $\mathfrak{H}^2/G$, deren Konstruktion von Hirzebruch in [8] angegeben wurde.

§ 5. Fortsetzung der Aktion auf die Auflösung einer Spitze

Es gelten weiterhin die Voraussetzungen von Satz 4. Für unsere Zwecke genügt es zu wissen, daß die Spitzenauflösung $Y(\infty) = Y((b_0, \dots, b_{l-1}))$ von $\mathfrak{H}^2/G$ durch lr Karten mit den komplexen Koordinaten u_k, v_k gegeben wird, $k \bmod lr$. Der Kartenwechsel geschieht für $u_k, v_{k+1} \neq 0$ vermöge

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k^{b_k} v_k \\ v_{k+1} &= u_k^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Durch $v_k = 0$ in der k -ten und $u_{k+1} = 0$ in der $(k+1)$ -ten Karte wird eine kompakte, rationale und nicht-singuläre Kurve S_k definiert. Das Schnittverhalten dieser zyklischen Kurvenkonfiguration bestehend aus lr Kurven wird durch die Schnittmatrix B_{l-1} in Satz 2 gegeben. Insbesondere ist die Selbstschnittzahl $S_k \circ S_k = -b_k$.

Der Kurvenzyklus $\bigcup_k S_k$ bildet die Blase von ∞ in $\mathfrak{H}^2/G$ und löst die Singularität auf. $Y(\infty) \setminus \bigcup_k S_k$ wird biholomorph auf $\mathfrak{H}^2/G$ abgebildet und diese Abb. wird im k -ten Koordinatensystem explizit gegen durch

$$\begin{aligned} 2\pi i z_1 &= A_{k-1} \log u_k + A_k \log v_k \\ 2\pi i z_2 &= A'_{k-1} \log u_k + A'_k \log v_k. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Hier ist $(A_{k-1}, A_k) = (p_{k-1} - q_{k-1}w, p_k - q_k w)$ für $k \geq 0$ eine Folge von $\mathbb{Z}$ -Basen für M .

Wir erklären jetzt eine Aktion von $t \in {}_n T^*$ auf $Y(\infty)$ und untersuchen anschließend deren Fixpunktmenge. Für $t = (\alpha_0, \beta_0)^T \in {}_n T^*$ sei

$$t(u_k, v_k) = (\exp(2\pi i \alpha_k) u_k, \exp(2\pi i \beta_k) v_k)$$

mit $\alpha_k = p_k \alpha_0 + q_k \beta_0$ und $\beta_k = -\alpha_{k-1}$ für $k \geq 1$. Diese Aktion ist wohldefiniert, wenn nach einem Umlauf im Kartenzyklus $(\alpha_{lr}, \beta_{lr})^T \equiv (\alpha_0, \beta_0)^T \bmod \mathbb{Z}^2$ wird. Dies ist gleichbedeutend mit $A' l t \equiv t(\mathbb{Z}^2)$, die Matrix A wie in Satz 4. Mittels (5.2) läßt sich diese Aktion auf $\mathfrak{H}^2/G$ liften zu $t(z_1, z_2) = (z_1 + \varrho, z_2 + \varrho') \bmod G$. Hier ist

$\varrho = A_{k-1}\alpha_k + A_k\beta_k = \alpha_0 w + \beta_0$ und $A^t t \equiv t(\mathbb{Z}^2)$ bedeutet jetzt $\eta\varrho \equiv \varrho(M)$ für jede Einheit $\eta \in V$. Auf dem Rand $\partial W/G$ operiert t vermöge $t[y_1, x_1, x_2] = [y_1, x_1 + \varrho, x_2 + \varrho']$, siehe Lemma 1. Und auf dem Bündel $E(A^l)$ agiert t schließlich durch faserweise Translation um $(\alpha_0, \beta_0)^T = t$. Betrachten wir wieder die Aktion von t auf

$Y(\infty)$. Es ist klar, daß es Fixpunkte unter t nur auf dem Kurvenzyklus $\bigcup_k S_k$ geben kann. Sind α_k, β_k beide $\not\equiv 0(1)$, dann ist in der k -ten Karte der Schnittpunkt von S_{k-1} und S_k (=Koordinatenursprung der Karte) einziger Fixpunkt von t . Ist dagegen $\alpha_k \equiv 0(1)$ und $\beta_k \not\equiv 0(1)$, so ist $t(u_k, v_k) = (u_k, v_k)$ äquivalent mit $v_k = 0$, d. h., S_k bleibt punktweise fest. Wenn $\alpha_k \not\equiv 0(1)$ und $\beta_k \equiv 0(1)$, dann ist $\alpha_{k-1} \equiv 0$ und $\beta_{k-1} \not\equiv 0(1)$, daher bleibt jetzt S_{k-1} fest.

Um die α -Invariante der Aktion von t mittels Satz 1 zu berechnen, müssen wir jetzt nur noch die äquivariante Signatur $\text{sign}(t, Y(\infty))$ kennen. Eine Basis von $H_2(Y(\infty), \mathbb{Q})$ wird durch die Kurven S_k , $k=0, 1, \dots, lr-1$, repräsentiert. Unter der Aktion von t geht aber jede Kurve orientierungserhaltend in sich über, daher operiert t trivial auf $H_2(Y(\infty), \mathbb{Q})$. Also ist $\text{sign}(t, Y(\infty)) = \text{sign}(Y(\infty)) = \text{sign} B_{lr-1} = -lr$, vgl. Satz 2.

Satz 5. Sei $E(A^l)$ Rand der Auflösung $Y((b_0, \dots, b_{lr-1}))$. $t \in T^*$ operiere auf $E(A^l)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha(t, E(A^l)) &= -lr + \sum_{k=0}^{lr-1} \{c_1(\alpha_k)c_1(\beta_k) + b_k c_0(\alpha_k)c_2(\beta_k)\} \\ \alpha(t, E(A^l)) - \varphi(A^l) &= \sum_{k=0}^{lr-1} \{c_1(\alpha_k)c_1(\beta_k) + b_k(c_0(\alpha_k)c_2(\beta_k) - \tfrac{1}{3})\}, \end{aligned}$$

falls $(\alpha_0, \beta_0)^T = t$ und

$$\alpha_{k+1} = b_k \alpha_k + \beta_k, \beta_{k+1} = -\alpha_k (k \bmod lr). \quad (5.3)$$

§ 6. Der Kozykel γ

1. Ziel dieses Abschnitts ist es, den Homomorphismus $\bar{\gamma}$ zu einem Kozykel γ fortzusetzen. Die Überlegungen, die wir dabei anstellen, sind einfacher algebraischer Natur. Sei $F := \{f: \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}\}$. F ist ein $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ -Linksmodul, wenn für $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ und $f \in F$, $(Af)(t) := f(A^T t)$ gesetzt wird. Ein Links-1-Kozykel γ für $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit Werten in dem $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ -Modul F ist nichts anderes, als eine Abbildung $\gamma: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow F$ mit der Eigenschaft $\gamma(AB) = A\gamma(B) + \gamma(A)$ für alle $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Bedeuten $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die üblichen Erzeugenden von $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, so folgt aus der Kozykeleigenschaft

$$\begin{aligned} (1 + J + J^2 + J^3)\gamma(J) &= 0 \\ (1 + J)\gamma(J) + J^2(1 + S + S^2)\gamma(S) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

da $J^4 = J^2 S^3 = 1$ und $\gamma(1) = 0$ ist. Umgekehrt sei jetzt $f \in F$ und $g \in F$ beliebig vorgegeben. Wir fragen, wann existiert ein Kozykel γ derart, daß $\gamma(J) = f$ und $\gamma(S) = g$ wird?

Satz 6. Ein solches γ existiert genau dann, wenn (6.1) mit $\gamma(J)=f$ und $\gamma(S)=g$ erfüllt ist.

Der einfache Beweis beruht darauf, daß ein Kozykel auf der von J und S erzeugten freien Gruppe bereits durch Angabe der Werte auf J und S wohlbestimmt ist und $J^4=J^2S^3=1$ definierende Relationen von $SL(2, \mathbb{Z})$ sind. Wir setzen nun

$$\gamma \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := c_1(u)c_1(v) - b \left(\frac{1}{3} - c_0(u)c_2(v) \right) \quad (6.2)$$

für $b=0, 1$ und $u, v \in \mathbb{C}$. Eine kleine Rechnung zeigt, daß (6.1) erfüllt ist. Die zweite Gleichung ist gleichbedeutend mit dem Additionstheorem (1.8) für die Kotangenten.

Wir beweisen jetzt den Zusammenhang zwischen γ und $\bar{\gamma}$

Satz 7. Sei $\gamma: SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow F$ der durch (6.2) wohldefinierte Links-1-Kozykel. Dann gilt für $t \in T^*$ und $A \in \Gamma(t)$

$$\alpha(t, E(A)) - \varphi(A) = \gamma(A^T)(t). \quad (6.3)$$

Durch Induktion über b folgt zunächst, daß (6.2) für alle $b \in \mathbb{Z}$ richtig ist. Der

Induktionsschluß beruht auf den Zerlegungen $\begin{pmatrix} b+1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3$. Nach den Überlegungen in §4 können wir im Falle $\text{Spur } A > 2$ annehmen, daß

$$A = \prod_{i=1}^{lr} \begin{pmatrix} b_{lr-i} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den b_i wie in Satz 4. Dann ist, wenn $t = (\alpha_0, \beta_0)^T$,

$$\begin{aligned} \gamma(A^T)(t) &= \sum_{i=0}^{lr-1} \prod_{j < i} \begin{pmatrix} b_j & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} b_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{lr-1} \gamma \begin{pmatrix} b_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergleich dieser Gleichung mit Satz 5 zeigt jetzt die Richtigkeit des obigen Satzes im Falle $\text{Spur } A > 2$. Ist t von endlicher Ordnung, so folgern wir hieraus die Behauptung für alle $A \in \Gamma(t)$, da in diesem Falle jede Matrix $\in \Gamma(t) \setminus \{-1\}$ sich als Produkt zweier Matrizen $\in \Gamma(t)$ mit $\text{Spur} > 2$ darstellen läßt und beide Seiten von (6.3) Homomorphismen von $\Gamma(t)$ nach $\mathbb{R}$ sind. Ist dagegen t von unendlicher Ordnung, so ist notwendigerweise $\text{Spur } A = 2$ und auf $E(A)$ operiert jetzt $S^1 \times \mathbb{Z}_n \subset T$, falls $A \sim \begin{pmatrix} 1 & \pm n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zur Berechnung der α -Invariante $\alpha(t, E(A))$ können

wir eine Spitzenauflösung nicht mehr gebrauchen, da dort nur Elemente endlicher Ordnung operieren. In diesem Falle läßt sich aber $E(A)$ auch als ein S^1 -Bündel über T auffassen. Eine äquivariant berandende Mannigfaltigkeit für $E(A)$ ist dann das zu $E(A)$ assoziierte Scheibenbündel. Man kann diese Mannigfaltigkeit zur

Berechnung der α -Invariante für Elemente unendlicher Ordnung heranziehen [19]. Wir wollen aber darauf nicht eingehen, bemerken stattdessen, daß beide Seiten von (6.3) mit Ausnahme von endlich vielen rationalen Punkten stetige Funktionen von t sind, vgl. [1, Proposition 7.6]. Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

2. Wir werden jetzt eine explizite Formel für $\gamma(A)$ in den Koeffizienten der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aufstellen. Unter Benutzung der Kozykleigenschaft von γ folgt aus der Zerlegung

$$\begin{pmatrix} ad & 1 \\ bc & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ad & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma \begin{pmatrix} ad & 1 \\ bc & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1(u+v)c_1(v) + ad \left(\frac{1}{3} - c_0(u+v)c_2(v) \right) + \left(\frac{1}{3} - c_0(v)c_2(u) \right). \quad (6.4)$$

Satz 8. Für $bd \neq 0$ und $u, v \in \mathbb{C}$ gilt

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{bd} \sum_{k(b)} \sum_{l(d)} \left\{ \gamma \begin{pmatrix} ad & 1 \\ bc & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u+l)/d \\ (v+k)/b \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} ad & 1 \\ bc & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l/d \\ k/b \end{pmatrix} \right\}.$$

Beweis. Wir schreiben für die rechte Seite von Satz 8 $\Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, setzen $\Phi(A) := \gamma(A)$, falls $bd = 0$ und zeigen nun, daß $\Phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow F$ ein Links-1-Kozykel ist, d. h., es gilt

$$\Phi(JA) = J\Phi(A) + \Phi(J), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\Phi(TA) = T\Phi(A) + \Phi(T), \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Da Φ nach Definition auf den Erzeugenden J, T von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ mit γ übereinstimmt, folgt dann $\Phi(A) = \gamma(A)$ für alle A und der Satz ist bewiesen.

$$\begin{aligned} & \Phi(JA) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - J\Phi(A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \Phi(J) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \Phi \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{bd} \sum_{k(b)} \sum_{l(d)} \left\{ c_1 \left(\frac{u+k}{b} - \frac{v+l}{d} \right) c_1 \left(\frac{v+l}{d} \right) + c_1 \left(\frac{u+k}{b} - \frac{v+l}{d} \right) c_1 \left(-\frac{u+k}{b} \right) \right. \\ & \quad + c_1 \left(-\frac{u+k}{b} \right) c_1 \left(\frac{v+l}{d} \right) - (ad-bc) \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + (ad-bc) c_0 \left(\frac{u+k}{b} \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{v+l}{d} \right) c_2 \left(\frac{v+l}{d} \right) + c_0 \left(\frac{v+l}{d} \right) c_2 \left(\frac{u+k}{b} \right) + c_0 \left(\frac{u+k}{b} \right) c_2 \left(\frac{v+l}{d} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_1\left(\frac{k}{b}-\frac{l}{d}\right)c_1\left(\frac{l}{d}\right)-c_1\left(\frac{k}{b}-\frac{l}{d}\right)c_1\left(-\frac{k}{b}\right)-c_1\left(-\frac{k}{b}\right)c_1\left(\frac{l}{d}\right) \\
& -(ad-bc)c_0\left(\frac{k}{b}-\frac{l}{d}\right)c_2\left(\frac{l}{d}\right)-c_0\left(\frac{l}{d}\right)c_2\left(\frac{k}{b}\right)-c_0\left(\frac{k}{b}\right)c_2\left(\frac{l}{d}\right)+1\}
\end{aligned}$$

und diese Doppelsumme verschwindet gliedweise auf Grund des Additionstheorems (1.8) für die Kotangente. Zum Beweis von (6.6) unterscheiden wir $b+d=0$ von $b+d\neq 0$. Im Falle $b+d=0$ ist nach Definition $\Phi(TA)=\gamma(TA)=\gamma(\pm TA)$. Im Falle $b+d\neq 0$ wenden wir die Multiplikationsformeln (1.9) auf die innere Summe in Satz 8 an und erhalten in beiden Fällen

$$\begin{aligned}
\Phi(TA)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b} \sum_{k(b)} \left\{ c_1\left(\frac{b(u+v)+d(v+k)}{b}\right) c_1\left(\frac{v+k}{b}\right) \right. \\
&\quad - ac_0\left(\frac{b(u+v)+d(v+k)}{b}\right) c_2\left(\frac{v+k}{b}\right) - (b+d)c_0\left(\frac{v+k}{b}\right) c_2(u) \\
&\quad \left. - c_1\left(\frac{dk}{b}\right) c_1\left(\frac{k}{b}\right) + ac_0\left(\frac{dk}{b}\right) c_2\left(\frac{k}{b}\right) + (b+d)c_0\left(\frac{k}{b}\right) \cdot \frac{1}{3} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\Phi(A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+v \\ v \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b} \sum_{k(b)} \left\{ c_1\left(\frac{b(u+v)+d(v+k)}{b}\right) c_1\left(\frac{v+k}{b}\right) \right. \\
&\quad - ac_0\left(\frac{b(u+v)+d(v+k)}{b}\right) c_2\left(\frac{v+k}{b}\right) - dc_0\left(\frac{v+k}{b}\right) c_2(u+v) \\
&\quad \left. - c_1\left(\frac{dk}{b}\right) c_1\left(\frac{k}{b}\right) + ac_0\left(\frac{dk}{b}\right) c_2\left(\frac{k}{b}\right) + dc_0\left(\frac{k}{b}\right) \cdot \frac{1}{3} \right\}.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt noch aus $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Phi(T)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{3} - c_0(v)c_2(u).$$

Ein Vergleich dieser drei Gleichungen bestätigt unmittelbar die Richtigkeit von (6.6). Nach Ausführung der inneren Summe über $l(d)$ in Satz 8 mittels (1.9) erhalten wir

Satz 9. Für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ und $u, v \in \mathbb{C}$ gilt

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{a}{b} \left(\frac{1}{3} - c_0(bu + dv) c_2(au + cv) \right) + \frac{d}{b} \left(\frac{1}{3} - c_0(v) c_2(u) \right) \\ \quad + \frac{1}{b} \mathrm{def}(d, b; v, u) - \frac{1}{b} \mathrm{def}(d, b; 0, 0), & b \neq 0 \\ \frac{c}{a} \left(\frac{1}{3} - c_0(v) c_2(u) \right), & \text{falls } b = 0, \end{cases}$$

wo

$$\mathrm{def}(d, b; v, u) = \sum_{k(b)} c_1 \left(\frac{d(v+k) + bu}{b} \right) c_1 \left(\frac{v+k}{b} \right)$$

bedeutet. def soll an Signaturdefekt erinnern, eine Bezeichnungsweise für Kotangenssummen, die auf Hirzebruch zurückgeht [9].

Beweis. Der einzige nicht-triviale Punkt an dieser Summation ist die Beobachtung, daß $c_0 \left(\frac{u+l}{d} + \frac{v+k}{b} \right) = 1$ für ein bestimmtes $l(d)$ und $k(b)$ genau dann eintritt, wenn $c_0(bu + dv) = 1$. In diesem Fall gilt dann $a(bu + dv) \equiv -k(b)$, so daß $au + cv = \frac{a(bu + dv) - v}{b} \equiv -\frac{v+k}{b} (1)$ ist.

Wir formulieren noch eine leichte Verallgemeinerung von Satz 8, die sich mittels Satz 9 unschwer einsehen läßt:

Satz 10. Für jeden Teiler $\beta | b$, $\delta | d$ gilt, falls $bd \neq 0$,

$$\gamma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta \delta} \sum_{k(\beta)} \sum_{l(\delta)} \left\{ \gamma \begin{pmatrix} a\delta & b/\beta \\ c\beta & d/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u+l)/\delta \\ (v+k)/\beta \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} a\delta & b/\beta \\ c\beta & d/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l/\delta \\ k/\beta \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus Satz 9 können wir jetzt eine explizite Formel für $\alpha(t, E(A))$ folgern.

Korollar. Für $t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in T^*$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(t)$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha(t, E(A)) &= \gamma(A^T)(t) + \varphi(A) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \{1 + \mathrm{sign}((a+d)^2 - 4)\} \mathrm{sign} c(a+d) - \frac{1}{2} \{1 - \mathrm{sign}((a+d)^2 - 4)\} \mathrm{sign} c \\ \quad - \frac{a+d}{c} c_0(v) c_2(u) + \frac{1}{c} \mathrm{def}(a, c; v, -u), & c \neq 0 \\ \frac{1}{2} (1 + \mathrm{sign} d) \mathrm{sign} b - \frac{b}{d} c_0(v) c_2(u), & \text{falls } c = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1. *Bemerkung.* Unter den Voraussetzungen des Korollars gilt $\text{def}(a, c; v, -u) = \text{def}(d, c; v, u)$. Dies folgt z. B. aus der Summationstransformation $k \rightarrow dk + dv + cu - v$ oder einfacher aus $\alpha(t, E(A)) = -\alpha(t, E(A^{-1}))$. Man beachte auch $\alpha(t, E(A)) = -\alpha(Jt, E(A^T))$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Bemerkung.* Ein Vergleich der obigen Formel für α mit der entsprechenden Formel für φ (§ 3) legt die Auffassung $\varphi(A) = \alpha(0, E(A))$ nahe.

§ 7. Signaturdefekte und Dedekindsummen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Eigenschaften der Signaturdefekte $\text{def}(a, c; u, v)$ diskutieren, insbesondere einen Zusammenhang dieser Kotangenssummen mit den sogenannten Dedekind-Rademacher-Summen angeben. Die wohl wichtigsten Eigenschaften sind

$$\begin{aligned} & a \text{def}(a, c; u, v) + c \text{def}(c, a; v, u) \\ &= a^2 c_0(u) c_2(v) + c_0(au + cv) c_2(bu + dv) \\ &+ c^2 c_0(v) c_2(u) + acc_1(u) c_1(v) - |ac|, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\text{falls } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}), \quad ac \neq 0 \quad \text{und} \quad u, v \in \mathbb{C},$$

$$\text{def}(a, c; u, v) = \text{def}(a - mc, c; u, v + mu), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (7.2)$$

$$\text{def}(0, c; u, v) = cc_1(u) c_1(v). \quad (7.3)$$

Die Formeln (7.2) und (7.3) folgen unmittelbar aus der Summendefinition, während die Reziprozitätsformel (7.1) die Kozykeleigenschaft von γ reflektiert, genauer, eine Umformulierung der Gl. (6.5) darstellt. Der Beweis von Satz 8 impliziert daher auch die Reziprozitätsformel für Signaturdefekte. Alle drei Formeln gestatten es, die Signaturdefekte zu evaluieren ohne Rückgriff auf deren Summendefinition. Man verfährt dabei ebenso, wie bei der Bestimmung des quadratischen Restsymbols mittels des quadr. Reziprozitätsgesetzes.

Satz 11. Die Abbildung $\Psi: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \{f | f: T^* \rightarrow \mathbb{R}\}$,

$$\Psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{cases} 2P_2(x) \frac{a}{c} + 2P_2(ax + cy) \frac{d}{c} - 4 \text{sign}(c) s(a, c; x, y), & c \neq 0 \\ 2P_2(x) \frac{b}{d}, & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

mit der in (1.11) erklärten Dedekind-Rademacher Summe $s(a, c; x, y)$, ist ein Links-1-Kozykel, es gilt also $\Psi(AB) = A\Psi(B) + \Psi(A)$ für alle $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Der Beweis verläuft völlig analog zu dem Beweis von Satz 8.

Wie in [17], Kapitel VIII näher ausgeführt, beschreibt der Kozykel Ψ (dort bis auf einen konstanten Faktor mit π bezeichnet) das Transformationsverhalten vom Logarithmus der verallgemeinerten Dedekindschen Modulfunktion unter der Aktion der Modulgruppe $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. Andererseits werden durch Ψ auch die Werte

gewisser L -Reihen an der Stelle 0 dargestellt. Es handelt sich um L -Reihen in reell-quadratischen Körpern gebildet mit Charakteren, die zu total imaginär-quadratischen Erweiterungen dieser Körper gehören, siehe § 9. Um so interessanter ist es, daß der Kozykel Ψ auch Signaturdefekte von Torusbündeln über der Kreislinie beschreibt. Für rationale $t \in T$ sind nämlich $\gamma(A)$ und $\Psi(A^{-T})$ linear abhängig:

Satz 12. Für $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ und $t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in {}_n T$ gilt

$$\gamma(A)(t) = \sum_{s \in {}_n T^*} e^{2\pi i n(us_1 + vs_2)} \Psi(A^{-T})(s).$$

Der Beweis dieser Gleichung ist eine elementare, aber etwas langwierige Rechnung, die sich auf die Formeln (1.6) und (1.7) stützt.

Es ist nun klar, daß γ lediglich eine "trigonometrische" Version von Ψ ist. Formeln, die wir für γ abgeleitet haben, gelten daher mutatis mutandis auch für Ψ . Satz 10 z. B. für Ψ formuliert lautet:

Satz 10*. Falls $s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T^*$, $ac \neq 0$, dann ist

$$\Psi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{sign}(\alpha\gamma) \sum_{l(\gamma)} \sum_{k(\alpha)} \Psi \begin{pmatrix} a/\alpha & \gamma b \\ c/\gamma & \alpha d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x+l)/\gamma \\ (y+k)/\alpha \end{pmatrix}$$

für jeden Teiler α von a und jeden Teiler γ von c .

Es sei hier nochmals betont, daß der Beweis solcher und ähnlicher Formeln sich lediglich auf Additions- und Multiplikationsformeln für die beteiligten periodischen Funktionen stützt.

§ 8. Perioden der Integrale von $\wp$ -Teilwerten

Es sei $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Wir erinnern an die Definition der zum Gitter $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ gehörigen Weierstraßschen $\wp$ -Funktion

$$\wp(z; L) = \wp(z; \tau, 1) = z^{-2} + \sum'_{\omega \in L} \{(z + \omega)^{-2} - \omega^{-2}\}.$$

Für $t \in T^*$ hat man dann die $\wp$ -Teilwerte

$$\wp_t(\tau) := \wp(u\tau + v; \tau, 1), \quad t = (u, v)^T.$$

Sie sind in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorphe Funktion von τ , für die

$$\wp_t(A\tau) = (c\tau + d)^2 \wp_{A^{-1}t}(\tau), \quad A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

gilt, wie man durch eine kleine Rechnung bestätigt. Wie üblich sei $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $A^T J t = J A^{-1} t = J t$ für $A \in \Gamma(t)$, $t \in T^*$, gilt daher

$$\wp_{Jt}(A\tau) d(A\tau) = \wp_{Jt}(\tau) d\tau, \quad (8.1)$$

d. h., $\wp_{Jt}$ ist eine in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorphe Modulform vom Gewicht 2 für die Untergruppe $\Gamma(t)$ der Modulgruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Satz 13. Für $t \in T^*$ und $A \in \Gamma(t)$ gilt

$$\pi^2 \gamma(A^T)(t) = \int_{Az}^z \wp_{Jt}(\tau) d\tau \quad (8.2)$$

wo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist und der Integrationsweg in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ verläuft.

Betrachtet man die rechte Seite von (8.2) als Funktion von z , so ist dies eine in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorphe Funktion, deren Ableitung nach z wegen (8.1) identisch verschwindet. Also hängt das Integral nicht von der Wahl von z ab, was weiterhin von Bedeutung sein wird. Insbesondere folgt, daß die rechte Seite von (8.2) ein Homomorphismus $\Gamma(t) \rightarrow \mathbb{C}$ ist:

$$\int_{ABz}^z \wp_{Jt}(\tau) d\tau = \int_{A(Bz)}^{Bz} \wp_{Jt}(\tau) d\tau + \int_{Bz}^z \wp_{Jt}(\tau) d\tau \quad \text{für } A, B \in \Gamma(t).$$

In der Literatur sind mehrere Methoden bekannt, Perioden von Integralen 3. Art (um solche handelt es sich bei den Integralen der $\wp$ -Teilwerte) zu bestimmen, siehe z. B. Kapitel VIII in Schoeneberg's Buch [17]. Wir führen hier eine neue Methode vor. Sie beruht wesentlich auf Umordnung bedingt konvergenter Reihen. Für solche Reihen vereinbaren wir jetzt eine feste Summationsvorschrift $\sum_e$ (Eisenstein-Summation):

$$\sum_n a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} a_n, \quad \sum_{k \equiv l(m)} a_k := \sum_n a_{mn+l}.$$

Die bekannte Partialbruchzerlegung der Cotangente schreibt sich damit

$$\pi \cot \pi z = \sum_e \frac{1}{z+n} = \sum_{n \equiv z(1)} \frac{1}{n}. \quad (8.3)$$

Sei nun $Jt = (u, v)^T \in T^*$ und zunächst $u \neq 0(1)$. Dann wird

$$\wp_{Jt}(\tau) = \sum_m \sum_n \frac{1}{((m+u)\tau + (n+v))^2} - \sum_{m \neq 0} \sum_n \frac{1}{(m\tau + n)^2} - \frac{\pi^2}{3}. \quad (8.4)$$

Man beachte, daß die Doppelreihen rechts nur bedingt konvergieren und daher die Summationsreihenfolge über m und n in beiden Doppelreihen die gleiche sein muß. Da diese Reihen in jedem Kompaktum $\subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergieren, ist gliedweise Integration zulässig:

$$\begin{aligned} \int_{Az}^z \wp_{Jt}(\tau) d\tau &= [Az - z] \frac{\pi^2}{3} - \sum_{m \neq 0} \sum_n \left[\frac{1}{m(m\tau + n)} \right]_{Az}^z \\ &\quad + \sum_m \sum_n \left[\frac{1}{(m+u)[(m+u)\tau + (n+v)]} \right]_{Az}^z \\ &= : [Az - z] \frac{\pi^2}{3} - S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Offensichtlich genügt es, weiterhin nur S_2 zu behandeln, da S_1 bis auf die Summationseinschränkung ein Spezialfall von S_2 ist. Sei jetzt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und zunächst $c \neq 0$. Wir setzen $z = (i - d)/c$, dann wird $Az = (i + a)/c$ und

$$S_2 = c \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{(m+u)[(m+u)i + am + au + cv + nc]} - \frac{1}{(m+u)[(m+u)i - dm - du + cv + nc]} \right\}.$$

Auf Grund der Formel (8.3) können wir in dieser Doppelreihe die innere Summe über n ausführen. Unter Beachtung der Tatsache, daß $\cot \pi m z$ exponentiell gegen $\mp i \operatorname{sign} \operatorname{Im} z$ strebt, falls $m \rightarrow \pm \infty$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist, sieht man so, daß die äußere Summe über m sogar absolut konvergiert, wir dürfen sie daher geeignet umordnen. Hierzu lassen wir den Summationsbuchstaben m erst über eine feste Restklasse $\text{mod } c$ laufen und summieren dann über die $|c|$ verschiedenen Restklassen.

Schreiben wir noch zur Abkürzung

$$S_2 = c \sum_{\mu(c)} \sum_{m \equiv \mu(c)} \sum_n \{f(m, n) - g(m, n)\},$$

so behaupten wir nun, daß

$$S_2 = c \sum_{\mu(c)} \sum_{m \equiv \mu(c)} \sum_n \{f(m, n) - g(m - \mu + v, n)\} \quad \text{ist,}$$

wo $v = a\mu + au + cv - u$ bedeutet. Da nach Voraussetzung $A^T J t \equiv J t(1)$, also $au + cv \equiv u(1)$, ist insbesondere v eine ganze Zahl. Zur Rechtfertigung der damit vorgenommenen Umordnung von S_2 genügt es festzustellen, daß

$$\sum_{m \equiv \mu(c)} \sum_n \{g(m, n) - g(m - \mu + v, n)\}$$

konvergiert, da mit μ auch v alle Reste $\text{mod } c$ durchläuft. Dies ist aber ebenso leicht einzusehen, wie die soeben diskutierte Konvergenz von S_2 . Nun ist aber $-d(m - \mu + v) - du + cv = -d(m - \mu + a\mu + au + cv - u) - du + cv \equiv -\mu - u(c)$, da $b\mu + dcv \equiv cv(c)$. Daher dürfen wir schreiben

$$S_2 = c \sum_{\mu(c)} \sum_{m \equiv \mu + u(c)} \sum_{n \equiv v + u(c)} \left\{ \frac{1}{m(mi + n)} - \frac{1}{(m - \mu + v)[(m - \mu + v)i - n + v - \mu]} \right\}.$$

Betrachten wir nun das allgemeine Summenglied dieser Dreifachreihe. Könnten wir im Subtrahenden die Reihenfolge der Summe über m und n vertauschen, erhielten wir eine Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$\frac{1}{m(mi + n)} - \frac{1}{n(ni - m)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}.$$

Unter dieser Annahme zerfällt also die Doppelsumme über m und n in ein Produkt von zwei einfachen Summen. Wir erhalten so nach zweifacher Anwendung von (8.3):

$$\begin{aligned} S_2 &= c \sum_{\mu(c)} \sum_{m \equiv \mu + u(c)} \sum_{n \equiv v + u(c)} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{\pi^2}{c} \sum_{\mu(c)} \cot \pi \left(\frac{\mu + u}{c} \right) \cot \pi \left(\frac{a\mu + au + cv}{c} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{c} \text{def}(a, c; u, v). \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung $h(m, n) = \{(m+x)[(m+x)i+n+y]\}^{-1}$, so ist die von uns gemachte Annahme offensichtlich gleichbedeutend mit $D := \sum_m \sum_n \{h(m, n)$

$-h(n, m)\} = 0$. Hier bedeuten allgemeiner x und y zwei komplexe Zahlen derart, daß x und $xi+y$ nicht im Gaußschen Zahlgitter $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ liegen. Man beachte nun, daß auf Grund der vereinbarten Summationsart

$$2D = \sum_m \sum_n \{h(m, n) - h(n, m) + h(m, -n) - h(n, -m)\} \quad \text{ist.}$$

Diese Reihe ist aber absolut konvergent, denn ihr allgemeines Glied ist für $m, n \neq 0$ dem Betrage nach kleiner als $C \cdot (|m|^{-1} + |n|^{-1}) \cdot (m^2 + n^2)^{-1}$, $C = C(x, y)$ eine Konstante. Wir können daher die Summen über m und n vertauschen und erhalten $2D = -2D$ bzw. $D = 0$. Die von uns getroffene Annahme was also gerechtfertigt. Bei der Bestimmung von S_1 ist zusätzlich zu beachten, daß die Doppelsumme für $\mu \equiv 0(c)$ verschwindet – in Übereinstimmung mit unserer Setzung $c_1(k) = 0$ für ganze k . Wir erhalten so schließlich

$$\int_{Az}^z \wp_{Ji}(\tau) d\tau = \frac{\pi^2}{c} \left\{ \frac{a+d}{3} - \text{def}(a, c; 0, 0) + \text{def}(a, c; u, v) \right\}$$

und dies ist gerade die Behauptung des Satzes im Falle $c \neq 0$ und $u \not\equiv 0(1)$. Falls $u \equiv 0(1)$, so können wir sogar $u = 0$ annehmen. Dann liefert die erste Summe in (8.4) für $m = 0$ den zusätzlichen von τ unabhängigen Beitrag $\pi^2 \sin^{-2} \pi v$, während in S_2 jetzt über $m \neq 0$ zu summieren ist und die Summe der Glieder mit $m \equiv 0(c)$ verschwindet. Der Fall $c = 0$ ist schließlich mehr oder weniger trivial.

§ 9. L -Reihen zu total-imaginären biquadratischen Körpern

1. Wie in der Einleitung erwähnt, hat Hecke im Falle $|\text{Spur } A| > 2$ bewiesen, daß die Perioden der Integrale von Pe-Teilwerten Werte von gewissen L -Reihen an der Stelle 1 darstellen. Wir wollen dies im folgenden näher ausführen. K sei wieder ein reell-quadratischer Körper mit der Diskriminante D_K und der Einheitengruppe U . Mit S bzw. N bezeichnen wir Spur- bzw. Normbildung in K . M sei ein vollständiger Modul in K , $\mathfrak{D}_M$ sein Multiplikatorenring der Diskriminante $D_M = f^2 D_K$, $U_M = \mathfrak{D}_M^*$ die Einheitengruppe von $\mathfrak{D}_M$ und $U(M) \subset U_M$ die Untergruppe

der Einheiten, die $\equiv 1 \pmod{M}$ sind. Die total positiven Elemente einer beliebigen Einheitengruppe V bezeichnen wir weiterhin mit V^+ . M habe die $\mathbb{Z}$ -Basis β_1, β_2 mit der Basisdeterminante $d(M) := \beta_1 \beta'_2 - \beta'_1 \beta_2 = N(M) \sqrt{D_M} > 0$. Für den zu M dualen Modul

$$M^* = \{m^* \in K \mid S(m^* m) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } m \in M\}$$

gilt dann bekanntlich $d(M)M^* = M'$ und die zu β_1, β_2 duale Basis von $M^* = \mathbb{Z}\beta_1^* + \mathbb{Z}\beta_2^*$ ist $\beta_1^* = \beta'_2/d(M)$, $\beta_2^* = -\beta'_1/d(M)$. Insbesondere gilt $d(M)d(M^*) = 1$. Weiter sei $V \subset U_M^+$ eine Einheitengruppe, die von $\eta > 1$ erzeugt werde und in U den Index

$$[U : V] \text{ habe. Die Aktion von } \eta \text{ auf } M \text{ bestimmt eine Matrix } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

durch

$$\eta\beta_1 = a\beta_1 + c\beta_2$$

$$\eta\beta_2 = b\beta_1 + d\beta_2.$$

Der Umgebungsrand der Spitze (M, V) ist dann gerade das Bündel $E(A) \simeq W(d)/G(M, V)$, siehe § 4. $t \in T$ operiere auf dem Bündel $E(A)$ durch faserweise Translation. $At \equiv t \pmod{\mathbb{Z}^2}$ ist gleichbedeutend mit $\eta\varrho \equiv \varrho \pmod{M}$, $\varrho := t_1\beta_1 + t_2\beta_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{(a+d)^2 - 4})$. Wir ordnen nun dem Tripel (M, V, ϱ) folgende L -Reihe zu

$$L(M, V, \varrho; s) := \sum'_{\lambda \in M + \varrho/V} \frac{\text{sign } N(\lambda)}{|N(\lambda)|^s}, \quad \text{Re}(s) > 1$$

wobei nur über solche Vertreter der Restklasse $\varrho(M)$ summiert wird, die bzgl. der Operation von V nicht assoziiert sind. $L(M, V, \varrho; s)$ besitzt eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene und genügt einer Funktionalgleichung vom bekannten Typ. Mit der Abkürzung

$$\zeta(M, \varrho; s) := \pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \frac{\sqrt{d(M)}}{[U : V]} L(M, V, \varrho; s)$$

gilt nämlich

Satz 14.

$$\zeta(M, \varrho; 1-s) = -|M^*/N^*|^{-1/2} \sum_{\beta \in M^*/N^*} e^{2\pi i S(\beta \varrho)} \zeta(N^*, \beta; s).$$

Hier bezeichnet N den von ϱ und M aufgespannten Obermodul von M und $|M^*/N^*| = d(M)/d(N)$ die Anzahl der Restklassen von M^* nach N^* . Das eingangs erwähnte Resultat von Hecke läßt sich nun so formulieren:

Satz 15.

$$\int_{Az}^z \wp_{J_1}(\tau) d\tau = d(M) \{L(M, V, \varrho; 1) - L(M, V, 0; 1)\}.$$

Sein Beweis dieser Identität, wie auch von Satz 14, beruht auf einem genialen Trick, einer geschickten Vertauschung zwischen Summation und Integration, s.

[4, 6]. Dort wird zwar vorausgesetzt, daß M ein Ideal ist, jedoch benutzt Hecke nur, daß M ein vollständiger Modul ist. Der Beweis gilt daher auch für den hier behaupteten allgemeineren Fall.

Durch Kombination der Sätze 7 und 12 bis 15 mit der bekannten Formel für $L(M, V, 0; 1)$, s. [13, 21, 22], können wir jetzt eine explizite Formel für die Zahlen $L(M, V, \varrho; s)$, $s=0$ oder 1, angeben:

Satz 16.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(M)}{\pi^2} L(M, V, 0; 1) &= L(M, V, 0; 0) = \varphi(A) \\ \frac{d(M)}{\pi^2} L(M, V, \varrho; 1) &= \alpha(M, V, \varrho) := \alpha(t, E(A)) \\ L(M, V, \varrho; 0) &= \Psi(A^T)(t). \end{aligned} \right\} \varrho \neq 0(M).$$

Die mittlere Gleichung vermittelt hier den für die Anwendungen wichtigen Zusammenhang zwischen der topologisch definierten α -Invariante und den L -Reihen $L(M, V, \varrho, 1)$. Um diese Anwendungen machen zu können, benötigen wir eine formale Identität für gewisse L -Reihen. Diese soll der Inhalt des nächsten Abschnitts sein.

Die Berechnung der L -Reihen $L(M, V, \varrho; s)$ für ganze s wurde seit den Arbeiten Heckes von mehreren Autoren durchgeführt [11, 22, 24]. Wir erwähnen hier nur die Arbeit von Zagier [23], in der ein neues Verfahren ausgeführt wird, das durch Hirzebruchs Spitzenauflösung inspiriert wurde und vom Heckeschen Verfahren grundverschieden ist. Zagiers Methode wurde inzwischen von Shintani [20] für den Fall eines total reellen Körpers verallgemeinert.

2. Es sei χ_0 ein reeller Charakter auf der multiplikativen Gruppe $H(\mathfrak{f})$ der zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Hauptideale (μ), $\mathfrak{f}$ ein fest vorgegebenes ganzes Ideal in K . Ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ganz, heißt dabei teilerfremd zu $\mathfrak{f}$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd zu $\mathfrak{f}$ sind. χ sei eine Fortsetzung von χ_0 auf die Gruppe $G(\mathfrak{f})$ aller zu $\mathfrak{f}$ teilerfremden Ideale in K und X die Menge aller dieser Fortsetzungen. Offensichtlich gibt es h solche Fortsetzungen, h = Klassenzahl von K , denn der Quotient zweier solcher Fortsetzungen ist ein Charakter der Idealklassengruppe (im absoluten Sinne) eingeschränkt auf $G(\mathfrak{f})/H(\mathfrak{f})$. Es werde noch ein festes Vertretersystem $\mathfrak{a}_i$, $i=1, \dots, h$, der h Idealklassen gewählt, alle $\mathfrak{a}_i$ teilerfremd zu $\mathfrak{f}$. X_2 bezeichne schließlich die Menge der reellen Charaktere von X . Dann gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{\chi \in X} \chi(\mathfrak{a}) = \begin{cases} h\chi_0(\mathfrak{a}), & \text{falls } \mathfrak{a} \text{ Hauptideal} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (9.1)$$

$$\sum_{i=1}^h \chi(\mathfrak{a}_i^2) = \begin{cases} h, & \text{falls } \chi \in X_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9.2)$$

Die zu χ gehörige Heckesche L -Reihe ist nun

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}.$$

Die Summe läuft hier über alle ganzen Ideale in $G(\mathfrak{f})$. Ist A eine Idealklasse in K , so bezeichne $L(s, \chi, A)$ die Einschränkung der obigen Summe auf alle ganzen Ideale in der Klasse A . Nach Wahl irgendeines Hilfsideals $\mathfrak{c} \in A^{-1}$, der inversen Klasse von A , mit $\mathfrak{c} \in G(\mathfrak{f})$, vermittelt die Gleichung $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = (\mu)$ eine Bijektion zwischen allen ganzen Idealen $\mathfrak{a} \in A \cap G(\mathfrak{f})$ und allen Hauptidealen $(\mu) \in H(\mathfrak{f})$ mit $\mathfrak{c} | (\mu)$. Also

$$\begin{aligned} L(s, \chi, A) &= \bar{\chi}(\mathfrak{c}) N(\mathfrak{c})^s \sum_{\mathfrak{a} \in A} \chi(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) N(\mathfrak{a}\mathfrak{c})^{-s} \\ &= \bar{\chi}(\mathfrak{c}) N(\mathfrak{c})^s \sum_{\mathfrak{c} | (\mu)} \chi_o((\mu)) N((\mu))^{-s}. \end{aligned}$$

Hier haben wir noch die übliche Konvention $\chi(\mathfrak{a}) = 0$ für $\mathfrak{a} \notin G(\mathfrak{f})$ getroffen, sie erlaubt es, die Summationsbedingung „ $\in G(\mathfrak{f})$ “ fortzulassen. Wir betrachten jetzt den Ausdruck

$$\frac{1}{h} \sum_{\chi \in X} \sum_{i=1}^h \bar{\chi}(\mathfrak{a}_i^2) L(s, \chi)$$

und wenden auf ihn die Orthogonalitätsrelationen (9.1) und (9.2) an. Zunächst bemerken wir aber, daß er von der speziellen Wahl der $\mathfrak{a}_i$ unabhängig ist, da χ_o

reell ist. Wegen (9.2) ist dies einerseits gleich $\sum_{\chi \in X_2} L(s, \chi)$, andererseits aber

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \sum_{\chi \in X} \sum_{i,j=1}^h \bar{\chi}(\mathfrak{a}_i^2) L(s, \chi, A_j) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{\chi \in X} \sum_{i,j=1}^h \bar{\chi}(\mathfrak{a}_i^2 \mathfrak{c}_{ij}) N(\mathfrak{c}_{ij})^s \sum_{\mathfrak{c}_{ij} | (\mu)} \chi_o((\mu)) N((\mu))^{-s}, \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{c}_{ij} \in A_j^{-1} \cap G(\mathfrak{f})$ irgendwie gewählt sind. Anwendung von (9.1) auf die äußere Summe über χ ergibt, daß diese Null ist, solange $\mathfrak{a}_i^2 \mathfrak{c}_{ij}$ kein Hauptideal. Ist aber $\mathfrak{a}_i^2 \mathfrak{c}_{ij}$ ein Hauptideal, so können wir $\mathfrak{c}_{ij} = \mathfrak{a}_i^{-2}$ wählen und erhalten für jeden Charakter $\chi \in X$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^h \bar{\chi}(\mathfrak{a}_j^2) L(s, \chi, A_j^2) \\ &= \sum_{j=1}^h N(\mathfrak{a}_j^{-2})^s \sum_{\mathfrak{a}_j^{-2} | (\mu)} \chi_o((\mu)) N((\mu))^{-s} \\ &= \sum_{\chi \in X_2} L(s, \chi). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Dieses Ergebnis spezialisieren wir jetzt für den Fall, daß χ zu einer total imaginären quadratischen Erweiterung L von K mit der Relativdiskriminante $\mathfrak{f}$ gehört, $\mathfrak{f}$ ein Primideal ungerader Norm in K . Bekanntlich gilt dann für ein Primideal $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}$ $\chi(\mathfrak{q}) = +1$ oder -1 , je nachdem $\mathfrak{q}$ in L zerfällt oder träge bleibt. Für ein ganzes Hauptideal (μ) gilt darüber hinaus

$$\chi((\mu)) = \chi_o((\mu)) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}} \right) \text{sign } N(\mu), \tag{9.4}$$

falls $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}}\right)$ das quadratische Restsymbol in K bezeichnet. Dies ist eine Folgerung aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz in K , s. [7]. Aus (9.4) folgt insbesondere $N(\mathfrak{f}) \equiv 1(4)$, da $1 = \chi((-1)) = \left(\frac{-1}{\mathfrak{f}}\right) = (-1)^{(N(\mathfrak{f})-1)/2}$. Allgemeiner besteht eine Bijektion zwischen allen reellen Charakteren auf $G(\mathfrak{f})$ mit (9.4) und allen total imaginären quadratischen Erweiterungen von K , deren Relativediskriminante das Primideal $\mathfrak{f}$ ist. Deren Anzahl ist übrigens 2^{t-1} oder 2^{t-2} , t = Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von D_K . Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn jede Einheit in K positive Norm hat und D_K sich als Produkt von zwei Diskriminanten imaginär-quadratischer Körper darstellen läßt.

Trägt man (9.4) in (9.3) ein, so wird

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_j^{-2} | (\mu)} \chi_0((\mu)) N((\mu))^{-s} \\ &= \frac{1}{[U : U(\mathfrak{f})^2]} \sum'_{\mu \in \alpha_j^{-2} / U(\mathfrak{f})^2} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}}\right) \frac{\text{sign } N(\mu)}{|N(\mu)|^s} \\ &= \frac{1}{[U : U(\mathfrak{f})^2]} \sum_{\substack{\mu(\mathfrak{f}) \\ \mu \in \alpha_j^{-2}}} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}}\right) \sum'_{\lambda \in \alpha_j^{-2} \mathfrak{f} + \mu / U(\mathfrak{f})^2} \frac{\text{sign } N(\lambda)}{|N(\lambda)|^s} \\ &= \frac{1}{[U : U(\mathfrak{f})^2]} \sum_{\substack{\mu(\mathfrak{f}) \\ \mu \in \alpha_j^{-2}}} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}}\right) L(\alpha_j^{-2} \mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2, \mu; s) \end{aligned}$$

und hieraus gewinnen wir durch Kombination mit Satz 16 das abschließende Ergebnis

Satz 17. Sei $\mathfrak{f}$ ein Primideal ungerader Norm in K . X_2 bezeichne die Menge aller reellen Charaktere auf $G(\mathfrak{f})$ mit der Eigenschaft (9.4). $\alpha_j \in G(\mathfrak{f})$ sei ein Vertretersystem der h Idealklassen. Dann gilt

$$\frac{\pi^2 D_K^{-1/2} N(\mathfrak{f})^{-1}}{[U : U(\mathfrak{f})^2]} \sum_{j=1}^h \sum_{\substack{\mu(\mathfrak{f}) \\ \mu \in \alpha_j^{-2}}} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}}\right) \alpha(\alpha_j^{-2} \mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2, \mu) = \sum_{\chi \in X_2} L(1, \chi).$$

Ist $\mathfrak{f}$ keine Relativediskriminante einer total imaginären quadratischen Erweiterung von K , so ist X_2 leer und beide Seiten der Gleichung sind Null.

Aus der Zerlegung $\zeta_L(s) = \zeta_K(s) L(s, \chi)$, ζ_L bzw. ζ_K die Zetafunktion von L bzw. K , folgt die Formel

$$\frac{H}{h} \cdot \frac{R}{r} = \frac{W}{w} \cdot \frac{\sqrt{D_L}}{\sqrt{D_K}} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot L(1, \chi),$$

H , R , W bzw. h , r , w bedeuten hier Klassenzahl, Regulator, Einheitswurzelanzahl von L bzw. K . Unter der speziellen Voraussetzung $(\mathfrak{f}, 6) = 1$ gilt sowohl $R/r = 2$ als auch $W/w = 2$ mit Ausnahme von $\mathfrak{f} = (\sqrt{5})$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, hier ist $W = 10$. Wir erhalten damit als Korollar zu Satz 17 den

Satz 18. Ist $\mathfrak{f}$ Primideal in K mit $(\mathfrak{f}, 6)=1$ und $\mathfrak{f} \nmid (\sqrt{5})$, dann gilt

$$\frac{N(\mathfrak{f})^{-1/2}}{[U : U(\mathfrak{f})^2]} \sum_{j=1}^h \sum_{\substack{\mu(\mathfrak{f}) \\ \mu \in \mathfrak{a}_j^{-2}}} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}} \right) \alpha(\mathfrak{a}_j^{-2} \mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2, \mu) = 2 \sum_L H(L)/h$$

und die letzte Summe ist über alle total imaginären quadratischen Erweiterungen L von K mit der Relativediskriminante $\mathfrak{f}$ zu erstrecken.

§ 10. Beweis einer Vermutung von Saito

Sei $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathfrak{O}_K)$, $\Gamma(\mathfrak{f}) \subset \Gamma$ Hauptkongruenzuntergruppe zur Stufe $\mathfrak{f}$ bestehend aus Matrizen, die kongruent der Einheitsmatrix mod $\mathfrak{f}$ sind. $\Gamma(\mathfrak{f})$ ist ein Normalteiler vom endlichen Index in Γ und die Restklassengruppe $\Gamma/\Gamma(\mathfrak{f})$ ist in natürlicher Weise isomorph zu $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$, $\mathbb{F}_q$ endlicher Körper mit $q = N(\mathfrak{f})$ Elementen. Weiter sei $X := \mathfrak{H}^2/\Gamma(\mathfrak{f})$ der Quotient von $\mathfrak{H}^2$ unter der Operation von $\Gamma(\mathfrak{f})$. Wir setzen voraus, daß $\Gamma(\mathfrak{f})$ keine elliptischen Fixpunkte in $\mathfrak{H}^2$ hat. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn $(\mathfrak{f}, 6)=1$ ist. Insbesondere ist X also eine (nicht kompakte) komplexe Mannigfaltigkeit. X wird durch Hinzufügung von endlich vielen Spitzen kompaktifiziert zu einem normalen komplexen Raum $\bar{X} = \mathfrak{H}^2/\Gamma(\mathfrak{f})$, der in der Sprache der algebraischen Geometrie eine singuläre projektive Varietät $\bar{X}$ mit Singularitäten in den Spitzen ist. Die Spitzen entsprechen dabei eineindeutig den Orbits von $\Gamma(\mathfrak{f})$ in $\mathbb{P}_1(K) = K \cup \{\infty\}$. In einem solchen Orbit läßt sich ein $\lambda = \alpha/\beta$, α, β ganz, als Repräsentant einer Spitze so wählen, daß das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta)$ teilerfremd zu $\mathfrak{f}$ ist.

Wir bilden jetzt die Matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha & \xi \\ \beta & v \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, K)$, $\xi, v \in \mathfrak{a}^{-1}$. Statt der Spitze λ von $\Gamma(\mathfrak{f})$ können wir auch die Spitze $\infty = A^{-1}\lambda$ von $A^{-1}\Gamma(\mathfrak{f})A$ betrachten, denn beide Spitzen sind als singuläre Punkte äquivalent. Die Standgruppe von ∞ in $A^{-1}\Gamma(\mathfrak{f})A$ besteht aber aus Matrizen $\begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \eta' \end{pmatrix}$, wo $\eta \equiv 1(\mathfrak{f})$, d. h. $\eta \in U(\mathfrak{f})$ und $\mu \in \mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{f}$ ist. Die Spitze λ von $\Gamma(\mathfrak{f})$ ist also vom Typ $(\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2)$.

$Y(\mathfrak{f})$ bezeichne nun die kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die wir durch Auflösung der Spitzensingularitäten von $\bar{X}$ mittels der von Hirzebruch angegebenen Konstruktion erhalten. Weiter sei $S_2(\Gamma(\mathfrak{f}))$ der Vektorraum der Spitzenformen zu $\Gamma(\mathfrak{f})$ vom Gewicht 2, das sind holomorphe Differentialformen $\omega = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$ auf X mit der Eigenschaft, daß f in den Spitzen von $\Gamma(\mathfrak{f})$ verschwindet. Ist u_k, v_k ein Koordinatensystem in der Auflösung einer Spitze, so gilt dort $dz_1 \wedge dz_2 = c_k(u_k v_k)^{-1} du_k \wedge dv_k$, c_k eine Konstante. Da die Fourierentwicklung von f in der Umgebung dieser Spitze nach Potenzen $u_k^m v_k^n$ mit $m, n > 0$ fortschreitet, läßt sich ω zu einer holomorphen 2-Form auf $Y(\mathfrak{f})$ fortsetzen. Auf diese Weise können wir $S_2(\Gamma(\mathfrak{f}))$ mit $H^0(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2)$, dem Raum der 2-Formen auf $Y(\mathfrak{f})$ identifizieren.

Da $\Gamma(\mathfrak{f})$ Normalteiler in Γ ist, operiert $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ auf $\bar{X}$ und damit auch auf $S_2(\Gamma(\mathfrak{f}))$. Ist $\gamma \in \Gamma$ ein Repräsentant einer Klasse $\in \Gamma/\Gamma(\mathfrak{f})$, so wird die Operation explizit gegeben durch $(z_1, z_2) \rightarrow (\gamma z_1, \gamma' z_2)$, und $\omega = f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$ geht in $f(\gamma z_1, \gamma' z_2) d(\gamma z_1) \wedge d(\gamma' z_2)$ über. Man erhält so eine Darstellung π von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ in $S_2(\Gamma(\mathfrak{f}))$. Wir interessieren uns für diejenigen irreduziblen Bestandteile von π , die den

Grad $(q + \varepsilon)/2$ haben, $\varepsilon = (-1)^{(q-1)/2}$. Laut Schur [18] gibt es genau zwei irreduzible Darstellungen von $SL(2, \mathbb{F}_q)$ vom Grade $(q + \varepsilon)/2$, deren Charaktere sind konjugierte Zahlen in dem quadratischen Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{\varepsilon q})$. Sie wurden von Hecke mit $\mathfrak{G}^1$ und $\mathfrak{G}^2$ bezeichnet, wobei $\mathfrak{G}^1$ durch die zusätzliche Forderung $\text{Spur} \left(\mathfrak{G}^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$= (\varepsilon + \sqrt{\varepsilon q})/2$ festgelegt wird. y_1 bzw. y_2 bezeichne schließlich die Vielfachheit von $\mathfrak{G}^1$ bzw. $\mathfrak{G}^2$ in der Darstellung π . Für die Berechnung von $y_2 - y_1$ genügt es, die Operation von $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ auf $S_2(\Gamma(\mathfrak{f}))$ zu kennen, v irgendein quadratischer Nichtrest mod $\mathfrak{f}$. Aus der Charaktertafel [18, S. 241] folgt nämlich

$$(y_1 - y_2) \sqrt{\varepsilon q} = \text{Spur } \pi(P) - \text{Spur } \pi(Q).$$

Unser Ziel ist es im folgenden, die rechte Seite mittels des "holomorphen" Lefschetzsatzes von Atiyah-Singer [1, S. 566] zu berechnen. Die Möglichkeit, diesen Satz anzuwenden, beruht darauf, daß die Operation von Γ auf X sich auf $Y(\mathfrak{f})$ fortsetzen läßt [16]. Wir wollen dies hier nur für die Elemente P und Q zeigen.

Mit Ausnahme von $\mathfrak{f} = (\sqrt{5})$ können unter P und Q höchstens Spitzen in X festbleiben. Tatsächlich bleiben auch genau die Spitzen fest, die $\Gamma(\mathfrak{f})$ -äquivalent zu $\lambda = \alpha/\beta$ sind mit $\alpha \notin \mathfrak{f}$ und $\beta \in \mathfrak{f}$ [16]. Es sei λ eine solche Spitze, wir transformieren λ nach ∞ . Die „transformierte“ Operation wird durch ein zu P bzw. Q konjugiertes Element [in $SL(2, K)$] der Gestalt

$\begin{pmatrix} \eta & \mu \\ 0 & \eta' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\mathfrak{f})$ mit $\eta \in U(\mathfrak{f})$ und $\mu \in \mathfrak{a}^{-2}$

gegeben, wenn die Spitze λ vom Typ $(\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2)$ ist. Die Rechnung zeigt, daß μ noch der Kongruenz $\alpha^2\mu \equiv 1(\mathfrak{f})$ bzw. $\alpha^2\mu \equiv v(\mathfrak{f})$ genügen muß, falls λ unter P bzw. Q festbleibt. Für $\mu \in \mathfrak{a}^{-2}$ und $\eta \in U(\mathfrak{f})$ besteht aber die Kongruenz $\eta\mu \equiv \mu(\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{f})$ und dies bedeutet gerade, daß die Translation um μ einen Automorphismus in der Auflösung der Spitze ∞ vom Typ $(\mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2)$ induziert, vgl. § 5. Die Operation von P bzw. Q auf X läßt sich daher zu einem Automorphismus g_P bzw. g_Q von $Y(\mathfrak{f})$ fortsetzen, der Fixpunkte nur in dem System der auflösenden Kurven hat. Ein Automorphismus g von $Y(\mathfrak{f})$ induziert nun einen Automorphismus g^* in der Kohomologie $H^i(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2)$ von $Y(\mathfrak{f})$ mit Koeffizienten in Ω^2 , der Garbe der Keime holomorpher 2-Formen auf $Y(\mathfrak{f})$. Die äquivariante Eulercharakteristik $\chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g)$ des holomorphen Bündels Ω^2 über $Y(\mathfrak{f})$ bezüglich des Automorphismus g ist dann

$$= \sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{Spur}(g^* | H^i(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2)).$$

Der „holomorphe“ Lefschetz-Satz von Atiyah-Singer drückt nun $\chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g)$ aus in Termen der Fixpunkte von g in $Y(\mathfrak{f})$ und der Operation von g in der Umgebung dieser Fixpunkte. Für die präzise Formulierung dieses Satzes und der damit zusammenhängenden Terminologie empfehlen wir dem Leser die Lektüre der vorzüglichen Darstellung in [10]. Im Falle von $g = g_P$ oder $g = g_Q$ treten isolierte Fixpunkte und eventuell auch rationale Fixkurven nur im Spitzendivisor von $Y(\mathfrak{f})$ auf, vgl. § 5. Ist x ein isolierter Fixpunkt von g mit den Drehwinkeln $2\pi\alpha_k, 2\pi\beta_k$ im Tangentialraum an x , so ist der Beitrag dieses Fixpunktes zu $\chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g)$

$$\{1 - c_1(\alpha_k)c_1(\beta_k) + ic_1(\alpha_k) + ic_1(\beta_k)\}/4.$$

Der Beitrag einer rationalen Fixkurve S_k mit Selbstschnittzahl $-b_k$ und dem Drehwinkel $-2\pi\beta_k$ von g im Normalenbündel von S_k ist dagegen

$$\{2 - b_k c_2(\beta_k) + 2ic_1(\beta_k)\}/4.$$

Wegen (5.3) folgt nun, daß nach Summation dieser Beiträge über alle Fixpunkt-komponenten die Imaginärteile herausfallen, $\chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g)$ also reell ist:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k \\ \alpha_k \not\equiv 0(1) \\ \beta_k \not\equiv 0(1)}} \{c_1(\alpha_k) + c_1(\beta_k)\} + 2 \sum_{\substack{k \\ \alpha_k \equiv 0(1) \\ \beta_k \not\equiv 0(1)}} c_1(\beta_k) \\ &= \sum_{\alpha_k \not\equiv 0(1)} c_1(\alpha_k) + \sum_{\beta_k \not\equiv 0(1)} c_1(\beta_k) = 0, \end{aligned}$$

da $\beta_{k+1} = -\alpha_k$ und $\alpha_{k+1} = \beta_k$ falls $\alpha_k = 0$. Durch Vergleich der verbleibenden Realteile mit den entsprechenden Beiträgen zur α -Invariante (s. Satz 5) findet man weiter, daß der Beitrag einer festbleibenden Spitze λ zu $\chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g)$ durch $-\alpha(a^{-2}\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2, \mu)/4$ gegeben wird. Hier ist $(a^{-2}\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2)$ der Typ der Spitze $\lambda = \alpha/\beta$, $\alpha = (\alpha, \beta)$, $\mu \in a^{-2}$ und μ eine Lösung der Kongruenz $\alpha^2\mu \equiv 1(\mathfrak{f})$ bzw. $\alpha^2\mu \equiv v(\mathfrak{f})$, falls $g = g_P$ bzw. $g = g_Q$. Um $\chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g)$ vollständig zu bestimmen, müssen wir nur noch überlegen, welche $\Gamma(\mathfrak{f})$ -inäquivalenten Spitzen unter P bzw. Q festbleiben. Diese zerfallen zunächst in h Klassen, die schon unter Γ inäquivalent sind und daher erst recht unter $\Gamma(\mathfrak{f})$. Zwei Spitzen α/β und γ/δ , die das gleiche Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$ definieren und daher in einer Γ -Klasse liegen, sind laut Gundlach [2] genau dann $\Gamma(\mathfrak{f})$ -äquivalent, wenn eine Kongruenz $\alpha \equiv \eta\gamma$, $\beta \equiv \eta\delta(\mathfrak{f})$ mit einer Einheit η stattfindet. Von den $\phi(\mathfrak{f}) = N(\mathfrak{f}) - 1$ teilerfremden Resten $\alpha \bmod \mathfrak{f}$ in einem Ideal $\mathfrak{a} \in G(\mathfrak{f})$ repräsentieren daher jeweils $[U : U(\mathfrak{f})] = [U : U(\mathfrak{f})^2]/2$ Reste eine festbleibende Spitze α/β . Insgesamt bleiben also unter P und Q jeweils $h(N(\mathfrak{f}) - 1)/[U : U(\mathfrak{f})]$ $\Gamma(\mathfrak{f})$ -inäquivalente Spitzen fest. Damit wird

$$\begin{aligned} & \chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g_P) - \chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g_Q) \\ &= -\frac{1}{[U : U(\mathfrak{f})^2]} \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{\alpha_i \in G(\mathfrak{f}) \\ \mu \in a_i^{-2}}} \left(\frac{\mu}{\mathfrak{f}}\right) \alpha(a_i^{-2}\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2; \mu). \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun $y_1 - y_2$ bestimmen, da auf Grund der Serre-Dualität

$$\text{Spur}(g^*|H^i(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2)) = \overline{\text{Spur}(g^*|H^{2-i}(Y(\mathfrak{f}), \mathcal{O}))}$$

ist, $\mathcal{O}$ bezeichnet hier die Strukturgarbe von $Y(\mathfrak{f})$ und der Querstrich die komplexe Konjugation. Da jede Hilbertsche Modulfläche einfach-zusammenhängend ist, gilt stets $H^1(Y(\mathfrak{f}), \mathcal{O}) = 0$. Andererseits ist $Y(\mathfrak{f})$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, daher wird $\text{Spur}(g^*|H^0(Y(\mathfrak{f}), \mathcal{O})) = 1$, da g auf konstanten Funktionen natürlich trivial operiert. Damit wird

$$(y_1 - y_2) \sqrt{\varepsilon q} = \chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g_P) - \chi(Y(\mathfrak{f}), \Omega^2; g_Q)$$

und wir erhalten schließlich aus Satz 18

Satz 19. Ist $\mathfrak{f}$ Primideal in K mit $(\mathfrak{f}, 6) = 1$ und $\mathfrak{f} \nmid (\sqrt{5})$, dann gilt

$$y_2 - y_1 = 2 \sum_L H(L)/h.$$

Die Summe läuft hier über alle Relativklassenzahlen $H(L)/h$ total imaginärer quadratischer Erweiterungen L von K mit der Relativediskriminante $\mathfrak{f}$. Gibt es keine solche Erweiterung, so ist $y_2 = y_1$. Insbesondere ist $y_2 = y_1$, wenn es eine Einheit η in K gibt mit $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{f}}\right) = -N(\eta)$ und dies ist immer der Fall, wenn $N(\mathfrak{f}) \equiv 3(4)$ wird.

Im Falle $\mathfrak{f} = (\sqrt{5})$ haben g_P und g_Q in $Y(\mathfrak{f})$ zusätzlich elliptische Fixpunkte der Ordnung 5. Deren Beiträge zu $y_2 - y_1$ annullieren die von den Spitzen herrührenden Fixpunktbeiträge. Daher ist jetzt $y_2 = y_1$, obwohl der Körper der fünften Einheitswurzeln die Relativediskriminante $(\sqrt{5})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ hat.

Wie in der Einleitung erwähnt, gilt Satz 19 sogar für jedes Gewicht $2k \geq 2$. Wir wollen dies kurz erläutern. Eine Spitzenform $\omega = f(z_1, z_2)(dz_1 \wedge dz_2)^k \in S_{2k}(\Gamma(\mathfrak{f}))$ vom Gewicht $2k$, $k \geq 1$, ist ein holomorpher Schnitt des k -fachen Tensorprodukts des kanonischen Bündels von $\mathfrak{H}^2/\Gamma(\mathfrak{f})$. Dieser Schnitt kann zu einem meromorphen Schnitt $\bar{\omega}$ des k -fachen kanonischen Bündels K von $Y(\mathfrak{f})$ fortgesetzt werden. Dessen Divisor $(\bar{\omega})$ enthält den Spitzendivisor S von $Y(\mathfrak{f})$ (d. h. die Summe der Kurven in den Spitzenauflösungen) mit der Vielfachheit $\geq -(k-1)$ und ist außerhalb der Spitzenauflösung effektiv. Also

$$S_{2k}(\Gamma(\mathfrak{f})) = H^0(Y(\mathfrak{f}), \mathcal{O}(kK + (k-1)S)).$$

Die entscheidende Beobachtung ist nun, daß die Spitzenbeiträge zu der äquivalenten Eulercharakteristik $\chi(Y(\mathfrak{f}), \mathcal{O}(kK + (k-1)S); g)$ nicht von k abhängen, falls $g = g_P, g_Q$ (dies gilt nicht für elliptische Fixpunkte). Da nach einer Mitteilung von van der Geer $H^i(Y(\mathfrak{f}), \mathcal{O}(kK + (k-1)S)) = 0$ für $k \geq 2$, $i \geq 1$ wird, so folgt hieraus die Aussage von Satz 19 für alle $k \geq 1$.

Beispiel. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{f} = (\theta)$, $\theta = \frac{13 + \sqrt{5}}{2}$, $N(\theta) = 41$. Jede teilerfremde Restklasse mod $\mathfrak{f}$ kann durch eine Einheit repräsentiert werden. Daher ist $[U : U(\mathfrak{f})^2] = 80$ und es bleibt nur eine Spitze, etwa ∞ unter P und $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fest. Es ändert nichts, wenn wir von der Translation um 1 bzw. 3 in der Spitze ∞ vom Typ $(\mathfrak{f}, U(\mathfrak{f})^2)$ zur äquivalenten Translation um $1/\theta$ bzw. $3/\theta$ in der Spitze ∞ vom Typ $(\mathfrak{O}_K, U(\mathfrak{f})^2)$ übergehen, $\mathfrak{O}_K = \mathbb{Z}w + \mathbb{Z}$, $w = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = [3]$. Da $[U : U^+] = 4$ ist, besteht die Auflösung dieser Spitze aus $[U^+ : U(\mathfrak{f})^2] = 20$ rationalen Kurven der Selbstschnittzahl -3 . Also wird

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \frac{1}{4\sqrt{41}} \{ \alpha(\mathfrak{O}_K, U(\mathfrak{f})^2, 1/\theta) - \alpha(\mathfrak{O}_K, U(\mathfrak{f})^2, 3/\theta) \} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{41}} \sum_{k=0}^{19} \{ c_1(\alpha_k) c_1(\beta_k) - c_1(3\alpha_k) c_1(3\beta_k) \} \end{aligned}$$

mit $\alpha_0 = -1/41$, $\beta_0 = 8/41$, $\alpha_{k+1} = 3\alpha_k + \beta_k$, $\beta_{k+1} = -\alpha_k$. Den Wert dieser Summe findet am schnellsten mit dem Taschenrechner, das Ergebnis ist $y_2 - y_1 = 2$. Also hat $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-\theta})$ die Klassenzahl 1 und die Diskriminante $D_L = D_K^2 N(\mathfrak{f}) = 5^2 41 = 1025$. Um dieses Ergebnis zu kontrollieren, genügt es nach Minkowski in L die Primideale der Norm $< 0,152 \sqrt{D_L} < 5$ auf Äquivalenz hin zu untersuchen. 2 und 3 sind in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ Primzahlen, davon bleibt auch 3 wegen $\left(\frac{3}{\theta}\right) = -1$ in L prim während 2 in L zerfällt,

$$2 = \left(\frac{1 - \sqrt{5} + 2\sqrt{-\theta}}{4} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5} - 2\sqrt{-\theta}}{4} \right).$$

Also sind alle Ideale in $\mathfrak{O}_L$ Hauptideale.

Auch dieses Beispiel zeigt deutlich, daß die analytische Klassenzahlformel für konkrete Rechnungen wenig brauchbar ist, eine Tatsache, die schon Gauß bekannt war. Andererseits dürfte es aber kaum möglich sein, Satz 19 ohne diese Formel zu beweisen.

Wir danken F. Hirzebruch für den Hinweis auf Saitos Arbeit [16] und deren Zusammenhang mit [19]. Unser Dank gilt auch H. Saito für einige nützliche Diskussionen und D. Zagier für das sorgfältige Lesen des Manuskripts.

Literatur

- Atiyah, M.F., Singer, I.M.: The index of elliptic operators. III. Ann. of Math. **87**, 546–604 (1968)
- Gundlach, K.-B.: Über die Darstellung der ganzen Spitzenformen zu den Idealstufen der Hilbertschen Modulgruppe und die Abschätzung ihrer Fourierkoeffizienten. Acta Math. **92**, 309–345 (1954)
- Hecke, E.: Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern. In: Mathematische Werke, S. 290–312. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1970
- Hecke, E.: Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen. In: Mathematische Werke, S. 405–417. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1970
- Hecke, E.: Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Abbildungen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. In: Mathematische Werke, S. 548–558. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1970
- Hecke, E.: Über das Verhalten von $\sum_{m,n} e^{\frac{2\pi i c}{8} \frac{|m|^2 - 2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Moduls substitutionen, In: Mathematische Werke, S. 487–498. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1970
- Hecke, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. New York: Chelsea 1970
- Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. Enseignement Math. **19**, 183–281 (1973)
- Hirzebruch, F.: The signature theorem: reminiscences and recreation. Prospects of Mathematics. Ann. of Math. Studies Nr. 70, pp. 3–31. Princeton: University Press 1971
- Hirzebruch, F., Zagier, D.: The Atiyah-Singer theorem and elementary number theory. Boston: Publish or Perish 1974
- Katayama, K.: On the values of ray-class L-functions for real quadratic fields. J. math. Soc. Japan **28**, 455–482 (1976)
- Kreck, M.: Eine Invariante für stabil parallelisierte Mannigfaltigkeiten. Bonner Mathematische Schriften 66, Bonn, 1973
- Meyer, C.: Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. J. Reine Angew. Math. **198**, 143–203 (1957)
- Meyer, W.: Die Signatur von Flächenbündeln. Math. Ann. **201**, 239–264 (1973)

15. Meyer, W.: Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln. Bonner Mathematische Schriften 53, Bonn, 1972
16. Saito, H.: On the representation of $SL_2(\mathbb{F}_q)$ in the space of Hilbert modular forms. J. Math. Kyoto Univ. **15**, 101–128 (1975)
17. Schoeneberg, B.: Elliptic modular functions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1974
18. Schur, I.: Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen. Gesammelte Abhandlungen, Band I, S. 198–250. Berlin. Heidelberg, New York: Springer 1973
19. Szezech, R.: Die α -Invariante von gewissen Aktionen auf T^2 -Bündeln und ihr Zusammenhang mit der Zahlentheorie. Diplomarbeit Bonn (1975)
20. Shintani, T.: On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **23**, 393–417 (1976)
21. Siegel, C.L.: Lectures on advanced analytic number theory. Tata Institute Bombay 1961 (reissued 1965)
22. Siegel, C.L.: Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II 7–38 (1968)
23. Zagier, D.: A Kronecker limit formula for real quadratic fields. Math. Ann. **213**, 153–184 (1975)
24. Zagier, D.: Valeurs des fonctions zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs, Société Mathématique de France. Astérisque **41–42**, 135–151 (1977)

Received September 13, 1978