Theorie der elementaren Verwandtschaft.

(Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, 1863, Bd. 15, p. 18—57.)

§. 1. Zwei geometrische Figuren sollen einander **elementar verwandt** heissen, wenn jedem nach allen Dimensionen unendlich kleinen Elemente der einen Figur ein dergleichen Element in der anderen dergestalt entspricht, dass von je zwei an einander grenzenden Elementen der einen Figur die zwei ihnen entsprechenden Elemente der anderen ebenfalls zusammenstossen; oder, was dasselbe ausdrückt: wenn je einem Puncte der einen Figur ein Punct der anderen also entspricht, dass von je zwei einander unendlich nahen Puncten der einen auch die ihnen entsprechenden der anderen einander unendlich nahe sind.

Einer Linie kann hiernach nur eine Linie, einer Fläche nur eine Fläche, und einem körperlichen Raume nur ein körperlicher Raum elementar verwandt sein.

§. 2. *Jeder Linie l, welche von endlicher Länge ist, ist jede andere Linie l' von endlicher Länge elementar verwandt.* Denn bezeichnen A und B die Endpuncte von l, A' und B' die Endpuncte von l', und denkt man sich die Linie l von A bis B in Elemente zerlegt, so kann man sich die Linie l' von A' bis B' in gleichviel Elemente zertheilt vorstellen und kann den Elementen von l in ihrer Folge von A bis B die Elemente von l' in ihrer Folge von A' bis B', oder auch von B' bis A' entsprechend setzen. — Hierbei werden also immer den zwei Endpuncten von l die zwei Endpuncte von l' entsprechen, und es steht in unserer Willkür, welchen der beiden Endpuncte von l' wir dem einen und welchen wir dem anderen Endpuncte von l entsprechend setzen wollen.

Wenn eine Linie von endlicher Länge eine geschlossene ist, und daher an jedes ihrer Elemente ohne Ausnahme zwei andere Elemente derselben grenzen, so wird jede andere in sich zurücklaufende Linie von endlicher Länge, und nur eine solche, der ersteren elementar verwandt sein.

§. 3. Gehen wir jetzt zu der elementaren Verwandtschaft zwischen *Flächen* fort. Wir werden dieselben stets von endlicher Ausdehnung und damit, wenn sie begrenzt sind und nicht, wie etwa die Kugelfläche, nach allen Seiten hin in sich selbst zurücklaufen, ihre Grenzlinien als geschlossene Linien von endlicher Länge voraussetzen.

Zunächst wollen wir *ebene* Flächen, als die einfachsten, mit einander vergleichen. Eine endliche und überall zusammenhängende ebene Fläche ist aber immer von einer, oder mehreren geschlossenen Linien begrenzt, deren jede wir weder sich selbst, noch eine der übrigen, wenn es deren mehrere sind, schneidend annehmen werden. Bei mehreren Grenzlinien wird stets eine alle die übrigen umschliessen, und jede der übrigen wird einen Theil der Ebene umgrenzen, welcher nicht mit zu der Fläche gehört. Erstere Grenzlinie wollen wir die *äussere* und die übrigen die *inneren* Grenzlinien nennen.

§. 4. Sollen nun zwei ebene Flächen a und a' einander elementar verwandt sein, so kann einem Elemente von a, welches an eine der Grenzlinien von a stösst, nicht ein Element von a' entsprechen, welches im Inneren von a' liegt, weil alle an letzteres Element ringsum grenzenden Elemente der Ebene von a' Elemente von a' selbst sind, während von den Elementen der Ebene von a, welche um ersteres Element herum liegen, nur ein Theil zu a selbst gehört. Jedem Elemente an einer der Grenzen der Fläche a entspricht daher ein Grenzelement der Fläche a'.

Es wird daher auch von jedem Puncte P, welcher in einer Grenzlinie l von a liegt, der entsprechende Punct P' in einer der Grenzlinien von a' anzunehmen sein; und wenn l' diese letztere heisst, und ein dem P unendlich naher Punct Q gleichfalls in l begriffen ist, so wird der entsprechende Punct Q' dem P' unendlich nahe sein und deshalb in keiner anderen Grenzlinie als in l' sich finden.

Jedem Elemente PQ einer Grenzlinie l von a entspricht daher ein Element $P'Q'$ einer Grenzlinie l' von a'; und es werden daher, wenn P, Q, R, S, ... eine Reihe unendlich nahe auf einander folgender Puncte in l ist, die ihnen entsprechenden Puncte P', Q', R', S', ... in unendlicher Nähe in l' auf einander folgen. Mithin werden l und l' selbst einander entsprechende Linien sein; d. h. *jeder Grenzlinie von a entspricht eine Grenzlinie von a';* woraus wir zuletzt noch schliessen, *dass von zwei elementar verwandten ebenen Flächen die eine von derselben Anzahl geschlossener Linien, wie die andere, begrenzt sein muss.*

§. 5. Diese Bedingung ist aber zur elementaren Verwandtschaft zweier ebenen Flächen nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend. Denn wird die Fläche a

1) nur von *einer Grenzlinie* f, und daher auch die a' nur von einer f' umschlossen, so nehme man in a innerhalb f beliebigwo einen Punct A an und denke sich, was immer möglich ist, in a um diesen Punct ein System von m $(=\infty)$ geschlossenen Linien $f_1, f_2, \ldots, f_m$ construirt (vergl. Fig. 1), von denen die erste f_1 den Punct A in unendlicher Nähe umschliesst, und jede von der nächstfolgenden, die letzte f_m von f selbst, in unendlicher Nähe umschlossen wird, und zerlege somit die Fläche a in das von f_1 begrenzte Flächenelement und in m unendlich schmale Ringe $f_1 f_2, f_2 f_3, \ldots, f_m f$.

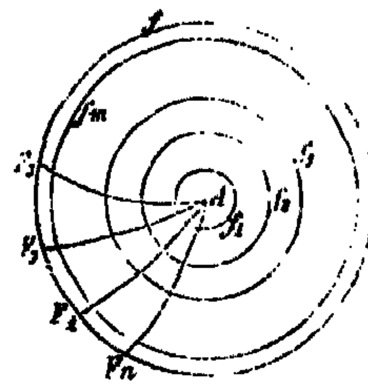

Fig. 1.

Man theile ferner die Linie f, von einem beliebigen Puncte F_1 derselben ausgehend, in n $(=\infty)$ Elemente F_1F_2, $F_2F_3, \ldots, F_nF_1$ und ziehe von den Theilungspuncten $F_1, F_2, \ldots, F_n$ in der Fläche a nach dem Puncte A derselben n Linien F_1A, $F_2A, \ldots, F_nA$ also, dass je zwei cyklisch nächstfolgende derselben, ebenso wie bei f, auch von f bis A hin einander unendlich nahe bleiben, und dass somit die Fläche a in n unendlich schmale Sectoren $F_1AF_2, \ldots, F_nAF_1$ zertheilt wird.

Ganz auf dieselbe Weise zerlege man die von f' begrenzte Fläche a' nach willkürlicher Annahme eines Punctes A' innerhalb f' und eines Punctes F_1' in f' selbst, das einemal durch m geschlossene Linien $f_1', f_2', \ldots, f_m'$ in ein von f_1' umgrenztes und den Punct A' einschliessendes Flächenelement und in m unendlich schmale Ringe $f_1'f_2', f_2'f_3', \ldots, f_m'f'$, das andere Mal, nachdem man die geschlossene Linie f' von F_1' aus in n Elemente $F_1'F_2'$, $F_2'F_3', \ldots, F_n'F_1'$ getheilt hat, durch n Linien $A'F_1'$, $A'F_2', \ldots, A'F_n'$ in n unendlich schmale Sectoren $F_1'A'F_2', \ldots, F_n'AF_1'$.

Indem man nun schliesslich in jeder der beiden Flächen a und a' die Ringe und die Sectoren nach der bemerkten Ordnung zählt und hiernach dem Elemente, welches der $p$te Ring und der $q$te Sector von a gemein haben, das gemeinsame Element des $p$ten Ringes und des $q$ten Sectors von a', sowie auch dem von f_1 umschlossenen Elemente von a das von f_1' umschlossene von a', entsprechend setzt, so werden, wie es die Definition der elementaren Verwandtschaft verlangt, von je zwei aneinander grenzenden Elementen von a auch die zwei ihnen in a' entsprechenden eine gemeinsame Grenze haben.

2) Ein ähnliches Verfahren lässt sich anwenden, um die elementare Verwandtschaft der Flächen a und a' darzuthun, wenn a *zwei Grenzlinien* f, g, und daher auch a' zwei dergleichen den ersteren entsprechende f', g' hat. Denn man kann erstens die von f, g begrenzte Fläche a durch $m-1$ geschlossene und einander umschliessende Linien in m unendlich schmale Ringe zerlegen, von denen, wenn f die äussere und g die innere Grenze von a ist, der erste Ring die Linie f zur äusseren Grenze, und der letzte die g zur inneren hat. Ist ferner F_1 ein beliebiger Punct in f, G_1 ein beliebiger in g, und theilt man die f von F_1 aus in n Elemente $F_1F_2, \ldots, F_nF_1$, und die g von G_1 aus nach demselben Sinne herum, wie die f, in n Elemente $G_1G_2, \ldots, G_nG_1$, so kann man durch Ziehung von n einander nicht schneidenden Linien F_1G_1, $F_2G_2, \ldots, F_nG_n$ die Fläche a in n unendlich schmale Streifen, und folglich in Verbindung mit jenen m Ringen in mn Elemente zerlegen.

Man wiederhole jetzt dieselbe Construction bei a' und zerlege somit auch diese Fläche in m Ringe und n Streifen, und dadurch in mn Elemente; und wenn man nun, wie in 1), je zwei dieser Ele- in a und a', welche in gleichvielten Ringen und in gleichvielten Streifen von a und a' liegen, einander entsprechend setzt, so werden die zwei Flächen in die verlangte elementar verwandtschaftliche Beziehung gebracht sein.

Zugleich erhellt hieraus, dass, wenn, gemäss der vorigen Annahme, f die äussere und g die innere Grenzlinie von a ist, deshalb nicht auch f' die äussere und g' die innere Grenzlinie von a' sein muss, sondern auch g' zur äusseren u. s. w. genommen werden kann, und dass es daher in unserer Willkür steht, welche von beiden Grenzlinien der einen Ebene der einen und welche damit der anderen Grenzlinie der anderen Fläche entsprechen soll.

3) Betrachten wir jetzt zwei ebene Flächen a und a', deren jede von *drei Grenzlinien* umschlossen ist: a von f, g, h und a' von f', g', h'. Man verbinde (vergl. Fig. 2) zwei beliebige Puncte P und Q der Grenzlinie f, welche die äussere von a sei, durch eine in a enthaltene und zwischen g und h hindurchgehende Linie u. Von den zwei Theilen der Linie f, in welche sie durch P und Q getheilt wird, nenne man v (w) denjenigen, welcher mit g (h) auf einerlei Seite von u liegt. Solchergestalt wird a in zwei Flächen zerlegt, von welchen die eine uv, g die aus u und v zusammengesetzte Linie uv zur äusseren und die

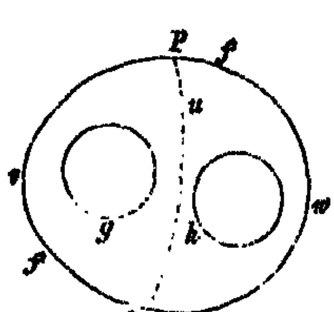

Fig. 2.

g zur inneren Grenze, die andere uw, h die Linie uw zur äusseren und die h zur inneren Grenze hat.

Ist nun auch bei der Fläche α' die der f entsprechende Grenzlinie f' die äussere, so kann man die so eben bei α gemachte Construction vollkommen auch bei α' anstellen, kann also nach Annahme zweier Puncte P' und Q' und durch Ziehung einer Linie u' von P' nach Q' die α' in zwei Theile $u'v'$, g' und $u'w'$, h' sondern, deren jeder zwei Grenzlinien hat, und welche beide dieselbe gegenseitige Lage wie uv, g und uw, h haben.

Nach 2) kann man aber sowohl die Flächen uv, g und $u'v'$, g', als die uw, h und $u'w'$, h' als elementar verwandt betrachten, und wenn man hierbei den Puncten von u das eine wie das andere Mal die nämlichen Puncte von u' entsprechend setzt, so werden auch die Summen uv, $g+uw$, h und $u'v'$, $g'+u'w'$, h', d. i. α und α' selbst in elementar verwandtschaftliche Beziehung gebracht sein.

In dem Falle, wenn, wie vorhin, f die äussere Grenze der Fläche α ist, die Fläche α' aber nicht die der f entsprechende Linie f', sondern etwa g' zur äusseren Grenze hat (vergl. Fig. 3), wird α' durch die nach der vorigen Regel gezogene Linie u' ebenso wie vorhin in die zwei Flächen $u'v'$, g' und $u'w'$, h' getheilt, nur dass dann von der ersteren derselben $u'v'$ die innere, und g' die äussere Grenze ist. Nichtsdestoweniger aber wird man, zufolge des am Ende von 2) Bemerkten, ebenso wie $u'w'$, h' mit uw, h, auch $u'v'$, g' mit uv, g, und deshalb α' mit α selbst elementar verwandt setzen können.

Zwei ebene Flächen, deren jede drei Grenzlinien hat, sind demnach immer einander elementar verwandt, wie man auch je eine Grenzlinie der einen Fläche je einer Grenzlinie der anderen Fläche entsprechend setzen mag.

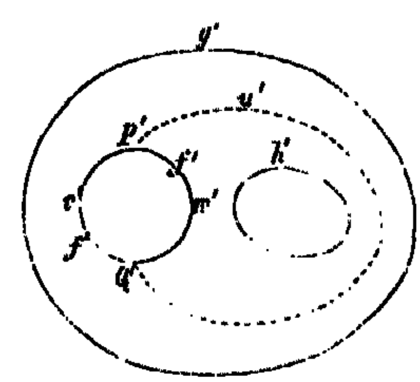

Fig. 3.

4) *Derselbe Satz gilt aber auch von zwei ebenen Flächen, deren jede von vier, oder von fünf, u. s. w. Linien begrenzt ist.* Denn sind f, g, h, i die Grenzlinien von α, und f', g', h', i' die Grenzlinien von α', so ziehe man, wie dies immer geschehen kann, in der Fläche α eine geschlosse Linie x, welche zwei der vier Linien f, g, h, i, etwa f und g, auf der einen und die beiden übrigen h und i auf der anderen Seite von sich liegen hat und somit die Fläche in die zwei Theile fgx und xhi zerlegt. Theilt man nun auf gleiche Art die Fläche α' durch die geschlossene Linie x' in die zwei Theile $f'g'x'$ und $x'h'i'$, so kann man nach 3) den Theil $f'g'x'$ dem fgx

und den Theil $x'h'i'$ dem xhi elementar verwandt setzen; und wenn man hierbei den Puncten von x jedesmal die nämlichen Puncte von x' entsprechend annimmt, so werden auch $fghi$ und $f'g'h'i'$, d. i. a und a' selbst, in elementar verwandtschaftliche Beziehung gebracht sein.

Aehnlicherweise lässt sich die elementare Verwandtschaft je zweier von fünf, oder noch mehreren Linien begrenzter ebener Flächen darthun, da z. B. eine von fünf Linien begrenzte Fläche $fghik$ sich durch eine geschlossene Linie x in zwei von drei und von vier Linien begrenzte Flächen fgx und $xhik$ theilen lässt, und für diese einzeln die verwandtschaftliche Beziehung bereits erwiesen ist.

---

§. 6. Wir wollen jetzt die Bedingungen in Untersuchung nehmen, unter denen zwei nach allen Seiten hin in sich zurücklaufende Flächen, oder kurz zwei *geschlossene Flächen*, einander elementar verwandt sind. Denn da bei Flächen dieser Art die Mannigfaltigkeit der Formen unendlich grösser, als bei geschlossenen Linien ist, so ist es schon im Voraus sehr wahrscheinlich, dass nicht ebenso, wie je zwei geschlossene Linien, auch je zwei geschlossene Flächen einander elementar verwandt sein werden. Die Folge wird dieses bestätigen, nachdem vorher eine Methode entwickelt worden, mittelst welcher die Form einer geschlossenen Fläche, soweit als es zum Folgenden erforderlich ist, durch ein einfaches Schema dargestellt werden kann.

Zu einer geschlossenen Fläche φ, die man sich der leichteren Auffassung willen als stetig gekrümmt und sich selbst nicht schneidend vorstelle, denke man sich eine etwa horizontale Ebene ε hinzu, welche in ihrer anfänglichen Lage ε_0 der Fläche φ in keinem Puncte begegne und sie daher ganz auf einer Seite, es sei auf der unteren, von sich liegen habe. Werde diese Ebene ε parallel mit sich nach unten fortgeführt, bis zuletzt die Fläche φ ganz auf der oberen Seite von ε liegt, so wird das erste Zusammentreffen von ε mit φ, desgleichen auch das letzte, eine blosse Berührung sein. Zwischen diese zwei Berührungen können auch noch mehrere andere fallen. Immer aber wird φ von ε zwischen je zwei nächstfolgenden Berührungen in einer oder mehreren geschlossenen und weder sich selbst, noch einander schneidenden Linien geschnitten werden. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können und wollen wir hierbei annehmen, dass in keine Lage von ε zwei oder mehrere Berührungen zugleich fallen. Auch wollen wir noch setzen, dass jede Berührung immer nur in einem Puncte, nicht in einer Linie geschieht, und eine gewöhnliche, also entweder eine elliptische, oder eine hyperbolische ist.

Hiernach werden die erste und die letzte aller Berührungen stets elliptisch sein, und φ wird von ε sowohl zwischen der ersten und zweiten, als zwischen der vorletzten und letzten Berührung nur in *einer* geschlossenen Linie geschnitten werden. Wenn ferner irgend eine Lage der sich parallel nach unten bewegenden Ebene zwischen der ersten und der zweiten Berührung mit ε_1, irgend eine zwischen der zweiten und dritten mit ε_2, u. s. w. bezeichnet wird, so dass zwischen ε_0 und ε_1 die erste Berührung, zwischen ε_1 und ε_2 die zweite, u. s. w. fällt, so werden in je zwei nächstfolgenden dieser Lagen von ε, wie in ε_m und ε_{m+1}, die Zahlen der in sie fallenden Durchschnittslinien mit φ stets um die Einheit von einander verschieden sein. Indem sich nämlich ε von ε_m bis ε_{m+1} parallel nach unten hin fortbewegt, bewegen sich auch die in ε_m enthaltenen Durchschnittslinien parallel fort, obwohl im Allgemeinen mit Veränderung ihrer Gestalt, und sind daher auch in ε_{m+1} wieder anzutreffen, nur dass entweder

1) eine in ε_m noch nicht vorhandene Linie in ε_{m+1} hinzugetreten ist, oder
2) eine der in ε_m sich vorfindenden Linien in ε_{m+1} verschwunden ist, oder
3) eine der Linien in ε_m sich in ε_{m+1} in zwei getheilt hat, oder endlich
4) zwei der in ε_m begriffenen Linien sich in ε_{m+1} zu einer vereinigt haben.

Der erste oder der zweite dieser vier Fälle hat statt, wenn die zwischen ε_m und ε_{m+1} stattfindende Berührung eine elliptische ist; der dritte oder der vierte Fall tritt ein, wenn die gedachte Berührung eine hyperbolische ist.

Nachfolgende Beispiele werden dies in noch helleres Licht setzen.

§. 7. 1) Beispiel. Sei φ' eine Kugelfläche, und ε_0 eine sie nicht treffende Ebene, so wird eine mit ε_0 anfangs zusammenfallende und hierauf parallel mit ε_0 nach der Fläche φ' hin sich bewegende Ebene ε sie zweimal elliptisch (oder vielmehr kreisförmig) berühren, in jeder Zwischenlage, dergleichen ε_1 eine sei, sie in einem Kreise schneiden und in jeder Lage ε_2, welche über die zweite Berührung hinausfällt, ihr nicht mehr begegnen. — Die Zahlen der Durchschnittslinien in ε_0, ε_1, ε_2 sind daher resp. 0, 1, 0.

2) Bedeute φ'' die Fläche eines hufeisenförmig gekrümmten Körpers, dessen zwei Schenkel nach oben gerichtet und von ungleicher Länge sind. Sei A der oberste Punct des längeren Schenkels, B der oberste des kürzeren, C der unterste Punct innerhalb der beiden Schenkel, und D der unterste Punct ausserhalb und damit der unterste der ganzen Fläche. Eine horizontal von oben nach unten sich bewegende Ebene (vergl. Fig. 4) wird hiernach die Fläche successive in A, B, C, D berühren, und zwar in A, B, D elliptisch, in C hyperbolisch, und zwischen diesen Berührungen sie in einer, in zwei, und dann wieder in einer geschlossenen Linie schneiden. Der Punct A der ersten elliptischen Berührung erweitert sich nämlich zunächst in eine geschlossene Linie, zu welcher nach der zweiten elliptischen Berührung in B noch eine dergleichen hinzutritt. Diese zwei ziehen sich nach der hyperbolischen Berührung in C in eine wieder zusammen, und diese eine reducirt sich zuletzt auf den dritten elliptischen Berührungspunct D. Sind daher ε_1, ε_2, ε_3 irgend welche Lagen von ε zwischen A und B, zwischen B und C, zwischen C und D und ist ε_0 eine Lage von ε vor A, und liegt ε_4 über D hinaus, so wird φ'' von ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 in 0, 1, 2, 1, 0 geschlossenen Linien geschnitten.

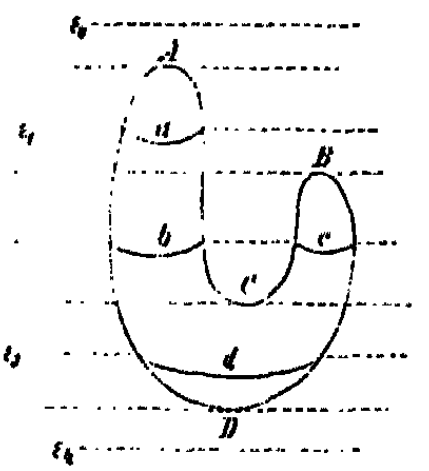

Fig. 4.

3) Wird eine Ebene um eine in ihr enthaltene Gerade x, als um eine Axe, gedreht, so erzeugt ein in der Ebene beschriebener und der Axe nicht begegnender Kreis k eine Ringfläche φ''', welche in nebenstehender Fig. 5 durch zwei concentrische Kreise angedeutet ist. Es sind dies die Durchschnitte von φ''' mit der Ebene λ des vom Mittelpuncte des k beschriebenen Kreises (in Fig. 5 mit der Ebene des Papieres), und die Axe x fällt mit der gemeinsamen Axe der zwei concentrischen Kreise zusammen. Denken wir uns nun die Ebene λ vertical, also die Axe x horizontal, und wird eine horizontale Ebene ε, horizontal bleibend, aus ihrer anfänglichen oberhalb φ''' befindlichen Lage ε_0 nach unten

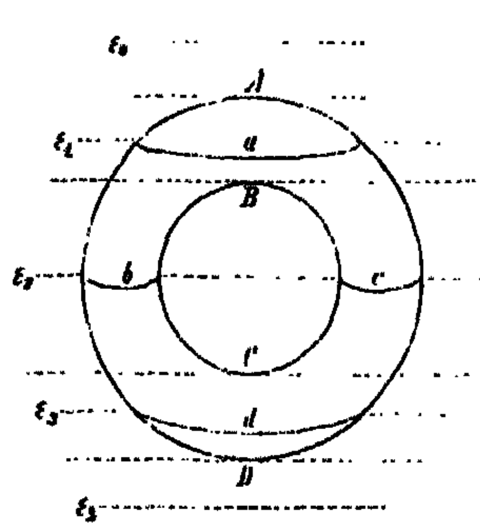

Fig. 5.

hin fortgeführt, so berührt sie die φ''' viermal hinter einander in A, B, C, D, und dieses in A und D elliptisch, in B und C hyperbolisch; und wenn $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_4$ in Bezug auf $A, .., D$ dieselbe Bedeutung wie vorhin haben, so sind, gleichfalls wie vorhin, und wie man aus der Figur ersieht, die Zahlen der in diesen vier Lagen von ε enthaltenen Durchschnittslinien mit φ''', gleich 0, 1, 2, 1, 0.

§. 8. Man schreibe nun in Bezug auf jede der Ebenen ε_1, ε_2, ε_3, ... die in ihr enthaltenen Durchschnittslinien mit der Fläche φ, — jede Linie durch einen einfachen Buchstaben ausgedrückt, — in eine horizontale Reihe und setze diese Reihen in derselben Ordnung unter einander, in welcher die Ebenen auf einander folgen.

Auf diese Weise gibt jede der beiden Flächen φ'' und φ''', wenn wir die eine in ε_1 enthaltene Linie (vergl. Figg. 4, 5) mit a, die zwei in ε_2 enthaltenen mit b, c und die eine in ε_3 mit d bezeichnen, das Schema:

$$\begin{array}{c|l} \varepsilon_1 & a \\ \varepsilon_2 & bc \\ \varepsilon_3 & d \end{array}$$

Nun wird die Fläche φ von den Ebenen ε_1, ε_2, ... in mehrere Theile zerlegt, von denen jeder entweder von einer, oder von zwei, oder von drei der Durchschnittslinien von φ mit den ε_1, ε_2, ... begrenzt wird.

Ist nämlich die zwischen ε_m und ε_{m+1} fallende Berührung eine elliptische, und A der Berührungspunct, so ist eben deshalb entweder in ε_m eine Durchschnittslinie f vorhanden, die sich bei der Herabbewegung der ε von ε_m bis A in den Punct A zusammenzieht; oder es findet sich in ε_{m+1} eine Linie g, zu welcher sich der Punct A bei der Bewegung der ε von A bis ε_{m+1} ausdehnt. In beiden Fällen gibt es daher zwischen ε_m und ε_{m+1} einen von nur einer Linie, von f, oder von g, begrenzten und resp. von f bis A, oder von A bis g sich erstreckenden Flächentheil.

Ist aber die Berührung zwischen ε_m und ε_{m+1} eine hyperbolische, so fällt zwischen diese zwei Ebenen ein von drei Linien begrenzter Flächentheil, indem dann entweder eine in ε_m befindliche Linie f sich in ε_{m+1} in zwei, in g und h, zertheilt, oder zwei Linien f und g in ε_m zu einer h in ε_{m+1} zusammengehen.

Wenn endlich eine Durchschnittslinie f von ε_m mit φ bei der Bewegung der Ebene ε von ε_m bis ε_{m+1} eine einfache geschlossene Linie bleibt und in ε_{m+1} g genannt wird, so ist eben dadurch ein von zwei Linien f und g begrenzter Flächentheil entstanden.

Diese Flächentheile sollen, je nachdem sie von einer Linie f, oder von zweien f und g, oder von dreien f, g und h begrenzt sind, durch

$$(f),\ (fg),\ (fgh)$$

ausgedrückt und im Folgenden der Kürze willen Unionen, Binionen, Ternionen genannt werden.

Wir wollen nun in unserem Schema zwischen je zwei nächstfolgende Reihen von Grenzlinien die Ausdrücke der Flächentheile, welche durch diese Grenzlinien bestimmt werden, zur Rechten hinzufügen, über und unter diese neuen von den Flächentheilen gebildeten Reihen aber die zwei allein noch fehlenden Flächentheile setzen, welche über der ersten ε_1 und unter der letzten der Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ liegen und resp. die erste und die letzte aller Durchschnittslinien zu Grenzen haben.

Das vorige für φ'' und für φ''' zugleich geltende Schema ist hiernach also zu vervollständigen:

$$\text{für } \varphi'' \quad \begin{array}{c|c|l} & & (a) \\ \varepsilon_1 & a & (ab)\,(c) \\ \varepsilon_2 & bc & (bcd) \\ \varepsilon_3 & d & (d) \end{array} \;; \qquad \text{für } \varphi''' \quad \begin{array}{c|c|l} & & (a) \\ \varepsilon_1 & a & (abc) \\ \varepsilon_2 & bc & (bcd) \\ \varepsilon_3 & d & (d) \end{array} \;;$$

und es ist daher die Fläche

$$\varphi'' = (a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d),$$

die Fläche

$$\varphi''' = (a) + (abc) + (bcd) + (d).$$

Die Kugelfläche φ' des §. 7 hat das Schema

$$\begin{array}{c|c|l} & & (a) \\ \varepsilon_1 & a & (a) \end{array};$$

mithin kommt

$$\varphi' = (a) + (a);$$

d. h. wir denken uns diese Fläche aus zwei Theilen bestehend, welche den Kreis a zur gemeinsamen Grenzlinie haben, und welche daher, obgleich von einander verschieden, dennoch einerlei Bezeichnung (a) erhalten.

§. 9. Noch zwei Beispiele für Schemata geschlossener Flächen sind:

$$\varphi^{\text{IV}}\left\{\begin{array}{l|l} & (a)\\ a & (ab)\ (c)\\ bc & (bde)\ (cf)\\ def & (eh)\ (dfg)\\ gh & (hk)\ (gi)\ (l)\\ ikl & (ikm)\ (ln)\\ mn & (mno)\\ o & (o)\end{array}\right.,\qquad \varphi^{\text{V}}\left\{\begin{array}{l|l} & (a)\\ a & (abc)\\ bc & (bd)\ (cef)\\ def & (dgh)\ (ei)\ (fk)\\ ghik & (gl)\ (him)\ (kn)\\ lmn & (lmo)\ (np)\\ op & (opq)\\ q & (q)\end{array}\right.,$$

womit man die nachstehenden beiden Figuren vergleichen mag:

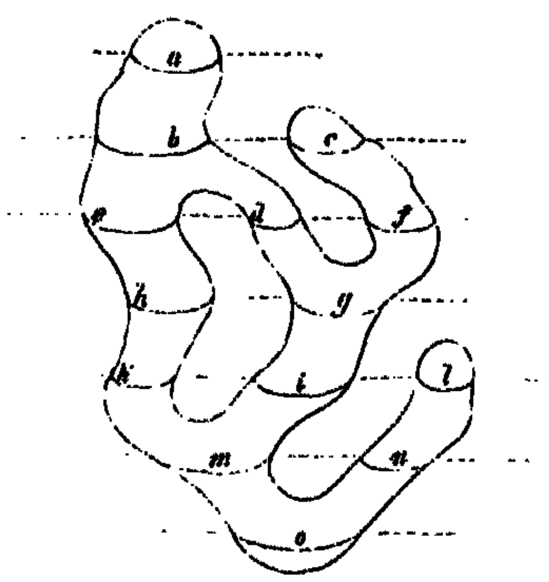

Fig. 6.

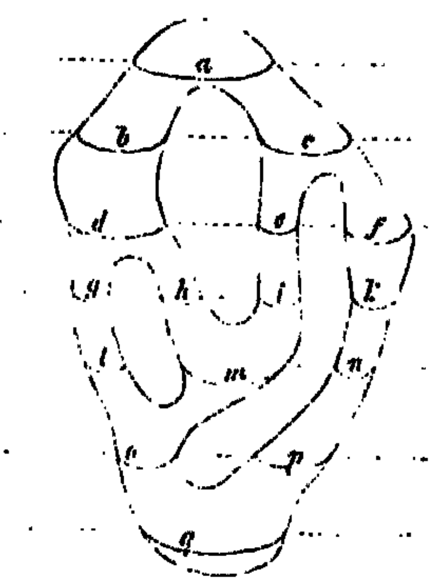

Fig. 7.

Ich habe diese Beispiele hinzugesetzt, um desto deutlicher die bei einem solchen Schema stets obwaltenden Gesetze erkennen zu lassen. Diese Gesetze sind folgende:

1) Alle Linien aller Linienreihen sind von einander verschieden.

2) Die erste und die letzte aller Linienreihen besteht aus nur einer Linie.

3) Bei drei oder mehreren Linienreihen sind die Zahlen der Linien je zweier nächstfolgender Reihen um die Einheit verschieden (§. 6 gegen Ende). Die Zahlen der Linien in den auf einander folgenden Reihen sind daher abwechselnd ungerade und gerade; und da die Linienzahl in der ersten sowohl, als in der letzten ungerade, nämlich gleich 1 ist, so ist die Zahl der Linienreihen selbst ungerade. Zwischen je zweien dieser Reihen liegt aber eine Berührung von φ mit ε, und noch eine vor der ersten und eine nach der letzten Reihe. Mithin ist die Zahl aller Berührungen eine gerade, d. h. *eine stetig gekrümmte geschlossene Fläche wird von einer parallel sich fortbewegenden Ebene in einer geraden Anzahl von Puncten berührt.*

4) Was die in jedem Schema auf die Linienreihen zur Rechten folgenden Reihen von Flächentheilen anlangt, so seien π und ϱ irgend zwei nächstfolgende Linienreihen, und q die zwischen sie fallende Reihe von Flächentheilen. Alsdann ist q aus allen Linien von π und ϱ zusammengesetzt. Jede Linie des Schemas ist daher in den Reihen der Flächentheile zweimal, immer nämlich in zwei nächstfolgenden Reihen, anzutreffen. — Da ferner zwischen π und ϱ eine und nur eine Berührung fällt, und diese entweder eine elliptische, oder eine hyperbolische ist, so wird in q resp. entweder eine und nur eine Union, oder eine und nur eine Ternion (§. 8) sich finden. Alle übrigen Flächentheile des Schemas sind Binionen, mit Ausnahme der zwei Unionen, welche allein schon die erste und die letzte Reihe von Flächentheilen bilden und von der ersten und der letzten Linie unter den vorhergehenden Linienreihen begrenzt werden.

5) Jede in q vorkommende Binion ist aus einer Linie von π und aus einer von ϱ zusammengesetzt; eine Ternion aber, wenn diese in q sich vorfindet, aus einer Linie von π und aus zweien von ϱ, oder umgekehrt (§. 5 zu Ende).

6) Weil die geschlossene Fläche φ überall mit sich zusammenhängen soll, so muss man von jedem ihrer Puncte, in ihr selbst fortgehend, zu jedem anderen Puncte derselben gelangen können. Zwischen je zwei nicht an einander grenzenden Flächentheilen des Schemas muss es daher immer möglich sein, einen oder mehrere andere Flächentheile in solcher Aufeinanderfolge zu interpoliren, dass je zwei nächstfolgende eine gemeinsame Grenzlinie haben.

So gelangt man z. B. im Schema für φ^{IV} vom Theile (a) zum Theile (bde) durch die zwei Folgen (a), (ab), (bde); — von (a) zu (c) durch die fünf Folgen (a), (ab), (bde), (dfg), (cf), (c); — von (gi) zu (l) durch die vier (gi), (ikm), (mno), (ln), (l); — von (cf) zu (ikm) durch die drei (cf), (dfg), (gi), (ikm); u. s. w.

Ist bei einem Schema ein solcher Fortgang von einem Flächentheile zu einem anderen nicht immer möglich, obgleich das Schema die übrigen unter 1) bis 5) bemerkten Gesetze erfüllt, so hat man zu schliessen, dass dasselbe zwei oder mehrere geschlossene Flächen zugleich ausdrückt.

So kann man z. B. bei dem ersten der zwei nachstehenden Schemata

$$\begin{array}{c|l} & (a) \\ a & (ac)\ (b) \\ bc & (c)\ (bd) \\ d & (d) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|l} & (a) \\ a & (ac)\ (b) \\ bc & (cd)\ (b) \\ d & (d) \end{array}$$

von keinem der drei Flächentheile (a), (ac), (c) zu einem der drei übrigen (b), (bd), (d), und eben so wenig beim zweiten Schema von (b) zu einem der Theile (a), (ac), (cd), (d) auf die besagte Weise fortgehen, — aus dem Grunde, weil durch das erstere Schema die zwei geschlossenen Flächen $(a)+(ac)+(c)$ und $(b)+(bd)+(d)$ zugleich, durch das letztere aber die zwei geschlossenen Flächen $(a)+(ac)+(cd)+(d)$ und $(b)+(b)$ zugleich ausgedrückt werden.

---

§. 10. Nachdem im Vorhergehenden die Zerlegung einer geschlossenen Fläche durch parallele Ebenen in Unionen, Binionen und Ternionen gezeigt worden, lasse ich jetzt die in §. 6 bereits gedachte Untersuchung der Bedingungen folgen, unter denen zwei geschlossene Flächen elementar verwandt sind, und beweise deshalb zunächst, *dass jede Union, jede Binion und jede Ternion resp. mit einer von einer, von zwei und von drei geschlossenen Linien begrenzten ebenen Fläche in elementarer Verwandtschaft steht.*

1) Der Beweis für die Union und für die Binion kann ganz ähnlicher Weise, wie in §. 5, 1 und 2, geführt werden. Sind nämlich ζ und ε_1 die zwei Lagen der Ebene ε, deren erstere die Union (f) in A elliptisch berührt, und deren letztere die Grenzlinie f in sich fasst, so denke man sich ein System unendlich vieler, und in unendlich kleinen Intervallen von ζ bis ε_1 auf einander folgender mit ζ und ε_1 paralleler Ebenen, deren unendliche Anzahl mit m bezeichnet sei, und welche die Fläche (f) in den Linien $f_1, f_2, \dots$ schneiden. Hierdurch wird die Fläche, wie in §. 5, 1 die ebene Fläche α, in m unendlich schmale Ringe und in das den Punct A enthaltende und von der unendlich kleinen Ellipse f_1 umgrenzte Element zerlegt. Theilt man hierauf, ebenso wie dort, die Grenzlinie f in n Elemente und zerlegt durch Linien, die in (f) von den Theilpuncten nach A gezogen werden, die (f) in n unendlich schmale Sectoren, also in Verbindung mit jenen m Ringen in $mn+1$ Flächenelemente, so kann man diese den eben so vielen Elementen der Fläche α' in §. 5, 1 auf die dort bemerkte Weise nach dem Gesetz der elementaren Verwandtschaft entsprechend setzen.

2) Um zu beweisen, dass jede Binion (fg) einer von zwei geschlossenen Linien f', g' begrenzten ebenen Fläche elementar verwandt ist, verfahre man eben so, wie in §. 5, 2 die elementare Verwandtschaft zweier ebener Flächen α und α' dargethan wurde, von

denen α die Linien f, g, und α' die f', g' zu Grenzen hatte, nur dass man, wenn jetzt f und g in den Ebenen ε_1 und ε_2 liegen, die Fläche (fg) durch parallele Ebenen, welche in unendlich kleinen Intervallen auf einander folgen, in m unendlich schmale Ringe zerlegt.

3) Von der Ternion (fgh) seien die Linie f in der Ebene ε_1 und die Linien g, h in der Ebene ε_2 enthalten. Von einer gewissen mit diesen Ebenen parallelen und zwischen ihnen liegenden Ebene η wird alsdann die Ternion hyperbolisch, es sei im Puncte J, berührt und daher von η in einer geschlossenen und sich selbst in J schneidenden Linie $JKLJMNJ$ durchgangen (vergl. Fig. 8 und 9).

Dieselbe Linie können wir aber noch auf zwei andere Arten auffassen (vergl. die punctirten Linien in Fig. 8 und 9): zuerst als eine geschlossene und sich nicht schneidende Linie $JKLJNMJ$, gleich i, in welcher zwei vorher verschiedene Puncte derselben jetzt bis zur Coïncidenz in J einander nahe gekommen sind; und zweitens als zwei verschiedene geschlossene und in J an einander stossende Linien $JKLJ$, gleich k, und $JNMJ$, gleich n.

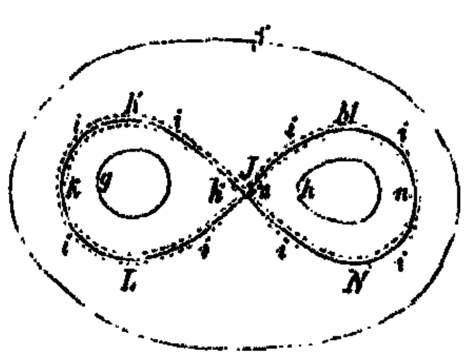

Fig. 8.

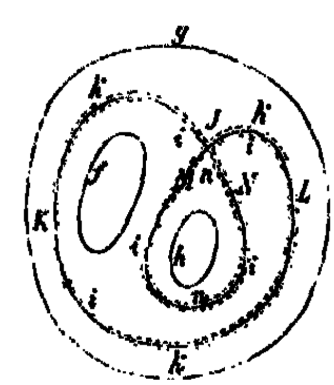

Fig. 9.

Indem nun die Ebene ε aus der Lage ε_1 bis zur Lage η herabsteigt, verwandelt sich ihre anfängliche Durchschnittslinie f mit der Fläche allmählich in i und erzeugt somit die Binion (fi). Beim weiteren Herabsteigen der Ebene ε von η bis ε_2 trennen sich die zwei geschlossenen Linien k und n, aus denen i zusammengesetzt ist, vereinigen sich bei der Coïncidenz von ε mit ε_2 resp. mit den Linien g und h und erzeugen dadurch die zwei Binionen (kg) und (nh).

Die Ternion (fgh) ist hiernach aus den drei Binionen (fi), (kg) und (nh) zusammengesetzt, und wir werden daher und zufolge des in 2) über Binionen Gesagten eine der Ternion elementare verwandte ebene Fläche erhalten, wenn wir in der Ebene η drei geschlossene Linien g', h', f', als die den g, h, f entsprechenden

Linien, also construiren, dass sie resp. mit den in η bereits vorhandenen Linien k, n und i $(=k+n)$, drei Flächenräume (kg'), (nh'), (fi') begrenzen, von denen keine zwei einen Theil gemein haben. Dieses ist aber immer möglich; nur erwäge man hierbei noch, dass die zwei Linien k und n, aus denen i besteht, zwei verschiedene Lagen gegen einander haben können, indem sie entweder neben einander liegen, oder indem die eine, etwa n, von der anderen k umschlossen wird.

Im ersteren dieser zwei Fälle wird die Linie f' die k und die n zugleich und damit die i umschliessen, die Linie g' aber von k und die h' von n umschlossen sein. — Im letzteren Falle muss f' zwischen k und n liegen, g' muss die k umschliessen, und h' von n umschlossen sein.

Zugleich folgt hieraus, dass, je nachdem die Linien k und n in der Ebene η entweder neben einander liegen, oder die eine innerhalb der anderen begriffen ist, auch die in der Ebene ε_2 enthaltenen Linien g und h entweder neben, oder in einander liegen, und dass es daher zweierlei Arten von Ternionen giebt, je nachdem nämlich die zwei in einerlei Ebene begriffenen Grenzlinien einer Ternion entweder neben, oder in einander liegen. Wir wollen diese zwei Arten resp. als e r s t e und z w e i t e Art von einander unterscheiden.

Z u s a t z. In der Figur 4 (§. 7, 2) wurden von den drei Linien der Ternion (bcd) die zwei in der Ebene ε_2 liegenden b und c als neben einander liegend gezeichnet und damit die Ternion als eine der ersten Art construirt. Denn also verlangte es die dort schon im Voraus angenommene hufeisenförmige Gestalt der Fläche. Wäre aber nicht, wie dort, aus der Form der Fläche φ'' das Schema derselben, sondern umgekehrt aus dem Schema die Form abzuleiten gewesen, so hätte man (bcd) auch als eine Ternion der zweiten Art darstellen und deshalb in der Ebene ε_2 die c von b umschlossen zeichnen können.

Von der auf diese letztere Weise entstehenden Fläche φ'' wird man sich am leichtesten eine Vorstellung machen, wenn man in einer verticalen Ebene eine geschlossene Linie construirt, welche in Bezug auf eine in der Ebene schief gegen den Horizont gezogene Gerade x als Axe symmetrisch liegt und die Gestalt eines nach unten zu offenen Hufeisens hat, und wenn man diese Linie um die besagte Axe herumdreht (vergl. Fig. 10). Denn die hierdurch erzeugte glockenförmige Fläche wird ebenfalls dem Schema für φ'', und dieses unter der zuletzt gemachten Bedingung, Genüge thun.

In der That wird diese Fläche, ebenso wie φ'' in §. 7, von der sich abwärts bewegenden horizontalen Ebene ε viermal hintereinander, in A und B elliptisch, in C hyperbolisch, in D wiederum elliptisch, berührt und von den dazwischen fallenden Lagen ε_1, ε_2 und ε_3 der Ebene ε in einer Linie a, in zweien b und c, und in einer d geschnitten, — nur mit dem Unterschiede, dass jetzt c innerhalb b, und daher B innerhalb des von der Union (b) und der Ebene ε_2 begrenzten Raumes liegt, und dass die in C angelegte Berührungsebene die φ'' in zwei durch C gehenden und innerhalb einander liegenden Linien schneidet. Diese zwei Linien kann man aber auch als eine einzige betrachten, welche eine sichelförmige Fläche begrenzt, deren zwei Spitzen in C aneinander stossen. Bei weiterer Herabbewegung von ε trennen sich die zwei Spitzen dieser Sichel, runden sich immer mehr ab, und die nunmehr einzige Grenzlinie d der vorigen Sichelfläche zieht sich zuletzt in den Punct D zusammen.

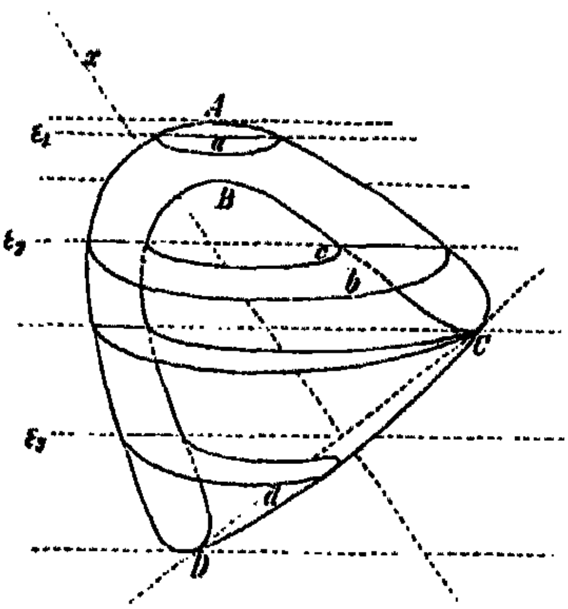

Fig. 10.

Dass und wie man die in den Schematen für φ''', φ^{IV}, φ^{V} in §§. 8 und 9 vorkommenden Ternionen, welche in den beigefügten Figuren leichterer Zeichnung willen als Ternionen der ersten Art dargestellt worden sind, zum Theil wenigstens auch als Ternionen der zweiten Art hätte construiren können, erhellt aus dem über φ'' Gesagten von selbst.

§. 11. Weitere Folgerungen. Zwei Flächen, deren jede derselben dritten elementar verwandt ist, sind es offenbar auch unter sich. Da nun jede Union einer von einer Linie umschlossenen ebenen Fläche elementar verwandt ist (§. 10, 1), so sind auch je zwei Unionen in elementarer Verwandtschaft. Und aus analogem Grunde sind es auch je zwei Binionen, desgleichen je zwei Ternionen.

Ueberhaupt soll eine Fläche, welche von einer oder mehreren geschlossenen und weder sich selbst, noch sich gegenseitig schneidenden Linien begrenzt ist, wenn sie einer ebenen und daher von gleich viel Linien derselben Beschaffenheit begrenzten Fläche elementar verwandt ist, eine **Grundform** heissen und nach der Zahl ihrer Grenzlinien eine Grundform der **ersten**, der **zweiten**, u. s. w. **Klasse** genannt werden. Nach derselben Schlussweise, wie vorhin, und mit Rücksicht auf §. 5, 4 sind mithin je zwei zu derselben Klasse gehörige Grundformen in elementarer Verwandtschaft.

Die Grundformen der drei ersten Klassen sind einerlei mit den vorhin so genannten Unionen, Binionen und Ternionen. Analog mit den für letztere gebrauchten Bezeichnungen wollen wir durch $(fghi)$ eine von den vier Linien f, g, h, i begrenzte Grundform, u. s. w. ausdrücken.

Zusatz. Ein von einer geschlossenen Linie begrenztes Stück einer Kugelfläche — oder, wie man auch sagen kann: eine Kugelfläche mit einer Oeffnung — ist eine Grundform der ersten Klasse. Ebenso ist eine Kugelfläche mit zwei, drei, u. s. w., n Oeffnungen eine Grundform der zweiten, dritten, u. s. w., $n$ten Klasse.

Denn ist a die Grenzlinie einer der n Oeffnungen, und A ein Punct der Kugelfläche, welcher innerhalb des von a umschlossenen und daher wegzudenkenden Theiles der Fläche liegt, und projicirt man von A aus die Linie a und die Grenzlinien der $n-1$ übrigen Oeffnungen auf eine Ebene, welche auf dem durch A zu legenden Kugeldurchmesser normal ist, so erhält man in der Ebene ein System von n geschlossenen Linien, von denen diejenige, welche die Projection von a ist, die $n-1$ übrigen umschliesst, und damit eine ebene Grundform der $n$ten Klasse. Ersichtlich tritt aber diese ebene Fläche mit der mit n Oeffnungen versehenen Kugelfläche in elementar verwandtschaftliche Beziehung, sobald man jedem Puncte der letzteren seine, zufolge der Annahme von A, stets in endlicher Entfernung bleibende Projection auf die Ebene entsprechend setzt.

Eine Grundform der $n$ten Klasse lässt sich hiernach auch als eine Fläche definiren, welche mit dem von n geschlossenen Linien begrenzten Theile einer Kugelfläche elementar verwandt ist. Es hat diese Definition vor der früheren durch eine von n geschlossenen Linien begrenzte Ebene den Vorzug, dass, während in der Ebene eine gewisse Grenzlinie von den übrigen sich durch Umschliessung dieser übrigen unterscheidet, auf der Kugelfläche eine jede der Grenzlinien die jedesmal übrigen umschliessend angesehen werden kann, und dass daher das Willkürliche in der Art, nach welcher man von zwei elementar verwandten Grundformen die Grenzlinien der einen den Grenzlinien der anderen entsprechend setzen kann (vergl. §. 5), bei der Kugelfläche klarer noch, als bei der Ebene, in die Augen fällt.

§. 12. Jede geschlossene Fläche lässt sich durch parallele Ebenen in Grundformen der drei ersten Klassen zerlegen (§. 10 zu Anfang). Wenn es indessen bloss darauf ankommt, die Fläche als eine Summe von Grundformen darzustellen, und wenn dabei auch höhere Klassen derselben in Anwendung gebracht werden, so sind, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden, immer schon zwei Grundformen zu diesem Zwecke hinreichend.

Durch unmittelbare Anschauung erhellt, dass zwei ebene und in derselben Ebene liegende Grundformen mit beliebig vielen Grenzlinien, wenn sie eine und nur eine gemeinsame Grenzlinie, aber keinen gemeinsamen Flächentheil haben, beide eine einzige Grundform ausmachen, deren Grenzlinien die der zwei ersteren, mit Weglassung der gemeinsamen, sind. Unter den eben bemerkten Bedingungen wird daher sein:

$$(a)+(ab)=(b)\ ,\qquad (ab)+(bc)=(ac)\ ,\qquad (a)+(abc)=(bc)\ ,$$
$$(ab)+(bcd)=(acd)\ ,\qquad (abc)+(cde)=(abde)\ ,$$

u. s. w. Zufolge der vorhin gegebenen allgemeineren Definition von Grundformen werden aber diese Formeln für die Combination zweier Grundformen auch dann gelten, wenn dieselben nicht eben sind, dafern sie nur keinen gemeinsamen Flächentheil haben.

Die erste der Formeln kann daher auch bedeuten, dass eine an beiden Enden offene Röhre (ab) durch den Verschluss des einen Endes mit der Grundform (a) in eine von der Grenzlinie b am anderen Ende umschlossene Grundform (b) übergeht. — Die zweite Formel kann ausdrücken, dass zwei Röhren (ab) und (bc), welche mit ihren von b begrenzten Enden an einander stossen, eine einzige Röhre (ac) bilden. — Die dritte Formel, dass einer Kugelfläche, welche drei von a, b, c begrenzte Oeffnungen hat, nach Verschliessung der einen Oeffnung durch die Grundform (a) nur zwei Oeffnungen noch übrig bleiben; u. s. w.

§. 13. In den in §. 8 und §. 9 aufgestellten schematischen Ausdrücken für geschlossene Flächen durch Grundformen der drei ersten Klassen findet sich jede Grenzlinie zweimal (§. 9, 4), und keine zwei Grundformen eines solchen Ausdruckes haben einen Theil ihrer Flächen mit einander gemein, da jede derselben in einem der auf einander folgenden von den Ebenen ε_0 und ε_1, und ε, u. s. w. begrenzten Räume liegt, und keine zwei Grundformen, welche in einen und denselben dieser Räume fallen, nach den darüber gemachten Annahmen einen gemeinschaftlichen Theil haben.

Diese Bemerkung gewährt aber in Verbindung mit den Formeln des §. 12 ein einfaches Mittel, um die Grundformen der in §§. 8 und 9 enthaltenen und ähnlicher Ausdrücke auf eine geringere Zahl zu bringen. Man kann nämlich mit Anwendung jener Formeln irgend zwei Grundformen eines solchen Ausdruckes, welche nur eine Grenzlinie gemein haben, zu **einer** Grundform combiniren; und da diese eine offenbar eben so wenig, als die noch vorhandenen übrigen unter sich, mit einer dieser übrigen einen Theil gemein hat, so wird man das Geschäft des Combinirens so lange fortsetzen können, bis man zu einem Systeme von Grundformen gelangt ist, von denen keine zwei nur eine Grenzlinie gemein haben, — den Fall ausgenommen, in welchem dieses letzte System nur aus zwei von einer und derselben Grenzlinie umschlossenen Grundformen der ersten Klasse besteht.

In der That gibt eine erste Reduction von

$$\varphi'' = (a) + (ab) + (c) + (bcd) + (d)$$

in §. 8, weil

$$(a) + (ab) = (b) \quad \text{und} \quad (c) + (bcd) = (bd)$$

ist,

$$\varphi'' = (b) + (bd) + (d) \ :$$

und eine zweite Reduction, weil

$$(b) + (bd) = (d)\ , \quad \text{sowie} \quad (bd) + (d) = (b)$$

ist,

$$\varphi'' = (d) + (d)\ , \quad \text{sowie} \quad = (b) + (b)\ ;$$

und ähnlicherweise hätte man φ'' auch auf $(a) + (a)$ oder $(c) + (c)$ zurückführen können. Jeder dieser vier Werthe von φ'' aber zeigt an, dass diese Fläche aus zwei Grundformen der ersten Klasse zusammengesetzt ist.

Die Fläche

$$\varphi''' = (a) + (abc) + (bcd) + (d)$$

in §. 8 reducirt sich wegen

$$(a) + (abc) = (bc) \quad \text{und} \quad (bcd) + (d) = (bc)$$

auf

$$\varphi''' = (bc) + (bc)\ ;$$

d. h. die in §. 7, 3 als eine geschlossene Ringfläche construirte Fläche φ''' ist aus zwei Grundformen der zweiten Klasse zusammengesetzt, deren jede die Grenzlinien b und c hat.

Um den etwas zusammengesetzteren Ausdruck für φ^{IV} in §. 9 zu vereinfachen, setze man die Summen der dortigen Reihen von Grundformen:

$$(a) = \alpha\ , \quad (ab) + (c) = \beta\ , \quad (bde) + (cf) = \gamma\ ,$$

$$(eh) + (dfg) = \delta\ , \quad (hk) + (gi) + (l) = \varepsilon\ , \quad (ikm) + (ln) = \zeta\ ,$$

$$(mno) = \eta\ , \quad (o) = \vartheta\ ,$$

und es wird

$$\alpha+\beta=(b)+(c)\ ,\qquad \alpha+\beta+\gamma=(de)+(f)\ ,$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(dh)+(dg)=(gh)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\varepsilon=(gk)+(gi)+(l)=(ik)+(l)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\zeta=(ik)+(ikm)+(n)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\eta=(ik)+(ikm)+(mo)=(ik)+(iko)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\vartheta=\varphi^{\mathrm{IV}}=(ik)+(ik)\ .$$

Die Fläche φ^{IV} ist daher, wie die vorige φ''', als eine Ringfläche zu betrachten.

Verfährt man ebenso mit der Fläche φ^{V} in §. 9 und setzt:

$$(a)=\alpha\ ,\qquad (abc)=\beta\ ,\qquad (bd)+(cef)=\gamma\ ,$$
$$(dgh)+(ei)+(fk)=\delta\ ,\qquad (gl)+(him)+(kn)=\varepsilon\ ,$$
$$(lmo)+(np)=\zeta\ ,\qquad (opq)=\eta\ ,\qquad (q)=\vartheta\ ,$$

so kommt

$$\alpha+\beta=(bc)\ ,\qquad \alpha+\beta+\gamma=(def)\ ,\qquad \alpha+\ldots+\delta=(ghik)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\varepsilon=(hiln)+(him)\ ,\qquad \alpha+\ldots+\zeta=(himop)+(him)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\eta=(himop)+(him)+(opq)\ ,$$
$$\alpha+\ldots+\vartheta=\varphi^{\mathrm{V}}=(himop)+(him)+(op)\ :$$

und es ist daher die Fläche φ^{V} aus einer Grundform der fünften, einer der dritten und einer der zweiten Klasse zusammengesetzt.

§. 14. Das System von Grundformen, es heisse Σ, auf welches nach §. 13 ein anfängliches System von Grundformen der drei ersten Klassen reducirt worden ist, enthält ebenso, wie das anfängliche, jede in ihm sich noch vorfindende Grenzlinie zweimal, weil bei jeder einzelnen Reduction zwei identische Linien zugleich weggefallen sind. Es unterscheidet sich aber Σ von dem anfänglichen Systeme dadurch, dass zwei seiner Grundformen niemals nur eine Linie gemein haben (den schon oben gedachten und bei φ' und φ'' eintretenden Fall ausgenommen), sondern entweder gar keine, wie (him) und (op) in φ^{V}, oder mehrere, wie $(himop)$ und (him) ebenda, oder alle, wie (bc) und (bc) in φ'''. Im letzteren Falle, also im Falle, dass die Ausdrücke zweier Grundformen identisch sind, kann Σ nur aus diesen zwei Grundformen bestehen, indem durch sie allein schon eine geschlossene Fläche ausgedrückt wird. Findet aber diese Identität nicht statt, wie bei φ^{V}, so kann sie doch immer durch Hülfe neuer Grenzlinien herbeigeführt, und damit das System Σ auf ein zweigliederiges reducirt werden.

Zuerst nämlich erhellt leicht, dass, wenn Σ nicht bereits aus nur zwei Grundformen besteht, es immer derartige Paare von Linien in Σ geben muss, dass die zwei Linien eines solchen in einer Grundform oder Gliede von Σ vereinigt und in zwei anderen einzeln sich finden. Denn bedeute A den Complex der zwei oder mehreren Linien, welche zwei Glieder von Σ gemein haben, B den Complex aller noch übrigen Linien des einen, und C den Complex aller noch übrigen des anderen dieser beiden Glieder; seien also (AB) und (AC) die beiden Glieder selbst. Ist nun a eine der Linien von A, und b eine der Linien von B, so finden sich in (AB) a und b zugleich, in (AC) aber bloss a, weil B und C keine Linie gemein haben; und es muss, wie gezeigt werden sollte, noch ein drittes Glied geben, welches die b, nicht auch die a, enthält, weil jede Linie nur zweimal in Σ sich vorfindet.

Dieses vorausgeschickt, schreibe man noch aA' statt A, wonach A' den Complex von Linien bezeichnet, welche in Verbindung mit a den Complex A geben; und ähnlicher Art schreibe man bB' statt B. Das dritte Glied aber, welches nur b, nicht a, enthält, setze man gleich (bD). Die drei mit a und b behafteten Glieder sind hiernach

$$(abA'B') + (aA'C) + (bD) \ ,$$

und diese lassen sich immer auf zwei reduciren. Denn weil A, B, C keine Linie gemein haben, so gilt dasselbe auch von A', B', C'; und eben so wenig kann der Complex D eine Linie mit A' gemein haben, indem sonst eine und dieselbe Linie allen drei Gliedern gemein wäre. Wenn man daher, was immer möglich ist, in der Grundform $(abA'B')$ eine geschlossene Linie x also zieht, dass auf der einen Seite von x die a und die in B' begriffenen Linien, auf der anderen die b und die in A' begriffenen Linien liegen, und man somit jene Grundform in die zwei Theile (xaB') und (xbA') zerlegt, so werden obige drei Glieder

$$\begin{aligned} &= (xaB') + (aA'C) + (xbA') + (bD) \\ &= (xB'A'C) + (xA'D) \end{aligned}$$

(nach §. 12), also auf die Summe von zweien gebracht, das System Σ aber ist, wenn es aus n Grundformen bestand, auf $n-1$ dergleichen reducirt, in denen an die Stelle der zwei anfänglichen Linien a und b eine neue x getreten ist und alle übrigen in A', B', C', D begriffenen Linien geblieben sind. Auf gleiche Art lassen sich aber diese $n-1$ Grundformen auf $n-2$, u. s. w. reduciren, bis man zuletzt auf ein nur zweigliederiges und daher nicht weiter reducirbares System kommt. *Q. e. d.*

So wurde z. B. der in §. 9 für die geschlosssene Fläche φ^{v} aufgestellte Ausdruck in §. 13 auf die drei Glieder

$$(himop) + (him) + (op)$$

reducirt, von denen das erste die Linien h und o zugleich, das zweite bloss h und das dritte bloss o, — nämlich h mit im, und o mit p verbunden — enthält. Um daher letzteren Ausdruck in einen zweigliederigen zu verwandeln, setze man

$$(himop) = (xhp) + (xoim) \quad ,$$

und es wird die Fläche φ^{v}

$$= (xhp) + (him) + (xoim) + (op) = (ximp) + (ximp) \quad ,$$

welche wir somit als aus zwei Grundformen der vierten Klasse zusammengesetzt erkennen.

Zu demselben Resultate kann man übrigens auch ohne Einführung einer neuen Linie x, und dieses noch einfacher, auf folgende Weise gelangen. — Mittelst der in §. 13 bei φ^{v} angewendeten Zeichen α, β, ... fanden wir

$$\alpha + \ldots + \varepsilon = (hiln) + (him) \quad .$$

Ferner ist

$$\zeta + \eta + \vartheta = (lmo) + (np) + (op) = (lmn) \quad ;$$

folglich

$$\varphi^{\text{v}} = \alpha + \ldots + \vartheta = (hiln) + (hiln) \quad ,$$

gleich der Summe zweier Grundformen der vierten Klasse.

§. 15. Das System Σ (§. 14 zu Anf.) ist demnach immer auf eine der zweigliederigen Formen $(a) + (a)$, $(ab) + (ab)$, $(abc) + (abc)$, u. s. w. reducirbar, d. h. *eine geschlossene Fläche lässt sich immer durch eine gewisse Anzahl auf ihr gezogener geschlossener Linien in zwei Grundformen zerlegen, deren jede von allen diesen Linien begrenzt ist und daher eine der Zahl der Linien gleiche Klassenzahl hat.* Nach derselben Zahl wollen wir nun auch die geschlossenen Flächen selbst klassificiren und *eine geschlossene Fläche der $n$ten Klasse* diejenige nennen, welche in zwei Grundformen der $n$ten Klasse zerlegbar ist.

Den in §§. 13 und 14 gemachten Reductionen gemäss gehören daher die hufeisenförmige Fläche φ'', ebenso wie die Kugelfläche φ' in §. 8, zur ersten Klasse; die Ringflächen φ''' und φ^{iv} zur zweiten, und die Fläche φ^{v} zur vierten.

Um sich von einer Fläche der $n$ten Klasse eine anschauliche Vorstellung zu machen, denke man sich zwei einander nicht schneidende Kugelflächen, deren jede n Oeffnungen hat, und es wird, wenn man je eine Oeffnung der einen Fläche mit je einer der anderen durch eine Röhre verbindet, von denen keine zwei einen gemeinsamen Theil haben, eine Fläche der $n$ten Klasse entstehen. Denn zieht man um jede der n Röhren, etwa in der Mitte einer jeden, eine geschlossene Linie, so wird durch die n Linien die ganze Fläche in zwei Theile zerlegt, deren jeder ebenso, wie jede der zwei mit n Oeffnungen versehenen Kugelflächen selbst (§. 11 Zusatz), eine Grundform der $n$ten Klasse ist.

Oder man bringe eine ebene Fläche, welche $n-1$ Oeffnungen hat, also eine Grundform der $n$ten Klasse ist, mit einer ihr gleichen und ähnlichen Fläche zur Coïncidenz und denke sich, dass, während die n Grenzlinien der einen mit den n Grenzlinien der anderen in Deckung bleiben, die eine Fläche nach oben und die andere nach unten hin sich ausdehne. Hierdurch wird gleichfalls eine Fläche der $n$ten Klasse erzeugt werden.

Dieselbe kann man sich daher auch als die Oberfläche eines von $n-1$ Kanälen durchbohrten Körpers vorstellen, vorausgesetzt, dass die Oberfläche vor der Durchbohrung zur ersten Klasse gehörte, und dass keine zwei der Kanäle einen Theil mit einander gemein haben.

In der That, wird ein von einer Fläche der ersten Klasse begrenzter Körper mit einem Kanal durchbohrt, bezeichnet man die Grenzfläche dieses Kanales mit $\varkappa$ und die übrige Grenzfläche des Körpers mit λ, so dass jetzt $\varkappa + \lambda$ die Oberfläche des Körpers ist, und fügt man noch zwei Kanäle hinzu, welche, von zwei verschiedenen Stellen von λ ausgehend, in zwei verschiedenen Stellen von $\varkappa$ sich endigen, im Uebrigen aber weder mit einander, noch mit dem ersten Kanale einen Theil gemein haben, so wird die nunmehrige Oberfläche des Körpers zur vierten Klasse gehören. Nimmt man aber die zwei Stellen in $\varkappa$ einander direct gegenüberliegend an, so kann man den zweiten und den dritten Kanal als einen einzigen den ersten schneidenden Kanal betrachten. Eine geschlossene Fläche der ersten Klasse wird demnach dadurch, dass man den von ihr umgrenzten Körper mit zwei Kanälen durchbohrt, in eine Fläche nicht der dritten, sondern der vierten Klasse verwandelt, sobald die Kanäle einen Raumtheil gemein haben. — Und auf ähnliche Art wird man auch in allen noch zusammengesetzteren Fällen, in denen die den Körper durchbohrenden Kanäle einander kreuzen, die Klasse der den Körper begrenzenden Fläche zu bestimmen haben.

§. 16. Eine geschlossene Fläche der $n$ten Klasse sollte nach §. 15 diejenige genannt werden, welche durch n auf ihr gezogene geschlossene Linien a, b, ..., n in zwei Grundformen getheilt werden kann. Es ist nun von selbst klar, dass, wenn zwei Puncte P und Q der Fläche in einer und derselben der beiden Grundformen enthalten sind, man von P bis Q, in der Fläche selbst fortgehend, gelangen kann, ohne eine der Linien a, b, ..., n zu durchgehen; dass aber, wenn P in der einen und Q in der anderen Grundform liegt, man auf dem Wege von P bis Q wenigstens eine der Linien a, b, ..., n durchgehen muss; dass daher, wenn eine dieser Linien, etwa a, weggelassen wird, man von einem beliebigen Puncte P der Fläche bis zu irgend einem anderen Q derselben ohne Durchschneidung einer der noch vorhandenen Linien b, ..., n gelangen kann, und dass folglich durch diese letzteren allein die Fläche nicht in zwei gesonderte Theile zerlegt wird.

Auf einer geschlossenen Fläche der $n$ten Klasse lassen sich demnach $n-1$ geschlossene Linien dergestalt ziehen, dass die Fläche ungetheilt bleibt.

Auf einer Fläche der ersten Klasse gibt es folglich keine geschlossene Linie, welche sie ungetheilt liesse, d. h. sie wird durch jede solche Linie in zwei Theile zerlegt.

Auf einer Fläche der zweiten Klasse, $(ab)+(ab)$, lässt sich eine sie nicht theilende Linie, die Linie a, oder die b, ziehen, während sie durch zwei Linien in zwei, oder auch drei Theile getheilt wird. — Bei der in §. 7, 3 construirten Ringfläche können für a und b irgend zwei Lagen des sie erzeugenden Kreises oder auch die zwei Kreise genommen werden, welche irgend zwei Puncte des erzeugenden Kreises bei der Drehung seiner Ebene um die Axe x beschreiben. Jedes dieser Paare von Kreisen theilt die Ringfläche in zwei Theile. Auf derselben Fläche aber können zwei geschlossene Linien auch also gezogen werden, dass jede von ihnen eine Grundform der ersten Klasse umschliesst, und somit die ganze Fläche in diese zwei Räume und den zwischen ihnen liegenden dritten zerlegt wird.

Eine Fläche der dritten Klasse kann durch zwei geschlossene Linien ungetheilt bleiben, wird aber durch drei Linien in zwei, drei, oder auch vier Theile zerlegt; u. s. w., wobei jedoch immer vorausgesetzt wird, dass keine zwei dieser Linien sich in einem Puncte begegnen.

§. 17. *Je zwei geschlossene Flächen φ und φ', welche zu derselben Klasse gehören, sind elementar verwandt.* Denn nach der in §. 15 gegebenen Definition zweier Flächen von gleicher Klassenzahl, gleich n, lässt sich φ sowohl als φ' durch n geschlossene Linien in zwei Grundformen, φ in χ und ψ, φ' in χ' und ψ', theilen, deren jede von der $n$ten Klasse ist. Diese vier Grundformen χ, ψ, χ', ψ'

sind nach §. 11 einander elementar verwandt, wobei je einer der n gemeinsamen Grenzlinien von χ und ψ je eine der n gemeinsamen Grenzen von χ' und ψ' entspricht. Es müssen daher auch die aus den Grundformen χ und ψ zusammengesetzte Fläche φ und die aus χ' und ψ' zusammengesetzte φ' in elementar verwandtschaftliche Beziehung gebracht werden können.

Dagegen sind zwei zu verschiedenen Klassen gehörige geschlossene Flächen nicht in elementarer Verwandtschaft. Denn seien, um dieses zunächst für den möglichst einfachen Fall zu beweisen, φ eine Fläche der ersten, und φ' eine der zweiten Klasse. Man ziehe, wie dieses nach §. 16 immer möglich ist, auf der Fläche φ' eine sie nicht in zwei Theile theilende geschlossene Linie a'. Wären nun φ und φ' elementar verwandt, so müsste sich auf φ eine der a' entsprechende Linie a angeben lassen. Durch a wird aber φ in zwei Theile geschieden (§. 16). Sei P (vergl. Fig. 11) ein Punct in dem einen, und Q

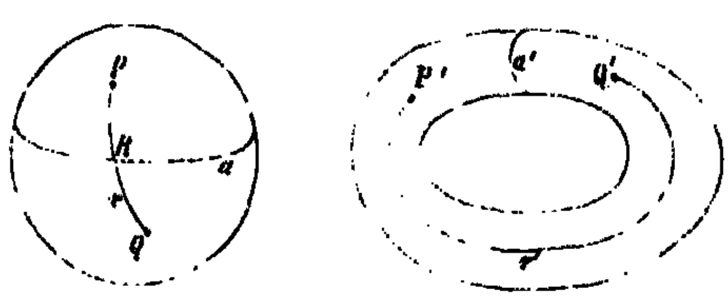

Fig. 11.

ein Punct in dem anderen dieser Theile, und P', Q' die den P, Q entsprechenden Puncte in φ'. Nun lässt sich auf φ' von P' bis Q' eine die a' nicht schneidende Linie r' ziehen, welcher auf φ die von P bis Q gehende Linie r entspreche. In Folge der über die Lage von P und Q gemachten Voraussetzung wird diese r die a wenigstens in einem Puncte R (oder auch in 3, 5, 7, ... Puncten) schneiden. Der dem R in φ' entsprechende Punct R' müsste daher in a' und r' zugleich enthalten sein. Einen solchen gibt es aber nicht, weil a' von r' nicht getroffen werden soll. Mithin können φ und φ' nicht in elementarer Verwandtschaft zu einander stehen.

So ist es z. B. nicht möglich, die Erdoberfläche auf der in §. 7, 3 beschriebenen Ringfläche also abzubilden, dass je zwei einander unendlich nahen Puncten der einen Fläche zwei einander unendlich nahe der anderen entsprächen.

Auf ganz ähnliche Art, wie jetzt für eine Fläche der ersten und eine der zweiten Klasse, lässt sich nun auch für zwei Flächen φ und φ', welche verschiedenen Klassen überhaupt, es sei der $m$ten und der $(m+n)$ten, angehören, der Beweis führen, dass sie einander nicht elementar verwandt sein können. Denn auf φ' lassen sich (nach §. 16) $m+n-1$ geschlossene Linien, also um so mehr m dergleichen Linien a', b', ..., m' ziehen, welche die φ' nicht in Theile zerlegen. Unter Voraussetzung der elementaren Verwandtschaft zwischen φ und φ' seien a, b, ..., m die jenen Linien entsprechenden Linien auf φ. Durch letztere wird aber die φ, als eine Fläche der $m$ten Klasse, in wenigstens zwei Theile getheilt, und man trifft nun nach Annahme zweier Puncte P, Q, welche in zwei verschiedenen Theilen von φ liegen, und mittelst der entsprechenden Puncte P', Q' in der ungetheilt gebliebenen Fläche φ' auf denselben Widerspruch wie vorhin, dass sich nämlich auf φ' von P' bis Q' eine den Linien a', b', ..., m' nicht begegnende Linie ziehen lässt, während die entsprechende Linie von P bis Q auf φ wenigstens eine der Linien a, b, ..., m durchgehen würde.

Aus dem jetzt Bewiesenen ziehen wir noch den Schluss, dass *je zwei elementar verwandte Flächen zu einer und derselben Klasse gehören.*

Zusatz. Bei den unendlich vielen Arten, auf welche eine geschlossene Fläche in zwei Grundformen zerlegt werden kann, ist es ohne weitere Untersuchung recht wohl denkbar, dass eine und dieselbe Fläche das eine Mal durch gewisse n Linien und das andere Mal durch gewisse n' Linien in zwei Grundformen getheilt werden und folglich zwei verschiedenen Klassen, der $n$ten und der n'ten, zugleich angehören könne. Einer solchen Annahme widerstreitet aber das eben Erwiesene, als wonach eine und dieselbe und daher sich selbst elementar verwandte Fläche nicht zu zwei verschiedenen Klassen zugleich gerechnet werden kann.

§. 18. In §. 13 und §. 14 ist gezeigt worden, wie ein aus beliebig vielen Grundformen der drei ersten Klassen zusammengesetzter Ausdruck einer geschlossenen Fläche auf einen nur zwei Grundformen enthaltenden Ausdruck reducirt, und damit die Klassenzahl der Fläche (§. 15) bestimmt werden kann. Ohne aber jene Reductionen einzeln anzustellen, lässt sich diese Zahl auch unmittelbar aus den Zahlen der Grundformen der ersten und der dritten Klasse im anfänglichen Flächenausdrucke bestimmen.

Denn bestehe dieser Ausdruck aus u Grundformen der ersten Klasse, aus s der zweiten und aus t der dritten, also aus $u+s+t$ Gliedern, so ist die Anzahl aller in ihm enthaltenen Linien überhaupt gleich $u+2s+3t$; und da jede derselben zweimal sich vorfindet (§. 9, 4), so ist die Anzahl aller verschiedenen Linien des Ausdruckes gleich $\frac{1}{2}(u+2s+3t)$, — woraus zugleich noch folgt, dass die Zahlen u und t entweder beide gerade, oder beide ungerade sind.

Nun bestand das Verfahren, durch welches der Ausdruck nach und nach bis auf zwei Glieder reducirt wurde, anfänglich darin, dass zwei Glieder, welche nur eine Linie gemein hatten, mit Weglassung der gemeinsamen Linie zu einem verbunden wurden (§. 13), z. B.

$$(ab)+(bcd)=(acd) \;,$$

und dass man, wenn dieses Verfahren noch nicht ausreichte, drei Glieder von den Formen $(abA'B')+(aA'C)+(bD)$ in zwei von den Formen $(xB'A'C)+(xA'D)$ zusammenzog (§. 14), wodurch an die Stelle der zwei Linien a und b die eine x trat. Bei jeder dieser beiden Reductionsarten wird folglich sowohl die Gliederzahl, als die Anzahl der verschiedenen Linien um die Einheit vermindert. Es wird daher nach irgend r Reductionen

$$\begin{aligned} &\text{die Gliederzahl} = u+s+t-r \;, \\ &\text{die Linienzahl} \;\; = \tfrac{1}{2}(u+2s+3t)-r \;, \end{aligned}$$

und es ist mithin nach, wie vor allen Reductionen

$$\text{die Linienzahl weniger der Gliederzahl} = \tfrac{1}{2}(t-u) \;.$$

Nachdem folglich die anfängliche Gliederzahl bis auf 2 reducirt worden, so wird die um 2 verminderte Linienzahl gleich $\frac{1}{2}(t-u)$, und daher, weil dann die Linienzahl gleich der Klassenzahl n der Fläche ist (§. 15),

$$(A) \qquad n=\tfrac{1}{2}(t-u)+2 \;,$$

d. h. *für eine durch Grundformen der drei ersten Klassen ausgedrückte geschlossene Fläche findet sich die Klassenzahl, wenn man die Hälfte des Restes, welcher nach Abzug der Zahl der Grundformen erster Klasse von der Zahl derer der dritten Klasse übrig bleibt, um zwei Einheiten vermehrt.*

So sind zu Folge der in §. 8 und §. 9 aufgestellten Schemata

für die Flächen	φ',	φ'',	φ''',	φ^{IV},	φ^{V},
die Zahlen u	2,	3,	2,	4,	2,
die Zahlen t	0,	1,	2,	4,	6,
folglich die Klassenzahlen	1,	1,	2,	2,	4;

— vollkommen übereinstimmend mit den schon in §. 15 angegebenen Klassenzahlen dieser Flächen.

§. 19. In der Gleichung (A), durch welche so eben die Klassenzahl n einer Fläche mittelst der Zahlen u und t von Grundformen der ersten und der dritten Klasse bestimmt wurde, kann man die letzteren Zahlen noch auf andere Weise definiren und damit der Gleichung selbst eine noch leichter zu fassende Bedeutung abgewinnen.

Bei der in §§. 6 bis 9 angestellten Zerlegung einer geschlossenen Fläche φ durch parallele Ebenen ε_0, ε_1, ... in Grundformen der drei ersten Klassen fiel nämlich zwischen je zwei dieser Ebenen, welche zunächst auf einander folgten, entweder eine und nur eine Grundform der ersten, oder eine und nur eine Grundform der dritten Klasse. Erstere Grundform wurde von einer mit ε_0, ε_1, ... parallelen Ebene in einem Puncte elliptisch, und letztere von einer solchen Ebene in einem Puncte hyperbolisch berührt, während bei einer Grundform der zweiten Klasse keine dergleichen Berührung stattfand. Die Zahl u der Grundformen erster Klasse ist daher auch gleich der Zahl der Puncte, in denen die Fläche φ von einer mit ε_0 parallel sich fortbewegenden Ebene ε elliptisch berührt wird, und ebenso ist t die Zahl der hyperbolischen Berührungspuncte von φ mit ε.

Sei nun E ein elliptischer und H ein hyperbolischer Berührungspunct, so hat nach der Natur der elliptischen Berührung der Punct E unter allen ihm nächsten Puncten der Fläche φ entweder den grössten, oder den kleinsten Abstand von ε_0 oder von sonst einer festen mit ε_0 parallelen Ebene ζ, je nachdem der dem E nächstliegende Theil von φ der Ebene ζ seine hohle, oder seine erhabene Seite zuwendet; und ähnlicher Weise ist der Abstand des H von ζ ein Maximum und ein Minimum zugleich. Man kann daher u auch als die Zahl der Puncte der Fläche φ definiren, deren Abstände von einer beliebigen festen Ebene ζ theils Maxima, theils Minima sind, und t als die Zahl der Puncte von φ, deren Abstände von derselben Ebene ζ Maxima und Minima zugleich sind. Zwischen diesen beiden Zahlen aber und der Klassenzahl n von φ wird immer die Gleichung (A) bestehen.

§. 20. Die zur Theilung der Fläche φ in Grundformen der drei ersten Klassen gebrauchten parallelen Ebenen ε_0, ε_1, ... kann man als Stücke von Kugelflächen betrachten, welche einen gemeinsamen im Unendlichen liegenden Mittelpunct haben. Zu demselben Zwecke kann man aber auch eine Reihe endlicher Kugelflächen mit einem gemeinsamen beliebig zu wählenden Mittelpuncte anwenden und dadurch zu einer noch etwas allgemeineren Auffassung der Zahlen u und t gelangen.

Setzen wir nämlich, dass von dieser Reihe concentrischer Kugelflächen σ_0, σ_1, ... die erste σ_0 und die letzte die Fläche φ ganz zwischen sich liegend haben, und dass sie dergestalt auf einander folgen, dass zwischen je zwei nächsten der Reihe eine und nur eine mit ihnen concentrische die Fläche φ berührende Kugelfläche beschrieben werden kann, so wird die Fläche φ durch ihre Schnitte mit σ_1, σ_2, ..., wie vorhin, in Grundformen getheilt, von denen zwischen je zwei nächsten der Kugelflächen σ_0, σ_1, σ_2, ..., ausser den Grundformen der zweiten Klasse, immer noch eine und nur eine entweder der ersten, oder der dritten Klasse enthalten ist, je nachdem nämlich die zwischen die beiden Kugelflächen fallende Berührung eine elliptische, oder eine hyperbolische ist.

Das mittelst der Grenzlinien dieser Grundformen zu bildende Schema von φ ist nun ersichtlich von derselben Beschaffenheit, welche das frühere nach §. 9 hatte, und die Schlüsse, durch welche wir, von jenem Schema ausgehend, zu der Gleichung (A) zwischen den Zahlen u und t der Grundformen der ersten und der dritten Klasse und der Klassenzahl n von φ selbst gelangten, müssen auch gegenwärtig anwendbar sein. Wie in §. 19 zeigt sich ferner auch hier, dass u gleich der Zahl der elliptischen, und t gleich der Zahl der hyperbolischen Berührungen von φ mit den zwischen σ_0, σ_1, ... fallenden concentrischen Kugelflächen ist; und es erhellt, dass, wenn O das gemeinsame Centrum der letzteren, E einen elliptischen und H einen hyperbolischen Berührungspunct bezeichnet, unter allen von O an Puncte von φ, welche dem E unendlich nahe liegen, zu ziehenden Radien der Radius OE ein Maximum oder ein Minimum ist, je nachdem die Fläche φ in der Nähe von E ihre hohle oder ihre erhabene Seite dem O zukehrt, der Radius OH aber unter allen ihm nächsten Radien ein Maximum und ein Minimum zugleich ist.

Die Anzahl ($= u + t$) *aller Normalen einer geschlossenen Fläche, welche sich von einem beliebigwo angenommenen Puncte O bis zur Fläche ziehen lassen, ist demnach stets eine gerade Zahl* (§. 18); *und wenn u unter diesen Normalen theils Maxima, theils Minima, die t übrigen aber Maxima und Minima zugleich sind, so ist $t - u$ eine von dem Orte des O unabhängige Zahl, deren Hälfte, um zwei Einheiten vergrössert, die Klassenzahl n der Fläche gibt.*

So lassen sich z. B. bei dem Ellipsoid von seinem Mittelpuncte aus, wenn dieser für den Punct O genommen wird, sechs auf der Fläche normale Radien, die Hälften der drei Hauptaxen, ziehen.

Zwei dieser Radien sind Maxima, zwei andere Minima, und die zwei übrigen Maxima und Minima zugleich. Hier ist also $u = 4$, $t = 2$, mithin

$$n = \tfrac{1}{2}(t - u) + 2 = 1 \; ,$$

und daher das Ellipsoid, ebenso wie eine Kugelfläche, eine Fläche der ersten Klasse.

Werde ferner bei der in §. 7, 3 construirten Ringfläche φ''' der Punct O irgendwo in der Ebene λ angenommen, welche die Fläche in zwei concentrischen Kreisen symmetrisch halbirte, und treffe eine durch O und den Mittelpunct dieser Kreise gelegte Gerade den äusseren Kreis in A, D, den inneren in B, C, so dass A, B, C, D die Aufeinanderfolge dieser vier Puncte sei. Alsdann sind unter allen von O an die Fläche zu ziehenden Radien die nach A, B, C, D gehenden allein auf der Fläche normal. Unter diesen vier Radien ist aber, wenn O dem A näher, als den drei übrigen Puncten B, C, D liegt, OA ein Mininum, OD ein Maximum, und OB, OC sind Maxima und Minima zugleich; liegt aber O dem B näher, als den A, C, D, so ist OB ein Minimum und OD ein Maximum, während OA, OC Maxima und Minima zugleich sind; u. s. w. Hier ist also immer $u = 2$, $t = 2$, und folglich nach der Formel (A) in §. 18 die Klassenzahl n der Fläche φ''' gleich 2 — übereinstimmend mit §. 15 und §. 18 zu Ende.

Zusatz. Setzt man die Zahl aller von einem beliebigen Puncte O an eine geschlossene Fläche normal zu ziehenden Radien ($= u + t$) gleich N, so ergibt sich mit Hülfe von (A) in §. 18

$$u = \tfrac{1}{2}N - n + 2 \quad \text{und} \quad t = \tfrac{1}{2}N + n - 2 \; .$$

Für eine geschlossene Fläche der ersten Klasse ist daher

$$(R) \qquad u = \tfrac{1}{2}N + 1 \quad \text{und} \quad t = \tfrac{1}{2}N - 1 \; ,$$

für eine der zweiten Klasse

$$u = \tfrac{1}{2}N \quad \text{und} \quad t = \tfrac{1}{2}N \; ,$$

für eine der dritten

$$u = \tfrac{1}{2}N - 1 \quad \text{und} \quad t = \tfrac{1}{2}N + 1 \; ,$$

für eine der vierten

$$u = \tfrac{1}{2}N - 2 \quad \text{und} \quad t = \tfrac{1}{2}N + 2 \; ,$$

u. s. w., wozu ich nur noch bemerke, dass unter diesen Gleichungen die zwei mit (R) bezeichneten, und diese allein, sich bereits in einer im *Journal de l'école polytechnique*, *cahier* 37, enthaltenen Abhandlung: *Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées, par M. Reech*, bewiesen finden, und dass daher in dieser Abhandlung unter *surfaces fermées* bloss die von mir sogenannten Flächen der *ersten* Klasse zu verstehen sind. — ähnlicher Weise, wie man die Gleichung

$$E + F = K + 2$$

als allgemeine Relation zwischen den Zahlen der Ecken, Flächen und Kanten eines Polyëders hinzustellen pflegt, obschon sie nur für diejenigen Polyëder gilt, deren Oberflächen geschlossene Flächen der ersten Klasse sind.

§. 21. Die Zahlen u und t, durch welche die Klassenzahl n einer geschlossenen Fläche φ bestimmt wurde, lassen sich nach §. 20 auch definiren als die Zahlen der resp. elliptischen und hyperbolischen Berührungen der Fläche φ mit einer veränderlichen Kugelfläche σ, welche anfänglich die Fläche φ ganz umhüllt und sich hierauf, ohne den Ort ihres Mittelpunctes O zu verändern, allmählich bis zu diesem Puncte zusammenzieht.

Man kann aber die Zahlen u und t in noch allgemeinerem Sinne auffassen, indem man anstatt einer veränderlichen Kugelfläche eine veränderliche Fläche der ersten Klasse überhaupt anwendet, und kann dadurch den Hauptsatz des §. 20 auf folgende Weise noch verallgemeinern:

Wird irgend eine geschlossene Fläche χ von einer zur ersten Klasse gehörigen Fläche τ anfänglich umschlossen, und verkleinert sich hierauf die Fläche τ, eine Fläche der ersten Klasse bleibend, nach und nach dergestalt, dass von je zwei nächstfolgenden Formen derselben die folgende von der vorhergehenden ganz umschlossen wird, und sich somit die Fläche τ zuletzt in einen Punct zusammenzieht, und dass die hierbei stattfindenden successiven Berührungen von τ mit χ in Puncten, nicht in Linien geschehen, so ist, wenn von diesen Berührungen u elliptisch und t hyperbolisch sind, die Klassenzahl der Fläche χ gleich $\frac{1}{2}(t - u) + 2$.

Um diesen Satz darzuthun, will ich vorher zeigen, dass und wie zwei *körperliche Räume*, deren jeder von einer geschlossenen Fläche der ersten Klasse begrenzt ist, in elementar verwandtschaftliche Beziehung gebracht werden können.

Man bezeichne die zwei Räume mit (S) und (T), und die sie begrenzenden Flächen mit σ_1 und τ_1. Man füge zu σ_1 eine Reihe anderer Flächen der ersten Klasse σ, σ', σ'', ..., von denen σ von σ_1, σ' von σ, σ'' von σ', u. s. w. in unendlicher Nähe umschlossen ist, hinzu, bis man zuletzt auf eine von einem einfachen Puncte M nicht mehr zu unterscheidende Fläche kommt. Der Raum (S) wird dadurch in unendlich viele unendlich dünne Schalen $\sigma_1\sigma$, $\sigma\sigma'$, $\sigma'\sigma''$, ... zerlegt, von denen die eine in der anderen enthalten ist. — Ganz auf dieselbe Weise denke man sich auch den Raum (T) durch *eben so viele* in einander begriffene Flächen erster Klasse τ, τ', τ'', ..., von denen die letzte ein einfacher Punct N ist, in unendlich dünne Schalen $\tau_1\tau$, $\tau\tau'$, $\tau'\tau''$, ... zerlegt.

Weil ferner σ_1 und τ_1 Flächen der ersten Klasse sein sollen, so sind sie einander elementar verwandt, und man kann daher je einem Puncte T in τ_1 je einen Punct S in σ_1 dergestalt entsprechend setzen, dass je zwei einander unendlich nahen Puncten in τ_1 zwei einander unendlich nahe Puncte in σ_1 entsprechen. Hat man auf solche Weise zu allen Puncten T, T', ... in τ_1 die entsprechenden S, S', ... in σ_1 bestimmt, so ziehe man von N bis zu jedem Puncte T in τ_1 eine Linie. Jede dieser Linien wird jede der Flächen ..., τ'', τ', τ durchgehen. Man ziehe aber die Linien NT also, dass erstens keine der Flächen ..., τ', τ, τ_1 von NT in mehr als einem Puncte getroffen wird, und dass zweitens, wenn T und T'' zwei einander unendlich nahe Puncte in τ_1 sind, die Linien NT und NT'' nicht bloss in T und T'', sondern auch überall zwischen diesen Endpuncten nur unendlich wenig von einander entfernt liegen. — Nach denselben zwei Regeln verbinde man auch im anderen Raume (S) den Punct M mit allen Puncten S der Fläche σ_1 durch Linien MS.

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich nun zu jedem Puncte Q des Raumes (T) ein ihm im Raume (S) nach dem Gesetze der elementaren Verwandtschaft entsprechender Punct P sogleich angeben. Immer nämlich kann man Q als den Durchschnitt einer gewissen $\tau^{(\mu)}$ unter den den Raum (T) füllenden Flächen τ, τ', ... mit einer gewissen $NT^{(\nu)}$ unter den denselben Raum füllenden Linien NT, NT'', ... betrachten: und es wird, wenn im Raume (S) die Fläche $\sigma^{(\mu)}$ die ebensovielte unter den auf einander folgenden σ, σ', ... ist, als es $\tau^{(\mu)}$ in der Reihe τ, τ', ... war, und wenn $S^{(\nu)}$ der dem $T^{(\nu)}$ entsprechende Punct der Fläche σ_1 ist, der Durchschnitt von $\sigma^{(\mu)}$ mit der Linie $MS^{(\nu)}$ der dem Q entsprechende Punct P sein. Denn man ersieht ohne Weiteres, dass hiernach, wenn Q und Q' zwei einander unendlich nahe Puncte in (T) sind, auch die ihnen in (S) entsprechenden P und P', wie es die elementare Verwandtschaft erfordert, einander unendlich nahe sein werden. — Man kann hieraus noch folgern, dass, wenn zu allen Puncten einer im Raume (T) enthaltenen geschlossenen Fläche χ auf die eben gedachte Art die entsprechenden Puncte im anderen Raume (S) bestimmt werden, die letzteren Puncte eine der χ elementar verwandte Fläche in (S) bilden, dass folglich (§. 17 zu Ende) beide Flächen zu einer und derselben

Klasse gehören, und dass jedem Puncte der Fläche χ, in welchem sie von einer der Flächen τ, τ', ..., sei es elliptisch oder hyperbolisch, berührt wird, ein resp. elliptischer oder hyperbolischer Berührungspunct der Fläche φ mit der gleichvielten unter den Flächen σ, σ', ... entspricht.

Der jetzt noch übrige Beweis des am Anfang dieses Paragraphen gegebenen Satzes lässt sich nun ohne Schwierigkeit führen. — Weil die Fläche σ_1 und die darauf folgenden σ, σ', ..., bis zu der in M verschwindenden, Flächen der ersten Klasse sein sollen, so können und wollen wir sie insgesammt concentrische Kugelflächen sein lassen, deren gemeinsamer Mittelpunct M ist, und wollen alle die von M nach den Puncten S, S', ... der Fläche σ_1 zu ziehenden Linien als gerade annehmen. Werde hierauf nach der vorhin gezeigten Weise zu jedem Puncte des Raumes (T) der entsprechende des Raumes (S), und damit zu der gegebenen Fläche χ in (T) die entsprechende φ in (S) bestimmt. Von letzterer ergibt sich nach §. 20 die Klassenzahl aus den Zahlen u und t der elliptischen und der hyperbolischen Berührungen von φ mit einer sich allmählich in σ, σ', ... und zuletzt in M zusammenziehenden Kugelfläche. Es haben aber, wie eben bemerkt worden, die Flächen φ und χ eine und dieselbe Klassenzahl, und es entspricht jeder elliptischen oder hyperbolischen Berührung von φ mit einer der σ, σ', ... eine resp. elliptische oder hyperbolische Berührung von χ mit einer der τ, τ', ...; folglich u. s. w.

§. 22. Ich kann hierbei nicht umhin, auf den Zusammenhang noch aufmerksam zu machen, der zwischen der Formel (A) in §. 18 und derjenigen stattfindet, welche zwischen den Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen eines Polyëders und der Klassenzahl des letzteren besteht. Vorausgesetzt nämlich, dass die Oberfläche eines Polyëders nicht aus getrennten Theilen zusammengesetzt ist, sondern dass man, auf ihr fortgehend, von jedem Puncte derselben zu jedem anderen ihrer Puncte gelangen kann, und dass jede einzelne Polyëderfläche nur von einem Perimeter, nicht von zwei oder mehreren dergleichen begrenzt ist, — dieses vorausgesetzt, rechne man eine solche Oberfläche, ebenso wie eine geschlossene Fläche überhaupt, zur $n$ten Klasse, wenn bei der immer möglichen Zerlegung der Oberfläche in zwei Grundformen, d. i. in zwei Flächen, deren jede einer ebenen Fläche elementar verwandt ist, eine jede derselben von n geschlossenen Linien begrenzt ist.

Um jetzt auf ein solches Polyëder den Satz des §. 21 anwenden zu können, wollen wir uns die Ecken und Kanten des Polyëders um ein unendlich Weniges abgestumpft vorstellen und somit seine Oberfläche, welche x heisse, in eine sich nach dem Gesetze der Stetigkeit fortziehende Fläche übergehen lassen. Wir wollen ferner eine die x umschliessende Fläche r der ersten Klasse beschreiben, diese hierauf, wie im Obigen, allmählich sich verkleinern lassen, und zwar jetzt dergestalt, dass sie während dessen die Fläche x nach und nach in jeder Ecke, Fläche und Kante der letzteren einmal berühre.

Von diesen Berührungen sind die der Ecken und Flächen ersichtlich elliptischer Natur; dagegen werden die der Kanten hyperbolische sein. Denn da man sich den Krümmungshalbmesser des Durchschnittes einer abgestumpften Kante mit einer auf ihrer Längenrichtung perpendicularen Ebene unendlich klein zu denken hat, so liegen in unmittelbarer Nähe bei einer solchen Berührung die eben gedachte Durchschnittslinie und die Längenrichtung der Kante auf entgegengesetzten Seiten der berührenden Fläche r.

Setzt man demnach die Zahlen der Ecken, Flächen und Kanten des Polyëders resp. gleich E, F und K, so werden die im Satze mit u und t bezeichneten Zahlen gleich $E+F$ und K, und damit die Klassenzahl des Polyëders,:

$$n = \tfrac{1}{2}(t-u)+2 = \tfrac{1}{2}(K-E-F)+2\ .$$

Die hieraus fliessende Gleichung

$$E+F = K-2(n-2)$$

hat zuerst *Lhuilier* gegeben. Sie findet sich in einem *Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti; par M. Lhuilier, ... Extrait par M. Gergonne* im 3. Bande der *Gergonne*'schen Annalen. Dass daselbst (S. 181) $n-1$ statt des hiesigen $n-2$ zu lesen ist, hat darin seinen Grund, dass *Lhuilier* das im Vorliegenden so genannte Polyëder der ersten Klasse, also dasjenige, für welches die von *Euler* zuerst aufgestellte Gleichung

$$E+F = K+2$$

gilt, als Regel, die Polyëder höherer Klassen aber als Ausnahmen betrachtet und nach der zu Ende von §. 15 angegebenen Vorstellungsweise unter n die Anzahl der Kanäle versteht, von denen ein regelrechtes Polyëder, d. i. ein Polyëder der ersten Klasse, durchbohrt ist.

§. 23. Zum Schlusse füge ich noch Einiges über die elementare Verwandtschaft zwischen *Körpern* hinzu.

In §. 21 ist bereits bewiesen worden, dass zwei körperliche Räume, deren jeder von einer Fläche der ersten Klasse umschlossen ist, einander elementar verwandt sind; und eben so werden auch zwei Körper, von denen jeder eine Fläche der zweiten Klasse, oder jeder eine Fläche der dritten, u. s. w. zur Grenze hat, in elementarer Verwandtschaft stehen.

Ein zusammenhängender Körper, d. i. ein solcher, bei welchem man, in ihm selbst fortgehend, von jedem seiner Puncte zu jedem anderen Puncte desselben gelangen kann, kann aber auch zwei oder mehrere geschlossene Flächen zu Grenzen haben. Die eine derselben ist die äussere Grenze; die übrigen, welche nicht zum Körper gehörige Theile des Raumes umhüllen, und von denen daher je zwei stets neben einander, nicht die eine innerhalb der anderen, liegen, sind die inneren Grenzen des Körpers.

Um von diesen zusammengesetzteren Körpern nur die einfachsten hier noch in Betracht zu ziehen, so erhellt leicht, dass zwei Körper K und K', von denen K die Flächen α und ι, K' die Flächen α' und ι' resp. zur äusseren und zur inneren Begrenzung hat, in dem Falle einander elementar verwandt sind, wenn sämmtliche vier Flächen zur ersten Klasse gehören. Denn offenbar kann man alsdann alle die von α und α' umschlossenen Puncte dergestalt in elementar verwandtschaftliche Beziehung bringen, dass die darunter begriffenen von ι und ι' umschlossenen Puncte für sich in solcher Beziehung stehen. Hiermit aber sind zugleich den Puncten zwischen α und ι die Puncte zwischen α' und ι' entsprechend gesetzt, und dadurch die Körper K und K' in elementar verwandtschaftliche Beziehung gebracht.

Auf ähnliche Art erhellt die elementare Verwandtschaft zwischen K und K', wenn α, ι und α', ι' insgesammt Flächen der zweiten Klasse sind, sowie wenn α und α' zur ersten und ι und ι' zur zweiten Klasse, oder umgekehrt α und α' zur zweiten und ι und ι' zur ersten gehören.

Es herrscht aber zwischen K und K' auch dann elementare Verwandtschaft, wenn α und ι von der ersten und zweiten, und α' und ι' von der zweiten und ersten Klasse sind.

Um dieses darzuthun wollen wir die Körper K und K' zuerst möglichst regelmässig gebildet annehmen. Sei zu dem Ende CAD (vergl. Fig. 12) ein in A halbirter Halbkreis. Man beschreibe in seiner Ebene und innerhalb desselben einen ihn in A berührenden Kreis k, dessen Durchmesser daher kleiner als $\frac{1}{2}\,CD$ ist, und theile diesen Kreis in $n\,(=\infty)$ Elemente AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A$, und desgleichen die Linie CD in n Elemente CC_1, C_1C_2, ..., $C_{n-1}D$. Man ziehe hierauf in der vom Halbkreise CAD, vom Kreise k und von der Geraden CD begrenzten Ebene von A_1 bis C_1, von A_2 bis C_2, u. s. w., von A_{n-1} bis C_{n-1} Linien dergestalt, dass die erste A_1C_1 dem Quadranten AC, die letzte $A_{n-1}C_{n-1}$ dem Quadranten AD, und überhaupt je zwei nächstfolgende derselben, ohne einander zu begegnen, überall einander unendlich nahe bleiben. Auch mögen diese Linien, eben so wie die Quadranten AC und AD, die Gerade CD rechtwinklig treffen.

Wird nunmehr diese Figur um CD als Axe gedreht, so beschreibt der Halbkreis CAD eine Kugelfläche σ, der Kreis k eine Ringfläche ϱ, welche die σ in dem von A bei der Drehung beschriebenen Kreise berührt, und die Linien A_1C_1, A_2C_2, ..., $A_{n-1}C_{n-1}$ erzeugen gekrümmte von Kreisen begrenzte Flächen φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1}. Durch letztere Flächen aber wird der von σ, als äusserer, und von ϱ, als innerer Grenze, umschlossene Körper $\sigma\varrho$ in unendlich dünne kreisförmige Schalen zerlegt, z. B. in die Schale, welche φ_1 und φ_2 zu ihren beiden Hauptflächen hat, und deren Randfläche durch das Element A_1A_2 bei dessen Drehung um CD entsteht.

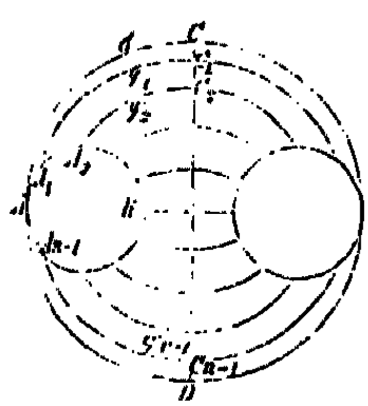

Fig. 12.

Bezeichne jetzt ϱ' eine zweite Ringfläche, die, gleich der vorigen ϱ, durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene enthaltene und ihn nicht treffende Axe erzeugt worden, wobei wir uns diese Axe auf der Ebene der Zeichnung perpendicular denken wollen; und seien k', k_1', k_2', ..., k_{n-1}' n cyklisch und unendlich nahe auf einander folgende und daher sämmtlich in ϱ' enthaltene Lagen dieses Kreises. Zu k' werde noch die Kugelfläche σ' zugefügt, von welcher k' ein grösster Kreis ist, und welche die ϱ' in k' berühren wird. Innerhalb ϱ' und ausserhalb σ' setze man ferner (vergl. Fig. 13) von k_1', k_2', ..., k_{n-1}' begrenzte Flächen φ_1', φ_2', ..., φ_{n-1}' hinzu, von denen φ_1' und φ_{n-1}' den zwei Halbkugelflächen, in welche σ_1 durch k' getheilt wird, und eben so je zwei nächstfolgende, wie φ_1' und φ_2', einander überall unendlich nahe sind.

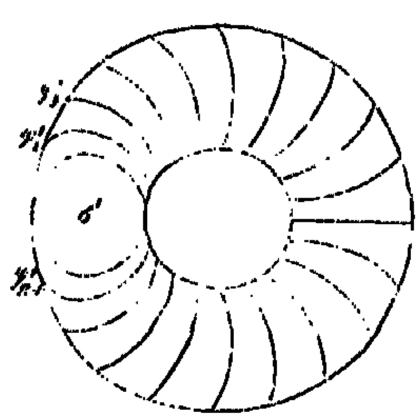

Fig. 13.

Die n Schalen, in welche durch diese Flächen der zwischen ϱ und σ' begriffene Körper $\varrho'\sigma'$ getheilt wird, können nun ersichtlich der Reihe nach den n Schalen, in welche vorhin der Körper $\sigma\varrho$ zerlegt wurde, elementar verwandt gesetzt werden; und da die n ersteren Schalen in derselben gegenseitigen Verbindung, wie die n letzteren stehen, so werden die Körper $\sigma\varrho$ und $\varrho'\sigma'$ selbst elementar verwandt sein.

Hierbei werden sich zugleich die Kugelflächen σ und σ' entsprechen, weil sie von den halbkugelförmigen Grenzen der ersten und der letzten Schale bei dem einen, wie bei dem anderen Systeme von Schalen gebildet sind. Eben deshalb aber, und wenn man noch um σ eine mit σ concentrische Kugelfläche σ_0, und innerhalb σ' eine mit σ' concentrische Kugelfläche σ_0' construirt, werden nicht nur die Kugelschaalen (von endlicher Dicke) $\sigma_0\sigma$ und $\sigma'\sigma_0'$ für sich, sondern auch die Körper $\sigma_0\sigma + \sigma\varrho$ und $\varrho'\sigma' + \sigma'\sigma_0'$, d. i. die Körper $\sigma_0\varrho$ und $\varrho'\sigma_0'$ elementar verwandt sein, von welchen zwei letzteren weder die zwei Grenzflächen des einen, noch die zwei des anderen einander mehr berühren.

Sind endlich, wie oben, α, α' die äusseren und ι, ι' die inneren Grenzflächen zweier Körper $\alpha\iota$ und $\alpha'\iota'$, und sind α, ι' irgend zwei Flächen der ersten, und α', ι irgend zwei der zweiten Klasse, so ist, weil auch σ_0, σ_0' zur ersten und ϱ, ϱ' zur zweiten Klasse gehören, nach dem am Anfange des §. 23 Bemerkten, der Körper $\alpha\iota$ dem $\sigma_0\varrho$ und der Körper $\alpha'\iota'$ dem $\varrho'\sigma_0'$ elementar verwandt. Erwiesenermaassen stehen aber $\sigma_0\varrho$ und $\varrho'\sigma_0'$ selbst in elementarer Verwandtschaft; folglich auch $\alpha\iota$ und $\alpha'\iota'$. *Q. e. d.*

Zwei Körper, deren jeder von einer Fläche der ersten und einer Fläche der zweiten Klasse begrenzt ist, sind demnach stets in elementarer Verwandtschaft, mögen die äusseren Grenzflächen für sich, und damit auch die inneren für sich, entweder zu einerlei Klasse oder zu verschiedenen gehören.

Es lässt sich hiernach erwarten, dass überhaupt zwei Körper elementar verwandt sein werden, wenn der eine von ihnen von eben so viel geschlossenen Flächen, wie der andere, begrenzt ist, und wenn die Klassenzahlen der Grenzflächen des einen Körpers dieselben, wie bei dem anderen sind, — gleich viel übrigens, ob die zwei äusseren Grenzflächen der beiden Körper zu einerlei Klasse gehören oder nicht. — Die nähere Prüfung dieses Satzes bleibe jedoch einer anderen Gelegenheit vorbehalten.