Une remarque sur l'invariant de Arf

par Mesdames Jérémie et *Clément Moreau*

Résumé

Utilisant le « formalisme de Witt » décrit dans **[2]** on donne une construction, sans calcul de changement de base, de l'invariant de Arf des forme quadratiques en caractéristique 2.

Abstract

An alternative construction of the Arf-invariant of quadratic forms in characteristic 2.

1. Conoyau d'Artin-Schreier et extensions radicielles. — Soient k un corps de caractéristique p positive, $\Phi_k : k \to k, x \mapsto x^p$ et $\mathcal{P}_k$ ses Frobenius et *Artin-Schreier* (*i.e.* l'endomorphisme $\mathcal{P} = \Phi - \mathrm{Id} : k \to k$ du groupe additif de k).

Lemme 0. — *Une extension radicielle $\iota : k \subset K$ induit un isomorphisme*

$$[\iota] : k/\mathcal{P}_k\,(k) \xrightarrow{\sim} K/\mathcal{P}_K\,(K)$$

Démonstration. — Soit a dans k avec $a = \mathcal{P}_K\,(x) = x^p - x$ où x est dans K. Alors x est dans k, puisque l'équation $X^p - X - a = 0$ est séparable, d'où l'injectivité.

Soit x dans K de hauteur n sur k, ainsi $x^{p^n} = y$ est dans k, et $x = y - x^{p^n} + x^{p^{n-1}} + \cdots - x^p + x = y - \mathcal{P}_K\,(x^{p^{n-1}} + \cdots + x)$, d'où la surjectivité.

2. Vocabulaire du formalisme de Witt (Cf. **[2]**). — Une *forme quadratique* sur un corps k est une application $q : V \to k$ définie sur un k-espace vectoriel V de dimension finie et telle que $(x,\, y) \mapsto b\,(x,\, y) = q\,(x+y) - q\,(x) - q\,(y)$ est bilinéaire non dégénérée, la *forme bilinéaire* de q. Un *b-Lagrangien* de b est un sous-espace L de V égal à son orthogonal. C'est un *q-Lagrangien* si de plus $q\,(L) = 0$. Une forme quadratique est *neutre* si elle a un q-Lagrangien. Le quotient du monoïde de somme orthogonale des formes quadratiques sur k par le sous-monoïde des formes neutres est un groupe, le *groupe de Witt quadratique* $WQ\,(k)$ du corps k.

3. Formes quadratiques sur un corps parfait de caractéristique 2. Soit $q : V \to K$ une forme quadratique sur un corps parfait de caractéristique 2. On note $\sqrt{\ }$ l'inverse de Φ_K. La forme bilinéaire b de q est alternée car $b\,(x,x) = 2\,q\,(x) = 0$ pour tout x de V. Ayant une base symplectique (C.f. **[3]** I 3.5), cette forme a un *b-Lagrangien*, L. La fonction $\sqrt{q}$ est linéaire sur L car pour x, y de $L = L^{\perp}$ et λ de K on a : $\sqrt{q\,(x+y)} = \sqrt{q\,(x) + b\,(x,y) + q\,(y)} = \sqrt{q\,(x) + q\,(y)} = \sqrt{q\,(x)} + \sqrt{q\,(y)}$ et $\sqrt{q\,(\lambda\, x)} = \sqrt{\lambda^2\, q(x)} = \lambda\,\sqrt{q\,(x)}$. Il y a donc dans V, car b est non dégénérée, un *vecteur de Wu ω de L*, bien défini modulo $L^{\perp} = L$ par la relation $b(\omega, l) = -\sqrt{q(l)}$ pour tout l de L. Donc $q(\omega+l) = q(\omega) + b(\omega, l) + q(l) = q(\omega) - \sqrt{q(l)} + \Phi(\sqrt{q(l)}) = q(\omega) + \mathcal{P}(\sqrt{q(l)})$:

Lemme 1. — *Quand $\omega + l$ parcourre la classe de ω modulo L alors $q(\omega + l)$ est nul si q est nulle sur L et décrit une classe modulo $\mathcal{P}(K)$ sinon.*

Proposition. — *La classe modulo $\mathcal{P}(K)$ de $q(\omega)$ ne dépend que de la classe de Witt de q et $[q] \mapsto [q(\omega)]$ induit l'isomorphisme*

$$\mathrm{Parf} : WQ(K) \overset{\sim}{\to} K/\mathcal{P}(K)$$

du groupe de Witt quadratique du corps K sur le conoyau de son Artin-Schreier.

Démonstration. — Si ω est vecteur de Wu d'un q-Lagrangien alors $q(\omega) = 0$. De plus, si ω_i, pour $i = 1, 2$, sont vecteurs de Wu de b-Lagrangiens L_i de formes quadratiques q_i, alors $\omega = \omega_1 + \omega_2$ est vecteur de Wu du b-Lagrangien $L_1 \oplus L_2$ de la somme orthogonale $q = q_1 \oplus q_2$ avec $q(\omega) = q_1(\omega) + q_2(\omega)$. Ainsi pour que Parf soit un morphisme bien défini sur le groupe de Witt quadratique il suffit, d'après le Lemme 1, de montrer que deux b-Lagrangiens L_1 et L_2 d'une forme quadratique q ont un vecteur de Wu commun : Soit ω_i vecteur de Wu de L_i. Pour l dans $L_1 \cap L_2$ on a $b(\omega_1 - \omega_2, l) = q(l) - q(l) = 0$. Ainsi $\omega_1 - \omega_2$, étant dans l'orthogonal $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$, s'écrit $\omega_1 - \omega_2 = m_1 + m_2$ où m_i est dans $L_i^{\perp} = L_i$. Le vecteur de Wu $\omega_1 - m_1 = \omega_2 + m_2$ convient.

Soit q un représentant anisotrope du noyau de Parf. D'après le Lemme1 un b-Lagrangien L a un vecteur de Wu ω avec $q(\omega) = 0$ donc $\omega = 0$ puisque q est anisotrope. Ainsi $q(L) = 0$ donc $L = 0$ et $V = 0$, d'où l'injectivité.

Pour tout élément λ de K, le b-Lagrangien $K\,e$ de la forme quadratique q_λ définie sur l'espace vectoriel de base e, f par $q_\lambda(e) = 1$, $b_\lambda(e, f) = 1$ et $q_\lambda(f) = \lambda$ a f comme vecteur de Wu et donc $\mathrm{Parf}(q) = [\lambda]$, d'où la surjectivité.

4. L'invariant de Arf. — Soit k un corps de caractéristique 2 dont une clôture parfaite est notée $\iota : k \subset K$. D'après la Proposition et le Lemme 0 il y a un morphisme de groupe $\mathrm{Arf} : WQ(k) \to k/\mathcal{P}(k)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} WQ(k) & \xrightarrow{\mathrm{Arf}} & k/\mathcal{P}(k) \\ {\scriptstyle WQ(\iota)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\iota]}\ \wr \\ WQ(K) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Parf}} & K/\mathcal{P}(K) \end{array}$$

Soit $q : V \to k$ une forme quadratique non dégénérée sur k. Sa forme bilinéaire b a une base symplectique $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$. Alors, comme $b(e_i, e_j) = b(f_i, f_j) = 0$

et $b\,(e_i,\, f_j) = \delta_{i\,j}$ pour $i,\, j = 1, \ldots, n$, l'élément $\omega = \sqrt{q\,(e_1)}\, f_1 + \cdots + \sqrt{q\,(e_n)}\, f_n$ de $V \otimes K$ est vecteur de Wu du Lagrangien $K\, e_1 \oplus \cdots \oplus K\, e_n$ de l'extension de q à K et $q\,(\omega) = q\,(e_1)\, q\,(f_1) + \cdots + q\,(e_n)\, q\,(f_n)$. On retrouve et complète le

Théorème de Arf (C.f. [**1**] Satz 5, [**3**] Appendix 1). — *La classe modulo $\mathcal{P}\,(k)$ de $q\,(e_1)\, q\,(f_1) + \cdots + q\,(e_n)\, q\,(f_n)$ ne dépend pas du choix de la base symplectique. C'est l'invariant de Arf* $\mathrm{Arf}\,(q)$ *de la forme quadratique q, un morphisme du groupe de Witt quadratique de k sur le conoyau de son Artin-Schreier.*

$$\mathrm{Arf} : WQ\,(k) \to k/\mathcal{P}\,(k) \overset{\sim}{\leftarrow} WQ\,(K)$$

s'identifiant au passage au groupe de Witt quadratique de la clôture parfaite K.

Remerciements . — À qui, bien que nous lui ayons ravi ses fils, a mis en valeur nos balbuciements algébriques. Manifestons notre sympathie à Monsieur Carreira dont les doigts habiles sont responsables de l'avenante frappe du manuscript.

Références

[**1**] **C. Arf**. — *Untersuchungen űber quadratische Formen in Kőrpern der Characteristic 2.*, J. Reine Angew. Math. **183**, 148-167 (1941).

[**2**] **J. Barge, J. Lannes, F. Latour** et **P. Vogel**. — Appendice de Λ-*Sphères*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **8**, fasc. 4, 494-505 (1974).

[**3**] **J. Milnor** et **D. Husemoller**. — *Symmetric bilinear forms*, Springer Verlag, (1973).

Mesdames Jérémie et Clément Moreau
22 Boulevard Edouard Rey
38000 Grenoble