

Andrew Ranicki

GEOMETRIE DES COMPLEXES DE POINCARÉ ET CHIRURGIE

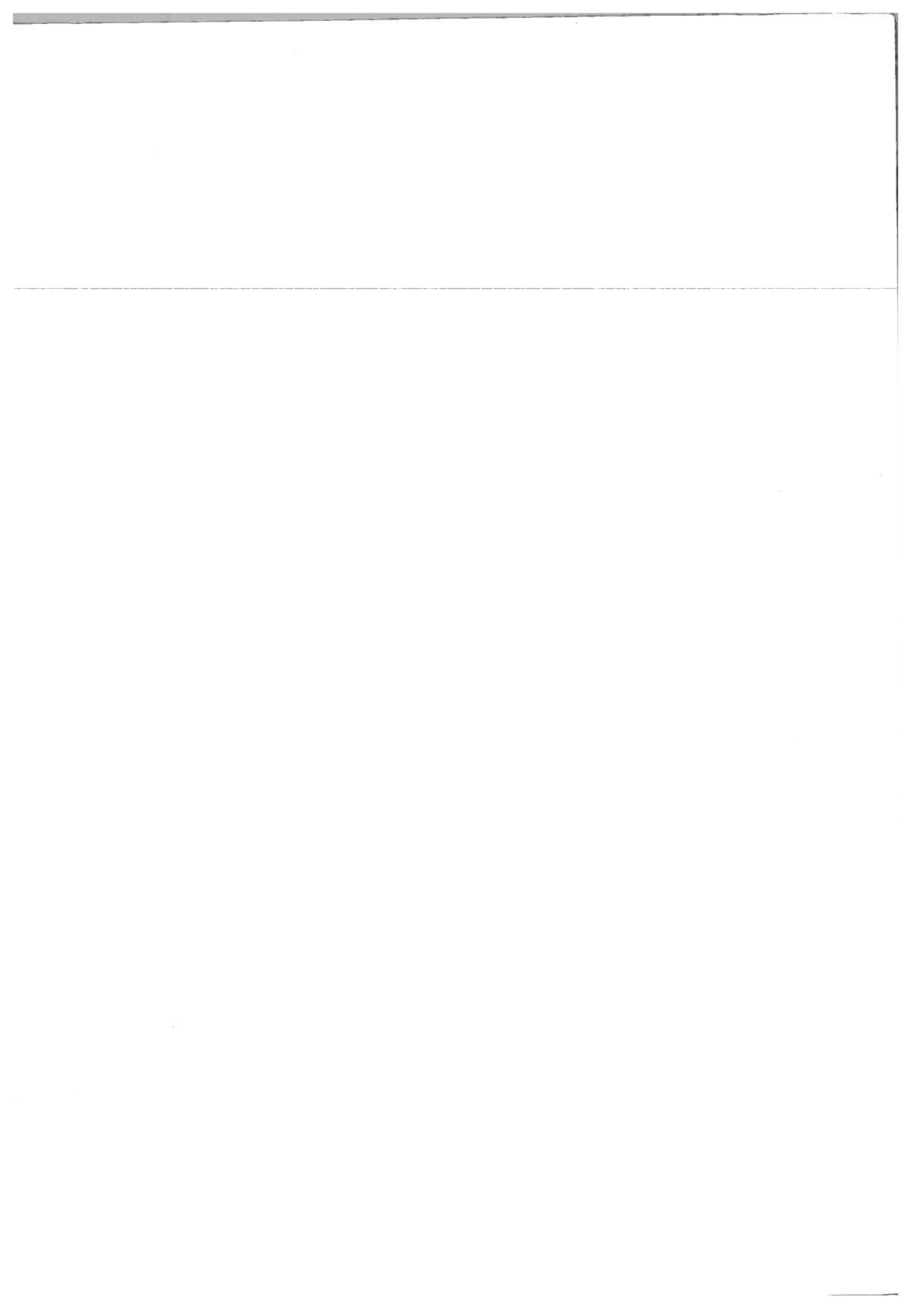
par

J. Lannes F. Latour et C. Morlet

Institut des Hautes Etudes Scientifiques

91 - Bures-sur-Yvette

France



Ce texte doit être considéré comme une nouvelle présentation géométrique de la théorie de la chirurgie de C.T.C. Wall. Il a été résumé (dans le numéro 397 du séminaire Bourbaki) par F. Latour. Le but initial était de donner une définition géométrique simple des groupes L_n introduits par Wall, comme classes de cobordisme de "données de chirurgies". Cela nécessite une étude préalable des plongements de complexes de Poincaré et de leur décomposition en anses ; on trouvera cette étude dans les chapitres 3, 4 et 6. Les chapitres 1 et 2 contiennent des généralités sur les complexes de Poincaré. Les chapitres 5 et 7 sont consacrés à la chirurgie. Le chapitre 7 a été rédigé trop rapidement et est très incomplet. Je remercie Ph. Masson et B. Perron pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la rédaction de certains chapitres. En ce qui concerne la bibliographie il m'a semblé impossible de rivaliser avec le livre de Wall ; par conséquent je donnerai une seule référence

C.T.C. Wall. Surgery on compact manifolds (Academic Press).

C. MORLET.

CHAPITRE 1 : COMPLEXES DE POINCARÉ . I -

I- Notations algébriques

Soient π un groupe, $A = \mathbb{Z}[\pi]$, w un homomorphisme de π dans $\{\pm 1\}$. On définit sur A un antiautomorphisme involutif de la façon suivante :

$$a = \sum_{g \in \pi} n(g)g \longmapsto \bar{a} = \sum_{g \in \pi} n(g) w(g)g^{-1}$$

Soit M un A -module à droite, on peut munir M d'une structure de A -module à gauche :

$$a \in A \quad m \in M \quad ; \quad \text{on pose} \quad am = \bar{m}a.$$

Cet A -module à gauche est noté $\bar{M}$.

II- Notations géométriques

Soient X un CW complexe fini, connexe, et x_0 un point de X . Soit w un homomorphisme de $\pi = \pi_1(X, x_0)$ dans $\{\pm 1\}$ (on peut donc considérer w comme un élément de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$; en effet $H^1(X; \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}[H_1(X, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2]$ puisque $\mathbb{Z}_2$ est commutatif.

Soit $\tilde{X}$ le revêtement universel de X ; π opère à droite sur $\tilde{X}$. De ce fait $C_*(\tilde{X})$, complexe des chaînes cellulaires de $\tilde{X}$, est muni d'une structure de A -module à droite. Cet A -module est libre de type fini ; les cellules de X définissent une A -base déterminée, aux permutations, et multiplications par les éléments de $(-\pi)$, prés.

III- Définition de l'homologie et de la cohomologie de (X, w) à coefficients dans un A -module à droite

Si B est un A -module à droite, on définit :

$$H_*^w(X, B) = H_*[B \otimes_A \overline{C_*}(\tilde{X})]$$

et

$$H^*(X, B) = H_{-*}[\text{Hom}_A(C_*(\tilde{X}), B)]$$

Remarque : Seule l'homologie ressent les effets du w .

EXEMPLES :

1) On prend pour B , $\mathbb{Z}$ muni de sa structure triviale de A -module à droite (On le note $\mathbb{Z}^\circ$) $\mathbb{Z}^\circ \otimes_A \overline{C_*}(\tilde{X})$ est le quotient, noté $C_*^w(X)$, de $C_*(\tilde{X})$, par le sous- $\mathbb{Z}$ -module engendré par les éléments de la forme $cg - w(g)c$. $H_*^w(X, \mathbb{Z}^\circ)$ coïncide avec $H_*(X, \mathbb{Z}^w)$, homologie de X dans le système local de coefficients entiers déterminé par w . $\text{Hom}_A[C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}^\circ]$ est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}[C_*(X), \mathbb{Z}]$: $H^*(X, \mathbb{Z}^\circ)$ est la cohomologie ordinaire $H^*(X, \mathbb{Z})$

2) On prend pour B , A muni de sa structure naturelle de A -module à droite $A \otimes_A \overline{C_*}(\tilde{X}) = \overline{C_*}(\tilde{X})$, $H_*^w(X, A) = H_*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$.

On considère maintenant $\text{Hom}_A[C_*(\tilde{X}), A]$. $u \in \text{Hom}_A[C_*(\tilde{X}), A]$;

$c \in C_*(\tilde{X})$, . On peut écrire : $u(c) = \sum_{g \in \pi} u_g(c) g$.

Soit $h \in \pi$. De $u(ch) = u(c)h$ on déduit : $u_g(ch) = u_{gh^{-1}}(c)$ et en particulier $u_g(c) = u_e(c g^{-1})$ (III.1)

L'application $u_e : C_*(\tilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$ linéaire et possède la propriété suivante : c étant fixé, l'ensemble $\{g ; g \in \pi, u_e(cg) \neq 0\}$ est fini. On dit que u_e est une cochaîne π -finie.

Soit $\tilde{u}$ une cochaîne cellulaire de $\tilde{X}$, on appelle support de $\tilde{u}$ l'ensemble $\{c ; c \text{ cellule de } \tilde{X}, \tilde{u}(c) \neq 0\}$. On note $C_c^*(\tilde{X})$ le sous module de $C^*(\tilde{X})$ fermé des cochaines à support fini. Comme X est un CW-complexe fini, $C_c^*(\tilde{X})$ coïncide avec l'ensemble des cochaines π -finies.

$$\begin{array}{ccc} \text{L'application} : & \text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), A] & \longrightarrow C_c^*(\tilde{X}) \\ & u & \xrightarrow{\quad \circ \quad} u_e \end{array}$$

est bijective d'après (III.1). D'après (III.1) également cette application est un isomorphisme de A -modules à gauche (Les deux modules ont une structure naturelle de A -module à gauche). $H^*(X, A)$ est donc la cohomologie à support compact de $\tilde{X}$, $H_c^*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$.

3) $B = \mathbb{Z}^\pi$ (B est à A ce que les séries formelles sont aux polynômes).

Soit I l'ensemble des cellules de $\tilde{X}$. $C_*(\tilde{X})$ est défini comme $\mathbb{Z}^{[I]}$, de la même façon on définit $C_*^{LF}(\tilde{X})$ comme $\mathbb{Z}^I$ (LF pour "localement fini"). $\mathbb{Z}^\pi \otimes_A \overline{C}_*(\tilde{X})$ est isomorphe à $C_*^{LF}(\tilde{X})$. La démonstration se résume ainsi : Soit J un sous ensemble (fini) de I qui forme une base de $C_*(\tilde{X})$ comme A -module à droite. $\mathbb{Z}^\pi \otimes_A \overline{C}_*(\tilde{X}) = \mathbb{Z}^\pi \otimes_A A^J = (\mathbb{Z}^\pi)^J = \mathbb{Z}^{\pi \times J} = \mathbb{Z}^I$, $H_*^w(X, \mathbb{Z}^\pi)$ est donc l'homologie localement finie de $\tilde{X}$, $H_*^{LF}(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. $\text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}^\pi]$ est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathbb{Z}} [C_*(\tilde{X}), \mathbb{Z}] = C^*(\tilde{X})$. La démonstration analogue à celle de 2) est évidente. $H^*(X, \mathbb{Z}^\pi)$ est la cohomologie ordinaire de $\tilde{X}$, $H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$.

4) Soit w' un homomorphisme de π dans $\{\pm 1\}$ w' définit un homomorphisme d'anneau

$$A \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sum_{g \in \pi} n(g) g \longmapsto \sum_{g \in \pi} n(g) w'(g)$$

Il en résulte sur $\mathbb{Z}$ une structure de A module à droite. On note ce module $\mathbb{Z}^{w'}$.

Si $B = \mathbb{Z}^{w'}$, $H_*^w(X, \mathbb{Z}^{w'})$ est l'homologie de X dans le système local de coefficients entiers déterminé par $w + w'$. (Notation additive pour $\{\pm 1\}$), $H_*(X, \mathbb{Z}^{w + w'})$. $H^*(X, \mathbb{Z}^{w'})$ est la cohomologie ordinaire de X à coefficients entiers locaux associés à w' .

5) $B = \mathbb{Z}_2$ muni de son unique structure de A -module à droite.

On retrouve l'homologie et la cohomologie ordinaires à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

6) On vérifie :

$$H^0(X, B) = \text{Hom}_A(\mathbb{Z}^0, B) = B^\pi$$

B^π désigne l'ensemble des éléments de B invariant par π .

IV - Le "slant" produit1) Rappel d'algèbre

Soit M un A -module à droite. On définit une application

$$B : M \times \bar{M} \longrightarrow \text{Hom}_A [\text{Hom}_A (M, A), \bar{M}]$$

$$(x, y) \longmapsto f ; f : \text{Hom}_A (M, A) \longrightarrow \bar{M} \text{ donnée par : } u \longmapsto u(x) y$$

(IV.1)

B est $\mathbb{Z}$ -bilinéaire et de plus si $a \in A$:

$$B(xa, y) = B(x, ay)$$

B induit donc une application S :

$$M \otimes_A \bar{M} \longrightarrow \text{Hom}_A [\text{Hom}_A (M, A), \bar{M}]$$

On suppose à présent que M est libre de type fini.

Soit $\{e_i ; 1 \leq i \leq N\}$ une base de M ; $\{e_j^*\}$ la base duale. Les $e_i \otimes_A e_j$ forment une base de $M \otimes_A \bar{M}$.

On pose $f_{ij} = S(e_i \otimes_A e_j)$. $f_{ij}(e_k^*) = e_j^*(e_i) e_j = \delta_{i,k} e_j$.
Les f_{ij} forment une base de $\text{Hom}_A [\text{Hom}_A (M, A), \bar{M}]$, S est un isomorphisme.

2) Définition du slant produit

On prend maintenant pour module M , le module $C_*(\tilde{X})$, et on modi-

fie légèrement la définition de S de la façon suivante : dans la formule

(IV.1) on remplace u par $\alpha(u)$ où α est l'isomorphisme $C_c^*(\tilde{X})$ homogène de degré zéro qui est la multiplication par $(-1)^{p(p+1)/2}$ sur $C_c^p(\tilde{X})$

(La raison de cet artifice va apparaître bientôt).

3) Propriété du slant produit

Soit β (resp. γ) l'isomorphisme de $C_*(\tilde{X})$ (resp. $C_c^*(\tilde{X})$) homogène de degré zéro qui est la multiplication par $(-1)^p$ sur $C_p(\tilde{X})$ (resp. $C_c^p(\tilde{X})$).

On pose $D_* = \text{Hom}_A[C_c^*(\tilde{X}), \overline{C}_*(\tilde{X})]$. D_* est muni d'une structure de complexe de chaînes dont voici la description (cf : Cartan-Eilenberg). :

On pose $D_p = \{f ; f[C_c^q(\tilde{X})] \subset C_{p-q}(\tilde{X}), \forall q \in \mathbb{Z}\}$

Comme $\tilde{X}$ est de dimension finie $D_* = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} D_p$

On prend pour bord δ l'application :

$$f \xrightarrow{\delta} (df - f\partial) \quad \gamma = df\gamma + f\gamma\partial$$

δ est homogène de degré moins un. Les cycles de D_* sont les morphismes de modules différentiels, de $C_c^*(\tilde{X})$ dans $\overline{C}_*(\tilde{X})$. Les bords de D_* sont parmi ces morphismes ceux qui sont homotopes à zéro. Les classes d'homologies de D_* sont donc les classes d'homotopie d'applications de $C_c^*(\tilde{X})$ dans $\overline{C}_*(\tilde{X})$.

Proposition (IV.2)

$S : C_*(\tilde{X}) \otimes_A \overline{C}_*(\tilde{X}) \longrightarrow D_*$ est un isomorphisme de complexe de chaînes.

Démonstration : On sait déjà que c est un isomorphisme de modules différentiels. Soient : $x, y \in C_*(\tilde{X})$ $u \in C_c^*(\tilde{X})$ $f = S(x \otimes_A y)$
 $g = S[d(x \otimes_A y)]$, $d(x \otimes_A y) = dx \otimes_A y + \beta x \otimes_A dy$
 $g(u) = \langle dx, \alpha u \rangle y + \langle \beta x, \alpha u \rangle dy$. Or $\langle dx, \alpha u \rangle = \langle x, \partial \alpha u \rangle =$
 $= \langle x, \alpha \partial \gamma u \rangle$. En effet $\partial \alpha = \alpha \partial \gamma$
 et $\langle \beta x, \alpha u \rangle = \langle x, \gamma \alpha u \rangle = \langle x, \alpha \gamma u \rangle$

On a donc :

$$g(u) = f(\partial \gamma u) + d[f(\gamma u)]$$

$$\text{i.e. } g = \delta f$$

Comme les $x \otimes_A y$ engendrent $C_*(\tilde{X}) \otimes_A \overline{C}_*(\tilde{X})$, S commute bien avec les bords.

V - Le "cap" produit1) Définition du cap produit

$C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(\tilde{X})$ a une structure naturelle de A -module à droite (Produit tensoriel de représentations de π). On a l'isomorphisme canonique :

$$\mathbb{Z}^\circ \otimes_A \overline{[C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(\tilde{X})]} \simeq C_*(\tilde{X}) \otimes_A \overline{C_*(\tilde{X})}$$

Soit Δ une approximation cellulaire de la diagonale de $\tilde{X}$:

$$1 \otimes_A \Delta_* : \mathbb{Z}^\circ \otimes_A \overline{C_*(\tilde{X})} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}^\circ \otimes_A [C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(\tilde{X})]}$$

peut être considérée comme une application

$$C_*^w(X) \longrightarrow C_*(\tilde{X}) \otimes_A \overline{C_*(\tilde{X})}.$$

En composant par S on obtient une application

$$P : C_*^w \longrightarrow D_*.$$

L'application induite sur les homologies, encore notée P ,

$$H_*^w(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(D_*) \text{ ne dépend plus du choix de l'approximation de la diagonale.}$$

Si $x \in H_*^w(X, \mathbb{Z})$ et $y \in H^*(X, A)$ $P(x)(y)$ est le cap produit de x et de y .

2) Autre description de P

Soient : $c \in C_*(\tilde{X})$ $u \in \text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), A]$. On a un accouplement, $\langle c, u \rangle_A$, à valeur dans A . Si on considère u comme un élément de $C_c^*(\tilde{X})$ on a un accouplement, $\langle c, u \rangle_{\mathbb{Z}}$, à valeur dans $\mathbb{Z}$. On a vu la relation (Formule (III.1)) :

$$\langle c, u \rangle_A = \sum_{g \in \pi} \langle c g^{-1}, u \rangle_{\mathbb{Z}} g$$

Soit : $x \in C_*^w(X)$; on relève en $y \in C_*^*(\tilde{X})$. $\Delta_* y = \sum_{i \in I} z_i \otimes_{\mathbb{Z}} t_i$
(I fini).

Si u et v sont deux cochaines de $C_c^*(\tilde{X})$ on a par définition :

$$\begin{aligned} \langle P(x) (\alpha u), v \rangle_A &= \sum_I \langle \langle z_i, u \rangle_A t_i, v \rangle_A = \sum_I \langle t_i, v \rangle_A \overline{\langle z_i, u \rangle_A} = \\ &= \sum_I \left(\sum_{g \in \pi} \langle t_i g^{-1}, v \rangle_{\mathbb{Z}} g \right) \left(\sum_{h \in \pi} \langle z_i h^{-1}, u \rangle_{\mathbb{Z}} w(h) h^{-1} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \langle P(x) (\alpha u), v \rangle_{\mathbb{Z}} &= \sum_I \sum_{g \in \pi} w(g) \langle z_i g^{-1}, u \rangle_{\mathbb{Z}} \langle t_i g^{-1}, v \rangle_{\mathbb{Z}} = \\ &= \sum_I \sum_{g \in \pi} w(g) \langle z_i g^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}} t_i g^{-1}, u \otimes_{\mathbb{Z}} v \rangle_{\mathbb{Z}} = \\ &= \sum_I \sum_{g \in \pi} \langle g(z_i \otimes t_i), u \otimes_{\mathbb{Z}} v \rangle_{\mathbb{Z}} = \sum_{g \in \pi} \langle g \Delta_* y, u \otimes_{\mathbb{Z}} v \rangle_{\mathbb{Z}} = \\ &= \sum_{g \in \pi} \langle \Delta_* (gy), u \otimes_{\mathbb{Z}} v \rangle_{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

$\sum_{g \in \pi} gy$ est un élément de $C_*^{LF}(\tilde{X})$, Il ne dépend pas du choix de y on le note $\text{tr}(x)$ (tr est le transfert : $C_*^w(X) \longrightarrow C_*^{LF}(\tilde{X})$; c'est un isomorphisme de $C_*^w(X)$ sur les chaines de $C_*^{LF}(\tilde{X})$ π -invariantes à gauche).

$$\langle P(x) (\alpha u), v \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \Delta_* [\text{tr}(x)], u \otimes_{\mathbb{Z}} v \rangle_{\mathbb{Z}}$$

On en déduit

$$P(x) (\alpha u) = \text{tr}(x) \cap u \quad (V.1)$$

où $\cap$ est le cap produit ordinaire défini entre $C_*^{LF}(\tilde{X})$ et $C_c^*(\tilde{X})$.

VI - Définition d'un complexe de Poincaré

Remarque : Soient f et g deux cycles homologues de D_n . Si f est une équivalence d'homotopie il en est de même de g .

On peut considérer f (resp. g) comme une équivalence d'homotopie entre les deux complexes de chaînes $C_c^{n-*}(\tilde{X})$ et $\overline{C}_*^*(\tilde{X})$, muni chacun d'une classe d'équivalence privilégiée (voir II), et définir sa torsion $\tau(f)$ (resp. $\tau(g)$). On sait

$$\text{que } \tau(f) = \tau(g).$$

Si $\tau(f)$ est nulle on dira par abus de langage que la classe d'homotopie de f est une équivalence d'homotopie simple (Au lieu de classe d'homotopie d'équivalences d'homotopie simple).

On peut enfin énoncer :

Définition : Un complexe de Poincaré de dimension formelle n est la donnée d'un CW complexe fini et connexe, d'un homomorphisme $w : \pi_1(X) \longrightarrow \{\pm 1\}$, d'une classe $[X]$ dans $H_n^w(X; \mathbb{Z})$, tels $P([X])$ soit une équivalence d'homotopie simple.

VII - Conséquences de la définition

1) Dualités

Soit x un cycle représentant $[X]$, par hypothèse

$P(x) : \text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), A] \longrightarrow \overline{C}_*(\tilde{X})$ est une équivalence d'homotopie.

Soit B un A -module à droite, en tensorisant par B on obtient l'équivalence d'homotopie :

$$B \otimes_A P(x) : B \otimes_A \text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), A] \longrightarrow B \otimes_A \overline{C}_*(\tilde{X})$$

Comme $C_*(\tilde{X})$ est un A -module à droite libre de type fini

$B \otimes_A \text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), A]$ est isomorphe (Canoniquement) à $\text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), B]$.

On en déduit une équivalence d'homotopie :

$$\text{Hom}_A [C_*(\tilde{X}), B] \longrightarrow B \otimes_A \overline{C}_*(\tilde{X})$$

Et un isomorphisme :

$$H^{n-*}(X; B) \longrightarrow H_*^W(X; B) \quad (\text{VII.1})$$

Exemple :

Si dans (VII.1) on prend pour $B, \mathbb{Z}^\pi$, on obtient l'isomorphisme (Voir III, exemple 3) :

$$[X] \cap : H^{n-*}(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*^{LF}(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \quad (\text{VII.2}).$$

D'après (V.2)) $[\tilde{X}] = \text{tr} ([X])$ ($\text{tr} : C_*^W(X) \longrightarrow C_*^{LF}(\tilde{X})$ commute avec les bords on note encore tr l'application induite sur les homologies) et $\cap$ est le cap produit ordinaire entre H_*^{LF} et H^* à valeur dans H_*^{LF} .

2) Unicité de la classe d'orientation

D'abord un peu d'algèbre.

Soit B un A -module à droite ; B^π le sous A -module des éléments π -invariants ; i l'injection :

$$B^\pi \longrightarrow B.$$

$$i \otimes_A \overline{C}_* (\tilde{X}) : B^\pi \otimes_A \overline{C}_* (\tilde{X}) \longrightarrow B \otimes_A \overline{C}_* (\tilde{X})$$

peut être considérée comme une application :

$$B^\pi \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathbb{Z} \otimes_A \overline{C}_* (\tilde{X})] \longrightarrow B \otimes_A \overline{C}_* (\tilde{X}).$$

où le $\mathbb{Z}$ median du terme de gauche est l' A -module à droite $\mathbb{Z}$ trivial.

On en déduit une application :

$$H_* [B^\pi \otimes_{\mathbb{Z}} C_*^W(X)] \longrightarrow H_*^W(X; B)$$

Et en composant avec :

$$B^\pi \otimes_{\mathbb{Z}} H_*^W(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_* [B^\pi \otimes_{\mathbb{Z}} C_*^W(X)]$$

Une application θ :

$$\theta : B^{\pi} \otimes_{\mathbb{Z}} H_*^W(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*^W(X, B)$$

ou aussi (D'après III exemple 6)).

$$\theta : H^0(X; B) \otimes_{\mathbb{Z}} H_*^W(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*^W(X; B)$$

Soit maintenant :

$b \in H^0(X; B) \subset B \otimes_A C_c^0(\tilde{X})$; x un cycle de $C_*^W(X)$, $\bar{x}$ sa classe dans $H_*^W(X; \mathbb{Z})$.

On vérifie que la classe de $[B \otimes_A P(x)](b)$ est $\theta(b \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{x})$. (On a envie d'écrire $\bar{x} \cap b = \theta(b \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{x})$).

On considère la dualité [(VII.1) avec $B = \mathbb{Z}$ trivial]:

$$H^{n-*}(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*^W(X; \mathbb{Z})$$

Et en particulier l'isomorphisme :

$$H^0(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n^W(X; \mathbb{Z})$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow H_n^W(X; \mathbb{Z})$$

D'après ce qui précède l'image du générateur canonique de $H^0(X, \mathbb{Z})$ est $[X]$. $[X]$ est donc un générateur de $H_n^W(X; \mathbb{Z})$. $[X]$ est unique au signe près.

3) Unicité de la première classe de Stiefel-Whitney

Soit w' un homomorphisme $\pi_1(X) \longrightarrow \{\pm 1\}$. L'unicité de " w "

va résulter de la formule suivante :

$$H_n^{w'}(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } w' \neq w \\ \mathbb{Z} & \text{si } w' = w \end{cases} \quad (\text{VII.3})$$

En effet $H_n^{w'}(X, \mathbb{Z}) = H_n(X, \mathbb{Z}^{w'}) = H_n^w(X, \mathbb{Z}^{w+w'})$ (Voir III-exemple 4)).

Par dualité $H_n^w(X, \mathbb{Z}^{w+w'}) \simeq H^0(X; \mathbb{Z}^{w+w'})$. Or si v est un homomorphisme $\pi_1(X) \longrightarrow \{\pm 1\}$

$$H^0(X, \mathbb{Z}^v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } v = 1 \end{cases}$$

(Voir III - exemple 6)).

Autre démonstration : π opère à droite sur $\tilde{X}$: soit h_g l'homéomorphisme de $\tilde{X}$ associé à un élément g de π . h_g est propre, on peut définir $H_*^{LF}(h_g)$. D'après (V.2).

$$H_n^{LF}(h_g)([\tilde{X}]) = w(g)([\tilde{X}]) \quad (\text{VII.4}).$$

D'après (VII.2) $H_n^{LF}(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et $[\tilde{X}]$ en est un générateur. La formule (VII.4) prend la forme :

$$H_n^{LF}(h_g) = w(g) \text{ Id}_{H_n^{LF}(\tilde{X}, \mathbb{Z})} \quad (\text{VII.5})$$

(VII.5) détermine w .

4) Type simple d'homotopie d'un complexe de Poincaré

Soit X un complexe de Poincaré ; w_X sa première classe de Stiefel-Whitney ; x un cycle représentant sa classe d'orientation .

Soit maintenant Y un CW complexe fini et h une équivalence d'homotopie $X \longrightarrow Y$. h se "relève" en une équivalence d'homotopie $\tilde{h}$ π -équivariante : $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ ($\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont les revêtements universels de X et Y ; $\tilde{h}$ est unique si l'on se munit de points-bases).

On pose $w_Y = w_X \cdot \pi_1(h)^{-1}$ et on appelle y l'image de x dans $C_*^{w_Y}(Y)$. On a un carré commutatif d'A-module à gauche :

$$\begin{array}{ccc}
 C_c^*(\tilde{X}) & \xrightarrow{P(x)} & \overline{C}_*(\tilde{X}) \\
 \uparrow & \text{Hom}_A [C_*(\tilde{h}), A] & \downarrow \overline{C}_*(\tilde{h}) \\
 C_c^*(\tilde{X}) & \xrightarrow{P(y)} & \overline{C}_*(\tilde{Y})
 \end{array}$$

(VII.6)

$(P(y))$ est une équivalence d'homotopie, et de plus.

$$\tau[P(y)] = \tau(\overline{C}_*(\tilde{h})) + \tau(\text{Hom}_A [C_*(\tilde{h}), A]) \quad (\text{VII.7})$$

Y est un complexe de Poincaré si le second membre est nul, en particulier si h est une équivalence d'homotopie simple.

5) Réduction de la dimension

Un complexe de Poincaré de dimension ≥ 3 a le type d'homotopie simple d'un complexe de Poincaré dont la dimension coïncide avec la dimension formelle (Voir Appendice I).

VIII - Généralisations de la définition d'un complexe de Poincaré

1) Un complexe de Poincaré est une union finie disjointe de complexes de Poincaré connexes de même dimension formelle. "La" classe d'orientation est la somme des classes d'orientation des composantes connexes.

2) Soient : (Y, X) une paire de CW-complexe finis, Y est supposé connexe ; $\rho : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ le revêtement universel de Y ; $\tilde{X} = \rho^{-1}(X)$ ($\tilde{X}$ n'est pas revêtement universel de X !) ; $\pi = \pi_1(Y)$; $A = \mathbb{Z}[\pi]$.

Y est un complexe de Poincaré connexe de bord X si les conditions suivantes sont vérifiées :

- X est un complexe de Poincaré de dimension formelle n (Non nécessairement connexe).

- Il existe $w : \pi \longrightarrow \{\pm 1\}$ [Induisant les $w_i = \pi_1(X_i) \longrightarrow \{\pm 1\}$ (les X_i sont les composantes connexes de X)] et $[Y] \in H_{n+1}^w(Y, X, \mathbb{Z})$ [Avec $\partial[Y] = [X]$] telles que $[Y]$ induise une équivalence d'homotopie simple :

$$C_c^{n-*+1}(\tilde{Y}) \longrightarrow \overline{C_*}(\tilde{Y}, \tilde{X})$$

Par dualité

$$C_c^{n-*+1}(\tilde{Y}, \tilde{X}) \longrightarrow \overline{C_*}(\tilde{Y})$$

est aussi une équivalence d'homotopie simple.

Remarque : On ne sait si les conditions entre crochets ne sont pas superflues.

Conséquences : Comme dans le cas non relatif on obtient des dualités

$$H^{r+1}(Y, B) \xrightarrow{\sim} H_{n-r}^w(Y, X, B)$$

$$H^{r+1}(Y, X, B) \xrightarrow{\sim} H_{n-r}^w(Y, B)$$

pour tout A-module à droite B .

IX - Exemples

Le théorème suivant donne quantité d'exemples de complexes de Poincaré.

Théorème : Les variétés compactes triangulées sont des complexes de Poincaré.

Les variétés à bord compactes triangulées et leur bord donnent de même des exemples de complexes de Poincaré à bord.

Une démonstration du théorème sera donnée dans le chapitre IV.

On donnera plus tard des exemples de complexes de Poincaré qui n'ont pas le type d'homotopie simple d'une variété .

APPENDICE -

Les notations non précisées sont celles déjà introduites ci-dessus .

I - Réattachement de cellules

Soient : X un CW complexe fini de dimension $p \geq 3$; un entier n , $3 \leq n \leq p$; $u = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ une A -base privilégiée de $C_n(\tilde{X})$ et $u' = \{c'_1, c'_2, \dots, c'_r\}$ une A -base quelconque ; P la matrice de passage de u à u' .

On peut considérer c'_k comme un élément de $\pi_n(X^n, X^{n-1})$. Soit $F_k : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X^n, X^{n-1})$ une application représentant c'_k . On pose $f_k = F_k|_{S^{n-1}}$. Soient (D, S) la réunion disjointe de r copies de (D^n, S^{n-1}) et f la réunion disjointe des applications f_k .

On considère le CW complexe $X'^n = X^{n-1} \cup_f D$.

On a une application canonique :

$$h^n : X'^n \longrightarrow X^n$$

Proposition : L'application h^n est une équivalence d'homotopie. Sa torsion est $(-1)^{n+1} \tau(P)$.

Démonstration :

h^n induit un isomorphisme $\pi_1(X'^n) \longrightarrow \pi_1(X^n)$. La matrice de $C_n[(\tilde{h}^n)]$ (Avec des A-bases privilégiées) est P . $C_m[(\tilde{X}'^n)]$ et $C_m[(\tilde{X}^n)]$ pour $m < n$ sont identifiés.

h^n est une équivalence d'homotopie dont la torsion est

$$\sum_{m=0}^n (-1)^{m+1} \tau [C_m[(\tilde{h}^n)]] = (-1)^{n+1} \tau (P).$$

Soient : s le nombre de cellules de X de dimension $n+1$; T la réunion disjointe de s copies de S^n , $g : T \longrightarrow X^n$ la réunion disjointe des applications d'attache de ces cellules. On peut écrire :

$$X^{n+1} = X^n \cup_g T.$$

Soit maintenant $k^n : X^n \longrightarrow X'^n$ un inverse homotopique de h^n . On définit :

$$X'^{n+1} = X'^n \cup_{k^n \circ g} T.$$

On a une application canonique $k^{n+1} : X^{n+1} \longrightarrow X'^{n+1}$ qui prolonge k^n . k^{n+1} est une équivalence d'homotopie et $\tau(k^{n+1}) = \tau(k^n)$.

On obtient ainsi par récurrence un CW-complexe X' de même dimension que X et une équivalence d'homotopie $k : X \longrightarrow X'$ de torsion $(-1)^n \tau(P)$.

On dira que X' est obtenu à partir de X en réattachant les n -cellules suivant la base $\mathcal{U}'$.

II - Réduction d'un CW-complexe fini à un CW-complexe fini de dimension inférieure.

Lemme : Si X est un CW-complexe fini de dimension $n+1$ ($n \geq 3$) tel que : $H^{n+1}(X; A) = 0$, il existe un CW-complexe fini de dimension n ayant le même type d'homotopie simple que X .

Démonstration :

Pour alléger l'écriture on notera C_* le complexe de chaînes cellulaires de $\tilde{X}$.

Soit F un A -module libre de rang fini. L'hypothèse $H^{n+1}(X, A) = 0$ entraîne $H^{n+1}(X, F) = 0$.

On prend pour F , C_{n+1} . Le cobord :

$\text{Hom}_A [C_n, C_{n+1}] \longrightarrow \text{Hom}_A [C_{n+1}, C_{n+1}]$ est surjectif. En particulier il existe $s \in \text{Hom}_A [C_n, C_{n+1}]$ telle que $s \circ d_{n+1} = \text{id}_{C_{n+1}}$. Il en résulte que B_n , image de d_{n+1} , est facteur direct dans C_n :

$$C_n = B_n \oplus C'_n$$

d_{n+1} est un isomorphisme de C_{n+1} sur B_n . On appelle respectivement r_n et r_{n+1} les rangs de C_n et C_{n+1} .

Soit Z le CW-complexe obtenu en ajoutant trivialement r cellules de dimension n à X , avec $r = r_{n+1}$ (Z est une expansion formelle de X).

$$C_n(\tilde{Z}) \simeq C_n \oplus A^r$$

On obtient une A-base privilégiée de $C_n(\tilde{Z})$, u_n , en juxtaposant une A-base privilégiée de C_n , u_n , et la base canonique de A^r .

On considère la décomposition :

$$C_n \oplus A^{r_{n+1}} = B_n \oplus (C'_n \oplus A^{r_{n+1}}).$$

Soient : u_{n+1} une A-base privilégiée de C_{n+1} ; $u_n'^1$ une base de $B_n \oplus (C'_n \oplus A^{r_{n+1}})$ qui complète la base $d_{n+1}(u_{n+1})$ de B_n (Une telle base existe parce que $C'_n \oplus A^{r_{n+1}}$, qui est isomorphe à $C_n = C'_n \oplus B_n$, est libre) .

On considère maintenant la décomposition :

$$C_n(\tilde{Z}) = C_n \oplus A^{r_{n+1}} \oplus A^{r_{n+r_{n+1}}}$$

Soient : e^1 la base canonique de $A^{r_{n+1}}$; e^2 la base canonique de $A^{r_{n+r_{n+1}}}$; P la matrice de passage de $\{u_n, e^1\}$ à $u_n'^1$; $u_n'^2$ la base de $A^{r_{n+r_{n+1}}}$ telle que la matrice de passage de e^2 à $u_n'^2$ soit P^{-1} ; $u_n' = \{u_n'^1, u_n'^2\}$.

La matrice de passage de u_n à u_n' est

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array} \right)$$

Soit Z' le CW-complexe obtenu en réattachant les cellules de dimension n de Z suivant la base $\mathcal{U}'_n$. Z' a le type d'homotopie simple de Z puisque $\tau(Q) = 0$.

Soit enfin Y le sous-complexe de Z' , de dimension n , obtenu en enlevant à Z'^n les cellules correspondant à B_n . Y a le type d'homotopie simple de Z' ("Contraction formelle" selon les uns, "Effondrement" selon les autres) et donc de X .

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire : Si X est un CW-complexe fini tel que :

$$H^k(X; A) = 0 \text{ pour } k > n \geq 3$$

il existe un CW-complexe fini de dimension n ayant le même type d'homotopie simple que X .

Complexes intervenant dans la démonstration du lemme de réduction

$C_* (\tilde{X})$	$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2} \longrightarrow \dots$
$C_* (\tilde{Z})$	$C_{n+1} \longrightarrow C_n \longrightarrow C_{n-1} \longrightarrow C_{n-2} \longrightarrow \dots$ $\oplus \qquad \oplus$ $A^r \xrightarrow{\text{id}} A^r$
$C_* (\tilde{Z}')$	$C_{m+1} \xrightarrow{\text{Matrice Identité}} B_n$ $\oplus$ $\begin{pmatrix} C'_n \\ \oplus \\ A^r \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C_{n-1} \\ \oplus \\ A^r \end{pmatrix} \longrightarrow C_{n-2} \longrightarrow \dots$
$C_* (\tilde{Y})$	$\begin{pmatrix} C'_n \\ \oplus \\ A^r \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} C_{n-1} \\ \oplus \\ A^r \end{pmatrix} \longrightarrow C_{m-2} \longrightarrow \dots$

CHAPITRE 2 : COMPLEXES DE POINCARÉ II

Pour faire des chirurgies sur les complexes de Poincaré, on aura besoin, d'une part de théorèmes géométriques (recollement et découpage), d'autre part de la théorie des fibrés de Spivak. Les théorèmes de recollement et de découpage ne semblent pas exister dans la littérature, c'est pourquoi on va en donner une démonstration assez complète. En ce qui concerne la théorie de Spivak, on se contentera le plus souvent d'énoncer les résultats, en renvoyant à la littérature existante pour les démonstrations.

§ 1 : Recollement et découpage des complexes de Poincaré.

Soient (Y, X) et (Y', X) deux complexes de Poincaré de dimension n de même bord X . On veut munir $Z = Y \cup_X Y'$ d'une structure naturelle de complexe de Poincaré. On suppose Y et Y' connexes, et soient $X_0, \dots, X_p$ les composantes connexes de X ; les structures de Y et Y' induisent sur chaque X_i des structures de complexe de Poincaré de dimension $(n-1)$ qui ne diffèrent que par le choix de la classe d'orientation : $\partial[Y] = \epsilon_i \partial[Y']$ sur la composante X_i .

Soient $x_i \in X_i$, on considère x_0 comme point de base de X, Y, Y' et Z . Soient γ_i et γ'_i des chemins joignant x_0 à x_i dans Y et Y' respectivement. Les conditions $\omega(X_i) = \epsilon_i \epsilon_0$ définissent un homomorphisme ω de $\tilde{H}_0(X)$ dans $\{\pm 1\}$. On va d'abord définir la classe de Stiefel-Whitney de Z comme un homomorphisme de $H_1(Z)$ dans $\{\pm 1\}$. La suite

$$H_1(Y) \oplus H_1(Y') \longrightarrow H_1(Z) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée par le choix des chemins γ_i et γ'_i . Les homomorphismes ω et $w_Y \times w_{Y'}$ définissent alors $w_Z : H_1(Z) \longrightarrow \{\pm 1\}$

car $(w_Y \times w_{Y'}) (i_* x, -i'_* x) = w_X(x) w_X(-x) = 1$ (où $i : X \longrightarrow Y$ et $i' : X \longrightarrow Y'$). De plus si $j : Y \longrightarrow Z$ et $j' : Y' \longrightarrow Z$, on a $w_Z \cdot j_* = w_Y$ et $w_Z \cdot j'_* = w_{Y'}$.

Pour tout C.W. complexe fini connexe muni d'un homomorphisme $w_K : \pi_1(K, k_0) \longrightarrow \pm 1$, on pose $C_*^W(K) = \mathbb{Z} \otimes_{A_K} \overline{C_*(\tilde{K})}$, où $A_K = \mathbb{Z}[\pi_1(K, k_0)]$; c'est un complexe fini de $\mathbb{Z}$ -modules libres. Si K n'est pas connexe, on pose $C_*^W(K) = \bigoplus_i C_*^W(K_i)$. Si $f : (K, k_0) \longrightarrow (L, \ell_0)$ est une application continue, si K est connexe et si $w_K = w_L \cdot f_*$, f se relève en $\tilde{f} : (\tilde{K}, \tilde{k}_0) \longrightarrow (\tilde{L}, \tilde{\ell}_0)$ et $\tilde{f}_* : C_*(\tilde{K}) \longrightarrow C_*(\tilde{L})$ passe au quotient en $f_* : C_*^W(K) \longrightarrow C_*^W(L)$; mais si K n'est pas connexe il faut préciser les relèvements utilisés sur chaque composante. Soient X_i, Y, Y' et Z les revêtements universels de nos divers espaces, et $\tilde{j} : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \longrightarrow (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ et $\tilde{j}' : (\tilde{Y}', \tilde{y}'_0) \longrightarrow (\tilde{Z}, \tilde{z}_0)$ les injections naturelles. On définit $\tilde{i} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ par $\tilde{i}(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ et $\tilde{i}(\tilde{x}_i) =$ extrémité du relevé du chemin γ_i à partir de $\tilde{y}_0$; de même pour $\tilde{i}' : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}'$. Les applications $\tilde{j}, \tilde{i}$ et $\tilde{j}', \tilde{i}'$ coïncident sur X_0 mais peut être pas sur les autres composantes; il est clair que les deux morphismes induits $C_*^W(X_i) \longrightarrow C_*^W(Z)$ diffèrent par $\omega(X_i)$. On obtient cependant une suite exacte

$$0 \longrightarrow C_*^W(X) \xrightarrow{i_*, -\hat{i}'_*} C_*^W(Y) \oplus C_*^W(Y') \xrightarrow{j_* + j'_*} C_*^W(Z) \longrightarrow 0$$

en prenant $\hat{i}'_* = \omega(X_i) i'_*$ sur la composante X_i . Comme Y et Y' sont des complexes de Poincaré de dimension n , de bord non vide

$H_n^W(Y, \mathbb{Z}) = H_n^W(Y', \mathbb{Z}) = 0$, et la suite précédente donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n^W(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}^W(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}^W(Y, \mathbb{Z}) \oplus H_{n-1}^W(Y', \mathbb{Z})$$

Or $i_* : H_{n-1}^W(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}^W(Y, \mathbb{Z})$ et $i'_* : H_{n-1}^W(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}^W(Y', \mathbb{Z})$

ont même noyau engendré par $\partial[Y]$; donc $H_n^W(Z, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Soit $[Z]$ un générateur de $H_n^W(Z, \mathbb{Z})$; on vérifie que, au signe près, $[Z]$ donne $[Y]$ dans $H_n^W(Z, Y', \mathbb{Z}) = H_n^W(Y, X, \mathbb{Z})$, et $[Y']$ dans $H_n^W(Z, Y, \mathbb{Z}) = H_n^W(Y', X, \mathbb{Z})$

Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \text{Hom}_{A_Y}(C_*(\tilde{Y}, \bar{X}), A_Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A_Z}(C_*(\tilde{Z}), A_Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_{A_{Y'}}(C_*(\tilde{Y}'), A_Z) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \cap[Y] & & \downarrow \cap[Z] & & \downarrow \cap[Y'] & \\
 0 \longrightarrow & A_Z \otimes_{A_Y} \overline{C_*(\tilde{Y})} & \longrightarrow & \overline{C_*(\tilde{Z})} & \longrightarrow & A_Z \otimes_{A_{Y'}} \overline{C_*(\tilde{Y}', \bar{X})} & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(où $\bar{X}$ et $\bar{X}'$ sont les relèvements de X dans $\tilde{Y}$ et $\tilde{Y}'$ respectivement) est homotopiquement commutatif au signe près. En prenant l'homologie, on voit que $\cap[Z]$ est une équivalence d'homotopie (lemme des cinq), puis comme la torsion des deux bouts est nulle la torsion de $\cap[Z]$ est nulle aussi.

Ceci termine la construction d'une structure de complexe de Poincaré sur Z . La problème inverse est de savoir si le complémentaire d'un "sous-complexe de Poincaré de codimension zéro" est un complexe de Poincaré ; cela nécessite des conditions sur les π_1 . La condition suffisante du lemme suivant n'est pas des plus raffinées, mais elle suffit à nos besoins.

Lemme de découpage. Soient Y et Y' deux C.W. complexes finis, connexes, et soit X un sous-complexe de Y et Y' ; on pose $Y \cup_{\substack{X \\}} Y' = Z$. Si Z est un complexe de Poincaré de dimension n , si Y est un complexe de Poincaré de bord X , si l'image de $[Z]$ dans $H_n^W(Y, X, \mathbb{Z})$ est $[Y]$, et si l'inclusion $Y' \longrightarrow Z$ induit un isomorphisme de $\pi_1(Y')$ sur

$\pi_1(Z)$, alors Y' est un complexe de Poincaré de dimension n , de bord X et Z est équivalent au recollement de Y et Y' le long de X .

Démonstration : Comme $j'_* : \pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(Z)$ est un isomorphisme, X est connexe. Posons $w_{Y'} = w_Z \cdot j'_*$. On calcule $H_n^W(Y', X, Z)$ grâce à la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = H_n^W(Y) & \longrightarrow & H_n^W(Z) & \longrightarrow & H_n^W(Z, Y) = H_n^W(Y', X) & \longrightarrow & H_{n-1}^W(Y) \\
 & & & & \searrow & & \nearrow i_* \\
 & & & & & & H_{n-1}^W(X)
 \end{array}$$

et en remarquant que i_* est nul car X est connexe, donc que

$\partial : H_n^W(Y, X) \longrightarrow H_{n-1}^W(X)$ est un isomorphisme. De même on montre que

$\partial : H_n^W(Y', X) \longrightarrow H_{n-1}^W(X)$ est un isomorphisme en montrant que

$i'_* : H_{n-1}^W(X) \longrightarrow H_{n-1}^W(Y')$ est nul, ce qui résulte du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n^W(Z) & \xrightarrow{\approx} & H_n^W(Y, X) & \longrightarrow & H_{n-1}^W(Y') \\
 & & \searrow \partial \approx & & \nearrow i'_* \\
 & & & & H_{n-1}^W(X)
 \end{array}$$

Les différentes classes d'orientation s'envoyant bien là où il faut, on termine la démonstration en examinant le même diagramme que dans l'étude du recollement, tout en remarquant que $A_Z = A_{Y'}$, d'après l'hypothèse sur les π_1 .

§ 2 : Recollement et découpages relatifs :

On considère un complexe simplicial C et deux sous-complexes A et B tels que $A \cup B = C$; on pose $A \cap B = Z$. Soit dC un sous-complexe de C , on pose $dZ = Z \cap dC$, $A \cap dC = A'$ et $B \cap dC = B'$. On suppose que (Z, dZ) , (A', dZ) et (B', dZ) sont des complexes de Poincaré de dimension $n-1$ (donc $dA = A' \cup Z$ et $dB = B' \cup Z$ sont des complexes de Poincaré sans bord de dimension $n-1$). Alors les résultats du § 1 se généralisent de la façon suivante :

Théorème de recollement : Si (A, dA) , et (B, dB) sont des complexes de Poincaré de dimension n , il existe une structure naturelle de complexe de Poincaré sur (C, dC) telle que l'image de $[C]$ dans $H_n^W(C, B \cup dC, \mathbb{Z}) = H_n^W(A, dA, \mathbb{Z})$ soit $[A]$, et que l'image de $[C]$ dans $H_n^W(C, A \cup dC, \mathbb{Z}) = H_n^W(B, dB, \mathbb{Z})$ soit $[B]$.

Théorème de découpage : Si (A, dA) et (C, dC) sont des complexes de Poincaré de dimension n , si l'image de $[C]$ dans $H_n^W(A, dA, \mathbb{Z})$ est $[A]$, et si l'inclusion de B dans C induit un isomorphisme de $\pi_1(B)$ sur $\pi_1(C)$, alors (B, dB) est un complexe de Poincaré de dimension n , et C est équivalent au recollement de A et B le long de Z .

Les démonstrations de ces théorèmes sont analogues à celles du § 1 ; on remarquera cependant qu'elles utilisent non pas la dualité entre la cohomologie de (A, dA) et l'homologie de A , mais la dualité entre la cohomologie de (A, Z) et l'homologie de (A, A') donnée par le

Théorème de dualité partielle : Soit X un complexe de Poincaré de dimension n , dont le bord est obtenu en recollant les complexes de Poincaré Y_1 et Y_2 (de dimension $n-1$) le long de leur bord dY ; alors

$$\cap[Y] : C_c^{n-*}(\tilde{X}, \tilde{Y}_1) \longrightarrow C_*(\tilde{X}, \tilde{Y}_2)$$

(où $\tilde{Y}_1$ et $\tilde{Y}_2$ désignent les relèvements de Y_1 et Y_2 dans le revêtement universel $\tilde{Y}$ de Y) est une équivalence d'homotopie simple.

Démonstration du théorème de dualité partielle : Soit Z le couple obtenu en recollant X à $Y_1 \times I$, par identification de Y_1 à $Y_1 \times \{0\}$. Posons $Y_2 \cup Y_1 \times \{1\} \cup dY \times I = dZ$. Soit ξ une n -chaîne de $C_n^W(X)$ dont l'image dans $C_n^W(X, dX)$ est la classe fondamentale de X . Posons $\hat{\xi} = \xi + ((d\xi)|_{Y_1}) \otimes [I]$ (où $[I]$ est la classe fondamentale de la variété I) ; c'est une chaîne de $C_n^W(Z)$. $d\hat{\xi} = d\xi + d((d\xi)|_{Y_1}) \otimes [I] + ((d\xi)|_{Y_1}) \otimes \{1\} - ((d\xi)|_{Y_1}) \otimes \{0\}$. (ou $\{0\}$ et $\{1\}$ sont les deux 0-chaînes de I représentées par les points 0 et 1), donc $d\hat{\xi} \in C_{n-1}^W(dZ)$. On a le diagramme commutatif ($\tilde{Z}$ désignant le revêtement universel de Z , et $\tilde{Y}_1, \tilde{X}$, etc ... les relèvements de Y_1, X , etc... dans $\tilde{Z}$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_c^{n-*}(\tilde{Z}, \tilde{X}) & & & & \\
 & & \parallel & & & & \\
 \longrightarrow & C_c^{n-*}(\tilde{Y}_1 \times I, \tilde{Y}_1 \times \{0\}) & \longrightarrow & C_c^{n-*}(Z) & \longrightarrow & C_c^{n-*}(\tilde{X}) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \cap \hat{\xi}|_{Y_1 \times I} & & \downarrow \cap \hat{\xi} & & \downarrow \cap \hat{\xi}|_X (= \cap \xi) & \\
 \longrightarrow & \overline{C_*}(\tilde{Y}_1 \times I, \tilde{Y}_1 \times \{1\} \cup d\tilde{Y}_1 \times I) & \longrightarrow & \overline{C_*}(\tilde{Z}, d\tilde{Z}) & \longrightarrow & \overline{C_*}(\tilde{X}, d\tilde{X}) & \longrightarrow 0 \\
 & & & & & \parallel & \\
 & & & & & \overline{C_*}(\tilde{Z}, d\tilde{Z} \cup \tilde{Y}_1 \times I) &
 \end{array}$$

où $\cap \hat{\xi}|_X$ est une équivalence simple (c'est la dualité de Poincaré de X)
 et $\cap \hat{\xi}|_{Y_1 \times I}$ est une équivalence simple (c'est une forme de la dualité
 produit de Y_1 et I) ; donc $\cap \hat{\xi}$ est une équivalence simple
 (autrement dit (Z, dZ) est un complexe de Poincaré, ce qu'on savait
 déjà puisque $(Z, dZ) \approx (X, dX)$; mais on a précisé sa classe fondamentale
 $\hat{\xi}$) .

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_c^{n-*}(\tilde{Z}, \tilde{Y}_1 \times I) & & & & \\
 & & \parallel & & & & \\
 0 & \longrightarrow & C_c^{n-*}(\tilde{X}, \tilde{Y}_1) & \longrightarrow & C_c^{n-*}(\tilde{Z}) & \longrightarrow & C_c^{n-*}(\tilde{Y}_1 \times I) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cap \hat{\xi}|_X (= \cap \hat{\xi}) & & \downarrow \cap \hat{\xi} & & \downarrow \cap \hat{\xi}|_{Y_1 \times I} \\
 0 & \longrightarrow & C_*(\tilde{X}, \tilde{Y}_2) & \longrightarrow & C_*(\tilde{Z}, d\tilde{Z}) & \longrightarrow & C_*(\tilde{Y}_1 \times I, d(\tilde{Y}_1 \times I)) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & C_*(\tilde{Z}, \tilde{X} \cup d\tilde{Z})
 \end{array}$$

$\cap \hat{\xi}|_{Y_1 \times I}$ est une équivalence simple (c'est l'une des formes de la dualité
 produit de Y_1 par I), et $\cap \hat{\xi}$ est une équivalence simple (on vient
 de le démontrer) ; donc $\cap \hat{\xi}$ est aussi une équivalence simple, ce
 qui démontre le théorème.

§ 3 : Le fibré de Spivak :

1. On renvoie à M. Spivak "Spaces satisfying Poincaré duality" Topology 6
 (1967) pour les propriétés des fibrés homologiques. Rappelons que
 $f : X \longrightarrow Y$ a "le type d'homotopie d'une fibration sphérique" s'il y a

un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 \alpha \uparrow & & \nearrow p \\
 Z & &
 \end{array}$$

où α est une équivalence d'homotopie et p une fibration de Hurewicz à fibre sphérique

Si $E_0 \xrightarrow{p_0} X$ est un fibré homotopique en $k-1$ sphères, on peut le plonger dans un fibré homotopique en k -boules :

$$C(p_0) \longrightarrow X \quad \text{où } C(p_0) \text{ est le mapping-cylindre de } p_0.$$

On note $M(p_0)$ le cône de p_0 . C'est l'espace de Thom du fibré.

Son homologie est celle de $(C(p_0), E_0)$.

2. Le théorème de Spivak permet d'exhiber des fibrés homotopiques en sphères :

Théorème : Soit (X, dX) un p-complexe de Poincaré, $X' \cup X''$ un découpage de dX . On se donne une équivalence d'homotopie :

$$(X, X') \xrightarrow{f} (Y, dY) \quad \text{où } Y \text{ est un } n\text{-complexe}.$$

Si $p-n \geq 3$ et si X, X'' sont connexes, avec $\pi_1(X'') \approx \pi_1(X)$, $X'' \subset X$ a le type d'homotopie d'une filtration en $p-n-1$ sphères.

La démonstration se fait en trois temps :

1er temps : Lemme homologique : Soit $((D, S) \longrightarrow (F, dF) \longrightarrow X$ une paire de fibrés de Serre avec :

- 1) $\pi_i(D) = 0$ pour tout i .
 - 2) S est 1-connexe.
 - 3) X est 1-connexe.
 - 4) il existe $k \geq 3$ et $g \in H^k(F, dF)$ tels que pour tout i : $\cup g : H^i(F) \longrightarrow H^{i+k}(F, dF)$ soit un isomorphisme.
- Alors S est une $k-1$ -sphère de cohomologie.

Il suffit de montrer que $H^j(D, S) = 0$ si $2 \leq j \neq k$ et $H^k(D, S) \simeq \mathbb{Z}$.

Comme X est simplement connexe, la suite spectrale du fibré commence par $E_2^{p,q} = H^p(X, H^q(D, S))$. On a $H^j(D, S) \simeq E_2^{0,j}$.

a) Soit $2 \leq j \leq k$. Supposons que $H^i(D, S) = 0$ si $i < j$. Alors $E_r^{p,q} = 0$ si $p < 0$ ou $q < j$.

L'examen des différentielles de $E_r^{p,q}$ montre alors que :

$$E_2^{0,j} = E_3^{0,j} = \dots = E_\infty^{0,j}.$$

Mais $E_\infty^{p,j-p} = 0$ si $p \neq 0$. Donc $E_\infty^{0,j} \simeq H^j(F, dF)$.

Donc $H^j(D, S) = 0$ si $j < k$ et $\mathbb{Z}$ si $j = k$. ($H^k(F, dF) \approx H_0(F)$).

b) Soit $j > k$ tel que $H^i(D, S) = 0$ pour $k < i < j$.

On montre comme ci-dessus que :

$$E_2^{0,j} = E_{j-k+1}^{0,j}, \quad E_{j-k+2}^{0,j} = \text{Ker}[E_{j-k+1}^{0,j} \longrightarrow E_{j-k+1}^{j-k+1,k}] = E_\infty^{0,j}.$$

Pour tout p , $E_\infty^{p,0} = \dots = E_\infty^{p-k+1,k-1} = 0$ on a donc un morphisme $\beta : E_\infty^{p-k,k} \longrightarrow H^p(F, dF)$ et β est injectif. On voit aussi qu'il y a un morphisme surjectif :

$$\alpha : E_2^{q,k} \longrightarrow E_\infty^{q,k} \text{ pour chaque entier } q.$$

D'où un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 E_2^{p-k,k} & = & H^{p-k}(X, H^k(D, S)) & \approx & H^{p-k}(X) \xrightarrow[p^*]{\approx} H^{p-k}(F) \\
 \downarrow \alpha & & & & \searrow \approx \cup_g \\
 0 \longrightarrow E_\infty^{p-k,k} & \xrightarrow{\beta} & H^p(F, dF) & & \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

Il résulte des propriétés multiplicatives de la suite spectrale que ce diagramme est commutatif. Donc β et α sont des isomorphismes. Pour $p = j$, la surjectivité de β entraîne que $E_\infty^{j-l, l} = 0$ si $l > k$. Donc $E_\infty^{0, j} = 0$.

Pour $p = j+1$, l'injectivité de α entraîne que $E_{j+1-k}^{j+1-k, k} \approx E_{j+2-k}^{j+1-k, k}$, donc que la flèche $E_{j+1-k}^{0, j} \longrightarrow E_{j+1-k}^{j-k+1, k}$ est nulle. D'où $E_2^{0, j} = E_{j-k+1}^{0, j} = E_{j-k+2}^{0, j} = E_\infty^{0, j} = 0$.

2ème temps : Prenons une résolution fibrée de $f : (X, X'') \longrightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccc}
 (E, dE) & \xleftarrow[\approx]{\alpha} & (X, X'') \\
 \downarrow p & \nearrow f & \\
 Y & &
 \end{array}$$

à fibre (D, S) .

Comme p est une équivalence d'homotopie, $\pi_i(D) = 0$ pour tout i .

Comme $\pi_1(X'') \xrightarrow{\approx} \pi_1(X)$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi_2(X, X'') &= \pi_2(X, X'') = H_2(X, X''; A) \text{ où } A = \mathbb{Z}(\pi_1(X)) \\
&= H^{p-2}(X, X'; A) \quad (\text{dualité "partielle"}) \\
&= H^{p-2}(U, dY; A) = H_{n-p+2}(Y, A) = 0.
\end{aligned}$$

Donc (E, dE) est 2-connexe. Les suites d'homotopie des fibrés

$S \longrightarrow dE \longrightarrow Y$ et $D \longrightarrow E \longrightarrow Y$, avec le lemme des 5, montrent que S est 1-connexe. Comme Y, E, dE et X'' ont même π_1 , on a :

$$\begin{array}{ccc}
(\tilde{E}, d\tilde{E}) & \xleftarrow{\hat{\alpha}} & (\tilde{X}, \tilde{X}'') \\
\downarrow \tilde{p} & \searrow \tilde{f} & \\
\tilde{Y} & &
\end{array}$$

et $\tilde{p}$ est encore une fibration de fibre (D, S) .

On va lui appliquer le lemme homologique. Les conditions 1) à 3) sont vérifiées. Posons $k = p - n$. Si $[X]$ et $[Y]$ sont les classes fondamentales de X et Y , on a :

$$H^0(Y) \xrightarrow[\sim[Y]]{\sim} H_n(Y, dY; A) \xleftarrow[f_*]{\sim} H_n(X, X'; A) \xleftarrow[\sim[X]]{\sim} H^{p-n}(X, X''; A).$$

Soit $g \in H^{p-n}(X, X''; A)$ tel que : $f_*(g \cap [X]) = 1 \cap [Y]$.

Pour chaque i le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
H^i(X, A) & \xrightarrow{\cup g} & H^{p-n+i}(X, X''; A) \\
\uparrow \tilde{f}_* & & \downarrow \sim [X] \\
H^i(Y, A) & \xrightarrow[\sim[Y]]{\sim} H_{n-i}(Y, dY; A) & \xleftarrow[f_*]{\sim} H_{n-i}(X, X'; A)
\end{array}$$

est commutatif. Donc g est un isomorphisme et 4) est vérifié.

3ème temps. Par suite, S est 1-connexe et a la cohomologie de la sphère S^{k-1} . Comme $C^*(S)$ est sans torsion (dual d'un groupe libre), le théorème des coefficients universels s'applique est :

$$H^i(S; G) = 0 \quad \text{si } i \neq 1.$$

$$= G \quad \text{si } i = k-1.$$

Comme $H^i(S; H_i(S)) \simeq \text{Hom}(H_i(S); H_i(S)) \oplus \text{Ext}(H_{i-1}(S); H_i(S))$, on a, pour $i \neq k-1$: $\text{Hom}(H_i(S); H_i(S)) = 0$ et donc $H_i(S) = 0$. Et, pour tout groupe abélien G :

$$\text{Ext}(H_{k-1}(S); G) = 0.$$

Donc $H_{k-1}(S)$ est projectif donc libre et comme $\text{Hom}(H_{k-1}(S); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ on a $H_{k-1}(S) = \mathbb{Z}$. Il résulte alors du théorème de Whitehead que S a le type d'homotopie (faible) de S^{k-1} . (Si $\alpha : S^{k-1} \longrightarrow S$ représente le générateur de $\pi_{k-1}(S) \simeq H_{k-1}(S)$, α est une équivalence d'homologie).

3. Le théorème de Spivak admet une réciproque (on pourrait présenter les choses dans l'autre sens) :

Soit $((D, S) \longrightarrow (Y, dY) \longrightarrow X$ un fibré homotopique en k -boules au-dessus d'un n -complexe de Poincaré, noté ξ . Soit Γ le système local d'entiers $H_k(D, S)$ sur X et $U \in H^k(Y, dY; p^*\Gamma)$ une classe d'orientation de ξ . On a un isomorphisme :

$$U \cap : H_{n+k}(Y, dY; p^*G) \longrightarrow H_n(X; G \otimes \Gamma) \quad \text{pour tout système local } G.$$

Soit G un système local tel que $G \otimes \Gamma$ soit le système défini par la classe de Stiefel-Whitney W_X et W_Y la classe de S.W. définie sur Y par p^*G . On appelle classe fondamentale de ξ l'élément

$[\xi] \in H_{n+k}^{W_Y}(Y, dY)$ tel que : $U \cap [\xi] = [X] \in H_n^{W_X}(X)$. Il est clair que (Y, dY) muni de W_Y et de $[\xi]$ vérifie toutes les propriétés homologiques de dualité d'un complexe de Poincaré. Y est dit orientable si W_Y est la classe de S.W. triviale.

Un fibré de Spivak sur un n -complexe X est un fibré homotopique en $k-1$ sphères, ξ , dont l'espace total est orientable et dont la classe fondamentale est dans l'image de l'homomorphisme de Hurewicz :

$$h : \pi_{n+k}(M(\xi)) \longrightarrow H_{n+k}(M(\xi))$$

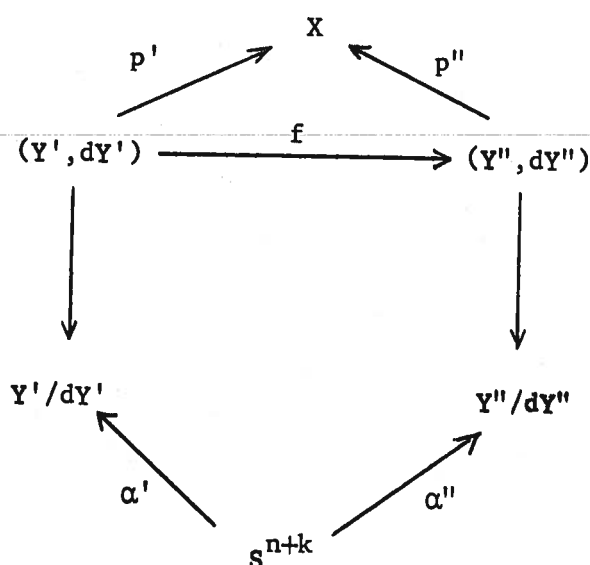
Existence. X a le type d'homotopie simple d'un complexe simplicial de dimension sup. $(n, 3)$. Donc il se plonge dans $\mathbb{R}^{n+k}$ pour k grand. Soit (Y, dY) un voisinage régulier du plongement, c'est une variété semi-linéaire, donc un $n+k$ -complexe de Poincaré, orientable car de codim. 0 dans $\mathbb{R}^{n+k}$. $\pi_1(dY) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme pour k assez grand par position générale. Donc $dY \subset Y$ a le type d'homotopie d'une fibration sphérique. Enfin, si ξ désigne cette fibration,

$$M(\xi) \approx Y/dY \approx \begin{array}{c} \mathbb{R}^{n+k} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbb{R}^{n+k} \quad Y \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} S^{n+k} \\ \swarrow \quad \searrow \\ S^{n+k} \quad Y \end{array}$$

et il est facile de voir que $h(\alpha) = \pm [\xi]$ où α est la classe de $S^{n+k} \longrightarrow M(\xi)$ (surjection canonique).

Unicité. Soient (Y', dY') et (Y'', dY'') deux fibrés de Spivak de même dimension, α' et α'' deux "relèvements" de $[\xi']$ et $[\xi'']$ aux π_{n+k} correspondants.

Il existe alors une équivalence d'homotopie f rendant le diagramme suivant commutatif à homotopie près :



Des démonstrations basées sur la dualité de Whitehead se trouvent dans Spivak ou Wall (On Poincaré complex Ann of Math 86).

Une démonstration naturelle par chirurgie sera (peut-être) donnée plus loin. De toutes façons, l'unicité n'est utilisée que rarement dans la suite.

On renvoie enfin à "la littérature" pour tout ce qui concerne la stabilisation du fibré de Spivak. Enfin ajoutons qu'un formalisme analogue peut-être développé pour les variétés à bord.

CHAPITRE III. : QUELQUES THEOREMES DE PLONGEMENT.

§ 0. Notations.

Dans ce qui suit on considérera des variétés à coins différentiables ou semi-linéaires. on écrira $(V, V_1, \dots, V_k)$ $V_1, \dots, V_k$ seront des strates de dimension maximum de dV . on écrira

$$f : (V, V_1, \dots, V_k) \longrightarrow (W, W_1, \dots, W_k)$$

f sera une application de V dans W , qui envoie $V \cup V_i$ dans $W \cup W_i$, V_i dans W_i pour tout i , et, pour tout $(i_1, \dots, i_p)$, $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_p}$ dans $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p}$. Quand on dira que f est une immersion (resp. un plongement), on sous-entendra que, pour tout i , $f|_{V_i}$ est une immersion (resp. un plongement) de V_i dans W_i , et que, quel que soit $(i_1, \dots, i_p)$, $f|_{V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_p}}$ est une immersion (resp. un plongement) de $V_{i_1} \cap \dots \cap V_{i_p}$ dans $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p}$.

Dans les démonstrations on fera jouer un rôle important à la notion d'immersion simple. Une immersion $f : V \longrightarrow W$ sera dite simple si on peut partager V en deux sous-variétés V_0 et V_1 (V est donc obtenue en recollant V_0 et V_1 le long d'une partie de leur bord), telles que $f|_{V_0}$ et $f|_{V_1}$ soient injectives et transverses. Il revient au même de dire que f est transverse à elle-même, qu'elle n'a que des points doubles, et que l'on peut séparer un voisinage de chaque variété connexe de points doubles en deux nappes.

Quand on écrira $\pi_i(X, X') = 0$ pour $i \leq k$, cela signifiera :

- 1) Si $k = 0$, que toute composante connexe de X rencontre X' .

- 2) Si $k \geq 1$, que chaque composante connexe de X rencontre X' , et que pour toute composante connexe X_α de X , $\pi_i(X_\alpha, X_\alpha \cap X') = 0$ pour $i \leq k$.

Quand on écrira qu'une application $\varphi : (X, X') \longrightarrow (Y, Y')$ induit un isomorphisme sur les π_i pour $i < k$, et une application surjective de $\pi_k(X, X')$ sur $\pi_k(Y, Y')$, cela signifiera

- 1) Si $k = 0$, que l'ensemble des composantes connexes de X qui ne rencontrent pas X' est appliqué surjectivement sur l'ensemble des composantes connexes de Y qui ne rencontrent pas Y' .
- 2) Si $k = 1$, que l'ensemble des composantes connexes de X qui ne rencontrent pas X' est envoyé bijectivement sur l'ensemble des composantes connexes de Y qui ne rencontrent pas Y' , et que pour toute composante connexe X_α de X , l'application induite $\pi_1(X_\alpha, X_\alpha \cap X') \longrightarrow \pi_1(Y_\beta, Y_\beta \cap Y')$ est surjective (où Y_β est la composante connexe de Y qui contient $f(X_\alpha)$).
- 3) Si $k > 1$, que l'ensemble des composantes connexes de X qui ne rencontrent pas X' est envoyé bijectivement sur l'ensemble des composantes connexes de Y qui ne rencontrent pas Y' , que pour toute composante connexe Y_β de Y , $\pi_1(X_\alpha, X_\alpha \cap X') \longrightarrow \pi_1(Y_\beta, Y_\beta \cap Y')$ est bijective,

et que pour toute composante connexe X_α de X , et toute composante connexe X'_γ de $X_\alpha \cap X'$ (dont les images sont contenues dans les composantes Y_β et Y'_δ de Y et Y') $\pi_i(X_\alpha, X'_\gamma) \rightarrow \pi_i(Y_\beta, Y'_\delta)$ est bijective pour $2 \leq i \leq k-1$, et est surjective pour $i = k$.

§ 1. Les énoncés des théorèmes 1, 2 et 3.

Théorème 1. Soient V une variété de dimension n , et (V', V'') un partage de dV en deux sous-variétés de dimension $n-1$. Soient W une variété de dimension p , et (W', W'') une partition de dW en deux sous-variétés de dimension $p-1$. Soit

$$f : (V, V', V'') \longrightarrow (W, W', W'')$$

une immersion dont la restriction à V'' est un plongement de V'' dans W'' . On suppose

- 1) $p - n \geq 3$
- 2) $\pi_j(V, V') = 0$ pour $j \leq 2n-p$
- 3) $\pi_j(V, V') \longrightarrow \pi_j(W, W')$ est isomorphisme pour $j \leq 2n-p$ et est surjectif pour $j = 2n-p + 1$.

Alors f est régulièrement homotope à un plongement parmi les immersions de (V, V', V'') dans (W, W', W'') qui coïncident avec f sur V'' .

Théorème 2. Soient V une variété de dimension n , (V', V'') un partage de dV en deux sous-variétés de dimension $n-1$, et M un fibré en boules de dimension k sur V (sous-jacent à un fibré vectoriel ou à un micro-fibré sur V) ; on notera M' et M'' les restrictions de M à V' et V'' , on notera M^d, M'^d, M''^d les fibrés en sphères correspondants. Soit N une variété de dimension $p+k$ dont le bord est partagé en trois sous-variétés N', N'' et N^d ; on pose $N' \cap N^d = N'^d$ et $N'' \cap N^d = N''^d$. Soit

$$f : (M, M^d, M', M'') \longrightarrow (N, N^d, N', N'')$$

une immersion dont la restriction à M'' est un plongement de M'' dans N'' .

On suppose

$$1) \quad p - n \geq 3 \quad \text{et} \quad k \geq 3$$

$$2) \quad \pi_i(V, V') = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq 2n - p$$

$$3) \quad \pi_i(V, V') \longrightarrow \pi_i(N, N') \quad \text{est un isomorphisme pour} \\ i \leq 2n - p \quad \text{et est surjectif pour} \quad i = 2n - p + 1.$$

$$4) \quad \pi_i(N', N'^d) \longrightarrow \pi_i(N, N^d), \quad \pi_i(N'', N''^d) \longrightarrow \pi_i(N, N^d) \\ \text{et} \quad \pi_i(M, M^d) \longrightarrow \pi_i(N, N^d) \quad \text{sont des isomorphismes pour} \\ \text{tout } i.$$

Alors f est régulièrement homotope à un plongement parmi les immersions de (M, M^d, M', M'') dans (N, N^d, N', N'') qui coïncident avec f sur M''

Théorème 3. Soient V et W deux variétés de dimensions respectives n et p . Soient $dV = V' \cup V''$ et $dW = W' \cup W''$ des partages de leurs bords en sous-variétés de dimensions respectives $n-1$ et $p-1$. Soient M et N des fibrés en boules (sous-jacents à des fibrés vectoriels ou à des microfibrés) de dimension k sur V et W ; on pose $M' = M|_{V'}$, $M'' = M|_{V''}$, $N' = N|_{W'}$ et $N'' = N|_{W''}$. On note M^d, N^d, M'^d , etc... les fibrés en sphères correspondants. On se donne des trivialisations des fibrés M' et N' (c'est-à-dire des isomorphismes $M' \approx V' \times D^k$ et $N' \approx W' \times D^k$). Soit

$$f : (M, M^d, M', M'') \longrightarrow (N, N^d, N', N'')$$

une immersion dont la restriction à M'' est un plongement de M'' dans N'' .

On suppose

- 1) $p - n \geq 3$ et $k \geq 3$
- 2) $\pi_i(V, V') = 0$ pour $i \leq 2n - p$
- 3) $\pi_i(V, V') \longrightarrow \pi_i(W, W')$ est un isomorphisme pour $i \leq 2n - p$ et est surjectif pour $i = 2n - p + 1$.
- 4) $f|_{M'} : M' \longrightarrow N'$ respecte les projections de M' et N' sur D^k données par les trivialisations de M' et N' (Il en résulte que f est homotope à une application fibrée de (M', M'^d) dans (N', N'^d)).

Alors f est régulièrement homotope à un plongement (qui vérifie la condition 4), parmi les immersions de (M, M^d, M', M'') dans (N, N^d, N', N'') qui coïncident avec f sur M'' et vérifient la condition 4.

La démonstration du théorème 1 se fait par récurrence sur $2n - p$; elle est au §3 . Cette démonstration pourra paraître inutilement compliquée ; cette complexité est due au fait qu'en même temps que la démonstration du théorème 1 j'ai voulu obtenir celle du lemme de réduction des immersions et du lemme homotopique, qui sont utilisés dans la démonstration des théorèmes 2 et 3 . Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 sont presque identiques ; la méthode est essentiellement la même que pour le théorème 1 ; elles se trouvent respectivement aux § 5 et 6. Chaque fois qu'une démonstration de ces paragraphes est très proche d'une démonstration que l'on a déjà faite, elle est simplement esquissée. Le lecteur éventuel aura donc intérêt à se reporter aux références qui sont données.

§ 2. Construction d'un modèle de déformation.

Soient ϵ et r deux réels strictement positifs. Dans ce qui suit φ désigne une application C^∞ strictement croissante (à dérivée strictement positive) de $[-1, +1]$ dans $[-1, 0]$ telle que $\varphi(x) = x$ pour $x < -\epsilon$ et que $\varphi(x) \leq x$ pour tout x ; η désigne une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ qui vaut 1 en 0 et 0 hors de $]-r, +r[$, dont la dérivée est strictement positive sur $]-r, 0[$ et strictement négative sur $]0, r[$.

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\chi \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\omega$ (un point de cet espace sera noté $(\alpha, x, y, \beta, \gamma, \delta)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^\chi$, $\gamma \in \mathbb{R}^\nu$, $\delta \in \mathbb{R}^\omega$). $\mathbb{R}^{u+2}$ sera identifié à $\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}_+^{u+2}$ est l'ensemble des points où $x \geq 0$ et $y \geq 0$; S^{u+1} est la sphère unité. On pose $N = S_+^{u+1} \times \mathbb{R}^\chi \times \mathbb{R}^\nu$ et $P = \mathbb{R}_+^{u+1} \times \mathbb{R}^\chi \times \mathbb{R}^\omega$ (où $\mathbb{R}_+^{u+1}$ est défini par $x \geq 0$ et $y = 0$). On définit $\psi : N \times I \rightarrow E$ par

$$(t \in I) \psi_t(\alpha, x, y, \beta, \gamma, 0) = (\alpha, x, (1-t\eta(\|\beta\|))\eta(\|\gamma\|)y + t\eta(\|\beta\|)\eta(\gamma)\varphi(y)\beta, \gamma, 0).$$

Il est clair que $\psi_0 = \text{Id}_N$, que, $\forall t$, ψ_t est un plongement C^∞ de N dans E , et que $\psi_t(\alpha, x, y, \beta, \gamma, 0) = (\alpha, x, y, \beta, \gamma, 0)$ si $y \leq -\epsilon$ ou $\|\beta\| \geq r$ ou $\|\gamma\| \geq r$. Posons $N_t = \psi_t(N)$ et étudions $X_t = N_t \cap P$. Pour $t = 0$, on a $X_0 = S_+^u \times \mathbb{R}^\chi$ (où S_+^u désigne l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{u+2}$ tels que $y = 0$, $x \geq 0$ et $\|\alpha, x\| = 1$). X_1 est l'ensemble des points de N_1 dont la troisième et la cinquième coordonnée sont nulles; nous allons donc étudier dans l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\chi$ des (y, β) l'ensemble des points où $(1-\eta(\|\beta\|))y + \eta(\|\beta\|)\varphi(y) = 0$; voir la figure page III.37 où $\rho = \eta^{-1}(1/(1-\varphi(1)))$. On en déduit que $X_1 = X_0$ moins l'ensemble des points $(\alpha, x, 0, \beta, 0, 0)$ où $\|\beta\| < \rho$. Autrement dit X_1 est obtenu à partir de X_0 en enlevant un voisinage tubulaire de $S_+^u \times \{0\}$.

Etant donné que $\psi_t(\alpha, x, y, \beta, \gamma, 0) = (\alpha, x, y, \beta, \gamma, 0)$ pour $y \leq -\epsilon$, dans toute la figure décrite ci-dessus, on peut oublier les points où $y \leq -2\epsilon$. On pourra de même oublier les points où $\|\beta\| \geq 2r$ ou bien $\|\gamma\| \geq 2r$. Ce qui définit la partie "utile" de cette figure.

§ 3. La démonstration du théorème 1.

En même temps que le théorème 1 je démontrerai les cinq lemmes qui suivent :

Lemme de disjonction : Soient $(T, T', T'')^t$ une sous-variété de $(W, W', W'')^w$ et $g : (V, V', V'')^v \rightarrow (W, W', W'')^w$ un plongement. On suppose :

$$a) \ w - t \geq 3 \quad \text{et} \quad w - v \geq 3$$

$$b) \ g(V'') \cap T'' = \emptyset$$

$$c) \ \pi_i(T, T') = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq t + v - w$$

$$d) \ \pi_i(V, V') = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq 2t + v - 2w + 3$$

$$e) \ \pi_i(V, V') \rightarrow \pi_i(W, W') \quad \text{est un isomorphisme pour} \\ i \leq t + v - w \quad \text{et est surjectif pour} \quad i = t + v - w + 1.$$

Alors on peut trouver une isotopie, parmi les plongements de (V, V', V'') dans (W, W', W'') qui coïncident avec g sur V'' , qui joint g à un plongement dont l'image ne rencontre pas T .

Lemme homotopique. Soit $(I, I', I'')^i$ une sous-variété de $(J, J', J'')^j$.

On suppose :

$$1) j-i \geq 3$$

$$2) \pi_k(I, I') \longrightarrow \pi_k(J, J') \text{ est bijectif pour } k \leq \lambda \\ \text{et est surjectif pour } k = \lambda + 1, (I' \neq \emptyset).$$

Alors $\pi_k(J-I, J'-I') \longrightarrow \pi_k(J, J')$ est un isomorphisme pour $k \leq \lambda + j-i-1$, et est surjectif pour $k = \lambda + j-i$.

Lemme de plongement. Soit $(Z, Z', Z'')^Z$ une sous-variété de $(C, C', C'')^C$, et soit μ un plongement de (S^u, S^{u-1}) dans (Z, Z') . On suppose :

$$\alpha) c - z \geq 3$$

$$\beta) \pi_i(Z, Z') \longrightarrow \pi_i(C, C') \text{ est un isomorphisme pour } i \leq u+1+z-c \text{ et est surjectif pour } i = u+2+z-c.$$

$$\gamma) \pi_i(C, C') = 0 \text{ pour } i \leq 2u-c+2$$

$$\delta) \mu \text{ représente } 0 \text{ dans } \pi_u(C, C')$$

$$\epsilon) \pi_i(Z - \mu(S_+^u), Z' - \mu(S_+^{u-1})) \longrightarrow \pi_i(Z, Z') \text{ est un iso-} \\ \text{morphisme pour } i \leq u+2+z-c.$$

Alors μ se prolonge en un plongement H de (D_+^{u+1}, D^u) dans (C, C') tel que

$$a) H(D_+^{u+1} - S_+^u) \cap Z = \emptyset$$

$$b) (\text{si } u < z) H(D_+^{u+1}) \text{ est normal à } Z \text{ le long de } \mu(S_+^u).$$

Nota : On peut choisir à priori la restriction de H à un voisinage de D_+^u dans D_+^{u+1} (à condition qu'elle vérifie les conditions a et b).

Lemme de réduction élémentaire : Soient $(C, C', C'')^c$ une sous-variété de $(A, A', A'')^a$ et h un plongement de $(B, B', B'')^b$ dans (A, A', A'') . On suppose que h est transverse à C et on pose $(Z, Z', Z'')^z = (C \cap h(B), C' \cap h(B'), C'' \cap h(B''))$. Soit μ un plongement de (D^u, S^{u-1}) dans (Z, Z') . On suppose :

$$1) a-b \geq 3 \text{ et } a-c \geq 3$$

$$2) \pi_k(Z, Z') \longrightarrow \pi_k(C, C') \text{ est un isomorphisme pour } k \leq u+b+1-a \text{ et est surjectif pour } k = u+b+2-a (\leq u-1).$$

$$3) \pi_k(Z, Z') \longrightarrow \pi_k(B, B') \text{ est un isomorphisme pour } k \leq u-2 \text{ et est surjectif pour } k = u-1.$$

$$4) \pi_k(B, B') \longrightarrow \pi_k(A, A') \text{ est un isomorphisme pour } k \leq u+b+2-a (\leq u-1) \text{ et est surjectif pour } k = u+b+3-a (\leq u).$$

$$\text{ou : Hyp . 4' : } \pi_i(A - (C \cup h(B)), A' - (C' \cup h(B'))) \longrightarrow \pi_i(A, A') \text{ est un isomorphisme pour } i \leq u+1.$$

$$5) \pi_k(C, C') \longrightarrow \pi_k(A, A') \text{ est un isomorphisme pour } k \leq u \text{ et est surjectif pour } k = u+1.$$

$$6) \mu \text{ définit l'élément } 0 \text{ de } \pi_u(B, B')$$

$$7) \pi_k(Z, Z') = 0 \text{ pour } k \leq \sup(2u-c+2, 2u-b+2) \\ (\leq u-1)$$

$$8) \pi_k(Z-\mu(D^u), Z'-\mu(S^{u-1})) \longrightarrow \pi_k(Z, Z') \text{ est un} \\ \text{isomorphisme pour } k \leq \sup(u+2+b-a, u+2+c-a) (\leq u-1).$$

Alors on peut trouver une isotopie, parmi les plongements de (B, B', B'') dans (A, A', A'') qui coïncident avec h sur B'' , qui joint h à un plongement h' transverse à C tel que $(h'(B) \cap C, h'(B') \cap C', h'(B'') \cap C'')$ soit isomorphe à $(Z-\mathcal{U}, d(Z-\mathcal{U})-Z'', Z'')$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage tubulaire de $\mu(D^u)$ dans Z .

Nota : En fait on construit une isotopie h_t parmi les plongements de (B, B', B'') dans (A, A', A'') qui coïncident avec h sur B'' , telle que $h_0 = h$, que $h_1 : B \times I \longrightarrow A \times I$ soit transverse à $C \times I$, et que $(h_1(B \times I) \cap C \times I, h_1(B' \times I) \cap C' \times I, h_1(B'' \times I) \cap C'' \times I, h_0(B) \cap C \times \{0\}, h_1(B) \cap C \times \{1\})$ soit isomorphe à $(Z \times I, Z' \times I \cup \mathcal{U} \times \{1\}, Z \times \{0\}, Z \times \{1\} - \mathcal{U} \times \{1\})$.

Lemme de réduction des immersions. Soit f une immersion simple de $(V, V', V'')^{r+h}$ dans $(W, W', W'')^{s+h}$; on notera (X, X', X'') sa self intersection. Soit $\mu : (D^u, S^{u-1}) \longrightarrow (X, X')$ un plongement. On suppose :

$$A) s-r \geq 3$$

$$B) \pi_j(V, V') = 0 \text{ pour } j \leq h$$

$$C) \pi_j(V, V') \longrightarrow \pi_j(W, W') \text{ est un isomorphisme pour} \\ j \leq u \text{ et est surjectif pour } j = u+1$$

$$D) 2u \leq 2h+r-2$$

E) $\pi_j (X, X') \longrightarrow \pi_j (W, W')$ est un isomorphisme pour $j \leq u-2$ et est surjectif pour $j = u-1$.

F) $\pi_i (X, X') = 0$ pour $i \leq 2u-(r+h)+2$ (ce qui est une conséquence des hypothèses B, D et E si $u \leq r+h-4$)

G) μ représente l'élément 0 de $\pi_u (V, V')$

H) $\pi_j (X-\mu(D^u), X'-\mu(S^{u-1})) \longrightarrow \pi_j (X, X')$ est un isomorphisme pour $j \leq u+2+r-s$.

Alors il existe une homotopie régulière parmi les immersions de (V, V', V'') dans (W, W', W'') qui coïncident avec f sur V'' , qui joint f à une immersion simple $\bar{f}$ dont la self intersection est isomorphe au complémentaire d'un voisinage tubulaire $\mathcal{U}$ de $\mu(D^u)$ dans (X, X', X'') .

Nota : En fait on construit une homotopie régulière f_t parmi les immersions de (V, V', V'') dans (W, W', W'') qui coïncident avec f sur V'' , telle que $f_0 = f$, que $f : V \times I \longrightarrow W \times I$ soit une immersion simple, et que, si on note (X_I, X'_I, X''_I) la self intersection de f_I et (X_1, X'_1, X''_1) celle de f_1 , $(X_I, X'_I, X''_I, X, X_1)$ soit isomorphe à $(X \times I, X' \times I \cup \mathcal{U} \times \{1\}, X'' \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\} - \mathcal{U} \times \{1\})$.

La démonstration du théorème 1 se fait en même temps que celle de ces 5 lemmes. C'est une récurrence sur les 6 énoncés. On note "assertion γ " l'assertion suivante :

- 1) le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < \gamma$
- 2) le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < \gamma$
- 3) le lemme de plongement est vrai pour $u \leq \gamma$
- 4) le lemme de réduction élémentaire est vrai pour $u \leq \gamma$
- 5) le lemme de réduction des immersions est vrai pour $u \leq \gamma$
- 6) le théorème 1 est vrai pour $2n-p \leq \gamma$.

L'assertion γ est triviale (ou vide) pour $\gamma < 0$. On démontre que si l'assertion γ est vraie pour $\gamma < N$, elle est vraie pour $\gamma = N$. Ce pas de la récurrence se fait en six étapes :

Première étape : On montre que si le lemme de réduction élémentaire est vrai pour $u < N$, le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$.

Deuxième étape : On montre que si le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$, le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$.

Troisième étape : On montre que si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$, si le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$, et si le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$, alors le lemme de plongement est vrai pour $u \leq N$.

Quatrième étape : On montre que si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$, si le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$, et si le lemme de plongement est vrai pour $u \leq N$, alors le lemme de réduction élémentaire est vrai pour $u \leq N$.

Cinquième étape : On montre que si le lemme de plongement et le lemme de réduction élémentaire sont vrais pour $u \leq N$, si le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$, et si le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$, alors le lemme de réduction des immersions est vrai pour $u \leq N$.

Sixième étape : On montre que si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$ et si le lemme de réduction des immersions est vrai pour $u \leq N$, alors le théorème 1 est vrai pour $2n-p = N$.

Première étape : Montrons que si le lemme de réduction élémentaire est vrai pour $u < N$, le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$.

On suppose que g est transverse à T et on pose $(Z, Z') = (g(V) \cap T, g(V') \cap T')$; Z est une variété de dimension $t+v-w$ de bord Z' . On prend une présentation par anses ordonnée de (Z, Z') et on va enlever ces anses les unes après les autres. Il suffit de montrer que si Z est une réunion d'anses de dimension au plus $\dim Z - u = t+v-w-u$, on peut enlever un voisinage tubulaire d'un plongement μ de (D^u, S^{u-1}) dans (Z, Z') . Comme $u \leq \dim Z < N$ on va appliquer le lemme de réduction élémentaire avec $A = W$, $B = T$ et $C = V$; il faut vérifier les 8 hypothèses

Hyp 1 : C'est l'hypothèse a.

Hyp 2 : Pour $i \leq u+t+2-w$, d'une part $\pi_i(V, V') = 0$ à cause de l'hypothèse d (car $2t+v-2w+3 = (t+v-w) + t+3-w \geq u+t+3-w$), d'autre part $\pi_i(Z, Z') = 0$ (car Z est la réunion de Z' et de cellules de dimensions au moins u , donc $\pi_i(Z, Z') = 0$ pour $i < u$).

Hyp 3 : Pour $i \leq u-1$, d'une part on vient de démontrer que $\pi_i(Z, Z') = 0$, d'autre part $\pi_i(T, T') = 0$ d'après l'hypothèse c (car $t+v-w \geq u-1$).

Hyp 4 : Pour $i \leq u+t+3-w$, $\pi_i(T, T') = 0$ à cause de l'hypothèse c (car $u+t+3-w \leq t+v-w$) et $\pi_i(W, W') = 0$ à cause des hypothèses d et e (car $u+t+3-w \leq t+v-w$ et $u+t+3-w \leq 2t+v-2w+3$).

Hyp 5 : C'est l'hypothèse e (car $u \leq t+v-w$).

Hyp 6 : C'est trivial puisque, d'après l'hypothèse c, $\pi_u(T, T') = 0$.

Hyp 7 : En montrant l'hypothèse 2, on a vu que $\pi_i(Z, Z')$ est nul pour $i < u$.

Hyp 8 : Puisque $\pi_i(Z, Z') = 0$ pour $i < u$, il suffit de montrer que $\pi_i(Z-\mu(D^u), Z'-\mu(S^{u-1}))$ est nul pour $i < u$; or $(Z-\mu(D^u), Z'-\mu(S^{u-1}))$ est isomorphe à $(Y, dY-S^{t+v-w-u-1})$, où Y est une variété de dimension $t+v-w$ qui est une réunion d'anses de dimension au plus $t+v-w-u$; donc $\pi_i(Y, dY) = 0$ pour $i < u$, et $\pi_i(Y, dY-S^{t+v-w-u-1}) \longrightarrow \pi_i(Y, dY)$ est isomorphisme pour $i < u$.

Ce qui termine la démonstration de la première étape.

Deuxième étape : Montrons que si le théorème de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$, le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$.

On doit montrer que toute application φ de $(D_+^k, S_+^{k-1}, D_+^{k-1})$ dans $(J, J', J-I)$ ($k \leq \lambda+j-i$) est homotope, modulo D_+^{k-1} , à une application dont l'image est dans $J-I$. En multipliant J par $\mathbb{R}^p$ (p grand) on peut supposer que φ est un plongement ; on applique alors le lemme de disjonction avec $v+t-w = (i+p)+k - (j+p) = i+k-j \leq \lambda < N$. Il faut vérifier les hypothèses du lemme de disjonction ; elles sont toutes trivialement vérifiées si p est grand, sauf l'hypothèse a ($(j+p)-(i+p) \geq 3$ provient de $j-i \geq 3$) et l'hypothèse e (qui provient de l'hypothèse 2).

Troisième étape : Montrons que si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$, si le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$, et si le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$, alors le lemme de plongement est vrai pour $u \leq N$.

On démontrera d'abord deux lemmes :

Lemme a . $\mu : (S_+^u, S_+^{u-1}) \longrightarrow (C, C')$ se prolonge en un plongement de (D_+^{u+1}, D_+^u) dans (C, C') (qui ne vérifie peut être pas les conditions a et b).

Lemme a-bis. Si $u = z$ (donc $\mu(S_+^u)$ est une composante connexe de Z), et si on pose $Y = Z - \mu(S_+^u)$, μ se prolonge en un plongement de (D_+^{u+1}, D_+^u) dans $(C-Y, C'-Y')$.

Démonstration du lemme a : l'hypothèse δ assure que μ est homotope à un plongement η de (S_+^u, S_+^{u-1}) dans (C, C') , qui se prolonge en un plongement de (D_+^{u+1}, D_+^u) dans (C, C') . On peut supposer que l'homotopie $h : (S_+^u, S_+^{u-1}) \times (I, 0, 1) \longrightarrow (C, C') \times (I, 0, 1)$ entre μ et η est une immersion ; on va la transformer en un plongement en appliquant le théorème 1 (avec $2n-p = 2(u+1)-(c+1) = 2u-c+1 < N$) et pour cela on vérifie ses hypothèses :

Hyp 1 : $(c+1)-(u+1) = c-u \geq 3$ (d'après l'hypothèse α).

Hyp 2 : $\pi_i(S_+^u \times I, S_+^{u-1} \times I) = 0$ pour $i \leq u-1$ (et $u-1 > 2u-c+1$).

Hyp 3 : $\pi_i(S_+^u \times I, S_+^{u-1} \times I) \longrightarrow \pi_i(C, C')$ est bijectif pour $i \leq 2u-c+1$ et est surjectif pour $i = 2u-c+2$, car tous deux sont nuls à cause de ce que l'on vient de voir (hyp 2) et de l'hypothèse γ .

Ceci termine la démonstration du lemme a.

Démonstration du lemme a-bis : $\pi_k(Y, Y') \longrightarrow \pi_k(C, C')$ est un isomorphisme pour $k \leq u+z+1-c$ et est surjectif pour $k = u+z+2-c$ (c'est l'hypothèse β), donc on peut appliquer le lemme homotopique avec $\lambda = u+z+1-c < N$, $j = c$ et $i = z$, ce qui montre que $\pi_k(C-Y, C'-Y') \longrightarrow \pi_k(C, C')$ est bijectif pour $k \leq (u+z+1-c)+c-z-1 = u$, et est surjectif pour $k = u+1$. Il en résulte que μ représente 0 dans $\pi_u(C-Y, C'-Y')$ (d'après l'hypothèse δ), et aussi que $\pi_k(C-Y, C'-Y') = 0$ pour $i \leq 2u-c+2$ (d'après l'hypothèse γ). Le reste de la démonstration est alors analogue à la démonstration du lemme a.

Il est clair que dans le cas où $u = z$, le lemme a-bis termine la démonstration de cette troisième étape. Dans le cas où $u < z$, on peut, par des considérations de champ normal, se ramener au cas où la condition b est vérifiée ; il reste donc à démontrer le

Lemme b. Si $c-u \geq 4$, on peut isotoper le plongement H_0 construit au lemme a, parmi les plongements qui coïncident avec H_0 au voisinage de S_+^u , en un plongement tel que $H(D_+^{u+1}) \cap Z = \mu(S_+^u)$.

Démonstration du lemme b: Soit $\mathcal{U}$ un voisinage tubulaire ouvert de $\mu(S_+^u)$ dans C , et soit $d\mathcal{U}$ son bord relatif ; on va appliquer le lemme de disjonction (avec $t = u+1$, $v = z$ et $w = c$, donc $t+v-w = u+z-c+1 < N$) à $W = C - \mathcal{U}$, $W' = C' \cap W$, $W'' = \overline{dW - W'}$, $V = Z - (Z \cap \mathcal{U})$, $V' = Z' \cap V$, $V'' = \overline{dV - V'}$, $T = D_+^{u+1} - H_0^{-1}(\mathcal{U})$, $T' = T \cap D^u$ et $T'' = \overline{dT - T'}$.
Il reste donc à vérifier les 5 hypothèses du lemme de disjonction :

Hyp a : $c-z \geq 3$ (d'après l'hypothèse α) et $c-(u+1) \geq 3$ (d'après l'hypothèse du lemme b).

Hyp b : Elle est vérifiée si $\mathcal{U}$ est assez petit puisque H_0 vérifie la condition b.

Hyp c : Si $\mathcal{U}$ est bien choisi, (T, T') est isomorphe à (D_+^{u+1}, D^u) , donc $\pi_i(T, T') = 0$ pour tout i .

Hyp d : Elle est vérifiée si $\pi_i(Z - \mu(S_+^u), Z' - \mu(S_+^{u-1})) = 0$ pour $i \leq 2$ ($\dim D_+^{u+1} + \dim Z - 2(\dim C) + 3 = 2u+z-2c+5$, ce qui est une conséquence des hypothèses β , γ et ϵ puisque $2u+z-2c+5 \leq 2u-c+2$ et $2u+z-2c+5 \leq u+1+z-c$ (car $c-u \geq 4$)).

Hyp e : On doit démontrer que

$$\pi_k(Z-\mu(S_+^u), Z'-\mu(S^{u-1})) \longrightarrow \pi_k(C-\mu(S_+^u), C'-\mu(S^{u-1}))$$

est un isomorphisme pour $k \leq \dim D_+^{u+1} + \dim Z -$

$\dim C = u+1+z-c$, et est surjectif pour $k = u+2+z-c$;

compte tenu des hypothèses β et ϵ , il suffit de montrer

$$\pi_k(C-\mu(S_+^u), C'-\mu(S^{u-1})) \longrightarrow \pi_k(C, C')$$

est un isomorphisme pour $k \leq u$; pour démontrer cela, on remar-

que que $\pi_k(S_+^u, S^{u-1}) \longrightarrow \pi_k(C, C')$ est un isomorphisme

pour $k \leq 2u-c+2$ (à cause de l'hypothèse γ), et on

on applique le lemme homotopique avec $\lambda=2u-c+1 (< N)$,

$j = c$ et $i = u$.

Ceci termine la démonstration du lemme b et de la troisième étape.

Par des considérations de champ normal on peut choisir arbitrairement H sur un voisinage de S_+^u .

Quatrième étape : Montrons que si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$, si le lemme homotopique est vrai pour $\lambda < N$, et si le lemme de plongement est vrai pour $u \leq N$, alors le lemme de réduction élémentaire est vrai pour $u \leq N$.

On va plonger le modèle de déformation que l'on a construit au § 2. On définit χ , γ et ω par $a = u+2+\chi+\gamma+\omega$, $c = u+1+\chi+\gamma$ et $b = u+1+\chi+\omega$. On identifie (D^u, S^{u-1}) à (S_+^u, S^{u-1}) , de façon à ce que μ devienne un plongement de (S_+^u, S^{u-1}) dans (Z, Z') . On définit alors le plongement cherché sur un voisinage de S_+^u grâce à des considérations de fibrés normaux (qui sont tous triviaux).

1) Identification du P de la figure décrite au § 2 avec une partie de C . La partie utile de P est un voisinage de D_+^{u+1} dans $\chi_+^{u+1+\chi+\omega}$, on doit donc construire un plongement H de (D_+^{u+1}, D^u) dans (C, C') qui coïncide au voisinage de S_+^u avec le prolongement déjà défini et dont l'image ne rencontre Z que le long de $\mu(S_+^u)$. Pour cela on applique le lemme de plongement, compte tenu de la remarque qui le suit avec $u \leq N$; vérifions les hypothèses de ce lemme :

Hyp α : c'est l'hypothèse 1.

Hyp β : $\pi_i(Z, Z') \longrightarrow \pi_i(C, C')$ est un isomorphisme pour $i \leq u+1+z-c$ et est surjectif pour $i = u+2+z-c$, c'est l'hypothèse 2 puisque $z-c = b-a$.

Hyp γ : $\pi_i(C, C') = 0$ pour $i \leq 2u-c+2$; c'est une conséquence des hypothèses 2 et 7 puisque $u+b+2-a \geq 2u-c+2$.

Hyp δ : μ représente l'élément 0 de $\pi_u(C, C')$, à cause des hypothèses 5 et 6.

Hyp ϵ : C'est l'hypothèse 8 puisque $b-a = z-c$. On obtient ainsi le plongement H cherché.

2) Identification du N de la figure décrite au § 2 avec une partie de B : c'est analogue à ce que l'on vient de faire (on remarquera que les hypothèses que l'on a faites sur B sont plus fortes que celles que l'on a faites sur C).

3) Identification de la figure décrite au § 2 avec une partie de A : On peut maintenant considérer que l'on a plongé un voisinage de $S_{++}^{u+1} \cup D_+^{u+1}$ dans (A, A') . Soit K ce plongement, il faut le prolonger à D_{++}^{u+2} . La première obstruction que l'on rencontre est la classe de K dans $\pi_{u+1}(A, A')$, elle est en général non nulle, mais elle est nulle si on a bien choisi H . En effet $\pi_{u+1}(C, C') \longrightarrow \pi_{u+1}(A, A')$ est surjective (hypothèse 5), et quand on a construit H (cf : 3^e étape) on a choisi librement sa classe d'homotopie dans (C, C') si $u < b+c-a$, et sa classe d'homotopie dans $(C-Y, C'-Y')$ si $u = b+c-a$, mais on a alors démontré que $\pi_{u+1}(C-Y, C'-Y') \longrightarrow \pi_{u+1}(C, C')$ est surjectif. On supposera maintenant que la classe d'homotopie de H a été choisie correctement.

Lemma a. $\pi_k(A - (h(B) \cup C), A' - (h(B') \cup C')) \longrightarrow \pi_k(A, A')$ est bijectif pour $k \leq u+1$ et surjectif pour $k = u+1$.

Si l'hypothèse 4' est vérifiée, il n'y a rien à démontrer ; démontrons le lemme a si c'est l'hypothèse 4 qui est vérifiée.

Démonstration : α) l'hypothèse 4 assure que $\pi_k(B, B') \longrightarrow \pi_k(A, A')$ est un isomorphisme pour $k \leq u+b+2-a$ et est surjectif pour $k = u+b+3-a$, donc par application du lemme homotopique avec $\lambda = u+b+2-a < N$, $j = a$ et $i = b$, on démontre que $\pi_k(A - h(B), A' - h(B')) \longrightarrow \pi_k(A, A')$ est un isomorphisme pour $k \leq u+1$ et est surjectif pour $k = u+2$.

$\beta) \pi_i(Z, Z') \longrightarrow \pi_i(C, C')$ est un isomorphisme pour $i \leq u+b+1-a$

et est surjectif pour $i = u+b+2-a$ (hypothèse 2), donc par application du lemme homotopique avec $\lambda = u+b+2-a < N$ on obtient que

$\pi_k(C-Z, C'-Z') \longrightarrow \pi_k(C, C')$ est un isomorphisme pour $k \leq u$. On en déduit

(cf : hypothèse 5, et α ci-dessus) que

$\pi_i(C-Z, C'-Z') \longrightarrow \pi_i(A-h(B), A'-h(B'))$ est un isomorphisme pour $i \leq u$.

Par application du lemme homotopique avec $\lambda = u-1$, on obtient alors que

$$\begin{aligned} & \pi_k((A-h(B)) - (C-Z), (A'-h(B')) - (C'-Z')) \\ &= \pi_k(A-(h(B) \cup C), A'-(h(B') \cup C')) \longrightarrow \pi_k(A-h(B), A'-h(B')) \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour $k \leq (u-2)+a-c \leq u+1$, et est surjectif pour

$k = u+2$; ce qui compte tenu de α termine la démonstration du lemme a.

Soit alors $\mathcal{U}$ un voisinage régulier ouvert de $h(B) \cup C$ dans A ,

posons $W = A - \mathcal{U}$, $W' = W \cap A'$ et $W'' = \overline{dW - W'}$. Soit (D, D') le

complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert $\mathcal{H}$ de $S_{++}^{u+1} \cup D_+^{u+1}$ dans

D_{++}^{u+2} , et soit D'' le bord relatif de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire $\overline{dD - D'}$. On peut

supposer que le plongement du modèle de déformation déjà défini au voisinage

de $S_{++}^{u+1} \cup D_+^{u+1}$ applique $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{U}$, et D'' dans W'' . On a alors un

plongement f dans $(D'', D'' \cap D')$ dans $(W'', W'' \cap W')$ qui se prolonge en

une application F de (D, D', D'') dans (W, W', W'') si on a bien choisi

la classe d'homotopie de H , cf : ci-dessus). On va montrer que F est

homotope à un plongement. Pour cela on applique le théorème 1 (avec

$2n-p = 2(u+2)-a < N$) à une immersion homotope à F . On doit donc vérifier

les hypothèses du théorème 1 :

Hyp 1 : $a-(u+2) \geq 3$

Hyp 2 : $\pi_k(D, D') = 0$ pour tout k

Hyp 3 : On doit montrer que $\pi_k(W, W') = 0$ pour
 $k \leq 2u+5-a$; or $\pi_k(W, W') = \pi_k(A, A')$ pour $k \leq u$ ($\geq 2u+5-a$)
 d'après le lemme a, et $\pi_k(A, A') = 0$ pour $k \leq 2u+5-a$
 d'après les hypothèses 7, 2 et 5 .

Le plongement du modèle de déformation est ainsi défini sur D_{++}^{u+2} et
 au voisinage de $S_{++}^{u+1} \cup D_+^{u+1}$; on prolonge ce plongement au modèle tout
 entier par des considérations de champs normaux. Il est clair que la défor-
 mation ainsi défini a pour effet d'enlever à l'intersection un voisinage
 tubulaire de l'image de μ .

Cinquième étape : Montrons que si le lemme de plongement et le lemme de
 réduction élémentaire sont vrais pour $u \leq N$, si le lemme homotopique est
 vrai pour $\lambda < N$, et si le lemme de disjonction est vrai pour $t+v-w < N$,
 alors le lemme de réduction des immersions est vrai pour $u \leq N$.

Lemme a : Il existe un plongement H de (D_+^{u+1}, D^u) dans (V, V') , tel que

$$a) H(S_+^u) \subset f^{-1}(X) \text{ et } f.H|_{S_+^u} = \mu : S_+^u \longrightarrow X$$

$$b) H(D_+^{u+1} - S_+^u) \cap f^{-1}(X) = \emptyset$$

$$c) (\text{si } u < \dim X) H \text{ est normal à } f^{-1}(X) \text{ le long de } H(S_+^u)$$

Démonstration : On choisit un plongement $\hat{\mu} : S_+^u \longrightarrow f^{-1}(X)$ tel que
 $f.\hat{\mu} = \mu$, et on applique le lemme de plongement ($u \leq N$). Vérifions ses
 hypothèses :

Hyp α : On a $r+h-u \geq 3$

Hyp β : C'est l'hypothèse E et l'hypothèse C

Hyp γ : C'est l'hypothèse B car $h \geq 2u-(r+h)+2(\text{hyp. D})$

Hyp δ : C'est l'hypothèse G

Hyp ϵ : C'est l'hypothèse H, car $r-s = \dim X_1 - \dim V$

Démontrons maintenant la cinquième étape : On choisit d'abord une partition de $f^{-1}(X)$ en $X_1 \cup X_0$ telle que $f|_{X_1} : X_1 \longrightarrow X$ soit un isomorphisme ($i = 0$ ou 1), et que $\rho(S_+^u) \subset X_1$.

On note alors V_1 un voisinage régulier de $X_1 \cup H(D_+^{u+1})$ qui ne rencontre pas X_0 . On note T le bord relatif de V_1 dans V , et on pose $V_0 = \overline{V-V_1}$. Soit η un voisinage régulier de $f(T)$ dans W ; on pose $A = \overline{W-\eta}$, $A' = A \cap W'$, $A'' = \overline{dA-A'}$, $C = \overline{f(V_0) - (f(V_0) \cap \eta)}$, $C' = C \cap f(V_0')$, $C'' = \overline{dC-C'}$, $B = \overline{V_1 - f^{-1}(\eta)}$, $B' = B \cap V'$, $B'' = \overline{dB-B'}$ et $h = f|_B : B \longrightarrow A$. On va appliquer à ces données le lemme de réduction élémentaire, on va donc en vérifier les hypothèses :

Hyp 1 : C'est l'hypothèse A

Hyp 3 : $\pi_k(Z, Z') = \pi_k(X_1, X_1') \xrightarrow{\overline{\omega}} \pi_k(V_1, V_1') = \pi_k(B, B')$
est trivialement (par construction de V_1) un isomorphisme pour $k < u$.

Hyp 6 : C'est une conséquence de la définition de V_1

Hyp 7 : C'est l'hypothèse F

Hyp 8 : C'est l'hypothèse H

Pour vérifier les hypothèses 2 et 5 , on regarde le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_i(X, X') & \xrightarrow{\alpha} & \pi_i(V_0, V'_0) & \xrightarrow{\beta} & \pi_i(V, V') \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \epsilon \\
 \pi_i(Z, Z') & & \pi_i(C, C') & & \\
 \downarrow \omega & & \downarrow \delta & & \\
 \pi_i(B, B') & \xrightarrow{\chi} & \pi_i(A, A') & \xrightarrow{\delta} & \pi_i(W, W') \\
 \parallel & \nearrow \chi' & \uparrow \theta & & \nwarrow \psi \\
 \pi_i(V_1, V'_1) & & & & \\
 \pi_i(A-B, A'-B') = \pi_i(W-f(V_1), W'-f(V'_1)) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_i(W-X, W'-X')
 \end{array}$$

On a vu (ci-dessus Hyp 3) que $\bar{\omega}$ est un isomorphisme pour $i < u$ et on sait (Hyp C) que ϵ est un isomorphisme pour $i \leq u$ et est surjectif pour $i = u+1$. On va montrer

Lemme b : β est un isomorphisme pour $i \leq u$ et est surjectif pour $i = u+1$.

Lemme c : γ est un isomorphisme pour $i \leq u+1$.

Il en résultera que δ est un isomorphisme pour $i \leq u$ et est surjectif pour $i = u+1$ (c'est l'hypothèse 5), que α est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ (c'est l'hypothèse 2) puisque $\beta\alpha$ est un isomorphisme pour

$i \leq u-2$ (à cause de l'hypothèse E) et que α est surjectif pour $i = u-1$ puisque $\beta\alpha$ est un surjectif pour $i = u-1$, enfin que χ est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour $i = u-1$, (ce qui ne suffit pas à montrer l'hypothèse 4).

Démonstration du lemme b : (V_0, V'_0) a le type d'homotopie de $(V-X_1-H(D_+^{u+1}), V'-X'_1-H(D^u))$; et comme $(V-H(D_+^{u+1}), V'-H(D^u))$ a le type d'homotopie de $(V, V'-1 \text{ point})$, il suffit d'étudier $\pi_i(V-X_1-H(D_+^{u+1}), V'-X'_1-H(D^u)) \xrightarrow{\gamma} \pi_i(V-H(D_+^{u+1}), V'-H(D^u))$. En appliquant le lemme homotopique à la sous-variété $X_1-\mu(S_+^u)$ de $V-H(D_+^{u+1})$ avec $\lambda = u+1+r-s < N$ (ce qui est possible grâce aux hypothèses E et H), on obtient que γ et β sont des isomorphismes pour $i \leq u$ et sont surjectifs pour $i = u+1$; ce qui termine la démonstration du lemme b.

Démonstration du lemme c : Pour étudier γ on va étudier Ψ , φ et θ .

$\pi_i(X, X') \longrightarrow \pi_i(W, W')$ est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour $i = u-1$ (hypothèse E), donc par application du lemme homotopique avec $\lambda = u-2 < N$, on montre que Ψ est un isomorphisme pour $i \leq u+1$. De même par application de ce lemme homotopique à $f H(D_+^{u+1}) \subset W-X$, avec $\lambda = \inf(h-1, u-1) < N$, on montre que φ est un isomorphisme pour $i \leq \inf(s+h-3, 2h+s-u-3)$ donc pour $i \leq u+1$. Il reste à étudier θ ; on va montrer que, pour tout $j \leq u$, si θ est un isomorphisme pour $i \leq j-1$, alors θ est un isomorphisme pour $i \leq j$ et est surjectif pour $i = j+1$ (ce qui suffit à prouver, par récurrence sur j , que θ est un isomorphisme pour $i \leq u$ et est surjectif pour $i = u+1$). Si θ est un isomorphisme pour $i \leq j-1$, χ est un isomorphisme pour $i \leq j-2$, et surjectif pour $i = j-1$, car il en est des mêmes de $\gamma.\chi$, et on peut appliquer à l'inclusion $V_1 \subset A$, le lemme homotopique avec $\lambda = j-2 < N$, ce qui prouve que θ est un isomorphisme pour $i \leq (j-2) + (s+h)-1 = j+(s-r-3) \geq j$, et est surjectif pour $i = j+1$.

Hyp 4' : Puisque l'on n'a pas su démontrer l'hyp. 4, on va démontrer l'hyp. 4'. Les hypothèses C et E entraînent que $\pi_i(f^{-1}(X), f^{-1}(X')) \longrightarrow \pi_i(V, V')$ est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour $i = u-1$; en appliquant le lemme homotopique avec $\lambda = u-2$ (on est dans le cadre de l'hypothèse de récurrence), on démontre que $\pi_i(V-f^{-1}(X), V'-f^{-1}(X')) \longrightarrow \pi_i(V, V')$ est un isomorphisme pour $i \leq u+s-r-3 \geq u$, et est surjectif pour $i = u+1$. En démontrant le lemme c, on a vu que $\psi: \pi_i(W-X, W'-X') \longrightarrow \pi_i(W, W')$ est un isomorphisme pour $i \leq u+1$. Pour démontrer que l'hyp. 4' est vérifiée, il suffit donc de montrer que $\pi_i(W-f(V), W'-f(V')) \longrightarrow \pi_i(W-X, W'-X')$ est un isomorphisme pour $i \leq u+1$. Ceci résulte de l'application du lemme homotopique à l'inclusion $f: (V-f^{-1}(X), V'-f^{-1}(X')) \longrightarrow (W-X, W'-X')$, avec $\lambda = u-1$ (on est dans le cadre de l'hypothèse de récurrence) ce qui est possible à cause de l'hypothèse C et de ce que l'on vient de démontrer.

Ceci termine la vérification des hypothèses du lemme de réduction élémentaire, et la démonstration du lemme de réduction des immersions. On va maintenant démontrer un supplément au lemme de réduction des immersions; ce supplément est inutile dans la suite de ce § 3, il servira au § 4.

Supplément au lemme de réduction des immersions : On suppose que $u+4 \leq r+h$, et que $f^{-1}(X)$ est déjà décomposé en $X_0 \cup X_1$ (tels que $f|_{X_i}: X_i \longrightarrow X$ soit un isomorphisme, $i = 0$ ou 1). Soit $\hat{\mu}: S_+^u \longrightarrow X_1$ tel que $f \circ \hat{\mu} = \mu: S_+^u \longrightarrow X$. Soit F un fermé de V et soit H un plongement de (D_+^{u+1}, D^u) dans (V, V') tel que

$$a) H|_{S_+^u} = \rho$$

$$b) H(D_+^{u+1} - S_+^u) \cap X_1 = \emptyset$$

$$c) H \text{ est normal à } X_1 \text{ le long de } H(S_+^u)$$

$$d) H(D_+^{u+1}) \cap F = \emptyset$$

Alors on peut faire la déformation du lemme de réduction des immersions de façon que $\overline{X_1} \cap F = X_1 \cap F$.

Démontrons d'abord deux lemmes

Lemme d : Soit $\eta : (X_0 \cup X_1) \times I \longrightarrow V \times I$ une pseudo-isotopie parmi les plongements de $(X_0 \cup X_1, X'_0 \cup X'_1, X''_0 \cup X''_1)$ dans (V, V', V'') qui coïncident avec le plongement naturel sur $X''_0 \cup X''_1$, qui joint le plongement naturel η_0 à un plongement η_1 . Alors il existe une homotopie régulière parmi les immersions qui coïncident avec f sur V'' , qui joint f à une immersion simple $\tilde{f}$ qui a même image que f (donc qui a même self intersection que f) et telle que $\tilde{f}^{-1}(X) = \eta_1(X_0 \cup X_1)$. Si $\eta|_{X_1 \times I}$ (resp : $\eta|(dX_0 \cup dX_1) \times I$ ou $\eta|(X_1 \cup dX_j) \times I$, etc...) est égal à $(\eta_0|_{X_1}) \times \text{Id}_I$ (resp : à $(\eta_0|(dX_0 \cup dX_1)) \times \text{Id}_I$ ou $(\eta_0|_{X_1 \cup dX_j}) \times \text{Id}_I$), alors $\tilde{f}$ coïncide avec f au voisinage de $\eta_0(X_1)$ (resp : sur dV ou sur dV et au voisinage de X_1).

Démonstration : Il existe un automorphisme $\eta : V \times I \longrightarrow V \times I$ qui est l'identité sur $V \times \{0\} \cup V'' \times I$, tel que $\eta = \eta_1 \cdot (\eta_0 \times \text{Id}_I)$. Soit $\hat{f} : V \times I \longrightarrow W \times I$ défini par $\hat{f} = (f \times \text{Id}_I) \cdot \eta^{-1}$. On pose $\tilde{f}|_{V \times \{1\}} = \tilde{f}$. C'est une immersion simple de même image que f , et $\tilde{f}^{-1}(X) =$

$\eta_1 (X_0 \cup X_1)$. Comme il existe une immersion $\hat{f}$ de $V \times I$ dans $W \times I$ qui joint f à $\tilde{f}$, et que $\dim W - \dim V \geq 2$, f et $\tilde{f}$ sont régulièrement homotopes. Si $\eta|_{X_i} \times I = (\eta_0|_{X_i}) \times \text{Id}_I$, on peut choisir un $\hat{\eta}$ qui est l'identité au voisinage de $\eta_0(X_i) \times I$, donc f et $\hat{f}$ coïncident au voisinage de X_i . De même dans les autres cas.

Lemme e : En faisant une homotopie régulière parmi les immersions qui coïncident avec f sur V'' et au voisinage de X_1 , on peut se ramener au cas où l'image du plongement H qu'on s'est donné ne rencontre pas X_0 (sans changer ce plongement H).

Démonstration : D'après le lemme b il suffit de montrer que l'on peut trouver une isotopie parmi les plongements de (X_0, X'_0, X''_0) dans $(V-X_1, V'-X'_1, V''-X''_1)$ (qui coïncident avec le plongement naturel sur X''_0) qui joint le plongement naturel à un plongement dont l'image ne rencontre pas $H(D_+^{u+1})$. Pour cela on applique le lemme de disjonction $((u+1) + (2r-s+h) - (r+h) = u+1+r-s < N)$, la variété ambiante étant le complémentaire d'un voisinage tubulaire de X_1 dans V ; on va donc vérifier ses hypothèses.

Hyp a : On a $(r+h)-u+1 \geq 3$ et $(r+h)-(2r-s+h) = s-r \geq 3$

Hyp b : Elle est vérifiée car l'intersection de $H(D_+^{u+1})$ et de X_0 est contenue dans $X_0 - X''_0$

Hyp c : $\pi_i(D_+^{u+1}, D^u) = 0$ pour tout i

Hyp d : $\pi_i (X_0, X'_0) = 0$ pour $i \leq 2(u+1) + (2r-s+h) - 2(r+h) + 3 = 2u - (s+h) + 5$, c'est l'hypothèse F.

Hyp e : $\pi_i (X_0, X'_0) \longrightarrow \pi_i (V-X_1, V'-X'_1)$ est un isomorphisme pour $i \leq (u+1) + (2r-s+h) - (r+h) = u+1+r-s$ et est surjectif pour $i = u+2+r-s$ d'après les hypothèses E et C, puisque $\pi_i (V-X_1, V'-X'_1) \xrightarrow{\alpha} \pi_i (V, V')$ est un isomorphisme pour $i \leq u$ et est surjectif pour $i = u+1$ (en effet : $\pi_i (X_1, X'_1) \longrightarrow \pi_i (V, V')$ est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour $i = u-1$, d'après les hypothèses E et C, donc par application du lemme homotopique avec $\lambda = u-2 < N \alpha$, est un isomorphisme pour $i \leq (u-2) + (r+h) - (2r-s+h) - 1 = u + (s-r-3) \geq u$ et est surjectif pour $i = u+1$)

Ceci termine la démonstration du lemme e ; on va maintenant démontrer le supplément au lemme de réduction des immersions. On fait d'abord la déformation du lemme e ; elle ne change ni H ni X_1 ; on reprend ensuite la démonstration de la cinquième étape en remplaçant par le plongement donné, le plongement qui était donné par le lemme a. Au moment de faire la déformation, on a un plongement L de $(D_{++}^{u+2}, S_{++}^{u+1}, D_+^{u+1})$ dans $(A, B, C) \subset (W, f(V_1), f(V_0))$ et $L(S_{++}^{u+1}) \cap F = \emptyset$ (du moins si dans le 2) de la quatrième étape on a choisi H comme plongement de N dans B , au lieu de construire un autre plongement par application du lemme de plongement). On peut alors, par une isotopie ambiante, qui rétracte $L(D_{++}^{u+2})$ dans le voisinage de $L(S_{++}^{u+1})$ et qui ne bouge pas X_1 , ni V_1 , ni V'' , se ramener au cas où $L(D_{++}^{u+2}) \cap F = \emptyset$. La déformation du §2 ne change la figure que sur un voisinage, aussi petit qu'on veut, de $L(D_{++}^{u+2})$; donc elle ne change pas $X_1 \cap F$.

Sixième étape : Montrons que si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$ et si le lemme de réduction des immersions est vrai pour $u \leq N$, alors le théorème 1 est vrai pour $2n-p \leq N$.

On démontrera trois lemmes (le résultat que l'on veut démontrer étant une conséquence immédiate des lemmes 3 et 1).

Lemme 1 : On suppose d'une part que le lemme de réduction des immersions est vrai pour $u \leq N$, d'autre part que l'on s'est donné une immersion comme dans le théorème 1 qui est simple et telle que $2n-p = N$, alors cette immersion est régulièrement homotope à un plongement parmi les immersions de (V, V', V'') dans (W, W', W'') qui coïncident avec f sur V'' .

Lemme 2 : Soit (V, V', V'') comme dans l'énoncé du théorème 1, telle que $\pi_j(V, V') = 0$ pour $j \leq k$ ($\leq n-3$); alors il existe une sous-variété T de codimension 1 de V qui coupe V en deux parties V_0 et V_1 telles que, si on pose $T' = T \cap V'$, $T'' = T \cap V''$, $V'_j = V' \cap V_j$ et $V''_j = V'' \cap V_j$ ($j = 0$ ou 1), on ait

$$1) \pi_i(T, T') = 0 \text{ pour } j \leq k-1$$

2) $V''_j \cup V'_j$ est la réunion de V''_j et d'anses de dimension au plus $n/2$ ($j = 0$ ou 1)

3) V_j est la réunion de $V''_j \cup V'_j$ et d'anses de dimension au plus $(n+1)/2$ ($j = 0$ ou 1).

Lemme 3 : Si le théorème 1 est vrai pour $2n-p < N$, l'immersion f donnée dans l'énoncé du théorème 1 avec $2n-p = N$ est régulièrement homotope à une immersion simple, parmi les immersions qui coïncident avec f sur V'' .

Démonstration du lemme 1 : Soit (X, X') la self intersection de l'immersion simple f ($X'' = X \cap W'' = \emptyset$ puisque $f|_{V''}$ est un plongement). On considère une présentation par anses ordonnée de X , et on enlève successivement toutes ces anses. Supposons que l'on ait enlevé toutes les anses de dimension au moins égale à $2n-p-u+1$ (X est alors une réunion d'anses de dimension au plus $2n-p-u$), on va montrer que l'on peut enlever une anse de dimension $2n-p-u$. Enlever une telle anse c'est enlever un voisinage tubulaire d'un plongement μ de (D^u, S^{u-1}) dans (X, X') ; il suffit de montrer que l'on peut appliquer le lemme de réduction des immersions à ce plongement (on a $u \leq N$); on va donc vérifier les hypothèses de ce lemme (on pose $2n-p = h$)

Hyp A : $p - n \geq 3$, c'est l'hypothèse 1

Hyp B : $\pi_j(V, V') = 0$ pour $j \leq h$, c'est l'hypothèse 2

Hyp C : $\pi_j(V, V') \longrightarrow \pi_j(W, W')$ est un isomorphisme pour $j \leq u$ et est surjectif pour $j = u+1$; c'est l'hypothèse 3

Hyp D : $2u \leq 2h+r-2 = 3n-p-2$; car $u \leq 2n-p$ entraîne
 $2u \leq 4n-2p = 3n-p-2 + (n-p+2) \leq 3n-p-2$

Hyp E : $\pi_i(X, X') = 0$ pour $i < u$ (vu que X est une réunion d'anses de dimension au plus $2n-p-u$), donc l'hypothèse 2 entraîne que $\pi_i(X, X') \longrightarrow \pi_i(V, V')$ est un isomorphisme pour $i < u$

Hyp F : On vient de voir que $\pi_i(X, X') = 0$ pour $i < u$, et on a $u-1 \geq 2u-n+2$

Hyp G : C'est trivial puisque $\pi_u(V, V') = 0$ (hypothèse 2)

Hyp H : $\pi_i(X, X') = \pi_i(X - \mu(D^u), X' - \mu(S^{u-1})) = 0$ pour $i < u$, et on a $u-1 \geq u+2+n-p$

Ceci termine la démonstration du lemme 1.

Démonstration du lemme 2 : On considérera trois cas

Premier cas : Si $k \leq (n-1)/2$. On considère une présentation par anses de V' à partir de dV' , et on prend pour V'_0 la réunion de $dV' \times I$ et des anses de dimension inférieure ou égale à $(n-1)/2$. V'_1 est le reste de la variété V' . On considère une présentation par anses de V considérée comme un cobordisme de $V'' \cup V'_0$ à V'_1 , et on prend pour V_0 la réunion de $V'' \cup V'_0$ et des anses de dimension au plus $n/2$. V_1 est le reste de la variété V . Il est clair que les conditions 2 et 3 sont vérifiées. Comme V' est la réunion de $T' \times I$ et d'anses de dimension au moins $(n-1)/2$, $\pi_i(V', T') = 0$ pour $i < (n-1)/2$. Comme V est la réunion de $T \times I$ et d'anses de dimension au moins $n/2$, $\pi_i(V, T) = 0$ pour $i < n/2$. En portant ces résultats dans le diagramme exact :

$$\begin{array}{c}
 \pi_i(V', T') \\
 \downarrow \\
 \pi_{i+1}(V, T) \longrightarrow \pi_i(T, T') \longrightarrow \pi_i(V, T') \\
 \downarrow \\
 \pi_i(V, V') = 0 \text{ si } i \leq k
 \end{array}$$

on obtient que $\pi_i(T, T') = 0$ pour $i \leq \inf(k, (n-3)/2)$; ce qui prouve le lemme si $k-1 \leq (n-3)/2$.

Deuxième cas : Si $k = n/2$ (donc $n \geq 6$ et $k \geq 3$), on fait une construction analogue à celle que l'on a faite dans le premier cas, mais V'_0 est la réunion de $dV' \times I$ et des anses de dimension inférieure ou égale à $(n-2)/2 = k-1$. Alors $\pi_i(V', V'_0)$ est nul pour $i \leq k-1$, et de la suite exacte

$$\pi_i(V', V'_0) \longrightarrow \pi_i(V, V'_0) \longrightarrow \pi_i(V, V')$$

on déduit que $\pi_i(V, V'_0)$ est nul pour $i \leq k-1$. Comme $k-1 \leq n-4$, d'après la théorie de Smale, V est la réunion de $V'_0 \times I$ et d'anses de dimension au moins $n/2 = k$; on prend donc pour V_0 un voisinage régulier de V'_0 . Les conditions 2 et 3 sont évidemment vérifiées ; comme (T, T') est isomorphe à $(V'_0, dV'_0 - dV')$, T est la réunion de $T' \times I$ et d'anses de dimension au moins $(n-1) - (n-2)/2 = n/2 = k$, donc $\pi_i(T, T') = 0$ pour $i \leq k-1$.

Troisième cas : Si $k > n/2$. On a $n/2 < k \leq n-3$, donc $n \geq 7$ et $k \geq 4$. On peut donc appliquer la théorie de Smale, et affirmer que V est la réunion de $V' \times I$ et d'anses de dimension au moins k ; par dualité V est la réunion de $V'' \times I$ et d'anses de dimension au plus $n-k < n/2$ (ce qui n'exclut pas que V'' soit vide!) . On va faire une récurrence sur le nombre de ces anses, en les attachant pas ordre croissant de dimensions. On démontre donc les trois choses suivantes :

1a) Le lemme est vrai si $V'' = \emptyset$, et s'il n'y a pas d'anses. En effet (V, V', V'') est alors de la forme $(V'' \times I, V'' \times \{1\} \cup dV'' \times I, V'' \times \{0\})$. On décompose V'' en anses à partir de dV'' , et on prend pour V''_0 la réunion de dV'' et des anses de dimension au plus $(n-1)/2$; V''_1 est le reste de la variété V'' . On pose $(V_0, V'_0, V''_0) = (V''_0 \times I, V''_0 \times \{1\} \cup dV''_0 \times I, V''_0 \times \{0\})$ et $(V_1, V'_1, V''_1) = (V''_1 \times I, V''_1 \times \{1\}, V''_1 \times \{0\})$. Il est clair que cette décomposition vérifie les conditions 1, 2 et 3 .

1b) Le lemme est vrai si $V'' = \emptyset$, et s'il n'y a qu'une seule anse. En effet, on a alors $(V, V', V'') = (D^n, S^{n-1}, \emptyset)$. On décompose en $(D_+^n, S_+^{n-1}, \emptyset) \cup (D_-^n, S_-^{n-1}, \emptyset)$

2) Si V est la réunion de $V'' \times I$ et d'anses de dimension au plus p ($\leq n-k < n/2$) , si (V, V', V'') a un partage qui vérifie les conditions 1, 2 et 3 et tel que de plus , T soit la réunion de T'' et d'anses de dimension au plus p (les partages construits en 1a et 1b vérifient cette condition supplémentaire), si $\tilde{V}$ est la réunion de V et d'une anse de dimension p attachée dans l'intérieur de V' , si $\tilde{V}'' = V''$ et $\tilde{V}' = \overline{d\tilde{V} - V''}$, alors

$(\tilde{V}, \tilde{V}', \tilde{V}'')$ possède un partage qui vérifie les conditions 1, 2 et 3 et tel que, de plus, $\tilde{T}$ soit la réunion de $\tilde{T}' \times I$ et d'anses de dimension au plus p . En effet : puisque V'_0 et V'_1 sont essentiellement des voisinages réguliers de complexes de dimension au plus $n/2$ plongés dans V' , on peut supposer que l'attachement de l'anse se fait dans un voisinage régulier de T' ; puisque $\dim T' = n-2 > 2(p-1)$, on peut même supposer qu'il se fait le long d'un voisinage tubulaire d'un plongement $\varphi : S^{p-1} \longrightarrow T'$; puisque $\pi_{p-1}(SO_{n-p-1}) \longrightarrow \pi_{p-1}(SO_{n-p})$ est surjectif, on peut supposer que l'on a un voisinage tubulaire de T' dans V' de la forme $T' \times I$, et que l'application d'attachement est de la forme $\Psi \times \text{Id}_I$, où Ψ est un plongement de $S^{p-1} \times D^{n-p-1}$ dans T' . On pose alors (voir figure) :

$$\tilde{V}_0 = V_0 \cup D^p \times D^{n-p-1} \times [0, \frac{1}{2}]$$

$$\tilde{V}_1 = V_1 \cup D^p \times D^{n-p-1} \times [\frac{1}{2}, 1]$$

Il est clair que $\tilde{V}'_i$ est la réunion de V'_i est d'une anse de dimension p ($< n/2$) et que $\tilde{V}_i$ est un voisinage régulier de $V_i \cup \tilde{V}'_i$; donc les conditions 2 et 3 sont vérifiées. $\tilde{T}$ est la réunion de T et d'une anse de dimension p , donc la condition supplémentaire est vérifiée. Si $p < n-k$, il en résulte que T est la réunion de $T' \times I$ et d'anses de dimension au moins $n-p-1 \geq k$, donc $\pi_i(T, T') = 0$ pour $i \leq k-1$. Si $p = n-k$, la démonstration précédente prouve seulement que $\pi_i(T, T') = 0$ pour $i \leq k-2$. Mais on a $3 \leq p \leq n-4$; il en résulte que les π_1 (de $T, T', \tilde{T}, \tilde{T}', V, V', \tilde{V}, \tilde{V}'$) sont tous égaux. Pour étudier $\pi_{k-1}(T, T')$, on étudie donc le $(k-1)$ -ième groupe d'homologie du revêtement universel $(\hat{T}, \hat{T}')$ de $(\tilde{T}, \tilde{T}')$; il est égal au k -ième groupe d'homologie du revêtement universel $(\hat{\tilde{V}}, \hat{\tilde{V}}')$ de $(\tilde{V}, \tilde{V}')$; il est donc nul.

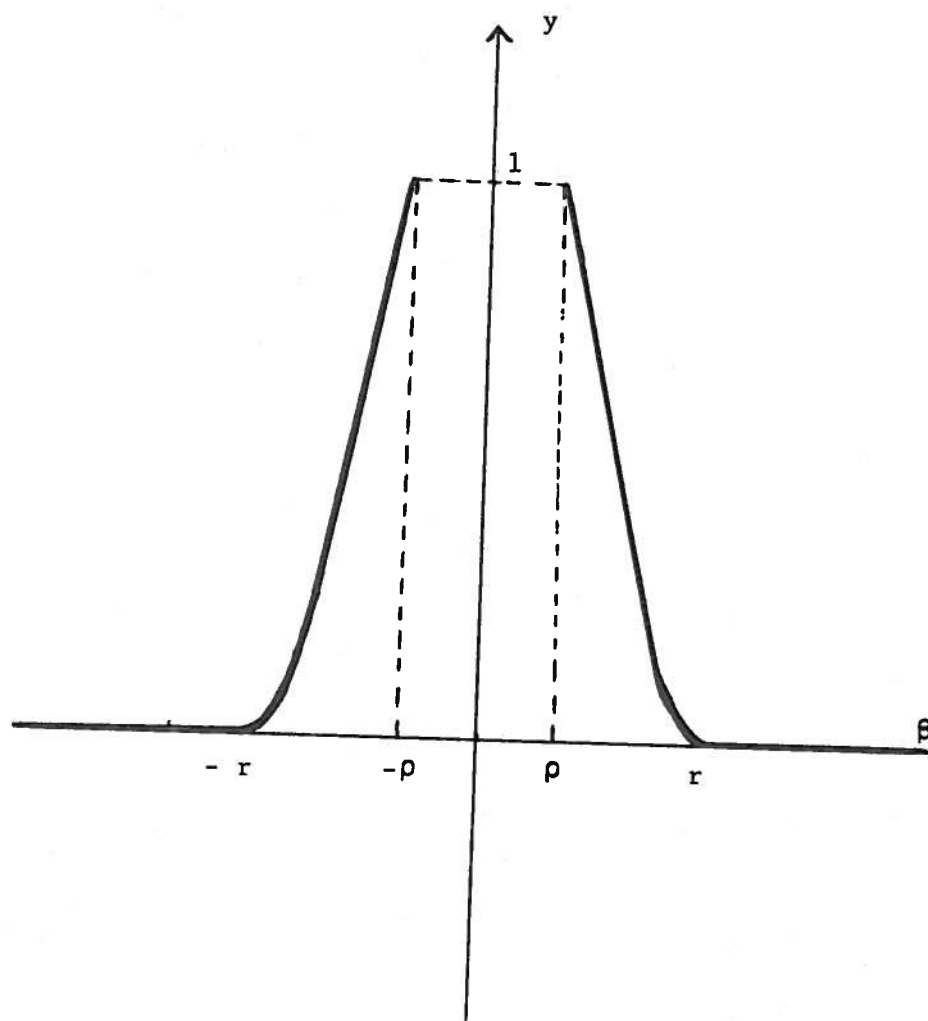
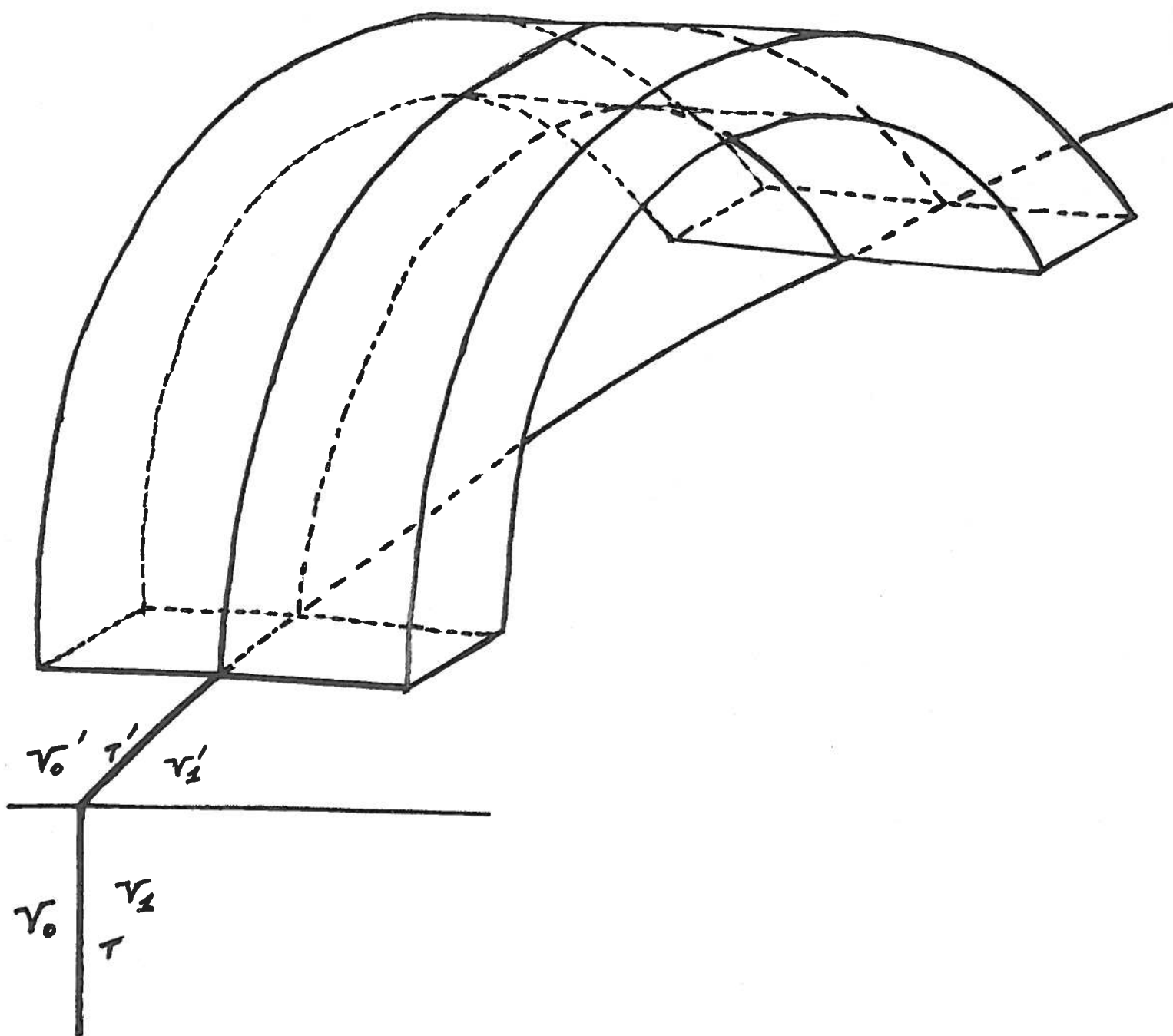


Figure du Paragraphe 2, page III.7



Démonstration du lemme 3 : Considérons la partition de V construite au lemme 2 ; on épaissit T , on a donc :

$$(V, V', V'') = (V_0, V'_0, V''_0) \cup_{(T, T', T'')} (T \times I, T' \times I, T'' \times I) \cup_{(T, T', T'')} (V_1, V'_1, V''_1)$$

Lemme a : On peut supposer que $f|_{(V_0 \cup T \times [0, \epsilon])}$ et $f|_{V_1}$ sont injectives.

On va faire la démonstration pour $f|_{V_1}$, on ferait une démonstration identique pour $f|_{(V_0 \cup T \times [0, \epsilon])}$. D'après la condition 2 du lemme 2 , $V''_1 \cup V'_1$ est un voisinage régulier de $V''_1 \cup K$, où K est un complexe de dimension au plus $n/2$. Comme $2(\dim K) + 1 \leq 2(n/2) + 1 = n + 1 < p - 1 = \dim dW$, par transversalité on peut se ramener au cas où la restriction de f à $V''_1 \cap K$ est injective . Ensuite, " en rétractant $V''_1 \cup V'_1$ sur $V''_1 \cup K$ ", on rend $f|_{V''_1 \cup V'_1}$ injective. Par une opération analogue, compte tenu du fait que V_1 est un voisinage tubulaire de $V''_1 \cup V'_1 \cup L$ (où L est un complexe de dimension au plus $(n+1)/2$) , on se ramène au cas où $f|_{V_1}$ est injective.

Dans la suite on supposera toujours que $f|_{(V_0 \cup T \times [0, \epsilon])}$ et $f|_{V_1}$ sont injectives. Soit alors F l'immersion de $(T, T', T'') \times I \times (I, 0, 1)$ dans $(W, W', W'') \times (I, 0, 1)$ définie par

$$F(t, \alpha, \theta) = (f(t, ((1-\theta) + \theta\epsilon)\alpha) , \theta)$$

Elle possède les trois propriétés suivantes

$$a) F|_{T \times I \times \{0\}} = f|_{T \times I}$$

$$b) F|T \times \{0\} \times I = (f|T \times \{0\}) \times \text{Id}_I$$

c)

$$c) F(T \times I \times \{1\}) = f(T \times [0, \epsilon]) \text{ et } F|T \times I \times \{1\} \text{ est injective.}$$

Lemme b : F est régulièrement homotope à une immersion G telle que $G|T \times \{1\} \times I$ soit un plongement de $(T, T', T'') \times (I, 0, 1)$ dans $(W, W', W'') \times (I, 0, 1)$, parmi les immersions de $(T, T', T'') \times I \times (I, 0, 1)$ dans $(W, W', W'') \times (I, 0, 1)$ qui coïncident avec F sur $T \times (I \times \{0\} \cup \{0\} \times I \cup I \times \{1\})$, et qui possèdent donc les propriétés a , b , et c .

Démonstration : Il suffit de montrer que l'immersion $F|T \times \{1\} \times I$ de $(T \times I, T' \times I, T'' \times I \cup T \times \{0, 1\})$ dans $(W \times I, W' \times I, W'' \times I \cup W \times \{0, 1\})$ (dont la restriction à $T'' \times I \cup T \times \{0, 1\}$ est un plongement) est régulièrement homotope à un plongement. Ceci est une conséquence du théorème 1 qui est supposé vrai pour $T \times I \subset W \times I$ puisque $2n-(p+1) < N$; vérifions donc ses hypothèses :

$$\text{Hyp 1 : } (p+1)-n \geq 3$$

$$\text{Hyp 2 : } \pi_i(T \times I, T' \times I) = 0 \text{ pour } i \leq 2n-p-1 = 2n-(p+1) \text{ (à cause de la définition de } T \text{ au lemme 2)}$$

$$\text{Hyp 3 : } \pi_i(T \times I, T' \times I) \longrightarrow \pi_i(W \times I, W' \times I) \text{ est un isomorphisme pour } i \leq 2n-p-1 \text{ et est surjectif pour } i = 2n-p, \text{ puisque } \pi_i(W, W') = 0 \text{ pour } i \leq 2n-p \text{ (hypothèses 2 et 3)}$$

Construisons maintenant l'immersion simple cherchée. La pseudo-isotopie $G|T \times \{1\} \times I$ de plongements de (T, T', T'') dans (W, W', W'') se prolonge en une pseudo-isotopie $H : V_1 \times I \longrightarrow W \times I$ de plongements de V_1 dans W (telle que $H|V_1 \times \{0\} = f|V_1$). On définit alors une immersion Φ de $(V, V', V'') \times (I, 0, 1)$ dans $(W, W', W'') \times (I, 0, 1)$ par

$$\Phi|V_0 \times I = (f|V_0) \times \text{Id}_I$$

$$\Phi|(T \times I) \times I = G$$

$$\Phi|V_1 \times I = H$$

(Pour que Φ soit une immersion il faut qu'elle le soit là où on recolle, ce qui nécessite que l'on ait bien choisi certains champs normaux dans la construction de G et de H). $\varphi = \Phi|V \times \{1\}$ est une immersion simple car elle est injective sur V_1 ($\Phi|V_1 \times \{1\} = H|V_1 \times \{1\}$) et sur $V_0 \cup T \times [0, \epsilon]$ ($\Phi|(V_0 \cup T \times I) \times \{1\} = f|(V_0 \cup T \times [0, \epsilon])$) ; par ailleurs $\Phi|V \times \{0\} = f$. Comme φ et f sont jointes par une immersion de $V \times I$ dans $W \times I$, et que $\dim W - \dim V \geq 2$, f et φ sont régulièrement homotopes. Ce qui termine la démonstration du lemme 3, ainsi que la sixième étape.

§ 4 : Le lemme de régularisation

Lemme de régularisation : Soient (L, dL) une variété de dimension a et M un fibré en boules de dimension k de base L (c'est à dire le fibré en boules sous-jacent à un fibré vectoriel ou à un microfibré). On note M^d le fibré en sphères, et ${}_dM$ la restriction à dL du fibré en boules ; on pose $M^d \cap {}_dM = {}_dM^d$. On identifie (L, dL) à la section zéro de fibré. Soit $(N, N^d, {}_dN)$ une variété munie d'un partage de son bord ; on pose

$N^d \cap {}_dN = {}_dN^d$. On définit ϵ par $\dim N = 2a - \epsilon + k$, et on pose $\epsilon = 2\alpha + \beta$ où $\beta = 0$ ou 1 . On supposera que $\epsilon \geq 0$, si non la conclusion ci-dessous est une conséquence triviale et sans intérêt du théorème 1.

Pour toute immersion simple g de $(M, M^d, {}_dM)$ dans $(N, N^d, {}_dN)$, on note (g_X, g_X^d, g_X) sa self intersection ; on choisit une partition de $g^{-1}(g_X)$ en deux parties fermées g_{X_0} et g_{X_1} , de façon que $g|_{g_{X_i}} : g_{X_i} \longrightarrow g_X$ soit un isomorphisme ($i = 0$ ou 1). On suppose que g_{X_1} est transverse à L , et on pose $g_Y = L \cap g_{X_1}$ et $d^g Y = dL \cap g_{X_1}$. $(g_Y, d^g Y)$ est une variété de dimension ϵ (si $\epsilon = 0$, $d^g Y$ est vide).

On suppose donnée une telle immersion simple, et on suppose

$$a) \quad a - \epsilon \geq 3 \quad \text{et} \quad k \geq 3$$

$$b) \quad (g_{X_1}^d, g_{X_1}^d, d^g Y) \text{ est un fibré en boules (de fibre } (D^k, S^{k-1}, 0) \text{) de base } d^g Y$$

$$c) \quad \pi_i(M, M^d) \longrightarrow \pi_i(N, N^d) \text{ est un isomorphisme pour } i \leq \epsilon + k - \alpha - 1 \text{ et est surjectif pour } i = \epsilon + k - \alpha.$$

Alors il existe une homotopie régulière parmi les immersions de $(M, M^d, {}_dM)$ dans $(N, N^d, {}_dN)$ qui coïncident avec g sur ${}_dM$, qui joint g à une immersion simple h telle que $(h_{X_1}, h_{X_1}^d, h_Y, h_{X_1}, h_{X_1}^d, d^h Y)$ soit un fibré en boules (de fibre $(D^k, S^{k-1}, 0)$) de base $(h_Y, d^h Y)$ ($d^h Y = d^g Y$).

Démonstration : On utilisera les trois lemmes suivants :

Lemme 1 : Soit $\eta : \mathcal{E}_{X_1} \times I \longrightarrow M \times I$ une pseudo-isotopie parmi les plongement de ${}_d X_1$ dans M qui coïncident avec le plongement naturel η_0 sur ${}_d \mathcal{E}_{X_1} (= \mathcal{E}_{X_1}^d \cup {}_d \mathcal{E}_{X_1})$; on peut trouver une homotopie régulière g_t parmi les immersions de $(M, M^d, {}_d M)$ dans $(N, N^d, {}_d N)$ qui coïncident avec g sur ${}_d M$, qui joint g à une immersion f telle que $f_{X_1} = \eta_1(\mathcal{E}_{X_1})$.

C'est le lemme b de la cinquième étape du §3 (avec des notations différentes).

Lemme 2 : On suppose que $\pi_i(\mathcal{E}_{X_1}, \mathcal{E}_Y) = 0$ pour $i \leq \alpha$, et que $\mathcal{E}_{X_1}$ est la réunion d'un voisinage régulier de $\mathcal{E}_Y \cup {}_d \mathcal{E}_{X_1}$ et d'anses de dimension au plus $\epsilon + k - u$ ($u < \epsilon + k - \alpha$). Soit μ un plongement de (D^u, S^{u-1}) dans $(\mathcal{E}_{X_1} - \mathcal{E}_Y, \mathcal{E}_{X_1}^d)$. Alors on peut trouver une homotopie régulière parmi les immersions de $(M, M^d, {}_d M)$ dans $(N, N^d, {}_d N)$ qui coïncident avec g sur ${}_d M$, qui joint g à une immersion simple f telle que $(f_{X_1}, f_{X_1}^d, f_{X_1}, f_Y)$ soit isomorphe à $(\mathcal{E}_{X_1} - \mathcal{V}, \mathcal{E}_{X_1}^d - d\mathcal{V}, {}_d \mathcal{E}_{X_1}, \mathcal{E}_Y)$, où $(\mathcal{V}, d\mathcal{V})$ est un voisinage régulier ouvert de l'image de μ dans $(\mathcal{E}_{X_1}, \mathcal{E}_{X_1}^d)$ dont la fermeture ne rencontre pas $\mathcal{E}_Y$.

Lemme 3 : Soit U une variété de dimension $\epsilon + k$; pour tout plongement φ de (U, dU) dans (M, dM) , on pose $T = \varphi^{-1}(L)$ et $dT = \varphi^{-1}(dL)$. On suppose donné un tel plongement φ transverse à L ((T, dT) est donc une variété de dimension ϵ) tel que $\pi_i(U, T) = 0$ pour $i < j$ ($0 < j \leq \alpha$). Soit η un élément de $\pi_j(U, T)$; alors on peut trouver une isotopie parmi les plongements de (U, dU) dans (M, dM) qui coïncident avec φ sur dU , qui joint φ à un plongement $\hat{\varphi}$ tel que

$$a) \pi_i(U, \hat{T}) = 0 \text{ pour } i < j$$

b) Il existe une application surjective ξ de $\pi_j(U, T)$ sur $\pi_j(U, \hat{T})$ telle que $\xi(\eta)$ soit le point de base de $\pi_j(U, \hat{T})$.

Ces trois lemmes entraînent le lemme de régularisation : la démonstration se fait en deux temps

Premier temps : On montre que l'on peut se ramener au cas où $\pi_i(g_{X_1}, g_Y) = 0$ pour $i \leq \alpha$. Pour cela on montre que, pour tout $j \leq \alpha$, si $\pi_i(g_{X_1}, g_Y) = 0$ pour $i < j$, on peut, par une homotopie régulière transformer g en f telle que $\pi_i(f_{X_1}, f_Y) = 0$ pour $i \leq j$: On applique le lemme 3 à chacun des éléments d'un système de générateurs (fini) de $\pi_j(g_{X_1}, g_Y)$, ce qui donne une isotopie de plongements de g_{X_1} dans M , puis on déduit de cette isotopie une homotopie régulière de g à l'immersion f cherchée, en appliquant le lemme 1.

Deuxième temps : Si $\pi_i(g_{X_1}, g_Y) = 0$ pour $i \leq \alpha$, g_{X_1} est la réunion d'un voisinage régulier de $g_Y \cup g_{d_1}$ et d'anses de dimension strictement supérieure à α . On ordonne ces anses et on les enlève une à une par ordre de dimension décroissante, en appliquant le lemme 2. Ce qui termine la démonstration.

Démonstration du lemme 2 : On va montrer que l'on peut appliquer le lemme de réduction des immersions ; pour cela on va vérifier ses hypothèses

Hyp A : $a - \epsilon \geq 3$

Hyp B : C'est une conséquence de l'hypothèse c si on pose
 $h = k-1$

Hyp C : C'est l'hypothèse c puisque $u \leq \epsilon + k - \alpha - 1$

Hyp D : On doit montrer que $2u \leq 2(k-1) + (a+1) - 2 =$
 $= 2k + a - 3$; c'est une conséquence du fait que
 $u \leq \epsilon + k - \alpha - 1$ puisque $2\epsilon + 2k - 2\alpha - 2 = \epsilon + 2k + \beta - 2 \leq 2k + a - 3$

Hyp E : On doit démontrer que $\pi_i(X, X^d) \longrightarrow \pi_i(N, N^d)$
 est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour
 $i = u-1$. Pour cela on regarde le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_i(D^k, S^{k-1}) & = & \pi_i(N, N^d) & \xleftarrow{\sim} & \pi_i({}_dM, {}_dM^d) \\
 & \nearrow & \uparrow \varphi & & \uparrow \approx \\
 \pi_i(X, X^d) & = & \pi_i(X_1, X_1^d) & & \pi_i({}_dX_1, {}_dX_1^d) \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \approx \\
 & & \pi_i(X_1, X_1 - Y) & \xleftarrow{\gamma} & \pi_i({}_dX_1, {}_dX_1 - dY)
 \end{array}$$

Comme $X_1 - Y$ a le type d'homotopie de la réunion de
 X_1^d et d'anses D^v où $v \geq u$, β est un isomorphisme
 pour $i < u$. Pour démontrer que φ est un isomorphisme
 pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour $i = u-1$, et on
 démontre que γ est un isomorphisme pour $i \leq u-2$,
 et pour cela on démontre que

$$\delta : \pi_i(X_1 - Y, {}_dX_1 - dY) \longrightarrow \pi_i(X_1, {}_dX_1)$$

est un isomorphisme pour $i \leq u-2$ et est surjectif pour $i = u-1$. Puisque $\dim X_1 - \dim Y \geq 3$, et que $\pi_i(Y, dY) \longrightarrow \pi_i(X_1, {}_dX_1)$ est un isomorphisme pour $i < \alpha$ et est surjectif pour $i = \alpha$ (car $\pi_i(X_1, Y) = 0$ pour $i \leq \alpha$), on applique le lemme homotopique du §3, avec $\lambda = \alpha-1$, ce qui prouve que δ est un isomorphisme pour $i \leq (\alpha-1) + k-1 = \alpha + k-2 \geq u-2$, et est surjectif pour $i = u-1$.

Hyp F : Elle est trivialement vérifiée puisque

$$u \leq \epsilon + k - \alpha - 1 \text{ entraîne } u \leq \alpha + k - 4$$

Hyp G : C'est trivial puisque μ se factorise en

$$(D^u, S^{u-1}) \longrightarrow ({}^gX_1 - {}^gY, {}^gX_1^d) \longrightarrow (M-L, M^d) \longrightarrow (M, M^d)$$

et que $\pi_i(M-L, M^d) = 0$ pour tout i

Hyp H : On doit montrer que

$$\pi_i({}^gX_1 - \mu(D^u), {}^gX_1^d - \mu(S^{u-1})) \xrightarrow{\varphi} \pi_i({}^gX_1, {}^gX_1^d)$$

est un isomorphisme pour $i \leq u+2+\epsilon-\alpha \leq u-1$. Soit Z

le complémentaire d'un voisinage régulier de $\mu(D^u)$

dans gX_1 , et soit $Z^d = dZ - {}_dX_1$. $({}^gX_1 - \mu(D^u),$

${}^gX_1^d - \mu(S^{u-1}))$ est isomorphe à $(Z, Z^d - S^{\epsilon+k-u-1})$.

Regardons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_i(Z, Z^d) & \xleftarrow{\Psi} & \pi_i(Z, Z^d - S^{\epsilon+k-u-1}) = \pi_i(g_{X_1} - \mu(D^u), g_{X_1}^d - \mu(S^{u-1})) \\
 \eta \searrow & & \downarrow \varphi \\
 & & \pi_i(g_{X_1}, g_{X_1}^d) \\
 \eta' \swarrow & & \uparrow \beta \\
 \pi_i(Z, Z - g_Y) & \xrightarrow{\theta} & \pi_i(g_{X_1}, g_{X_1} - g_Y)
 \end{array}$$

On a vu (ci-dessus Hyp E) que β est un isomorphisme pour $i < u$; Ψ est un isomorphisme pour $i < u$ puisque $S^{\epsilon+k-u-1}$ est de codimension u dans Z^d ; η est un isomorphisme pour $i < u$ (car du fait que $Z-Y$ est la réunion de Z^d et d'anses de dimension au moins u , $\pi_i(Z-Y, Z^d)$ est nul pour $i < u$) ; et θ est un isomorphisme pour $i < u$ (On démontre que $\pi_i(g_{X_1} - g_Y, Z - g_Y) = \pi_i(g_{X_1} \times I - g_Y \times I, Z \times \{0\}) \xrightarrow{\omega} \pi_i(g_{X_1} \times I, Z \times \{0\}) = \pi_i(g_{X_1}, Z)$ est un isomorphisme pour $i \leq u-1$ et est surjectif pour $i = u$; ceci résulte de l'application du lemme homotopique du § 3 à l'inclusion $(g_Y \times I, g_Y \times \{0\}) \subset (g_{X_1} \times I, Z \times \{0\})$ avec $\lambda = \epsilon+k-u-1$, ce qui prouve que ω est un isomorphisme pour $i \leq \epsilon+k-u-1 + k-1 = \epsilon+2k-u-2 \geq u-1$, et est surjectif pour $i = u$).

Ceci termine la vérification des hypothèses du lemme de réduction des immersions ; on peut donc affirmer qu'il existe une homotopie régulière parmi les immersions de $(M, M^d, {}_dM)$ dans $(N, N^d, {}_dN)$ qui coïncident avec g sur ${}_dM$, qui joint g à une immersion simple f telle que $(f_{X_1}, f_{X_1}^d, f_{X_1})$ soit égal à $(g_{X_1} - \nu, g_{X_1}^d - d\nu, g_{X_1})$; où $(\nu, d\nu)$ est un voisinage régulier ouvert de l'image de μ . On veut de plus que Y ne change pas dans cette modification ; pour cela d'après le supplément au lemme de réduction des immersions (cf : §3, cinquième étape) il faut montrer le

Lemme 4 : Il existe un plongement $H : (D_+^{u+1}, D^u) \longrightarrow (M-L, M^d)$ tel que

$$a) H|_{S_+^u} = \mu \text{ (modulo une identification de } S_+^u \text{ avec } D^u)$$

$$b) H(D_+^{u+1} - S_+^u) \cap (g_{X_1} - Y) = \emptyset$$

$$c) H \text{ est normal à } g_{X_1} \text{ le long de } \mu(D^u)$$

Démonstration : On applique le lemme de plongement du §3 ; vérifions ses hypothèses

$$\text{Hyp } \alpha : (a+k) - (e+k) = a-e \geq 3$$

Hyp β : $\pi_i(g_{X_1} - g_Y, g_{X_1}^d) = 0$ pour $i < u$, puisque $g_{X_1} - g_Y$ est la réunion de $g_{X_1}^d$ et d'anses de dimension au moins égale à u ; ceci prouve l'hypothèse β puisque $\pi_i(M-L, M^d) = 0$ pour tout i .

Hyp γ : On sait que $\pi_i(M-L, M^d) = 0$ pour tout i .

Hyp δ : C'est trivial puisque $\pi_i(M-L, M^d) = 0$ pour tout i .

Hyp ϵ : Il suffit de montrer que $\pi_i(g_{X_1} - g_Y - \mu(D^u), g_{X_1}^d - \mu(S^{u-1}))$ est nul pour $i < u$; soit η un voisinage tubulaire fermé de $\mu(D^u)$ dans $g_{X_1} - g_Y$; soit T^d la réunion de $g_{X_1}^d \cap T$ et du bord relatif de η . On a un isomorphisme de $(T, T^d - S^{\epsilon+k-u-1})$ sur $(g_{X_1} - g_Y - \mu(D^u), g_{X_1}^d - \mu(S^{u-1}))$, $\pi_i(T, T^d) = \pi_i(T, T^d - S^{\epsilon+k-u-1})$ pour $i < u$ et $\pi_i(T, T^d) = 0$ pour $i < u$

puisque T est la réunion de T^d et d'anses de dimension au moins u ; ce qui termine la démonstration du lemme 4 et du lemme 2 .

Démonstration du lemme 3 : On va utiliser le bord (i.e. : $x = 0$) du modèle de déformation construit au §2 . Pour simplifier les notations on identifiera U et $\varphi(U)$, ainsi que T et $\varphi(T)$.

Premier temps : On construit un plongement H de (D_+^{j+1}, D^j, S_+^j) dans (M, U, L) , tel que

a) H est normal à U le long de $H(D^j)$ et $H^{-1}(U) = D^j$

b) H est normal à L le long de $H(S_+^j)$ et $H^{-1}(L) = S_+^j$

Pour cela on utilisera les deux lemmes suivants :

Lemme a : $\pi_i(M-U, L-T) = 0$ pour $i \leq j+1$.

Lemme b : $\pi_i(M-L, U-T) \longrightarrow \pi_i(M, U)$ est un isomorphisme pour $i \leq j+1$.

Construction de H : Soit $h : (D^j, S^{j-1}) \longrightarrow (U, T)$ un représentant de η , et soit $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ un voisinage régulier de (D^j, S^{j-1}) dans (D_+^{j+1}, S_+^j) ; par des considérations de champ normal on prolonge h en une application $\hat{h} : (\mathcal{V}, \mathcal{W}) \longrightarrow (M, L)$ tel que $\hat{h}^{-1}(U) = D^j$ et qui est normal à U le long de $h(D^j)$. Puisque $\pi_j(M-U, L-T) = 0$, $\hat{h}$ se prolonge en une application H de (D_+^{j+1}, D^j, S_+^j) dans (M, U, L) vérifiant la condition a . Puisque $2j+1 \leq \dim L$ et $2(j-1)+1 \leq \dim T$,

on peut (grâce aux théorèmes de plongement de Whitney) se ramener au cas où la fonction H vérifie a et où $H|_{S_+^i}$ est un plongement de (S_+^j, S_+^{j-1}) dans (L, T) . Par des considérations de champ normal, on se ramène au cas où H est normal à L le long de $H(S_+^j)$. D'après le lemme b , on peut alors, par une homotopie fixe au voisinage de S_+^j , se ramener au cas où H vérifie la condition b (et aussi la condition a). Puisque $2j+1 \leq \dim U$ et que $2(j+1)+1 \leq \dim M$, et grâce aux théorèmes de plongement de Whitney, on transforme alors H en un plongement. Il reste à démontrer les lemmes a et b .

Démonstration du lemme a : Soit (Q, P) un voisinage régulier de (L, T) dans (M, U) ; $\pi_i(M-U, L-T) = \pi_i(M-U, Q-P) = \pi_i(M \times I - U \times I, Q \times \{0\} - P \times \{0\})$. Or $\pi_i(U \times I, P \times \{0\}) = \pi_i(U, T) \longrightarrow \pi_i(M, L) = \pi_i(M \times I, P \times \{0\})$ est un isomorphisme pour $i \leq j-1$ et est surjectif pour $i = j$; donc par application du lemme homotopique du §3 avec $\lambda = j-1$, on obtient que $\pi_i(M \times I - U \times I, Q \times \{0\} - P \times \{0\}) \longrightarrow \pi_i(M \times I, L \times \{0\}) = 0$ est un isomorphisme pour $i \leq j-1 + \dim M - \dim U - 1 \geq j+1$.

Démonstration du lemme b : Si (A, B) est un voisinage régulier de (U, T) dans (M, L) , $\pi_i(M-L, U-T) = \pi_i(M \times I - L \times I, A \times \{0\} - B \times \{0\})$ et $\pi_i(M, U) = \pi_i(M \times I, A \times \{0\})$. Or $\pi_i(L \times I, B \times \{0\}) = \pi_i(L, T) \longrightarrow \pi_i(M, U) = \pi_i(M \times I, A \times \{0\})$ est un isomorphisme pour $i \leq j-1$ et est surjectif pour $i = j$; donc on peut appliquer le lemme homotopique à l'inclusion $(L \times I, B \times \{0\}) \subset (M \times I, A \times \{0\})$ avec $\lambda = j-1$, ce qui prouve que $\pi_i(M-L, U-T) \longrightarrow \pi_i(M, U)$ est un isomorphisme pour $i \leq (j-1) + \dim M - \dim L - 1 \geq j+1$.

Deuxième temps : Pour toute sous-variété B de A , notons $\nu_A(B)$ le fibré normal à B dans A ; pour tout fibré η de base X et tout $Y \subset X$, notons $\eta|_Y$ la restriction de η à Y ; on notera 1 les fibrés triviaux de rang 1 . En identifiant S_+^j , D^j , S^{j-1} et D_+^{j+1} à leurs images par H , on a les formules suivantes (où chaque signe $=$ désigne un isomorphisme de fibrés naturellement défini par la figure) :

$$\begin{cases} 1_a : (\nu_L(S_+^j))|S^{j-1} + 1 = \nu_T(S^{j-1}) + (\nu_L(T))|S^{j-1} \\ 1_b : (\nu_U(D^j))|S^{j-1} + 1 = \nu_T(S^{j-1}) + (\nu_U(T))|S^{j-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2_a : \nu_M(D^j) = \nu_U(D^j) + (\nu_M(U))|D^j = (\nu_M(D_+^{j+1}))|D^j + 1 \\ 2_b : \nu_M(S_+^j) = \nu_L(S_+^j) + (\nu_M(L))|S_+^j = (\nu_M(D_+^{j+1}))|S_+^j + 1 \end{cases}$$

$$3 : \begin{cases} \nu_L(T) = (\nu_M(U))|T \\ \nu_U(T) = (\nu_M(L))|T \end{cases}$$

Identifier un voisinage de $H(D_+^{j+1})$ au bord du modèle de déformation du §2, c'est trouver des trivialisations des fibrés $\nu_T(S^{j-1})$, $(\nu_L(T))|S^{j-1}$, $(\nu_U(T))|S^{j-1}$, $\nu_U(D^j)$, $(\nu_M(U))|D^j$, $\nu_L(S_+^j)$, $(\nu_M(L))|S_+^j$ et $\nu_M(D_+^{j+1})$, qui sont compatibles avec les isomorphismes $1_a, 1_b, 2_a$ et 2_b .

Choisissons arbitrairement des trivialisations de $(\nu_M(U))|D^j$, $(\nu_M(L))|S_+^j$ et $\nu_U(D^j)$; il existe une trivialisations et une seule de $\nu_M(D_+^{j+1})$ qui soit compatible avec 2_a . Puisque le fibré $\nu_T(S^{j-1})$ est de dimension au moins $j+1$, il possède une trivialisations et une seule qui soit compatible avec 1_b (compte tenu de $((\nu_M(U))|D^j)|S^{j-1} = (\nu_L(T))|S^{j-1}$). Il existe alors une trivialisations et une seule de $(\nu_L(S_+^j))|S^{j-1}$ qui

soit compatible avec 1_a . Cette trivialisation est compatible avec 2_b au dessus de S^{j-1} (puisque'elle n'est pas définie sur S_+^j tout entier). Ceci montre qu'elle est stablement prolongeable à $v_L(S_+^j)$ tout entier en une trivialisation compatible avec 2_b . Comme $\dim(v_L(S_+^j)) \geq j+2$, cette trivialisation stable définit une trivialisation de $v_L(S_+^j)$, qui est compatible avec 2_b et coïncide sur S^{j-1} avec celle que l'on a déjà choisie.

Troisième temps : Il reste à vérifier que la déformation ainsi définie a bien l'effet voulu ; c'est assez facile, je ne le ferai pas en détail puisque c'est tout à fait analogue à la démonstration du théorème 3 du chapitre de généralités sur la chirurgie.

§5 : La démonstration du théorème 2.

Convention de notations : Dans la suite on considérera des espaces $X, Y, \dots$ munis de sous-espaces notés $X^d, Y^d, \dots$. Chaque fois que l'on aura une application $(X, X^d) \longrightarrow (Y, Y^d)$, elle induira des isomorphismes $\pi_i(X, X^d) \longrightarrow \pi_i(Y, Y^d)$, quel que soit i . En fait il existera toujours une application $(D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (X, X^d)$, qui induit, pour tout i , un isomorphisme $\pi_i(D^k, S^{k-1}) \longrightarrow \pi_i(X, X^d)$. Si $(X, X^d, \tilde{X})$ ($dX = X^d \cup \tilde{X}$) est une sous-variété de codimension au moins 3 de $(Y, Y^d, \tilde{Y})$, d'après le lemme homotopique du §3, $\pi_i(Y-X, Y^d-X^d) \longrightarrow \pi_i(Y, Y^d)$ est aussi un isomorphisme pour tout i . Avant de commencer la démonstration du théorème 2, démontrons un lemme homotopique

Lemme 1 : Soit Y une variété dont le bord est subdivisé en Y^d, Y' et $\tilde{Y}$ (on pose $Y' \cap Y^d = Y'^d$ et $\tilde{Y} \cap Y^d = \tilde{Y}^d$).

1) Soit φ une application de $(S_+^x \times D^k, S_+^x \times S^{k-1}, S^{x-1} \times D^k)$ $(= (X, X^d, X'))$ dans $(\tilde{Y}, \tilde{Y} \cap Y^d, \tilde{Y} \cap Y')$. Alors si φ représente l'élément 0 de $\pi_x(Y, Y')$, elle se prolonge en une application $\tilde{\varphi}$ de $(D_+^{x+1} \times D^k, D_+^{x+1} \times S^{k-1}, D^x \times D^k)$ dans (Y, Y^d, Y') .

2) Soit $(Z, Z^d) \subset (Y, Y^d)$, et soit ψ une application de $(D^x \times D^k, D^x \times S^{k-1}) (\approx (Q, Q^d))$ dans (Y, Y^d) qui envoie $S^{x-1} \times D^k$ dans Z . Alors, si ψ définit l'élément 0 de $\pi_x(Y, Z)$, elle est homotope (parmi les applications qui coïncident avec elle sur $S^{x-1} \times D^k$) à une application de (Q, Q^d) dans (Z, Z^d) .

Démonstration : Les hypothèses que l'on a faites sur les $\pi_i(Y, Y^d)$ signifient que si η est une fibration de base Y qui a le type d'homotopie de Y^d , sa fibre a le type d'homotopie de S^{k-1} . Le problème 1 peut donc s'énoncer : étant donné un fibré ξ de fibre S^{k-1} sur D_+^{x+1} , une application fibrée (F, f) de $(\xi|_{S_+^x}, S_+^x)$ dans (η, Y) , et un prolongement g de f ($S_+^x \longrightarrow Y$) à D_+^{x+1} , prolonger F en une application fibrée (G, g) de (ξ, D_+^{x+1}) dans (η, Y) ; c'est possible puisque deux fibrés de base D_+^{x+1} qui coïncident sur S_+^x , sont isomorphes. Le problème 2 se résout de façon analogue.

Démonstration du théorème 2 : Elle est analogue à celle du théorème 1. On fait une récurrence sur $2n-p$. Pour $2n-p < 0$, le théorème 2 est une conséquence du théorème 1. On va montrer que s'il est vrai pour $2n-p < N$, il l'est aussi pour $2n-p = N$. Cette démonstration se fait en deux temps. Dans un premier temps (analogue au lemme 3 de la sixième étape du §3) on montre, en utilisant une première fois l'hypothèse de récurrence, que l'on peut se ramener au cas où l'immersion f est simple. Dans un second temps (analogue au lemme 1 de la sixième étape du §3), on enlève la self intersection de cette immersion en utilisant une nouvelle fois l'hypothèse de récurrence.

Premier temps : Montrons que l'immersion f donnée est régulièrement homotope à une immersion simple, parmi les immersions de (M, M^d, M', M'') dans (N, N^d, N', N'') qui coïncident avec f sur M'' .

La démonstration est calquée sur celle du lemme 3 de la sixième étape du §3. On épaissit T dans la décomposition de V donnée par le lemme 2 de la sixième étape du §3 ; on note P , M_0 et M_1 les restrictions de M à T , V_0 et V_1 ; on note P^d , M_0^d et M_1^d les fibrés en sphères correspondants. (M, M^d, M', M'') s'écrit donc :

$$\begin{array}{ccccc} (M_0, M_0^d, M', M'') & \cup & (P \times I, P^d \times I, P' \times I, P'' \times I) & \cup & (M_1, M_1^d, M', M'') \\ & & (P, P^d, P', P'') & & (P, P^d, P', P'') \end{array}$$

Lemme a : On peut se ramener au cas où $f|_{M_1}$ et $f|(M_0 \cup P \times [0, \epsilon])$ sont injectives.

On va faire la démonstration pour $f|_{M_1}$; on en ferait une analogue pour $f|(M_0 \cup P \times [0, \epsilon])$. M_1' est la réunion de $(M_1'' \cap M_1') \times I$ (sur lequel f est injective, puisque $f|_{M''}$ est injective) et d'anses de dimension inférieure ou égale à $n/2$. On démontrera donc le

Lemme a' : Soient A et B deux sous-variétés de V' . On suppose que B est la réunion de A et d'une anse de dimension q ($\leq n/2$) attachée le long du bord relatif ${}_d A$ de A dans V' , et que A est un voisinage régulier de la réunion de $A \cap V''$ et d'un sous-complexe de dimension au plus $n/2$. On note K et L les restrictions de M à A et B ; K^d et L^d sont les fibrés en sphères, ${}_d K$ est la restriction de M à ${}_d A$. Soit $\varphi : (L, L^d, L') \longrightarrow (N', N'^d, N' \cap N'')$ une immersion dont la

la restriction à $K \cup L''$ est injective. On peut trouver une homotopie régulière parmi les immersions de (L, L^d, L') dans $(N', N'^d, N' \cap N'')$ qui coïncident avec f sur $K \cup L''$, qui joint φ à une immersion injective.

Il est clair qu'en appliquant ce lemme à chacune des anses de la décomposition de V'_1 à partir de $V'_1 \cap V''_1$, on se ramène au cas où $f|_{M'_1}$ est injective. Ensuite, puisque V_1 est la réunion de $(V'_1 \cup V''_1) \times I$ et d'anses de dimension au plus $(n+2)/2$, par un raisonnement analogue (avec une dimension supérieure d'une unité) on se ramène au cas où $f|_{M_1}$ est injective.

Démonstration du lemme a' : $\varphi({}_dK)$ est une sous-variété de N' de codimension au moins 4, et $\pi_i({}_dK, {}_dK^d) \longrightarrow \pi_i(N', N'^d)$ est un isomorphisme pour tout i , donc $\pi_i(N' - \varphi({}_dK), N'^d - \varphi({}_dK^d)) \longrightarrow \pi_i(N', N'^d)$ est un isomorphisme pour tout i . De même $\varphi(K)$ est une sous-variété de codimension au moins 3 de $N' - \varphi({}_dK)$, et $\pi_i(K, K^d) \longrightarrow \pi_i(N' - \varphi({}_dK), N'^d - \varphi({}_dK^d))$ est un isomorphisme pour tout i , donc $\pi_i(N' - \varphi(K), N'^d - \varphi(K^d)) \longrightarrow \pi_i(N, N')$ est un isomorphisme pour tout i .

On sait qu'il existe un complexe A_0 de dimension au plus $n/2$, tel que A soit un voisinage régulier de $A_0 \cup (A \cap V'')$; posons $K|_{A_0} = K_0$; $\dim K_0 \leq k+n/2$. Identifions B à la section zéro de L . Il est clair que l'on peut se ramener au cas où $\varphi|_{B \cup K \cup L''}$ est injectif (puisque c'est vrai génériquement : $\dim B - (K \cap B) + \dim K_0 = q + (k+n/2) \leq n+k < p+k = \dim N'$), et donc aussi au cas où $\varphi(B - (B \cap K)) \subset N' - \varphi(K)$.

Par application de la deuxième assertion du lemme 1 ci-dessus (c'est possible puisque $\pi_i(N' - \varphi(K), N'^d - \varphi(K^d)) \longrightarrow \pi_i(N', N'^d)$ est un isomorphisme pour tout i) on peut donc se ramener au cas où $\varphi(L-K) \subset N' - \varphi(K)$.

Soit alors $\mathcal{U}$ un voisinage régulier de $\varphi(K)$ dans N' . On peut supposer que $\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathcal{U})}$ est injective, et que $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ est un voisinage régulier de K dans L . Posons $X = L - \varphi^{-1}(\mathcal{U})$ et $Y = N' - \mathcal{U}$; X est isomorphe à $D^q \times D^{n-1-q} \times D^k$, et $\varphi|_X$ définit une immersion $\eta: (D^q \times D^{n-1-q} \times D^k, D^q \times D^{n-1-q} \times S^{k-1}, S^{k-1} \times D^{n-1-q} \times D^k) \longrightarrow (Y, Y^d, Y'')$ (où $Y'' = \overline{dY - Y^d}$) dont la restriction à $S^{k-1} \times D^{n-1-q} \times D^k$ est injective. Il s'agit de transformer cette immersion en une immersion injective par homotopie régulière; il est clair qu'il suffit de le faire pour $D^q \times \{0\} \times D^k$, et ceci est une conséquence du théorème 1 ($\dim Y - (q+k) = p-1-q \geq 3$; $\pi_i(D^q \times D^k, D^q \times S^{k-1}) = 0$ pour $i \leq k-1$ et $2(q+k) - (p-1+k) \leq k-1$; $\pi_i(D^q \times D^k, D^q \times S^{k-1}) \longrightarrow \pi_i(Y, Y^d)$ est un isomorphisme pour tout i). Ce qui termine la démonstration du lemme a'.

Dans la suite on supposera donc toujours $f|_{M_1}$ et $f|(M_0 \cup P \times [0, \epsilon])$ injectives. Soit F l'immersion de $(P, P^d, P', P'') \times I \times (I, 0, 1)$ dans $(N, N^d, N', N'') \times (I, 0, 1)$ définie par

$$F(t, \alpha, \theta) = (f(t, ((1-\theta) + \theta \epsilon) \alpha), \theta)$$

On a

$$1) F|_{P \times I \times \{0\}} = f|_{P \times I}$$

$$2) F|P \times \{0\} \times I = (f|P \times \{0\}) \times \text{Id}_I$$

$$3) F(P \times I \times \{1\}) = f(P \times [0, \epsilon]) \text{ et } F|P \times I \times \{1\} \text{ est injective.}$$

Lemme b : F est régulièrement homotope à une immersion G telle que $G|P \times \{1\} \times I$ soit un plongement de $(P, P^d, P', P'') \times (I, 0, 1)$ dans $(N, N^d, N', N'') \times (I, 0, 1)$, parmi les immersions de $(P, P^d, P', P'') \times I \times (I, 0, 1)$ dans $(N, N^d, N', N'') \times (I, 0, 1)$ qui coïncident avec F sur $P \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I)$.

Démonstration : On applique l'hypothèse de récurrence à $F|P \times \{1\} \times I$:
 $(P \times I, P^d \times I, P' \times I, (P \times I)'') \longrightarrow (N \times I, N^d \times I, N' \times I, (N \times I)'')$.

$G|P \times \{1\} \times I$ est alors une pseudo-isotopie parmi les plongements de (P, P^d, P', P'') dans (N, N^d, N', N'') , qui se relève en une pseudo-isotopie $H : M_1 \times I \longrightarrow N \times I$. On définit alors $\Phi : M \times I \longrightarrow N \times I$ par $\Phi|M_0 \times I = (f|M_0) \times \text{Id}_I$, $\Phi|(P \times I) \times I = G$ et $\Phi|M_1 \times I = H$. C'est une immersion, et $\Phi|M \times \{1\}$ est l'immersion simple cherchée.

Deuxième temps : On suppose maintenant que l'immersion f est simple ; on va démontrer que l'on peut enlever sa self intersection.

L'immersion f étant simple, on peut appliquer le lemme de régularisation successivement à $f|M'$ (pour régulariser sur le bord) puis à f elle-même. On se ramène ainsi au cas où la self intersection (X, X^d, X') est un fibré en boules D^k sur une variété (Y, dY) de dimension $2n-p$. On va faire disparaître X en otant des anses à (Y, dY) par ordre de dimension décroissante. Supposons donc que Y soit une réunion d'anses de dimension au plus $2n-p-u$. Pour montrer que l'on peut enlever une anse de

dimension $2n-p-u$, on va montrer que l'on peut enlever un voisinage régulier d'un plongement $\mu : (D^u, S^{u-1}) \longrightarrow (Y, dY)$. Pour cela on utilise le produit par D^k du modèle de déformation du §2. On va donc plonger dans la figure $(N, f(M))$ le produit par D^k de la figure décrite au §2. On démontrera d'abord deux lemmes.

Lemme 2 : Soit (E, E^d, E') de dimension $q+k$, et soit (D, D^d, D') le complémentaire d'un voisinage régulier de $\overline{S_+^x \times D^k}$ dans $\overline{(D_+^{x+1} \times D^k, D^{x+1} \times S^{k-1}, D^x \times D^k)}$. On pose $\tilde{D} = \overline{dD - D^d - D'}$ et $\tilde{E} = \overline{dE - E^d - E'}$. On suppose donner un plongement φ de $(\tilde{D}, \tilde{D} \cap D^d, \tilde{D} \cap D')$ dans $(\tilde{E}, \tilde{E} \cap E^d, \tilde{E} \cap E')$. On suppose

- 1) φ représente 0 dans $\pi_x(E, E')$
- 2) $q+k-x \geq 4$ et $2x-q-k+2 < N$
- 3) $\pi_i(E, E') = 0$ pour $i \leq 2x-q-k+3$

Alors φ se prolonge en un plongement Φ de $(D, D^d, D', \tilde{D})$ dans $(E, E^d, E', \tilde{E})$.

Démonstration : Le lemme 1 permet d'affirmer que φ se prolonge en une application Φ de (D, D^d, D', D) dans (E, E^d, E', E) . On peut supposer que Φ est une immersion. On la transforme alors en un plongement grâce à l'hypothèse de récurrence sur le théorème 2 ; c'est possible à cause des hypothèses 2 et 3, et du fait que $\pi_i(D, D') = 0$ pour tout i .

Lemme 3 : Soit $(Z, Z^d, Z', \emptyset)$ une sous-variété de (C, C^d, C', C'') ($\dim Z = 2n-p+k$ et $\dim C = n+k$ avec $p-n \geq 3$ et $2n-p = N$) . Soit $\hat{\mu} : (S_+^u \times D^k, S_+^u \times S^{k-1}, S^{u-1} \times D^k) (\approx (S, S^d, S')) \longrightarrow (Z, Z^d, Z')$ un plongement. On suppose

$$a) \quad \pi_i(Z, Z') = 0 \quad \text{pour } i < u$$

$$b) \quad \pi_i(C, C') = 0 \quad \text{pour } i \leq u$$

Alors $\hat{\mu}$ se prolonge en un plongement

$$H : (D_+^{u+1} \times D^k, D_+^{u+1} \times S^{k-1}, D^u \times D^k) \longrightarrow (C, C^d, C')$$

tel que

$$a) \quad H((D_+^{u+1} - S_+^u) \times D^k) \cap Z = \emptyset$$

$$b) \quad (\text{si } u < 2n-p) \quad H(D_+^{u+1} \times D^k) \text{ est normal à } Z \text{ le long de } \hat{\mu}(S_+^u \times D^k).$$

Démonstration : Ce lemme est l'analogue du lemme de plongement du §3, sa démonstration est analogue à la troisième étape de §3.

A) Si $u = 2n-p$: $\text{Im } \hat{\mu}$ est une composante connexe de Z . Posons $Y = Z - \text{Im } \hat{\mu}$. En appliquant le lemme homotopique du §3 à l'inclusion $(Y, Y') \subset (C, C')$ avec $\lambda = 2n-p-1 = u-1$ (cf : Hyp a et b) on voit que $\pi_i(C-Y, C'-Y') \longrightarrow \pi_i(C, C')$ est un isomorphisme pour $i \leq (2n-p-1) + (n+k) - (2n-p+k) - 1 = n-2 \geq 2n-p$; donc $\pi_i(C-Y, C'-Y') = 0$ pour $i \leq 2n-p = u$. On note alors (D, D^d, D') le complémentaire d'un voisinage régulier de Y dans (C, C^d, C') .

Soit $H_0 : (D_+^{u+1} \times D^k, D_+^{u+1} \times S^{k-1}, D^u \times D^k) (\approx (Q, Q^d, Q')) \longrightarrow (D, D^d, D')$

un plongement quelconque, et soit $\hat{\mu}_0 = H_0|_S$. D'après le lemme 1, $\hat{\mu}$ et

$\hat{\mu}_0$ sont homotopes ; donc il existe une homotopie régulière φ de $\hat{\mu}$ à $\hat{\mu}_0$

parmi les immersions de (S, S^d, S') dans (D, D^d, D') . Il est clair qu'il

suffit de montrer que $\hat{\mu}$ et $\hat{\mu}_0$ sont pseudo-idotopes parmi les plonge-

ments de (S, S^d, S') dans (D, D^d, D') ; pour cela on va montrer que l'im-

mersion $\varphi : (S \times I, S^d \times I, S' \times I, S \times \{0, 1\}) \longrightarrow (D \times I, D^d \times I, D' \times I, D \times \{0, 1\})$ est

régulièrement homotope à un plongement parmi les immersions qui coïncident

avec φ sur $S \times \{0, 1\}$. C'est une conséquence de l'hypothèse de ré-

currence sur le théorème 2, puisque $2(u+1)-(n+1) < N$, $(n+1)-(u+1) \geq 3$,

$\pi_i(S, S') = 0$ pour $i \leq u-1$ ($\geq 2(u+1)-(n+1)$) et $\pi_i(D, D') = 0$ pour

$i \leq 2n-p$ ($\geq 2(u+1)-(n+1) + 1$).

B) Si $u < 2n-p$: par application du lemme homotopique du §3 avec $\lambda = u-1$

(cf: Hyp a et b), on voit que $\pi_i(C-Z, C'-Z') \longrightarrow \pi_i(C, C')$ est un iso-

morphisme pour $i \leq (u-1)+p-n-1 \geq u+1$; donc $\pi_i(C-Z, C'-Z') = 0$ pour

$i \leq u$. Soit (E, E^d, E') le complémentaire d'un voisinage régulier ouvert

η de Z dans (C, C^d, C') ; on a $\pi_i(E, E') = 0$ pour $i \leq u$. Soit (D, D^d, D'')

le complémentaire d'un voisinage régulier ouvert ν de $S_+^u \times D^k$ dans

$(D_+^{u+1} \times D^k, D_+^{u+1} \times S^{k-1}, D^u \times D^k)$ (On pose $\tilde{D} = \overline{dD - D^d - D'}$). On prolonge

$\hat{\mu}$ en un plongement de ν dans η qui vérifie la condition b, et qui

définit un plongement f de $\tilde{D}$ dans $\tilde{E} = \overline{dE - E^d - E'}$. Il s'agit de prolon-

ger f en un plongement de $(D, D^d, D', \tilde{D})$ dans $(E, E^d, E', \tilde{E})$; pour cela il

suffit d'appliquer le lemme 2.

Plongement du modèle de déformation : Le plongement μ de $(D^u, S^{u-1}) \approx (S_+^u, S^{u-1}) \longrightarrow (Y, dY)$, se prolonge en un plongement $\bar{\mu}$ de $(S_+^u \times D^k, S_+^u \times S^{k-1}, S^{u-1} \times D^k)$ dans (X, X^d, X') . On applique d'abord le lemme 3 avec $(C, C^d, C') = (M, M^d, M')$, $Z = f^{-1}(X)$, et $\hat{\mu}$ étant l'un des deux plongements de $S_+^u \times D^k$ dans Z tels que $f \cdot \hat{\mu} = \bar{\mu}$. Il est clair que l'hypothèse b résulte du fait que Y est la réunion de dY et d'anses de dimension au moins u . On obtient ainsi un plongement H de $D_+^{u+1} \times D^k$ dans M . On notera Z_0 la composante connexe de $f^{-1}(X)$ qui contient $\hat{\mu}(S^u \times D^k)$.

On applique alors une seconde fois le lemme 3, en prenant pour

1) (C, C^d, C') le complémentaire d'un voisinage régulier de $Z_0 \cup H(D_+^{u+1} \times D^k)$ dans (M, M^d, M')

2) $Z = f^{-1}(X) - Z_0$

3) $\hat{\mu}$ le seul plongement de $S_+^u \times D^k$ dans Z tel que $f \cdot \hat{\mu} = \bar{\mu}$.

L'hypothèse a du lemme 3 est vérifiée car Y est la réunion de dY et d'anses de dimension au moins u ; on va vérifier l'hypothèse b :

$\alpha)$ Si $u < 2n-p$: $\pi_i(Z_0, Z'_0) \longrightarrow \pi_i(M, M')$ est un isomorphisme pour $i \leq u-1$ et est surjectif pour $i = u$ (puisque $\pi_i(Z_0, Z'_0) = \pi_i(Y, dY) = 0$ pour $i \leq u-1$, et que $\pi_i(M, M') = 0$ pour $i \leq 2n-p (> u)$) ; en appliquant le lemme homotopique avec $\lambda=u-1$, on voit que $\pi_i(M-Z_0, M'-Z'_0) \longrightarrow \pi_i(M, M')$ est un isomorphisme pour $i \leq (u-1)+(n+k)-(2n-p+k)-1 = u+(n-p-2) \geq u$; donc $\pi_i(M-Z_0, M'-Z'_0) = 0$

pour $i \leq u$. On applique alors le lemme homotopique à

$h : (D_+^{u+1} - S_+^u) \times D^k \longrightarrow M-Z_0$ avec $\lambda = u-1$, pour montrer que

$\pi_i(C, C') = \pi_i(M-(Z_0 \cup H(D_+^{u+1} \times D^k)), M'-(Z'_0 \cup H(D^u \times D^k))) \longrightarrow$

$\pi_i(M-Z_0, M'-Z'_0)$ est un isomorphisme pour $i \leq (u-1)+(n+k)-(u+1)-1 =$
 $= n+k-3 \geq u$; donc $\pi_i(C, C') = 0$ pour $i \leq u$.

β) Si $u = 2n-p$: (C, C') a le type d'homotopie de $(V, V'$ -un point),

donc $\pi_i(C, C') \longrightarrow \pi_i(V, V')$ est un isomorphisme pour $i \leq n+k-3$

($\geq 2n-p$), ce qui prouve l'hypothèse b puisque $\pi_i(V, V') = 0$

pour $i \leq 2n-p$.

On a ainsi plongé dans la figure $(N, f(M))$ le produit par D^k de $S_+^{u+1} \cup D_+^{u+1}$. On prolonge en un plongement ψ du produit par D^k d'un voisinage de $S_+^{u+1} \cup D_+^{u+1}$ dans D_{++}^{u+2} , grâce à des considérations de champs normaux. On veut prolonger ce plongement en un plongement de $D_{++}^{u+2} \times D^k$. Soit (E, E^d, E') le complémentaire d'un voisinage régulier de $f(M)$ dans (N, N^d, N') , et soit (D, D^d, D') le complémentaire d'un voisinage régulier de $(S_{++}^{u+1} \cup D_+^{u+1}) \times D^k$ dans $(D_{++}^{u+2} \times D^k, D_{++}^{u+2} \times S^{k-1}, \overline{d(D_{++}^{u+2}) - (S_{++}^{u+1} \cup D_+^{u+1}) \times D^k})$; on retrouve la figure du lemme 2; il suffit d'appliquer ce lemme, démontrons donc que ses hypothèses sont vérifiées :

Hyp 1 : Par une double application du lemme homotopique on montre que

les homomorphismes $\pi_i(E, E') \longrightarrow \pi_i(N-f(M), N'-f(M')) \longrightarrow$

$\pi_i(N-X, N'-X') \longrightarrow \pi_i(N, N') = \pi_i(W, W')$ sont des isomorphismes pour

$i \leq u+1$. Donc pour vérifier l'hypothèse 1 il suffit de vérifier

que l'image de ψ dans $\pi_{u+1}(W, W')$ est nulle. Si $u < 2n-p$,

$\pi_{u+1}(W, W') = 0$, donc c'est vrai . Si $u = 2n-p$, c'est vrai pourvu que l'on ait bien choisi la classe d'homotopie du plongement de S_{++}^{u+1} (construit dans la seconde application du lemme 3). En effet on a choisi librement la classe d'homotopie de ce plongement dans $(M-(f^{-1}(X) \cup H(D_+^{u+1} \times D^k)), M'-(f^{-1}(X') \cup H(D^u \times D^k)))$ et les homomorphismes $\pi_{2n-p+1}(M-(f^{-1}(X) \cup H(D_+^{u+1} \times D^k)), M'-(f^{-1}(X') \cup H(D^u \times D^k))) \longrightarrow \pi_{2n-p+1}(V, V') \longrightarrow \pi_{2n-p+1}(W, W')$ sont surjectifs.

Hyp 2 : $(p+k)-(u+1) \geq 4$ et $2(u+1)-(p+k)+2 < u \leq N$

Hyp 3 : On vient de voir (Hyp 1) que $\pi_i(E, E') = 0$ pour $i \leq 2n-p$ ($\geq 2(u+1)-(p+k)+3$) .

Par une considération de champ normal on prolonge alors le plongement de $D_{++}^{u+2} \times D^k$ que l'on a obtenu, en un plongement du produit par D^k du modèle de déformation du §2 . Il est clair que la déformation correspondante à l'effet cherché.

§ 6 : La démonstration du théorème 3.

Remarquons d'abord que f est régulièrement homotope, parmi les immersions qui vérifient la condition 4, à une immersion (que l'on notera encore f) qui vérifie la condition

(4') : $f|_{M'} : M' \longrightarrow N'$ est de la forme $f_0 \times \text{Id}_{D^k}$, où f_0 est une immersion de V' dans W' .

Comme cette condition $4'$ entraîne la condition 4 , on va déformer f en un plongement parmi les immersions qui vérifient $4'$.

Pour cela on fait une récurrence sur $2n-p$. Pour $2n-p < 0$ il n'y a rien à démontrer : $f|_{M'} : M' \longrightarrow N'$ est génériquement un plongement (théorème de Whitney) et f est régulièrement homotope à un plongement modulo $f|_{M'}$ par application du théorème 1. On va donc démontrer le pas de la récurrence : supposons que le théorème soit démontré pour $2n-p < N$, et considérons le cas où $2n-p = N$. Dans un premier temps on démontre que f peut être déformée en une immersion simple ; ceci est analogue au premier temps du §5 : il suffit de vérifier que dans chaque construction on peut s'arranger pour que la condition $4'$ soit vérifiée ; on utilise une première fois l'hypothèse de récurrence. Dans un deuxième temps on enlève la self-intersection de cette immersion simple. Pour cela on applique le lemme de régularisation (une seule fois sur l'intérieur, puisque la partie de la self-intersection qui est dans N' est déjà de la forme $dY \times D^k$ à cause de la condition $4'$), puis on considère une présentation par anses ordonnée de (Y, dY) , et on enlève les anses par ordre croissant des dimensions. Pour enlever une telle anse on plonge dans la figure le produit par D^k du modèle de déformation du §2. Pour que la déformation respecte la condition $4'$, il faut que ce plongement φ vérifie la condition

$$(4'') \quad \varphi|_{(\text{Bord du modèle}) \times D^k} = \varphi_0 \times \text{Id}_{D^k} \quad (\text{où le bord du modèle est la partie définie par } x = 0).$$

Pour construire un tel plongement on prend le plongement que l'on a défini au §5, et on l'isotepe en un plongement qui vérifie $4''$, en utilisant une seconde fois l'hypothèse de récurrence.

CHAPITRE 4 : PLONGEMENTS DE COMPLEXES DE POINCARÉ ET DECOMPOSITION EN ANSES.

Nous allons voir comment les théorèmes de plongement de variétés obtenus précédemment, s'interprètent dans le cadre des complexes de Poincaré. Pour cela il faut d'abord définir une notion naturelle de plongement de complexes de Poincaré. Elle sera obtenue en transposant dans la catégorie des complexes de Poincaré la remarque suivante : si $f : X^n \longrightarrow Y^p$ est un plongement de variétés différentiables, on a un partage $Y = N_1 \cup N_2$ en deux sous variétés de codimension zéro tel que N_1 est un fibré vectoriel en boules de dimension $p-n$ de base $f(X)$.

§1 - Plongements de complexes de Poincaré.

Définition 1 : Soit $f : X^n \longrightarrow Y^p$ une application entre deux complexes de Poincaré sans bord de dimensions respectives n et p .

Un plongement de complexes de Poincaré homotope à f est la donnée (notée Φ) de :

1) $(N_1, dN)^p, (N_2, dN)^p$ deux complexes de Poincaré de dimension p de même bord dN .

2) $\Psi : N_1 \underset{dN}{\cup} N_2 \longrightarrow Y$ équivalence d'homotopie simple

3) $\varphi : N_1 \longrightarrow X$ équivalence d'homotopie simple

Vérifiant

$$i) \quad \Psi|_{N_1} \sim f_* \varphi$$

ii) $\varphi|_{dN} : dN \longrightarrow X$ a le type d'homotopie d'une fibration sphérique de dimension $p-n$ appelée fibration normale du plongement Φ et notée ν_Φ .

Remarques

1) Si $p-n \geq 3$ et si la paire (N_1, dN) est 2-connexe, le théorème de Spivak assure que la condition ii) est automatiquement vérifiée.

2) Dans $\tilde{k}_G(X)$ on a $\nu_\Phi = \nu_X - f^* \nu_Y$.

3) Si $p-n \geq 3$, $\Psi_* : \pi_1(N_2) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme car $\pi_1(dN) \longrightarrow \pi_1(N_1)$ est un isomorphisme puisque la fibre de ν_Φ est simplement connexe.

Définition 2 :

Soient $(X, dX)^n$ et $(Y, dY)^p$ deux complexes de Poincaré à bord de dimension n et p , soit $f : (X, dX) \longrightarrow (Y, dY)$. Un plongement de complexes de Poincaré homotope à f est la donnée, notée Φ , de :

1) $(N_1, dN_1)^p$, $(N_2, dN_2)^p$ deux complexes de Poincaré à bord de dimension p avec découpage des bords :

$$dN_1 = N_1' \cup_{dT} T, \quad dN_2 = N_2' \cup_{dT} T$$

CHAPITRE 4 : PLONGEMENTS DE COMPLEXES DE POINCARÉ ET DECOMPOSITION EN ANSES.

Nous allons voir comment les théorèmes de plongement de variétés obtenus précédemment, s'interprètent dans le cadre des complexes de Poincaré. Pour cela il faut d'abord définir une notion naturelle de plongement de complexes de Poincaré. Elle sera obtenue en transposant dans la catégorie des complexes de Poincaré la remarque suivante : si $f : X^n \longrightarrow Y^p$ est un plongement de variétés différentiables, on a un partage $Y = N_1 \cup N_2$ en deux sous variétés de codimension zéro tel que N_1 est un fibré vectoriel en boules de dimension $p-n$ de base $f(X)$.

§1 - Plongements de complexes de Poincaré.

Définition 1 : Soit $f : X^n \longrightarrow Y^p$ une application entre deux complexes de Poincaré sans bord de dimensions respectives n et p .

Un plongement de complexes de Poincaré homotope à f est la donnée (notée Φ) de :

1) $(N_1, dN)^p, (N_2, dN)^p$ deux complexes de Poincaré de dimension p de même bord dN .

2) $\Psi : N_1 \underset{dN}{\cup} N_2 \longrightarrow Y$ équivalence d'homotopie simple

3) $\varphi : N_1 \longrightarrow X$ équivalence d'homotopie simple

Vérifiant

$$i) \quad \Psi|_{N_1} \sim f_* \varphi$$

ii) $\varphi|_{dN} : dN \longrightarrow X$ a le type d'homotopie d'une fibration sphérique de dimension $p-n$ appelée fibration normale du plongement Φ et notée ν_Φ .

Remarques

1) Si $p-n \geq 3$ et si la paire (N_1, dN) est 2-connexe, le théorème de Spivak assure que la condition ii) est automatiquement vérifiée.

2) Dans $\tilde{k}_G(X)$ on a $\nu_\Phi = \nu_X - f^* \nu_Y$.

3) Si $p-n \geq 3$, $\Psi_* : \pi_1(N_2) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme car $\pi_1(dN) \longrightarrow \pi_1(N_1)$ est un isomorphisme puisque la fibre de ν_Φ est simplement connexe.

Définition 2 :

Soient $(X, dX)^n$ et $(Y, dY)^p$ deux complexes de Poincaré à bord de dimension n et p , soit $f : (X, dX) \longrightarrow (Y, dY)$. Un plongement de complexes de Poincaré homotope à f est la donnée, notée Φ , de :

1) $(N_1, dN_1)^p$, $(N_2, dN_2)^p$ deux complexes de Poincaré à bord de dimension p avec découpage des bords :

$$dN_1 = N_1' \cup_{dT} T, \quad dN_2 = N_2' \cup_{dT} T$$

$$2) \psi : (N_1 \cup_T N_2, N'_1 \cup_{dT} N'_2) \longrightarrow (Y, dY) \text{ équivalence d'homotopie simple.}$$

$$3) \varphi : (N_1, N'_1) \longrightarrow (X, dX) \text{ équivalence d'homotopie simple.}$$

Vérifiant :

$$i) \psi|_{(N_1, N'_1)} \sim f_0 \circ \varphi$$

ii) $\varphi|_T$ et $\varphi|_{dT}$ ont le type d'homotopie de fibrations sphériques de dimension $p-n$.

Remarque : Par restriction Φ induit un plongement $dX \longrightarrow dY$.

Equivalence : Φ et Φ' deux plongements de complexes de Poincaré homotopes à $f : X^n \longrightarrow Y^p$ sont équivalents s'il existe $\alpha_1 : (N_1, dN) \longrightarrow (N'_1, dN')$ et $\alpha_2 : (N_2, dN) \longrightarrow (N'_2, dN')$ deux équivalences d'homotopie simples, égales sur dN , telles que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \alpha_1 \downarrow & & \uparrow \varphi \\ N'_1 & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \alpha_1 \downarrow & & \uparrow \psi' \\ N'_1 & & \end{array}$$

$\alpha_1 \cup \alpha_2$

soient homotopiquement commutatifs.

On a une extension manifeste de la notion d'équivalence au cas à bord.

Plongements concordants :

Φ et Φ' deux plongements de complexes de Poincaré homotopes à $f : X \longrightarrow Y$ sont dits concordants s'il existe un plongement de complexes de Poincaré Ψ homotope à $f \times \text{Id} : (X \times I, X \times dI) \longrightarrow (Y \times I, Y \times dI)$ induisant Φ sur $X \times \{0\}$ et Φ' sur $X \times \{1\}$.

Proposition 1

Deux plongements de complexes de Poincaré homotopes à $f : X^n \longrightarrow Y^p$ équivalents sont concordants. Réciproquement si $p-n \geq 3$ deux plongements de complexes de Poincaré homotopes à $f : X^n \longrightarrow Y^p$, concordants sont équivalents.

Démonstration :

La première assertion est évidente en considérant les mapping-cylindres des équivalences d'homotopies $\alpha_1(N_1, dN) \longrightarrow (N'_1, dN')$ avec les notations précédentes.

Soient $\Phi = (N_1, dN, N_2, \varphi, \Psi)$, $\Phi' = (N'_1, dN', N'_2, \varphi', \Psi')$ deux plongements et $\Psi = ((M_1, dM_1)^{p+1}, (M_2, dM_2)^{p+1}, \overline{\varphi}, \overline{\Psi})$ avec $dM_1 = (N_1 \cup N'_1) \underset{dT}{\cup} T$ et $dM_2 = (N_2 \cup N'_2) \underset{dT}{\cup} T$, une concordance entre Φ et Φ' .

Montrons l'existence d'une équivalence d'homotopie simple :

$$h : (N_1 \times I, dN \times I, N_1 \times 0, N_1 \times 1) \longrightarrow (M_1, T, N_1, N'_1)$$

qui est l'identité sur $N_1 \times 0$ et telle que $\bar{\varphi} \circ h \sim \bar{\varphi} \times \text{Id}$.

Comme $\bar{\varphi} | T : T \longrightarrow X \times I$ a le type d'homotopie d'une fibration sphérique, il en résulte que l'inclusion $dN \hookrightarrow T$ (inclusion de la fibration sur $X \times 0$ dans la fibration sur $X \times I$) est une équivalence d'homotopie simple. De même pour $dN' \hookrightarrow T$.

Comme $\bar{\varphi} : M_1 \longrightarrow X \times I$ est une équivalence d'homotopie simple induisant $\varphi : N_1 \longrightarrow X \times 0$ et $\varphi' : N'_1 \longrightarrow X \times 1$ il en résulte que les inclusions $(N_1, dN) \hookrightarrow (M_1, T)$ et $(N'_1, dN') \hookrightarrow (M_1, T)$ le sont aussi, d'où l'existence de h .

Comme $p-n \geq 3$, d'après la remarque qui suit la définition 1, on a des isomorphismes $\pi_1(N_2) \longrightarrow \pi_1(Y)$, $\pi_1(N'_2) \longrightarrow \pi_1(Y)$, $\pi_1(M_2) \longrightarrow \pi_1(M \times I)$ et donc les inclusions $N_2 \hookrightarrow M_2$ et $N'_2 \hookrightarrow M_2$ induisent des isomorphismes sur les π_1 .

De plus, il n'est pas bien difficile de voir, par excision et en utilisant le fait que $dN \hookrightarrow T$ et $N_1 \hookrightarrow M$, sont des équivalences simples, que $C_*(\tilde{M}_2, \tilde{N}_2)$ est un A_{M_2} -complexe acyclique sans torsion ; donc que $N_2 \hookrightarrow M_2$ (et de même $N'_2 \hookrightarrow M_2$) est une équivalence d'homotopie simple.

On en déduit comme précédemment une équivalence simple

$$k : (N_2 \times I, dN \times I, N_2 \times 0, N_2 \times 1) \longrightarrow (M_2, T, N_2, N'_2)$$

qui coïncide avec Id sur $N_2 \times 0$ et avec h sur $dN \times I$.

Les restrictions $h : N_1 \times 1 \longrightarrow N'_1$ et $k : N_2 \times 1 \longrightarrow N'_2$.

Construisent l'équivalence entre Φ et Φ' .

Remarque : Si on développe les mêmes notions d'équivalence et de concordance pour le cas à bord, on a la même proposition .

§2 - Procédé pour obtenir des plongements de complexes de Poincaré .

La plupart des plongements de complexes de Poincaré seront obtenus par la construction suivante à partir de plongements de variétés.

Par variétés nous entendons variétés différentiables ou variétés

P.L.

Dans la catégorie différentiable les plongements sont les plongements différentiables et la théorie des fibrés est celle des fibrés vectoriels.

Dans la catégorie P.L., les plongements sont supposés être localement plats (le plus souvent cela ne sera pas une restriction car nous travaillerons en codimension ≥ 3) et par fibré nous entendons suivant les cas pseudofibrés P.L. (P.L. block bundles) ou bien microfibrés P.L.

Soit $f : X^n \longrightarrow Y^p$ une application entre deux complexes de Poincaré de dimension n et p .

Soit $(\bar{X}, d\bar{X}, \pi, p)$ un fibré homotopique en boules de dimension k sur X , $\pi : \bar{X} \longrightarrow X$ la projection (c'est une équivalence d'homotopie simple) , $s : X \longrightarrow \bar{X}$ la section nulle, $\bar{X}$ étant une variété de dimension $n+k$ de bord $d\bar{X}$.

Soit de même $(\bar{Y}, d\bar{Y}, \pi', s')$ un fibré homotopique en boules de dimension k sur Y , $\bar{Y}$ étant une variété de dimension $p + k$ de bord $d\bar{Y}$.

Et soit enfin $\bar{f} : (\bar{X}, d\bar{X}) \longrightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})$ un plongement de variétés étendant f à homotopie près.

Soit N_1 un voisinage tubulaire ou régulier de $\bar{f}(\bar{X})$. Posons $dN_1 = N'_1 \cup N''_1$ avec $N'_1 = \text{adhérence de } dN \cap \text{Int } \bar{Y}$ et $N''_1 = dN \cap d\bar{Y}$. alors (N_1, N') est un fibré en boules de dimension $p-n$ sur $\bar{X}$, comme $\bar{X}$ est un complexe de Poincaré de dimension n , (N_1, N') est un complexe de Poincaré à bord de dimension p . Si r est la projection $N \longrightarrow \bar{X}$, $\pi_0 r : N \longrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie simple.

Soit $N_2 = \text{adhérence } (\text{Int } \bar{Y} - \text{Int } N_1)$ et $dN_2 = N' \cup N''_2$.
Si $p-n \geq 3$, $\pi_1(\bar{Y} - \bar{f}(\bar{X})) \longrightarrow \pi_1(\bar{Y})$ est un isomorphisme donc aussi $\pi_1(N_2) \longrightarrow \pi_1(\bar{Y})$. Par découpage il vient que (N_2, N') est un complexe de Poincaré à bord de dimension p , et $\pi' : \bar{Y} = N_1 \cup_{N'} N_2 \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie simple. Cela définit un plongement de complexe de Poincaré homotope à f que l'on dit associé au plongement $\bar{f} : (\bar{X}, d\bar{X}) \longrightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})$.

Remarque 1 : Si $k = 0$ i.e. si X^n et Y^p sont munis de structure de variétés et si $\bar{f}$ est un plongement de variétés homotope à f , la construction précédente associe à $\bar{f}$ le plongement de complexe de Poincaré formé du fibré normal à $\bar{f}$ et de son complémentaire.

Remarque 2 : Si $\bar{f}$ et $\bar{f}'(\bar{X}, d\bar{X})^{n+k} \longrightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})^{p+k}$ sont pseudo isotopes les plongements de complexes de Poincaré associés sont concordants et d'après la proposition 1, équivalents ($p-n \geq 3$).

Remarque 3 : Par le procédé précédent on obtient toujours des plongements de complexes de Poincaré dont la fibration normale admet une réduction vectorielle ou P.L. .

Remarque 4 : Dans le cas à bord on a un procédé analogue (pour $p-n \geq 3$) en partant d'un plongement de variétés $\bar{f} : (\bar{X}, \bar{X}', \bar{X}'')^{n+k} \longrightarrow (\bar{Y}, \bar{Y}', \bar{Y}'')^{p+k}$ où $\bar{X}', \bar{X}''$ est un partage de $d\bar{X}$, $\pi : (\bar{X}, \bar{X}'') \longrightarrow (X, dX)$ est une équivalence d'homotopie simple telle que $\pi|_{\bar{X}'} : (\bar{X}', \bar{X}'' \cap \bar{X}'') \longrightarrow (X, dX)$ ait le type d'homotopie d'une fibration sphérique de dimension k ; de même pour $(\bar{Y}, \bar{Y}', \bar{Y}'')$ et (Y, dY) .

§3-Théorèmes de plongement

Théorème 1 (Théorème de plongement de Whitney)

Soit $f : X^n \longrightarrow Y^p$ une application entre deux complexes de Poincaré de dimension n et p telle que $p-n \geq 3$ et $\nu_X - f^k(\nu_Y) = 0$ dans $k_G(X)$.

- i) Si $p \geq 2n+1$, il existe un plongement de complexes de Poincaré homotope à f .
- ii) Si $p \geq 2n+2$, deux plongements de complexes de Poincaré homotopes à f sont équivalents .

Démonstration :

Comme ν_X et $f^k \nu_Y$ sont stablement équivalentes, on peut plonger X et Y dans $\mathbb{R}^{n+k}$ et $\mathbb{R}^{p+k}$ respectivement de sorte que, si (V, dV) et (W, dW) sont les voisinages réguliers respectifs et ξ et η les fibrations sphériques de dimension k associées, on ait $\xi = f^* \eta$. Il existe donc une application $\varphi : (V, dV) \longrightarrow (W, dW)$ étendant f et fibrée en ce sens que $\varphi_* \pi_j(V, dV) (\simeq \pi_{j-1}(S^{k-1})) \longrightarrow \pi_j(W, dW) (\simeq \pi_{j-1}(S^{k-1}))$ est un isomorphisme.

Montrons qu'il existe une immersion $g : (V, dV) \longrightarrow (W, dW)$ homotope à φ . Comme V est de dimension cohomologique n et que $SO(p+k)/SO(p-n)$ est $(n-1)$ connexe (car $p-n \geq n$), il existe une immersion $g_1 : V \longrightarrow W$ et une homotopie $h : V \times I \longrightarrow W$ entre φ et g_1 .

On a un isomorphisme $(\varphi|_{dV})^*(\tau dW) \oplus \epsilon^1 \xrightarrow{\sim} g_1^*(\tau W)|_{dV}$ déterminé par l'homotopie h . En utilisant cet isomorphisme et le fait que $SO(p+k)/SO(p+k-1)$ est $(p+k-2)$ connexe, on a une homotopie régulière $\bar{g}_t : dV \longrightarrow W$ entre $g_1|_{dV}$ et une immersion $\bar{g}_2 : dV \longrightarrow dW$ et une homotopie $\bar{h} : dV \times I \longrightarrow dW$ entre $\varphi|_{dV}$ et $\bar{g}_2$ qui, lue dans W , est homotope à l'homotopie $h|_{dV}$ suivie de $\bar{g}_t$.

Grace à la propriété de relèvement des homotopies régulières, il existe une immersion $g_2 : (V, dV) \longrightarrow (W, dW)$, une homotopie $H : V \times I \longrightarrow W$ entre φ et g_2 , une homotopie $\bar{H} : dV \times I \longrightarrow dW$ entre $\varphi|_{dV}$ et $g_2|_{dV} = \bar{g}_2$ telle que $i_* \bar{H}$ est homotope à $H|_{dV \times I}$ ($i : dW \hookrightarrow W$). L'immersion $g = g_2 : (V, dV) \longrightarrow (W, dW)$ est donc homotope à φ comme application de paires et $g_* \pi_j(V, dV) \longrightarrow \pi_j(W, dW)$ est un isomorphisme.

Appliquons maintenant le théorème 1 du Chap. III, à $V, V' = dV$, $V'' = \emptyset$,

$W, W' = dW$, $W'' = \emptyset$ et g . La seule hypothèse qui reste à vérifier est

$$\pi_j(V, dV) = 0 \text{ pour } j \leq 2(n+k) - (p+k) = k + 2n-p, \text{ or } \pi_j(V, dV) = \pi_{j-1}(S^{k-1}) = 0 \text{ pour } j < k \text{ et } 2n-p \leq -1.$$

Dons g est régulièrement homotope à un plongement de variétés $g' : (V, dV) \longrightarrow (W, dW)$ et le plongement de complexes de Poincaré associé est clairement homotope à f .

Pour montrer la 2ème partie du théorème nous utilisons le lemme :

Lemme 1 - Avec les mêmes notations et hypothèses que précédemment, si $p \geq 2n+1$, tout plongement de complexes de Poincaré homotope à f est équivalent au plongement associé à un plongement de variétés des fibrés homotopiques en boules normaux.

Preuve : Soit $\Phi = (N_1, dN, N_2, \varphi, \psi)$ un plongement de complexes de Poincaré.

On commence par plonger dN dans $\mathbb{R}^{p+k-1}$, N_1 dans $\mathbb{R}_+^{p+k}$, N_2 dans $\mathbb{R}_-^{p+k}$ avec k grand, soient T un voisinage régulier de dN , $\bar{N}_1$ de N_1 , $\bar{N}_2$ de N_2 et posons $d\bar{N}_1 = T \cup \bar{N}_1'$, $d\bar{N}_2 = T \cup \bar{N}_2'$.

Alors $(\bar{Y}, d\bar{Y}) = (\bar{N}_1 \cup_T \bar{N}_2, \bar{N}_1' \cup_{dT} \bar{N}_2')$ est un voisinage régulier pour un plongement de Y dans $\mathbb{R}^{p+k}$.

Soit $g = \varphi^{-1} : X \longrightarrow N_1$; si k est assez grand il existe une extension

$$\bar{g} : (\bar{X}, d\bar{X})^{n+k} \longrightarrow (\bar{N}_1, \bar{N}_1')^{p+k} \text{ qui est fibrée.}$$

En raisonnant comme précédemment, on peut supposer que $\bar{g}$ est un plongement de variétés et on voit sans difficulté que l'on peut considérer $(\bar{N}_1, T, \bar{N}'_1)$ comme voisinage tubulaire de ce plongement.

Le plongement $(\bar{X}, d\bar{X}) \longrightarrow (\bar{N}_1, \bar{N}'_1) \longrightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})$ induit donc un plongement de complexes de Poincaré équivalent à $\bar{\Phi}$.

Pour finir la démonstration du th.1, supposons que $p \geq 2n+2$ et que $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ sont deux plongements de complexes de Poincaré homotopes à f . On peut considérer qu'ils sont obtenus à partir de deux plongements $\bar{f}$ et $\bar{f}'$:

$$\bar{f}' : (\bar{X}, d\bar{X})^{n+k} \longrightarrow (\bar{Y}, d\bar{Y})^{p+k}.$$

Comme $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ sont tous deux homotopes à f , il existe

$$\bar{g} : (\bar{X} \times I, d\bar{X} \times I, \bar{X} \times 0, \bar{X} \times 1) \longrightarrow (\bar{Y} \times I, d\bar{Y} \times I, \bar{Y} \times 0, \bar{Y} \times 1)$$

telle que $\bar{g}|_{\bar{X} \times 0} = \bar{f}$ et $\bar{g}|_{\bar{X} \times 1} = \bar{f}'$.

Comme précédemment on peut supposer que $\bar{g}$ est une immersion et on applique le th.1 du Chap.III avec $V = \bar{X} \times I$, $V' = d\bar{X} \times I$, $V'' = \bar{X} \times \{0,1\}$ et $W = \bar{Y} \times I$, $W' = d\bar{Y} \times I$, $W'' = \bar{Y} \times \{0,1\}$; les hypothèses sont toujours vérifiées car $2n + 2k + 2 - p - k - 1 = k + (2n + 1 - p) < k$.

Les plongements $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ sont donc pseudo isotopes et les plongements de complexes de Poincaré associés équivalents d'après la remarque 2 du §3.

On a un énoncé similaire dans le cas à bord, indiquons la démonstration de l'existence. On construit une extension de f entre les fibrés homotopiques en boules normaux $\varphi : (V, V', V'')^{n+k} \longrightarrow (W, W', W'')^{p+k}$ fibrée en sens manifeste et comme précédemment on peut supposer que φ est une immersion. On applique le th.1 du Chap.III à $\varphi|_{V''} : (V'', V'' \cap V', \varphi) \longrightarrow (W'', W'' \cap W', \varphi)$ pour transformer $\varphi|_{V''}$ en un plongement puis on réapplique le même théorème à $\varphi : (V, V', V'') \longrightarrow (W, W', W'')$ pour obtenir un plongement qui induit le plongement de complexes de Poincaré cherché.

Nous allons établir un autre théorème de plongement en utilisant le théorème 2 du Chap.III.

Théorème 2 :

Soient X une variété de dimension n , de bord dX , Y un complexe de Poincaré de dimension p , (Y', Y'') un découpage du bord dY en deux complexes de Poincaré de dimension $p-1$, et $f : (X, dX) \longrightarrow (Y, Y')$. On suppose que $f^* \omega_Y$ admet une réduction vectorielle. Si

- 1) $p-n \geq 3$
- 2) $\pi_i(X, dX) = 0$ pour $i \leq 2n-p$
- 3) $f_* : \pi_j(X, dX) \longrightarrow \pi_j(Y, Y')$ est un isomorphisme pour
 $j \leq 2n-p$ et surjectif pour $j = 2n-p + 1$.

il existe un plongement de complexes de Poincaré de (X, dX) dans (Y, Y') homotope à f .

Démonstration :

On considère un plongement de Y dans $\mathbb{R}^{p+k}$ qui plonge Y' dans $\mathbb{R}_+^{p+k-1}$ et Y'' dans $\mathbb{R}_-^{p+k-1}$; un voisinage régulier a la structure suivante : (N, dN) avec $dN = N^d \cup N' \cup N''$ où N', N'' sont des voisinages réguliers de Y' et Y'' dans $\mathbb{R}_\pm^{p+k-1}$, posons $N'^d = N^d \cap N'$, $N''^d = N^d \cap N''$. Alors (N, N^d) est un fibré homotopique en boules de dimension k sur Y , (N', N'^d) sur Y' et (N'', N''^d) sur Y'' .

Soit ξ un fibré vectoriel sur X qui est équivalent comme fibration sphérique à $f^*(N^d \longrightarrow Y)$; soit M^{n+k} le fibré en boules associé de bord $dM = M^d \cup M'$ où M' est la restriction à dX .

L'application f s'étend en une application fibrée notée encore f :

$$(M, M^d, M') \longrightarrow (N, N^d, N')$$

Montrons qu'on peut homotoper f en une immersion. En effet comme (X, dX) est $(2n-p)$ connexe, $H^j(X, B) = 0$ pour $j \geq p-n$ et pour tout A_X module B et de même $H^j(M, B)$; on n'a donc aucune obstruction pour immerger M dans N . En raisonnant comme dans le théorème 1 on peut donc supposer que f est une immersion.

On applique alors le théorème 2 du Chap.III.

Ses 3 premières hypothèses sont exactement les hypothèses de notre théorème et l'hypothèse 4) résulte de ce que (N', N'^d) , (N'', N''^d) sont des sous fibrés homotopiques en boules de dimension k de (N, N^d) et de ce que $f : (M, M^d)$ est fibrée.

§4 - Décomposition en anses.Définition 3 :

Un cobordisme de Poincaré entre deux complexes de Poincaré de dimension $n-1$, X' et X'' , est un complexe de Poincaré Y de dimension n tel que $dY = X' \cup X''$ (union disjointe).

Soit (Y, X', X'') un cobordisme de Poincaré de dimension n ; soit Φ un plongement de Poincaré de S^{k-1} dans X' dont la fibration normale est trivialisée (c'est-à-dire $\Phi = (N_1, dN, N_2, \varphi, \psi)$ et $(N_1, dN) \simeq (S^{k-1} \times D^{n-k}, S^{k-1} \times S^{n-k-1})$).

$$\text{Soit } (\bar{Y}, \bar{X}', X'') = (Y, X', X'') \cup \begin{matrix} D^k \times D^{n-k} \\ S^{k-1} \times D^{n-k} \end{matrix}$$

Définition 4 :

Dans la situation précédente on dit l'on obtient $(\bar{Y}, \bar{X}, X'')$ à partir de (Y, X', X'') en ajoutant une anse de dimension k le long de X' .

On dit aussi que l'on obtient (Y, X', X'') à partir de $(\bar{Y}, \bar{X}', \bar{X}'')$ en enlevant une anse de dimension $n-k$ le long de $\bar{X}'$.

Remarque : Soit Ψ un plongement de Poincaré de (D^j, S^{j-1}) dans $(\bar{Y}, X')$.

Comme D^d est contractile, la fibration normale est trivialisée ; on peut donc considérer Ψ comme une décomposition $(\bar{Y}, \bar{X}', X'') = D^j \times D^{n-j} \cup D^j \times S^{n-j-1}$

(Y_1, X'_1, X'') .

On obtient (Y_1, X'_1, X'') en enlevant une anse de dimension j à $\bar{Y}$ le long de $\bar{X}''$.

Nous voulons étudier si cette addition d'anses permet de reconstruire un cobordisme de Poincaré (Y, X', X'') à partir d'un cobordisme plus simple.

Proposition 2 - Soit (Y, X', X'') un cobordisme de Poincaré de dimension n .

On suppose que $n \geq 5$. Il existe alors un cobordisme $(\bar{Y}, \bar{X}', \bar{X}'')$ de dimension n tel que les inclusions induisent des isomorphismes $\pi_1(X') \xrightarrow{\sim} \pi_1(\bar{Y}) \xleftarrow{\sim} \pi_1(\bar{X}'')$ et tel que (Y, X', X'') s'obtienne à partir de $(\bar{Y}, \bar{X}', \bar{X}'')$ en ajoutant des anses de dimension $n-2, n-1$ et n le long de $\bar{X}'$ et $\bar{X}''$.

Preuve : Comme on peut toujours plonger un point dans un complexe de Poincaré de dimension ≥ 3 , quitte à enlever des anses de dimension 0, on peut supposer que pour toute composante connexe Y_i de Y , on a $X' \cap Y_i \neq \emptyset$ et $X'' \cap Y_i \neq \emptyset$. En étudiant séparément les différentes composantes, cela revient à avoir Y connexe et X' et X'' non vides.

Nous allons enlever des anses de dimension 1 pour rendre X' connexe.

Soient X'_1 et X'_2 deux composantes connexes de X' et $f : (D^1, S^0) \longrightarrow (Y, X')$ un chemin les joignant dans Y connexe par arcs. Comme $n \geq 4$, d'après le théorème 1 il existe un plongement homotope à f et soit $(\bar{Y}, \bar{X}', X'')$ le cobordisme obtenu en enlevant l'anse de dimension 1 correspondante. Comme $n \geq 4$ il est clair que $\bar{Y}$ est connexe et que $\bar{X}'$ a une composante connexe de moins que X' . En répétant ce procédé on peut donc

supposer que dans le cobordisme (Y, X', X'') , Y , X' et X'' sont connexes.

Le groupe $\pi_1(Y)$ a un système fini de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ puisque Y est un complexe fini. L'image de γ_1 dans $\pi_1(Y, X')$ se représente par une application $f : (D^1, S^0) \longrightarrow (Y, X')$. Comme D^1 est contractile et $n \geq 4$ d'après le th.1 on peut trouver un plongement de complexes de Poincaré homotope à f ; soit $(\bar{Y}, \bar{X}', X'')$ le cobordisme de Poincaré obtenu en enlevant l'anse de dimension 1 correspondante, comme $n \geq 3$, $\bar{Y}$ et $\bar{X}'$ sont connexes.

Etudions $\pi_1(\bar{Y}) \longrightarrow \pi_1(Y) : Y - D^1 \times 0$ se retracts par déformation sur Y_1 ; par position générale appliquée à $D^1 \times 0 \subset D^1 \times D^{n-1}$ nous voyons que si $n \geq 4$ l'inclusion $\bar{Y} \subset Y$ induit un isomorphisme sur les π_1 . L'image $\bar{\gamma}_1$ de γ_1 dans $\pi_1(\bar{Y})$ se représente par $D^1 \times * \subset D^1 \times S^{n-2}$ fermé par un chemin dans $X' - (S^0 \times D^{n-1})$ qui est connexe : $\bar{\gamma}_1$ est dans l'image de $\pi_1(\bar{X}')$ et donc l'image de $\bar{\gamma}_1$ dans $\pi_1(\bar{Y}, \bar{X}')$ est nulle.

Par récurrence sur γ_i $1 \leq i \leq p$ on peut supposer que $\pi_1(\bar{Y}, \bar{X}') = 0$. Il est à remarquer que dans ce procédé $\pi_1(Y, X'')$ reste inchangé puisque X'' ne change pas et que $\pi_1(\bar{Y}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$, donc lorsqu'on applique le même raisonnement à $(\bar{Y}, \bar{X}'')$, $\pi_1(\bar{Y}, \bar{X}'')$ reste toujours nul.

Quitte à enlever des anses de dimension 1, on peut donc supposer en outre que $\pi_1(Y, X') = \pi_1(Y, X'') = 0$.

Les groupes $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X')$ sont de présentation finie puisque Y et X' sont des complexes finis et $i : X' \longrightarrow Y$ induit un homomorphisme surjectif $i_* : \pi_1(X') \longrightarrow \pi_1(Y)$. Nous savons donc qu'il existe un nombre fini d'éléments $\gamma_1 \dots \gamma_p$ de $\pi_1(X')$ tels que $\ker i_*$ soit le sous groupe distingué qu'ils engendrent.

Représentons γ_1 par $f_1 : S^1 \longrightarrow X'$ et choisissons une nulle-homotopie $g : D^2 \longrightarrow Y$ étendant f_1 . Comme $n \geq 5$ et D^2 est contractile on peut supposer que g est un plongement $(D^2, S^1) \longrightarrow (Y, X')$ et soit $(\bar{Y}, \bar{X}', \bar{X}'')$ le cobordisme de Poincaré obtenu en enlevant l'anse correspondante.

Puisque $n \geq 5$, il vient comme plus haut que $\pi_1(\bar{Y}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$. Soit $B = X' - S^1 \times D^{n-2} = \bar{X}' - D^2 \times S^{n-3}$; comme $n \geq 5$, $\pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X')$ est un isomorphisme et le théorème de Van Kampen nous montre que si N est le sous groupe distingué engendré par γ_1 alors $\pi_1(\bar{X}') = \pi_1(X')/N$ donc $\bar{i}_* : \pi_1(\bar{X}') \longrightarrow \pi_1(\bar{Y})$ est surjectif et son noyau est le sous groupe distingué engendrée par les images $\bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_p$.

Par récurrence on arrive au résultat puisque dans cette transformation la flèche $\pi_1(X'') \longrightarrow \pi_1(Y)$ ne change pas.

Soit (Y, X', X'') un cobordisme de Poincaré de dimension n , Y, X' et X'' connexes et $\pi_1(X') \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y) \xleftarrow{\sim} \pi_1(X'')$. Soient $\tilde{Y}$ le revêtement universel de $Y, \tilde{X}'$ et $\tilde{X}''$ les revêtements induits sur X' et X'' qui sont universels d'après les hypothèses sur les π_1 . Alors
 $\pi_i(Y, X') = \pi_i(\tilde{Y}, \tilde{X}')$ et si (Y, X') est $(i-1)$ connexe nous avons
 $\pi_i(Y, X') \simeq \pi_i(\tilde{Y}, \tilde{X}') \simeq H_i(\tilde{Y}, \tilde{X}') = H_i(Y, X', A_Y) = H_i^W(Y, X', A_Y)$
 et la i -connexité de (Y, X') peut s'étudier homologiquement.

Supposons donc que (Y, X') est $(k-1)$ connexe ($k \geq 2$), tout élément de $H_k(Y, X', A_Y)$ se représente par une application $f : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{X}')$ ou encore par une application $f : (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (Y, X')$ munie d'un chemin au point base.

Si de plus $n-k \geq 3$, comme tout fibré de base D^k est trivialisé on peut appliquer le théorème 2 et représenter toute classe de $H_k(Y, X', A)$ par un plongement $(D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (Y, X')$ muni d'un chemin au point base.

Soit $(\bar{Y}, \bar{X}', X'')$ le cobordisme obtenu en enlevant l'anse de dimension k correspondante.

Lemme 2 : Pour $2 \leq k \leq n-3$, les inclusions $\bar{X}' \longrightarrow \bar{Y}$ et $X'' \longrightarrow \bar{Y}$ induisent des isomorphismes sur les π_1 .

Preuve : Si $k \geq 3$, en raisonnant comme plus haut il vient que $\pi_1(X') \simeq \pi_1(\bar{X}')$ et $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(\bar{Y})$. Si $k = 2$ nous savons que $\pi_1(\bar{Y}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$.

Nous avons vu que $\pi_1(\bar{X}') = \pi_1(X')/N$ où N est le sous groupe distingué engendré par $f|S^1 : S^1 \longrightarrow X'$. Or $\pi_1(X') \longrightarrow \pi_1(Y)$ est injective donc cette classe est nulle et $\pi_1(\bar{X}') \simeq \pi_1(X')$.

Lemme 3 : Soit (Y, X', X'') un cobordisme de Poincaré de dimension $n \geq 5$ tel que Y, X' et X'' soient connexes et $\pi_1(X') \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y) \xleftarrow{\sim} \pi_1(X'')$. Supposons (Y, X') $(k-1)$ connexe, (Y, X'') k' connexe $(k \geq 2, k' \geq 1)$.

Si $k + k' \leq n-2$, il existe un cobordisme de Poincaré $(\bar{Y}, \bar{X}', X'')$ tel que

i) $\bar{Y}, \bar{X}'$ et X'' sont connexes et $\pi_1(\bar{X}') \xrightarrow{\sim} \pi_1(\bar{Y}) \xleftarrow{\sim} \pi_1(X'')$

ii) Y s'obtient en ajoutant des anses de dimension $n-k$ à $\bar{Y}$ le long de $\bar{X}'$.

iii) $(\bar{Y}, \bar{X}')$ est k -connexe et $(\bar{Y}, X'')$ est k' connexe.

Preuve : Soit $x_1, \dots, x_p$ un système de générateurs du A_Y -module de type fini $H_k(Y, X', A_Y)$. Comme $k \leq n-3$ on peut supposer x_1 représenté par un plongement $(D^k, S^{k-1}) \longrightarrow (Y, X')$, soient $(\bar{Y}, \bar{X}', X'')$ le cobordisme obtenu en enlevant l'anse correspondante et

$$N = X' \cup \begin{matrix} D^k \times D^{n-k} \\ S^{k-1} \times D^{n-k} \end{matrix}.$$

Il est clair, par excision que $H_j(Y, N) \simeq H_j(\bar{Y}, \bar{X}')$ et que $H_j(N, X', A_Y) \simeq H_j(D^k \times D^{n-k}, S^{k-1} \times D^{n-k}, A_Y) = \begin{matrix} 0 & \text{si } j \neq k \\ A_Y & \text{pour } j = k \end{matrix}$.

La suite exacte du triple (Y, N, X') nous donne alors

$$H_j(Y, X') \simeq H_j(\bar{Y}, \bar{X}') \quad j \neq k, k+1$$

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(Y, X') \longrightarrow H_{k+1}(\bar{Y}, \bar{X}') \longrightarrow A_Y \xrightarrow{\alpha} H_k(Y, X') \longrightarrow H_k(\bar{Y}, \bar{X}') \longrightarrow 0$$

et il est clair que $\alpha(1) = x_1$ donc $H_k(\bar{Y}, \bar{X}') \simeq H_k(Y, X')/A_Y \cdot x_1$. De plus en prenant la cohomologie et par dualité il vient

$$H_j(\bar{Y}, X'') \simeq H_j(Y, X'') \quad \text{pour } j \neq n-k, n-k-1$$

$$0 \longrightarrow H_{n-k}(\bar{Y}, X'') \longrightarrow H_{n-k}(Y, X'') \xrightarrow{D\alpha^*} A_Y \longrightarrow H_{n-k-1}(\bar{Y}, X'') \longrightarrow H_{n-k-1}(Y, X'') \longrightarrow C$$

En enlevant donc p anses de dimension k , on tue tous les x_i soit $H_k(\bar{Y}, \bar{X}') = 0$. D'après le lemme $\pi_1(\bar{X}') \xrightarrow{\sim} \pi_1(\bar{Y}) \xleftarrow{\sim} \pi_1(X'')$, donc $(\bar{Y}, \bar{X}')$ est k connexe et si $k + k' \leq n-2$, $H_j(\bar{Y}, X'') = 0$ pour $j \leq k'$ donc $(\bar{Y}, X'')$ est k' connexe.

On est donc ramené à étudier un cobordisme (Y, X', X'') de dimension $n \geq 5$, dont les π_1 sont isomorphes, et (Y, X') $(n-3)$ -connexe, on a alors par dualité $H_j(Y, X'', B) = H^j(Y, X'', B) = 0$ pour $j \geq 3$ et pour tout A_Y module B .

On peut de plus supposer que Y et X'' ont même 1-squelette. La structure de $H_2(Y, X'')$ est déterminée par le lemme suivant.

Lemme 4 : Soit C_* un complexe fini de A modules libres de type fini avec classe stable de bases et $C_j = 0$ pour $j < k$. Supposons que $H_j(C) = 0$ pour $j \neq k$ et $H^{k+1}(C, B) = 0$ pour tout A -module B . Alors $H_k(C)$ est un A -module projectif stablement libre de type fini avec une classe stable de bases.

Preuve : Nous avons une suite $0 \longrightarrow C_p \xrightarrow{d} C_{p-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{d} C_k \longrightarrow 0$ exacte sauf en C_k . Soient Z_j les cycles de dimension j et B_j les bords de dimension j , nous avons $Z_j = B_j$ pour $j > k$ et $Z_k = C_k$ d'où les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_k & \xrightarrow{i} & C_k & \longrightarrow & H_k \longrightarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & B_{k+1} & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & B_k \longrightarrow 0 \\ & & & & \dots & & \\ & & 0 & \longrightarrow & C_p & \longrightarrow & B_{p-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Si nous montrons que la première suite est scindée, il en résulte que H_k et B_k sont projectifs donc par récurrence que toutes les suites sont scindées et donc en les additionnant toutes on a un isomorphisme

$$\alpha : H_k \oplus \bigoplus_i C_{k+2i+1} \longrightarrow \bigoplus_i C_{2i+k} \text{ donc } H_k \text{ est stablement libre de type fini et muni d'une classe stable de bases de sorte que } \alpha \text{ soit de torsion nulle.}$$

Cherchons donc $\tau : C_k \longrightarrow B_k$ tel que $\tau \circ i = 1_{B_k}$. Or $\partial : C_{k+1} \longrightarrow B_k$ définit un cocycle de dimension $k+1$ à valeurs dans le A -module B_k car $i \partial (dx) = d^2 x = 0$ et i est injective. Comme $H^{k+1}(C, B_k) = 0$ il existe $\tau : C_k \longrightarrow B_k$ tel que $\partial = \tau \cdot d$ or $d = i \cdot \partial$ donc $(r \cdot i) \cdot \partial = \tau \cdot d = \partial = 1_{B_k} \cdot \partial$ et comme ∂ est surjectif $\tau \cdot i = 1_{B_k}$.

Dans la situation précédente $H_2(Y, X'')$ est un A_Y -module projectif de type fini stablement libre avec classe stable de bases.

Nous allons enlever des anses de dimension $n-3$ à Y le long de X' pour rendre $H_2(Y, X'')$ libre. En effet si on part de $f : (D^{n-3}, S^{n-2}) \longrightarrow (Y, X')$ représentant zéro dans $H_{n-3}(Y, X')$ la flèche $\alpha : A_Y \longrightarrow H_{n-3}(Y, X')$ est nulle donc aussi $D\alpha^*$ on a alors

$$0 \longrightarrow A_Y \longrightarrow H_2(\bar{Y}, X'') \longrightarrow H_2(Y, X'') \longrightarrow 0$$

et comme $H_2(Y, X'')$ est projectif $H_2(Y, X'')$ est projectif

$$H_2(Y, X'') = H_2(Y, X'') \oplus A_Y.$$

En répétant suffisamment ce procédé on peut supposer que $H_2(Y, X'')$ est libre de type fini avec la classe de bases déterminée précédemment.

En utilisant un isomorphisme $A_Y^P \xrightarrow{\sim} H_2(Y, X'')$ déterminé par cette classe de bases pour enlever des anses de dimension 2 le long de X'' il vient

$$0 \longrightarrow H_3(\bar{Y}, \bar{X}'') \longrightarrow A_Y^P \xrightarrow{\sim} H_2(Y, X'') \longrightarrow H_2(\bar{Y}, \bar{X}'') \longrightarrow 0$$

et $C_*(\tilde{\bar{Y}}, \tilde{\bar{X}}'')$ est un complexe acyclique de torsion nulle.

Par dualité cela est aussi vrai pour $(\bar{Y}, X')$ est donc le cobordisme de Poincaré $(\bar{Y}, \bar{X}', \bar{X}'')$ est un cobordisme produit $(X' \times I, X' \times 0, X' \times 1)$.
D'où

Théorème 3* : Soit (Y, X', X'') un cobordisme de Poincaré de dimension $n \geq 5$; (Y, X', X'') s'obtient à partir d'un cobordisme produit en ajoutant des anses.

Corollaire : Tout complexe de Poincaré de dimension ≥ 5 , admet une décomposition en anses.

§5 - Lissage des plongements.

Nous avons vu qu'un plongement de variétés $f : X^n \longrightarrow Y^p$ déterminait un plongement de complexes de Poincaré sous jacent. Nous voulons étudier le problème inverse. Etant donnés $f : X^n \longrightarrow Y^p$ une application entre deux variétés et un plongement de complexes de Poincaré Φ , homotope à f , existe-t-il un plongement de variétés de X dans Y qui induise le plongement Φ .

* Le lecteur pourra étendre ce théorème au cas des cobordismes entre complexes à bord.

La fibration normale de Φ , stablement équivalente à $\nu_X - f^* \nu_Y$, admet stablement une réduction vectorielle ou PL. Il est clair qu'une condition nécessaire pour notre problème est que cette fibration normale admette une véritable réduction.

Théorème 4 : Soit $f : X^n \longrightarrow Y^p$ une application entre deux variétés de dimension n et p , et soit Φ un plongement de complexe de Poincaré homotope à f . On suppose que $p-n \geq 3$, que la fibration normale de Φ admet une réduction vectorielle (ou PL) ξ^{p-n} et que les fibrés $\tau_X \oplus \xi$ et $f^* \tau_Y$ sont isomorphes comme fibrés vectoriels (ou PL) (τ désigne le fibré tangent). Il existe alors un plongement de variétés : $X \longrightarrow Y$ de fibré normal ξ dont le plongement de complexe de Poincaré associé est équivalent à Φ .

La démonstration va résulter de deux lemmes.

Lemme 5 : Avec les notations et hypothèses précédentes, il existe un entier k et un plongement de variétés $X \times (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow Y \times (D^k, S^{k-1})$ dont le plongement de complexes de Poincaré est équivalent à Φ .

Preuve : Soit $\Phi = (N_1, dN, N_2, \varphi, \psi)$. On plonge dN dans $\mathbb{R}^{p+l-1}$, N_1 dans $\mathbb{R}_+^{p+l}$ et N_2 dans $\mathbb{R}_-^{p+l}$ pour l très grand ; soit $(V, dV) = (V_1, dV_1) \cup_W (V_2, dV_2)$ un voisinage régulier de $N_1 \cup N_2$ où (W, dW) est un voisinage de dN et $dV_i = V_i' \cup_{dW} W$. L'équivalence d'homotopie simple $\psi^{-1} : Y \longrightarrow V$ permet de considérer (l est très grand) (V, dV) comme le fibré en boules normal de Y . En ajoutant un fibré en boules inverse on arrive à $(Z, dZ) = (Y \times D^k, Y \times S^{k-1})$ avec un partage $(Z, dZ) = (Z_1, dZ_1) \cup_T (Z_2, dZ_2)$ et $dZ_i = Z_i' \cup_{dT} T$.

(Z_1, Z'_1) est un fibré homotopique en boules sur N_1 et $(T, Z'_1 \cap T)$ sur dN , de plus (Z_1, T) est un fibré homotopique en boules sur N_1 (ou sur X) équivalent à $\nu_{\bar{g}}$. Soit $(\bar{X}, d\bar{X})^P$ le fibré en boules associé au fibré ξ^{p-n} . Comme ξ et $\nu_{\bar{g}}$ sont équivalents comme fibrations sphériques, l'équivalence d'homotopie simple $\varphi : X \longrightarrow N_1$ s'étend en une équivalence simple $(\bar{X}, d\bar{X})^P \longrightarrow (Z_1, T)^{p+k}$; comme k est très grand on peut supposer que cette équivalence est un plongement $\bar{g} : (\bar{X}, d\bar{X}) \longrightarrow (Z_1, T)$ et on peut considérer $(Z_1, T, Z'_1, Z'_1 \cap T)$ comme voisinage tubulaire de ce plongement.

Le fibré normal de ce plongement se calcule par

$$\tau_{\bar{X}} + \nu_{\bar{g}} \simeq \bar{g}^*(\tau_{Z_1}) \text{ soit } \tau_X + \xi + \nu_{\bar{g}} \simeq f^*\tau_Y + \epsilon^k. \text{ Comme } \tau_X + \xi \text{ est égal à } f^*\tau_Y \text{ dans } k_0(X) \text{ et que } k \text{ est très grand il vient } \nu_{\bar{g}} \simeq \epsilon^k.$$

Il existe donc un isomorphisme

$$\alpha : (\bar{X} \times D^k, d\bar{X} \times D^k, \bar{X} \times S^{k-1}) \xrightarrow{\sim} (Z_1, T, Z'_1)$$

et choisissant convenablement la trivialisat ion de $\nu_{\bar{g}}$ on peut assurer que l'isomorphisme des fibrés tangents induit par α , restreint à X est de la forme $\lambda \oplus \text{Id} : \tau_X + \xi + \epsilon^k \longrightarrow f^*\tau_Y + \epsilon^k$ où est un isomorphisme donné de $\tau_X + \xi$ sur $f^*\tau_Y$.

Soit s la section nulle $X \longrightarrow \bar{X}$, alors la composée

$$(X \times D^k, X \times S^{k-1}) \xrightarrow{s} (\bar{X} \times D^k, \bar{X} \times S^{k-1}) \xrightarrow{\alpha} (Z_1, Z'_1) \hookrightarrow (Y \times D^k, Y \times S^{k-1})$$

est un plongement $g : X \times (D^k, S^{k-1}) \longrightarrow Y \times (D^k, S^{k-1})$ et (Z_1, Z'_1, T) est un voisinage tubulaire, le plongement de complexes de Poincaré associé à g est donc équivalent à $\emptyset$.

Nous allons utiliser le théorème 3 du Chapitre III sous forme d'un lemme.

Lemme 6 : Soit $g : (X^n \times D^k, X^n \times S^{k-1}) \longrightarrow (Y^p \times D^k, Y^p \times S^{k-1})$ un plongement de variétés. On suppose que g est régulièrement homotope à une immersion de la forme $f' \times \text{Id}_D^k$ et $p-n \geq 3$. Le plongement g est alors pseudo isotope à un plongement de la forme $f'' \times \text{Id}_D^k$ et f'' est régulièrement homotope à f' .

Preuve : Soit h une homotopie régulière entre g et $f \times \text{Id}$, considérée comme immersion de $(X \times D^k \times I, X \times S^{k-1} \times I, X \times D^k \times 0, X \times D^k \times 1)$ dans $(Y \times D^k \times I, Y \times S^{k-1} \times I, Y \times D^k \times 0, Y \times D^k \times 1)$. On applique le théorème 3 à $V = X \times I$, $V' = X \times 1$, $V'' = X \times 0$; $W = Y \times I$, $W' = Y \times 1$, $W'' = Y \times 0$ et $M = V \times D^k$, $N = W \times D^k$, les hypothèses sont manifestement vérifiées. On sait donc que h est régulièrement homotope à un plongement h' tel que $h'|M'' = g$ et $h'|M' = f'' \times \text{Id}$ où le plongement f'' est régulièrement homotope à f' .

Pour montrer le théorème 4 il suffit de montrer que le plongement g donné par le lemme est régulièrement homotope à une immersion de la forme $f' \times \text{Id}$.

Or l'isomorphisme entre les fibrés $\tau_X + \xi$ et $f^*\tau_Y$ détermine une immersion $f' : X \longrightarrow Y$. D'après la construction de α dans le lemme il est clair que g et $f' \times \text{Id}$ sont régulièrement homotopes.

Le lemme nous donne alors un plongement de variétés
 $f'' : X^n \longrightarrow Y^p$ dont le fibré normal est ξ puisque f'' est réguliè-
 lièrement homotope à f' , et dont le plongement de complexes de Poincaré
 associé est équivalent à ϕ puisque $f'' \times \text{Id}$ et g sont pseudoisotopes.

Remarque :

Dans la catégorie PL la réduction stable de $\nu_\phi = \nu_X - f^* \nu_A$
 assure l'existence d'une réduction ξ^{p-n} telle que $\tau_X + \xi \simeq f^* \tau_Y$ car
 $p-n \geq 3$.

CHAPITRE 5 : CHIRURGIES

Notations :

On désignera par $*$ l'une des trois catégories suivantes : variétés différentiables, variétés semi-linéaires, complexes de Poincaré ; on les notera respectivement : Diff, PL et CP . Un objet de la catégorie $*$ sera appelé une variété $*$ (même si c'est un complexe de Poincaré) . Un fibré $*$ sera, selon les cas, un fibré vectoriel réel, un microfibré semi-linéaire, ou un fibré homotopique en sphères. A toute variété $*$, on sait associer un fibré $*$ appelé fibré normal de la variété. On note $B*$ (BO , BPL ou BG) le classifiant des fibres $*$ stables. Tout ce qui sera dit au sujet des catégories Diff et PL peut s'étendre à la catégorie des variétés topologiques ; j'ai choisi de ne pas en parler.

Pour tout complexe de Poincaré X de dimension n sans bord , on appellera "structure $*$ " sur X , la donnée d'une variété $*$ V de dimension n sans bord, et d'une équivalence d'homotopie simple φ de V sur X . On considérera deux structures $*$ (V, φ) et (V', φ') sur X comme équivalentes, s'il existe une variété $*$ W de dimension $n+1$ dont le bord est la réunion (disjointe) de V et V' , et une application ψ de W dans X , telles que $\psi|_V = \varphi$ et $\psi|_{V'} = \varphi'$, et que les injections de V et V' dans W soient des équivalences d'homotopie simples. D'après le théorème de s-cobordisme, si $n \geq 5$, (V, φ) et (V', φ') sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme η de V sur V' (dans la catégorie $*$) tel que $\varphi'\eta$ et φ soient homotopes. L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $s^*(X)$. Il est clair que $s^{CP}(X)$ a un élément et un seul ; nous nous intéresserons à $s^{Diff}(X)$ et

$s^{PL}(X)$, pour chercher s'ils sont vides, et pour calculer le nombre de leurs éléments.

Dans le cas relatif, si X est un complexe de Poincaré à bord de dimension n , dont le bord est la réunion d'un complexe de Poincaré Y et d'une variété $*X'$, on appellera structure $*$ sur (X,Y) , la donnée d'une variété $*V$ de dimension n dont le bord est la réunion de deux variétés $*V'$ et W , et d'une application φ de V dans X qui est une équivalence d'homotopie simple, qui induit un isomorphisme (dans la catégorie $*$) de V' sur X' , et une équivalence d'homotopie simple de W sur Y . On dira que les deux structures $*((V_0, W_0), \varphi_0)$ et $*((V_1, W_1), \varphi_1)$ sur (X,Y) sont équivalentes, s'il existe une variété $*T$ de dimension $n+1$, dont le bord est la réunion de V_0 , de V_1 , et de deux autres variétés $*T'$ et U , et une application ψ de T dans $X \times I$, telles

$$a) W_i = V_i \cap U \text{ et } V'_i = V_i \cap T' \text{ (} i = 0 \text{ ou } 1 \text{)}$$

$$b) \psi|_{V_i} = \varphi_i \text{ (} i = 0 \text{ ou } 1 \text{)}$$

c) Les injections de V_0 et V_1 dans T , et les injections de W_0 et W_1 dans U sont des équivalences d'homotopie simples.

d) $\psi|_{T'}$ est un isomorphisme (dans la catégorie $*$) de T' sur $X' \times I$.

D'après le théorème de s-cobordisme, si $n \geq 6$ (ou si $n = 5$ et $Y = \emptyset$), $((V_0, W_0), \varphi_0)$ et $((V_1, W_1), \varphi_1)$ sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme η dans la catégorie $*$ de (V_0, W_0, V'_0) sur (V_1, W_1, V'_1) tel que $\varphi_1 \eta$ et φ_0 coïncident sur V'_0 et soient homotopes parmi les applications de (V_0, W_0, V'_0) dans (V_1, W_1, V'_1) qui coïncident avec elles sur V'_0 .

L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $s^*(X, Y)$; on se demande si $s^*(X, Y)$ est vide ($*$ = Diff ou PL), et s'il ne l'est pas on cherche à le calculer.

§1 : Données de chirurgie.

Soit X un complexe de Poincaré connexe sans bord de dimension n ; une donnée de chirurgie $*$ sur X est, par définition, un quadruple $(V, \varphi, \alpha, \lambda)$; où

- 1) V est une variété $*$ de dimension n sans bord
- 2) φ est une application de degré 1 de V sur X
- 3) α est un fibré $*$ stable sur X
- 4) λ est un isomorphisme de fibrés $*$ de $\varphi^*(\alpha)$ sur $V(V)$.

Soit X un complexe de Poincaré connexe de dimension n , dont le bord est la réunion de la variété $*$ de dimension $n-1$ X' et des complexes de Poincaré de dimension $n-1$: $(Y_1, \dots, Y_k)$ (Nota : il se peut que X' soit vide, il se peut aussi que X' soit égal à dX , et qu'il n'y ait pas de Y_i) . Une donnée de chirurgie $*$ sur $(X, Y_1, \dots, Y_k)$ est, par définition, un quadruple $((V, W_1, \dots, W_k), \varphi, \alpha, \lambda)$; où

- 1) V est une variété $*$ de dimension n dont le bord est subdivisé en $k+1$ sous-variétés de dimension $n-1$:
 $V', W_1, \dots, W_k$.
- 2) φ est une application de degré 1 de (V, dV) sur (X, dX) dont la restriction à V' est un isomorphisme

* de V' sur X' , et dont la restriction à $W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p}$ est, quel que soit le système d'indices $i_1, \dots, i_p$, une application de degré 1 de $(W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p}, d(W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p}))$ sur $(Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p}, d(Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_p}))$.

3) α est un fibré * sur X

4) λ est un isomorphisme de $\varphi^*(\alpha)$ sur $\nu(V)$.

Il est clair que si $Z = ((V, W_1, \dots, W_k), \varphi, \alpha, \lambda)$ est une donnée de chirurgie * sur $(X, Y_1, \dots, Y_k)$, pour tout i , $((W_i, W_1 \cap W_i, \dots, W_k \cap W_i), \varphi|_{W_i}, \alpha|_{Y_i}, \lambda|_{W_i})$ est une donnée de chirurgie * sur $(Y_i, Y_1 \cap Y_i, \dots, Y_k \cap Y_i)$; on l'appelle la restriction de Z à Y_i et on la note $Z|_{Y_i}$. On définit de façon immédiate une notion d'isomorphisme des données de chirurgie *. Par oubli de structure, à toute donnée de chirurgie Diff ou PL, on associe une donnée CP.

Cobordisme : On dira que deux données de chirurgie * Z et Z' sur X sont * cobordantes, s'il existe une donnée de chirurgie * sur $(X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$ sont isomorphes à Z et Z' . Ceci définit une relation d'équivalence sur les données de chirurgie * sur X ; l'ensemble des classes d'équivalence sera noté $\Omega^*(X)$. De même deux données de chirurgie * Z et Z' sur (X, Y) seront dites * cobordantes, s'il existe une donnée de chirurgie * sur $(X \times I, Y \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$ et à $X \times \{1\}$ sont isomorphes à Z et à Z' .

Ceci définit sur les données de chirurgie sur (X,Y) une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $\Omega^*(X,Y)$.

Remarque : Soit X une variété $*$, alors $(X, \text{Id}, \nu(X), \text{Id})$ est une donnée de chirurgie $*$ sur X . De même si X est une variété $*$ dont le bord est la réunion des variétés $*X'$ et Y , $((X,Y), \text{Id}, \nu(X), \text{Id})$ est une donnée de chirurgie $*$ sur (X,Y) . Ceci définit alors dans $\Omega^*(X)$ et $\Omega^*(X,Y)$ des points de base naturels. En particulier $\Omega^{\text{CP}}(X)$ et $\Omega^{\text{CP}}(X,Y)$ sont toujours munis d'un point de base naturel.

L'application ξ : Soit X un complexe de Poincaré sans bord ; à toute structure $*(V, \varphi)$ sur X , on associe une donnée de chirurgie $*(V, \varphi, \alpha, \eta)$ où $\alpha = (\varphi^{-1})^*(\nu(V))$, et où η est l'isomorphisme naturel de $\varphi^*(\varphi^{-1})^*(\nu(V))$ sur $\nu(V)$. Il est clair que si les deux structures $*(V, \varphi)$ et $*(V', \varphi')$ sont équivalentes les deux données de chirurgie qu'on leur associe sont cobordantes ; donc on a défini une application

$$\xi : s^*(X) \longrightarrow \Omega^*(X)$$

De même à toute structure $*((V,W), \varphi)$ sur (X,Y) , on associe une donnée de chirurgie ; ce qui définit une application

$$\xi : s^*(X,Y) \longrightarrow \Omega^*(X,Y)$$

Nota : Il est clair que si Ω^* est vide, s^* est également vide.

Structures de groupes : Soient Z_0 et Z_1 deux données de chirurgie $*$ sur $X \times I$ (où X est nécessairement une variété $*$), on peut considérer

Z comme une donnée sur $X \times [0, 1/2]$ et Z_1 comme une donnée sur $X \times [1/2, 1]$; et comme on a alors $Z_0|_{X \times \{1/2\}} \approx Z_1|_{X \times \{1/2\}}$, on peut les recoller pour avoir une donnée de chirurgie $* Z$ sur $X \times I$.

Un argument classique montre alors que cette construction définit sur $\Omega^*(X \times I)$ une structure de groupe dont l'élément neutre est le point de base que l'on a défini ci-dessus. On définit de la même façon une structure de groupe sur $\Omega^*(X \times I, Y \times I)$, chaque fois que X est une variété $*$ dont le bord est la réunion des variétés $* X'$ et Y . Un argument classique montre que si $X = X' \times I$ et $(X, Y) = (X' \times I, Y' \times I)$, ces groupes sont abéliens.

La suite exacte associée à un couple (X, Y) : Soit X une variété $*$ dont le bord est la réunion des variétés $* X'$ et Y . Alors on définit pour tout entier $k \geq 0$:

1) Une application $\Omega^*(X \times I^k, Y \times I^k) \longrightarrow \Omega^*(Y \times I^k)$

2) Une application $\Omega^*(X \times I^k) \longrightarrow \Omega^*(X \times I^k, Y \times I^k)$,
définie par le fait que toute donnée $*$ sur $X \times I^k$
est aussi une donnée $*$ sur $(X \times I^k, Y \times I^k)$.

3) Une action du groupe $(k \geq 1) \Omega^*(Y \times I^k)$ sur $\Omega^*(X \times I^{k-1})$: si Z est une donnée sur $Y \times I^k$ et Z' une donnée sur $X \times I^{k-1}$, les restrictions de Z et Z' à $Y \times I^{k-1}$ sont isomorphes, donc par recollage on définit une donnée sur $(X \cup_{Y=Y \times \{0\}} Y \times I) \times I^{k-1} = X \times I^{k-1}$.

Pour $k \geq 1$, les applications définies en 1 et 2 sont des homomorphismes de groupes, et la suite

$$\begin{aligned} \Omega^*(X \times I^k) &\longrightarrow \Omega^*(X \times I^k, Y \times I^k) \longrightarrow \Omega^*(Y \times I^k) \longrightarrow \Omega^*(X \times I^{k-1}) \dots \\ \dots \Omega^*(X \times I, Y \times I) &\xrightarrow{\alpha} \Omega^*(Y \times I) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(X) \xrightarrow{\gamma} \Omega^*(X, Y) \xrightarrow{\delta} \Omega^*(Y) \end{aligned}$$

est une suite exacte. Plus précisément c'est une suite exacte de groupes jusqu'en $\Omega^*(X \times I, Y \times I)$; en $\Omega^*(Y \times I)$, $\text{Im } \alpha =$ l'image inverse du point de base de $\Omega^*(X)$ par β ; en $\Omega^*(X)$, les classes modulo γ sont les orbites de l'action de $\Omega^*(Y \times I)$; en $\Omega^*(X, Y)$, $\text{Im } \gamma = \text{Ker } \delta$.

§2 - Calcul de Ω^* pour $*$ = PL ou Diff.

Soit $(V, \varphi, \alpha, \lambda)$ une donnée de chirurgie sur un complexe de Poincaré X de dimension n . La classe fondamentale de l'espace de Thom $M(\nu(V), V)$ est sphérique, c'est à dire que si on choisit le représentant $\nu(V)^N$ de $\nu(V)$ en dimension N (N grand), on a une application naturelle

$$S^{N+n} \longrightarrow M(\nu(V)^N, V)$$

qui envoie la classe fondamentale sur la classe fondamentale. Si α^N est le représentant de α en dimension N , l'application φ , qui est de degré 1, induit une application

$$M(\varphi^*(\alpha^N), V) \longrightarrow M(\alpha^N, X)$$

qui envoie la classe fondamentale sur la classe fondamentale.

L'isomorphisme λ nous donne alors une application

$$S^{N+n} \longrightarrow M(\alpha^N, X)$$

qui envoie la classe fondamentale sur la classe fondamentale ; on sait (cf : chap.II) que cela entraîne que α est homotopiquement équivalent au fibré de Spivak de X .

Soit $((V,W), \varphi, \alpha, \lambda)$ une donnée de chirurgie sur (X,Y) . Si $\nu(V)^N$ est le représentant de $\nu(V)$ en dimension N (N grand) on a une application naturelle

$$(D^{N+n}, S^{N+n-1}) \longrightarrow (M(\nu(V)^N, V), M(\nu(dV)^N, dV))$$

qui envoie la classe fondamentale sur la classe fondamentale. Si α^N est le représentant de α en une dimension N , le fait que φ est une application de degré 1, nous donne une application

$$(M(\varphi^*(\alpha^N), V), M(\varphi^*(\alpha^N|dV, dV))) \longrightarrow (M(\alpha^N, X), M(\alpha^N|dX, dX))$$

qui envoie la classe fondamentale sur la classe fondamentale.

L'isomorphisme λ nous donne alors une application

$$(D^{N+n}, S^{N+n-1}) \longrightarrow (M(\alpha^N, X), M(\alpha^N|dX, dX))$$

qui envoie la classe fondamentale sur la classe fondamentale. Ce qui prouve que α est homotopiquement équivalent au fibré de Spivak de X .

On obtient donc le

Théorème 1 : Si Z est une donnée de chirurgie sur X ou sur (X,Y) le fibré α qui intervient dans la définition de Z est homotopiquement équivalent au fibré de Spivak de X .

Soit maintenant un complexe de Poincaré X , on dira que l'on a muni le fibré de Spivak $\nu(X)$ de X d'une structure $*$ si on s'est donné un couple (α, ξ) , où α est un fibré $*$ sur X , et ξ un isomorphisme du fibré homotopique sous-jacent à α sur $\nu(X)$. Par exemple si X est une variété $*$ ($*$ = PL ou Diff) le fibré $*$ normal à X définit une structure $*$ sur $\nu(X)$. On dira que deux telles structures (α_1, ξ_1) et (α_2, ξ_2) sont équivalentes si il existe un isomorphisme de fibrés $\mu : \alpha_1 \longrightarrow \alpha_2$, tel que $\xi_2 \circ \mu$ et ξ_1 soient des isomorphismes homotopes du fibré homotopique sous-jacent à α_1 sur $\nu(X)$. L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $*(\nu(X))$. Si une partie X' du bord de X est une variété $*$, on ne considérera que les structures (α, ξ) sur $\nu(X)$ qui coïncident au dessus de X' avec la structure naturelle. Les équivalences seront aussi assujetties à respecter cette structure naturelle, et l'ensemble des classes d'équivalence sera noté $*(\nu(X) \text{ mod } X')$.

Soit X un complexe de Poincaré sans bord de dimension n . On suppose que $*$ = Diff ou PL. Si on choisit un entier N assez grand, une structure $*$ sur $\nu(X)$ peut être représentée par une application $\xi^N : (E^N, dE^N) \longrightarrow (B\alpha^N, S\alpha^N)$ (où E^N est un voisinage régulier de X dans $\mathbb{R}^{N+n}$ et dE^N son bord relatif, et où $B\alpha^N$ et $S\alpha^N$ désignent les fibrés en boules et en sphères du représentant α^N de α en dimension N). (α_1^N, ξ_1^N) et (α_2^N, ξ_2^N) définissent le même élément de $*(\nu(X))$ si et seulement si il existe un isomorphisme $\mu^N : \alpha_1^N \longrightarrow \alpha_2^N$

tel que ξ_2^N , μ^N et ξ_1^N soient des applications homotopes de (E^N, dE^N) dans $(B\alpha_1^N, S\alpha_1^N)$. Si ξ^N est transversale sur la section zéro de α^N (que l'on identifie à X) (ceci a un sens puisque $*$ = PL ou Diff, que E est une variété $*$ et que l'on peut supposer que X est une sous-variété $*$ de la variété $*$ α^N , quitte à remplacer X par son voisinage régulier dans un espace numérique). On pose alors $(\xi^N)^{-1}(X) = V$. V est une variété $*$, $\xi^N|_V : V \longrightarrow X$ est une application de degré 1, et il est clair que l'on a un isomorphisme λ de α^N sur le fibré normal à V dans E^N (c'est à dire dans $\mathbb{R}^{N+n}$). On a donc défini une donnée de chirurgie $*$ $(V, \xi^N|_V, \alpha^N, \lambda)$ sur X . Il est clair que la classe de cette donnée dans $\Omega^*(X)$ ne dépend que de la classe de (α^N, ξ^N) dans $*$ $(\nu(X))$, et que l'on a défini une application :

$$\chi : *(\nu(X)) \longrightarrow \Omega^*(X)$$

Inversement si $(V, \varphi, \alpha, \lambda)$ est une donnée de chirurgie $*$ sur X , on choisit N tel que l'on puisse trouver dans la classe d'homotopie de φ , un plongement Φ de V dans le voisinage régulier E^N de X dans $\mathbb{R}^{N+n}$. L'isomorphisme λ nous donne alors un voisinage régulier $\mathcal{U}$ de $\Phi(V)$ dans E^N et une application fibrée $\Psi : (\mathcal{U}, d\mathcal{U}) \longrightarrow (B\alpha^N, S\alpha^N)$. La composée de Ψ avec la projection $\pi : B\alpha^N \longrightarrow X$ est homotope à φ , donc se prolonge en une application μ de E^N dans $B\alpha^N$, telle que $\pi \cdot \mu : E^N \longrightarrow X$ soit l'inverse homotopique de l'inclusion de X dans E^N . Si N est assez grand, μ est homotope, modulo $\mu|_{\mathcal{U}}$, à une application $\hat{\mu} : (E^N, E^N - \mathcal{U}) \longrightarrow (B\alpha^N, S\alpha^N)$; en effet les obstructions à construire $\hat{\mu}$ sont dans les groupes $H^k(E^N, \mathcal{U}, \pi_k(B\alpha^N, S\alpha^N))$, et ces groupes sont nuls pour $k \leq N-1$ car $\pi_k(B\alpha^N, S\alpha^N)$ est alors nul, et pour $k > n$, car $H^k(E^N, \mathcal{U}, G)$ est alors nul quelque soit G (donc ils

sont tous nuls pour $n \leq N-1$). On a donc associé à toute donnée de chirurgie $*$ sur X un élément de $*(\vee(X))$. Il est clair que l'on a ainsi démontré le

Théorème 2 : Si $*$ = Diff ou PL; et si X est un complexe de Poincaré sans bord, il existe une bijection

$$\chi : *(\vee(X)) \longrightarrow \Omega^*(X)$$

On démontre de la même façon le

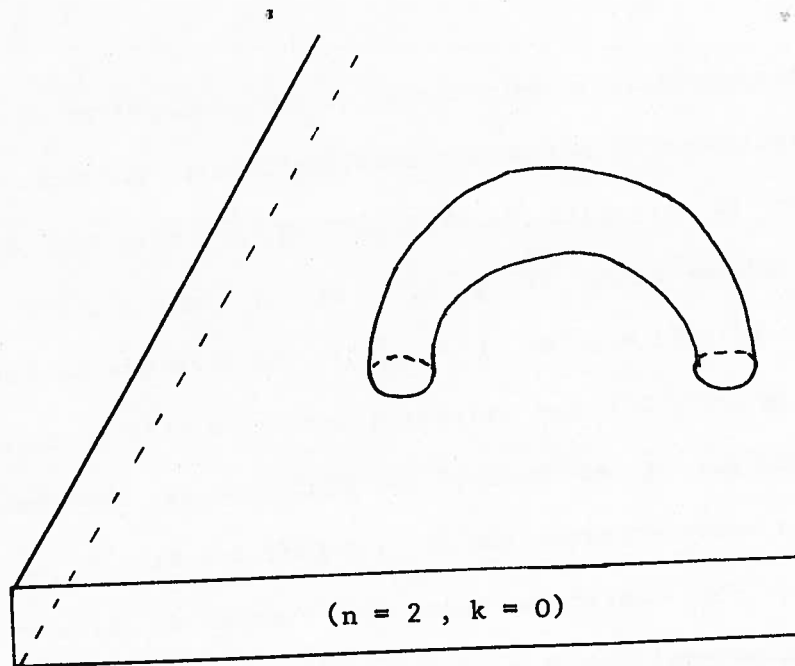
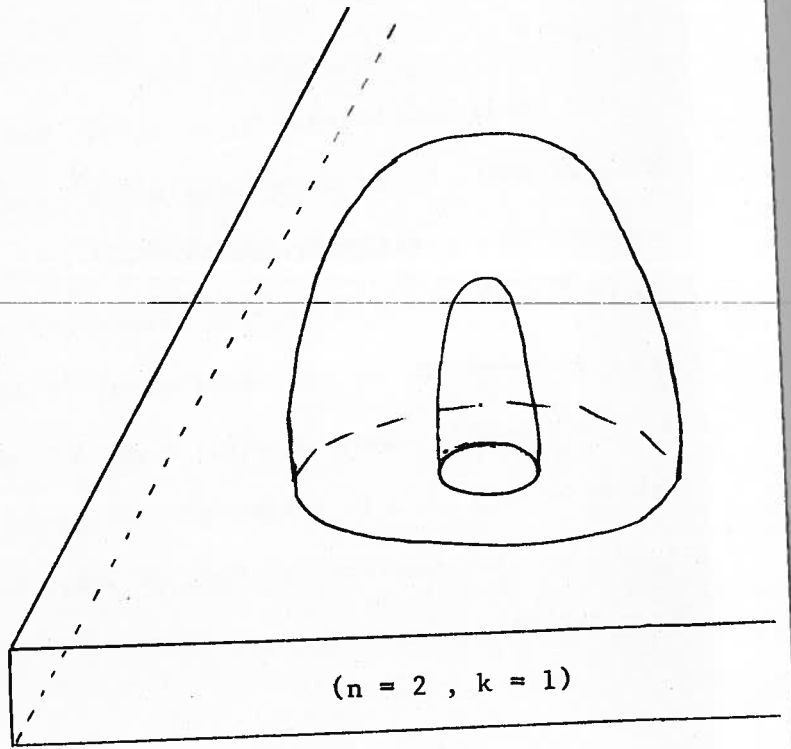
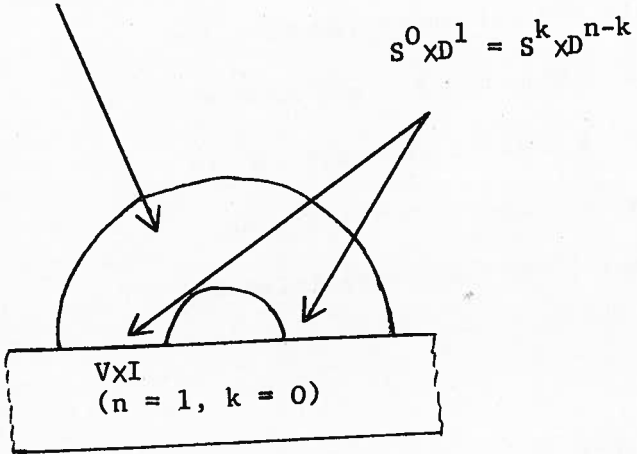
Théorème 3 : Si $*$ = Diff ou PL, pour tout couple (X,Y) , il existe une bijection

$$\chi : *(\vee(X) \bmod dX-Y) \longrightarrow \Omega^*(X,Y)$$

§3 - Définition des chirurgies.

Soit V une variété $*$ de dimension n sans bord, et soit f un plongement de $S^k \times D^{n-k}$ dans V . Soit f_0 le plongement naturel de $S^k \times D^{n-k}$ dans S^n (i.e. : on identifie D^{n+1} à $D^{k+1} \times D^{n-k}$, ce qui identifie S^n à la réunion de $S^k \times D^{n-k}$ et de $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$). Recolons $V \times I$ et D^{n+1} en identifiant, pour tout point x de $S^k \times D^{n-k}$, le point $(f(x), 1)$ et le point $f_0(x)$. On obtient une variété $*$ T , dont le bord est formé de V (identifié à $V \times \{0\}$) et d'une variété $*$ V' . On peut encore décrire V' en disant qu'on enlève l'intérieur de l'image de f à V pour obtenir une variété $*$ V_0 dont le bord est identifié à $S^k \times S^{n-k-1}$, et qu'on recolle ensuite V_0 et $D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ le long de

$$D^2 = D^1 \times D^1 = D^{k+1} = D^{k+1} \times D^{n-k}$$



Soit maintenant $(V, \varphi, \alpha, \lambda)$ une donnée de chirurgie $*$ sur X , et soit f un plongement de $S^k \times D^{n-k}$ dans V . On peut faire la construction précédente. Si on s'est donné de plus une homotopie h de $(\varphi, f|_{S^k} : S^k \longrightarrow X)$ à zéro, cette homotopie définit un prolongement de $\varphi : V \longrightarrow X$ en une application ψ de T dans $X \times I$ qui envoie $V (= V \times \{0\})$ dans $X \times \{0\}$ et V' dans $X \times \{1\}$. On note β le fibré $*$ sur $X \times I$ obtenu par extension de α . Soit A l'image de f , c'est une variété $*$ dont le fibré normal $\nu(A)$ est trivialisé de deux façons :

$$1) \text{ par l'isomorphisme } f : S^k \times D^{n-k} \longrightarrow A$$

$$2) \text{ par le fait que } \nu(A) = \nu(V)|_A = \varphi^*(\alpha)|_A = (\varphi|_A)^*(\alpha)$$

et l'homotopie de $\varphi.f|_{S^k}$ à zéro.

Il est clair que λ se prolonge en un isomorphisme de $\nu(T)$ sur $\psi^*(\beta)$ si et seulement si ces deux trivialisations coïncident. Ceci définit alors une donnée de chirurgie $((T, V, V'), \psi, \beta, \mu)$ sur $(X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$, qui est un cobordisme entre $(V, \varphi, \alpha, \lambda)$ et $(V', \varphi', \alpha', \lambda')$ (où $\varphi' = \psi|_{V'}$, $\alpha' = \beta|_{X \times \{1\}} = \alpha$ et $\lambda' = \mu|_{V'}$). On dira que la donnée de chirurgie $(V', \varphi', \alpha', \lambda')$ est obtenue à partir de $(V, \varphi, \alpha, \lambda)$ par la chirurgie définie par f et h . Il est clair que les théorèmes de décomposition en anses montrent que si $*$ = Diff ou PL, ou si $*$ = CP et $n \geq 4$, tout cobordisme entre deux données de chirurgie $*$ sur X est obtenu en mettant bout à bout un certain nombre de cobordismes de cette forme.

Dans le cas d'une donnée de chirurgie $((V,W), \varphi, \alpha, \lambda)$ sur (X,Y) on a deux notions de chirurgie

- 1) Pour tout plongement f de $S^k \times D^{n-k}$ dans l'intérieur de V on fait une construction analogue à la précédente, qui ne change rien au bord ($dV' = dV$ et dT est la réunion de V , de V' et de $dV \times I$) ; cette construction définit un cobordisme de données de chirurgie si on s'est donné une homotopie h de $\varphi.f|S^k$ à zéro, telle que les deux trivialisations de $\nu(f(S^k \times D^{n-k}))$ coïncident.
- 2) Si on se donne un plongement f de $S^k \times D^{n-k-1}$ dans l'intérieur de W , et une homotopie h de $\varphi.f|S^k : S^k \longrightarrow Y$ à zéro telle que les deux trivialisations de $\nu(f(S^k \times D^{n-k-1}))$ définies par f et h coïncident, on peut faire une construction analogue pour définir un cobordisme $*$ (U, η, γ, π) entre $(W, \varphi|W, \alpha|Y, \lambda|W) = Z$ et une donnée de chirurgie $*$ $(W', \varphi', \alpha', \lambda') = Z'$ sur Y . Comme les restrictions de $((V,W), \varphi, \alpha, \lambda)$ et de $((U,W,W), \eta, \gamma, \pi)$ à Y et $Y \times \{0\}$ coïncident, on peut recoller ces deux données de chirurgie en une donnée de chirurgie $*z$ sur la réunion de X et $Y \times I$ (où on identifie Y avec $Y \times \{0\}$). Le produit de cette donnée de chirurgie par I peut être considéré comme une donnée de chirurgie sur $(X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\}, Y \times I)$ dont les restrictions à $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ et $Y \times I$ sont respectivement $((V,W), \varphi, \alpha, \lambda)$, z et $((U,W,W'), \eta, \gamma, \pi)$. On dira qu'on fait la chirurgie définie par f et h . Cette opération change à la fois V et W . Les théorèmes de décomposition en anses entraînent que si $*$ = Diff ou PL, ou si $*$ = CP et $n \geq 5$ (ou encore $n = 4$ et $Y = \emptyset$), tout cobordisme entre deux données de chirurgie sur (X,Y) est une suite d'opérations de type 2 suivi d'une suite d'opérations de type 1.

§4 - Chirurgie en dimension inférieure à la moitié.

Notations :

Pour toute application $\varphi : A \longrightarrow B$, on notera $M(\varphi)$ le mapping cylindre de φ , $M(\tilde{\varphi})$ sont revêtement universel et $\tilde{A}$ le relèvement de A dans $M(\tilde{\varphi})$. On pose $\pi_{i+1}(M(\varphi), A) = \pi_i(\varphi)$ et $H_{i+1}(M(\tilde{\varphi}), \tilde{A}) = H_i(\tilde{\varphi})$. Dans ce qui suit $(V, W_1, \dots, W_k), \varphi, \alpha, \lambda)$ désigne une donnée de chirurgie sur $(X, Y_1, \dots, Y_k)$. On pose $\dim X = n$ et on rappelle que X est supposé connexe.

Chirurgies en petite dimension : Soit η un élément de $\pi_i(\varphi)$, on suppose que $n \geq i+3$ et que $n \geq 2i+1$; η peut être représenté par une application $f_0 : S^i \longrightarrow V$ et une homotopie h de $\varphi \cdot f_0$ à zéro. Puisque $2i+1 \leq n$ et $i+3 \leq n$, d'après les théorèmes de plongement de Whitney (connus dans le cadre différentiable ou semi-linéaire, et démontrés au chapitre IV dans le cadre CP), f_0 est homotope à un plongement. Le fibré normal à ce plongement est stablement trivial et, puisque $n-i \geq i+1$ et que $\pi_i(B_{*i+1}) \longrightarrow \pi_i(B_*)$ est bijectif, il est trivial. On peut donc faire la construction précédente. Il est possible de s'arranger pour que les deux trivialisations coïncident puisque $n-i \geq i+1$ et que $\pi_i(*_{i+1}) \longrightarrow \pi_i(*)$ est surjectif ($*$ = PL, SO ou G). Donc à η on peut associer une chirurgie (d'ailleurs pas définie de façon unique); on va étudier comment une telle chirurgie change les $\pi_i(\varphi)$; on démontrera le

Théorème 3 : Si $n \geq 4$, par des chirurgies dont les dimensions sont inférieures ou égales à $(n-2)/2$, on peut transformer toute donnée de chirurgie sur $(X, Y_1, \dots, Y_k)$, en une donnée telle que $\pi_1(\varphi)$ soit nul pour $2i+2 \leq n$ (en particulier telle que V soit connexe, et que $\pi_1(V) = \pi_1(X)$). Cette transformation ne change pas la partie de la donnée de chirurgie qui se trouve au dessus du bord de X .

Démonstration : Premier temps : Supposons que V ne soit pas connexe, et considérons deux composantes connexes V_1 et V_2 de V , il existe un plongement f_0 de S^0 dans V et une application h de D^1 dans X tels que $f_0(1) \in V_1$, $f_0(-1) \in V_2$ et $h|_{S^0} = \varphi \cdot f_0$. Faisons la chirurgie correspondante, il est clair que V_1 et V_2 sont dans la même composante connexe de T , et que les composantes connexes de V' correspondent bijectivement à celles de T ; donc le nombre des composantes connexes de V' est inférieur d'une unité au nombre des composantes connexes de V . Il est clair qu'un nombre fini de telles chirurgies nous ramène au cas où V est connexe, on sait alors beaucoup plus à cause du

Lemme 1 : Soient V et X deux complexes de Poincaré connexes de dimension n , et soit $\varphi : (V, dV) \longrightarrow (X, dX)$ une application de degré 1, alors $\varphi_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$ est surjectif et son noyau est engendré par un nombre fini de relations.

Démonstration : Posons $\varphi_*(\pi_1(V)) = G \subset \pi_1(X)$, et soit $\hat{X}$ le revêtement de X correspondant à G (on notera π la projection de $\hat{X}$ sur X); il existe une application $\hat{\varphi} : V \longrightarrow \hat{X}$ telle que $\pi \cdot \hat{\varphi} = \varphi$. Puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}_2 = H_n(V, \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\hat{\varphi}_*} & H_n(\hat{X}, \mathbb{Z}_2) \\
 \searrow \varphi_* & & \swarrow \pi_* \\
 & \mathbb{Z}_2 = H_n(X, \mathbb{Z}_2) &
 \end{array}$$

est commutatif et que φ_* est un isomorphisme, $H_n(\hat{X}, \mathbb{Z}_2)$ est non nul ; donc $\hat{X}$ est compact. On a alors $d^\circ \pi = \text{card } (\pi_1(X)/G)$, et $d^\circ \varphi = 1 = d^\circ \pi \circ d^\circ \hat{\varphi}$; donc $\text{card } (\pi_1(X)/G) = 1$, ce qui prouve que φ_* est surjectif. Examinons maintenant le noyau de φ_* . On peut supposer que φ est cellulaire et que V et X n'ont qu'un seul sommet ; en ajoutant des 1-cellules et des 2-cellules à V on peut s'arranger pour que toute 1-cellule de X soit l'image d'une 1-cellule de V au moins. Les 1-cellules de $\pi_1(V)$ donnent des générateurs (a_i) de $\pi_1(V)$, et les 1-cellules de X donnent des générateurs (α_k) de $\pi_1(X)$. Pour tout i , $\varphi_*(a_i)$ est l'un des α_k , et chaque α_k est l'image d'un a_i . Il est clair que les relations suivantes engendrent le noyau de φ_* :

- 1) Pour tout couple (i, j) tel que $\varphi_*(a_i) = \varphi_*(a_j)$
 $a_i \cdot a_j^{-1} = 1$.
- 2) Pour toute relation $R(\alpha_1, \dots, \alpha_p) = 1$ entre les (α_k)
dans $\pi_1(X)$, $R(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) = 1$, où, pour tout k ,
 i_k a été choisi tel que $\varphi_*(a_{i_k}) = \alpha_k$.

Deuxième temps : On suppose maintenant que V est connexe et on va se ramener au cas où, de plus, $\varphi_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme. Soit η un élément de $\pi_1(\varphi)$, puisque $n \geq 1+3$ et $n \geq 2 \times 1 + 1$, on peut faire la chirurgie correspondant à η . T est alors équivalente à la réunion de V et d'une cellule de dimension 2 attachée à V par l'application $S^1 \longrightarrow V$ définie par η ; donc $\pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(T)$ est surjectif et son noyau est le sous-groupe distingué engendré par l'image de η dans $\pi_1(V)$. Par ailleurs $\pi_1(V') \longrightarrow \pi_1(T)$ est un isomorphisme puisque T est équivalent à la réunion de V' et d'une cellule de dimension $(n+1)-2 \geq 3$. D'après le lemme 1, pour se ramener au cas où φ_* est un isomorphisme, il suffit de faire un nombre fini de telles chirurgies. On a alors $\pi_1(\varphi) = 0$, puisque $\pi_1(\varphi) = \text{Coker}(\pi_2(V) \longrightarrow \pi_2(X)) = \text{Coker}(H_2(\tilde{V}) \longrightarrow H_2(M(\tilde{\varphi})))$ et que l'on a le

Lemme 2 : Soient V et X deux complexes de Poincaré connexes de dimension n , et $\varphi : (V, dV) \longrightarrow (X, dX)$ une application de degré 1 telle que $\varphi_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$ soit un isomorphisme, alors, pour tout i , $\varphi_* : H_i(\tilde{V}) \longrightarrow H_i(\tilde{X})$ est surjectif (cf : dualité de Poincaré relative, §5 ci-dessous).

Troisième temps : On suppose maintenant que V est connexe et que $\varphi_* : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$ est un isomorphisme, on va tuer les $\pi_i(\varphi)$ suivants par récurrence sur i . On suppose donc que $\pi_j(\varphi)$ est nul pour $j < i$ ($i \geq 2$ et $2i+2 \leq n$), et on va montrer que l'on peut se ramener au cas où, de plus, $\pi_i(\varphi) = 0$. Soit η un élément de $\pi_i(\varphi)$, faisons la chirurgie correspondant η ; T est la réunion de V et d'une cellule de dimension $(n+1)-(i+1) = n-i > i+1$. Donc, si on note ψ l'application de T dans X et si on pose $\varphi' = \psi|_{V'} : V' \longrightarrow X$, on a

$\pi_j(\varphi') = \pi_j(\psi) = \pi_j(\varphi) = 0$ pour $j < i$ (en particulier $\pi_1(V') \longrightarrow \pi_1(X)$ et $\pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(X)$ sont des isomorphismes). Il en résulte que $\pi_i(\varphi') = H_i(\tilde{\varphi}')$, et que $H_i(\tilde{\varphi}')$ est le quotient de $H_i(\tilde{\psi}) = H_i(\tilde{\varphi}) = \pi_i(\varphi)$ par le sous- $\mathbb{Z}$ ($\pi_1(X)$)-module engendré par η . Comme $\pi_i(\varphi) = H_i(\tilde{\varphi})$ est un $\mathbb{Z}$ ($\pi_1(X)$)-module de type fini, une suite finie de telles chirurgies nous ramène au cas où $\pi_i(\varphi) = 0$.

§5 - Réduction des données de chirurgie.

Notations :

Considérons une application $\varphi : (Y, Y') \longrightarrow (X, X')$, où Y et X sont des complexes finis connexes, $\pi_1(Y) = \pi_1(X) = \pi$ et $\pi_0(Y') = \pi_0(X')$, considérons également un homomorphisme $w : \pi \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, on adopte les notations du chapitre II. Soient donc $C_*(\tilde{Y})$ et $C_*(\tilde{M}(\varphi))$ les π -modules différentiels qui définissent l'homologie des revêtements universels de Y et $M(\varphi)$. Soit $C_*(\widetilde{M(\varphi|Y')})$ le sous module de $C_*(\widetilde{M(\varphi)})$ engendré par $\widetilde{M(\varphi|Y')}$; l'intersection de $C_*(\widetilde{M(\varphi|Y')})$ et de $C_*(\tilde{Y})$ est le sous-module $C_*(\tilde{Y}')$ engendré par Y' . On pose alors $C_i(\tilde{\varphi}) = C_{i+1}(\widetilde{M(\varphi)})/C_{i+1}(\tilde{Y})$ et $C_i(\tilde{\varphi|Y'}) = C_{i+1}(\widetilde{M(\varphi|Y')})/C_{i+1}(\tilde{Y})$. On obtient ainsi des π -modules différentiels $C_*(\tilde{\varphi})$ et $C_*(\tilde{\varphi|Y'})$. Pour tout π -module B , on pose $H_{-i}(\text{Hom}_{\pi}(C_*(\tilde{\varphi}), B)) = H^i(\varphi, B)$, $H_{-i}(\text{Hom}_{\pi}(C_*(\tilde{\varphi|Y'}), B)) = H^i(\varphi|Y', B)$ et $H_{-i}(\text{Hom}_{\pi}(C_*(\tilde{\varphi}), B) \bmod \text{Hom}_{\pi}(C_*(\tilde{\varphi|Y'}), B)) = H^i(\varphi, \varphi|Y', B)$. On a donc les suites exactes :

$$\dots H^{i-1}(\varphi|Y', B) \longrightarrow H^i(\varphi, \varphi|Y, B) \longrightarrow H^i(\varphi, B) \longrightarrow H^i(\varphi|Y', B) \dots$$

$$\dots H^{i-1}(\varphi, \varphi|Y', B) \longrightarrow H^i(X, X', B) \longrightarrow H^i(Y, Y', B) \longrightarrow H^i(\varphi, \varphi|Y', B) \dots$$

On pose aussi $H_i(B \otimes C_*(\tilde{\varphi})) = H_i^W(\varphi, B)$, $H_i(B \otimes C_*(\varphi|_{Y'})) = H_i^W(\varphi|_{Y'}, B)$; et $H_i(B \otimes C_*(\tilde{\varphi}) \bmod B \otimes C_*(\varphi|_{Y'})) = H_i^W(\varphi, \varphi|_{Y'}, B)$. On a les suites exactes :

$$\begin{aligned} \dots H_i^W(\varphi|_{Y'}, B) &\longrightarrow H_i^W(\varphi, B) \longrightarrow H_i^W(\varphi, \varphi|_{Y'}, B) \longrightarrow H_{i-1}^W(\varphi|_{Y'}, B) \dots \\ \dots H_i^W(\varphi, \varphi|_{Y'}, B) &\longrightarrow H_i^W(Y, Y', B) \longrightarrow H_i^W(X, X', B) \longrightarrow H_{i-1}^W(\varphi, \varphi|_{Y'}, B) \dots \end{aligned}$$

On notera que $H_i^W(\varphi, A) = H_i(\tilde{\varphi})$ et $H_i^W(\varphi|_{Y'}, A) = H_i(\varphi|_{Y'})$; on notera aussi que si $\pi_i(\varphi) = 0$ pour $i < k$, $H_i^W(\varphi, B) = H^i(\varphi, B) = 0$ pour $i < k$, quel que soit B .

Dualité de Poincaré relative : Soient V et X deux complexes de Poincaré, et $\varphi : (V, V', V'') \longrightarrow (X, X', X'')$ une application de degré 1, telle que $\varphi|_{V'} : V' \longrightarrow X'$ et $\varphi|_{V''} : V'' \longrightarrow X''$ soient de degré 1; on suppose que V et X sont connexes, que $\pi_1(V) = \pi_1(X) = \pi$, et que $\pi_0(V') = \pi_0(X')$ et $\pi_0(V'') = \pi_0(X'')$. Pour tout π -module B , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_i^W(V, V', B) & \xleftarrow{\cap [V]} & H^{n-i}(V, V'', B) \\ \downarrow \varphi_* & & \uparrow \varphi^* \\ H_i^W(X, X', B) & \xleftarrow{\cap [X]} & H^{n-i}(X, X'', B) \end{array}$$

qui est commutatif (i.e. : pour tout $\alpha \in H^{n-i}(X, X'', B)$, $\alpha \cap [X] = \varphi_*(\varphi^*(\alpha) \cap [V])$). Donc φ_* est surjectif et φ^* est injectif; on a alors des suites exactes, naturellement scindées

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longleftarrow & H^{n-i}(\varphi, \varphi|V'', B) & \longleftarrow & H^{n-i}(V, V'', B) & \longleftarrow & H^{n-i}(X, X'', B) \longleftarrow 0 \\
0 & \longrightarrow & H_i^W(\varphi, \varphi|V', B) & \longrightarrow & H_i^W(V, V', B) & \longrightarrow & H_i^W(X, X', B) \longrightarrow 0
\end{array}$$

La dualité de Poincaré de V envoie la partie de $H^{n-i}(V, V'', B)$ qui est identifiée à $H^{n-i}(\varphi, \varphi|V'', B)$ sur la partie de $H_i^W(V, V', B)$ qui est identifiée à $H_i^W(\varphi, \varphi|V', B)$ ce qui définit un isomorphisme

$$H^{n-i}(\varphi, \varphi|V'', B) \longrightarrow H_i^W(\varphi, \varphi|V', B)$$

C'est la dualité de Poincaré relative.

Applications simples :

Lemme : Soit $\varphi : (Y, Y') \longrightarrow (X, X')$ comme ci-dessus, on suppose que $H_i(\varphi, \varphi|Y', A) = 0$ pour $i \neq k$ et que, pour tout π -module B , $H^{k+1}(\varphi, \varphi|Y', B) = 0$. Alors $H_k(\varphi, \varphi|Y', A)$ est π -module projectif stablement libre.

Démonstration : $H_*(\varphi, \varphi|Y', A)$ est l'homologie d'un π -module différentiel libre de rang fini

$$L_* = (0 \longleftarrow L_0 \longleftarrow L_1 \dots L_i \xleftarrow{d_{i+1}} L_{i+1} \dots L_N \longleftarrow 0)$$

et $H^*(\varphi, \varphi|Y', B)$ est l'homologie de $\text{Hom}_\pi(L_*, B)$. Soient B_i le module des bords de dimension i , et Z_i le module des cycles de dimension i . Soit α la surjection naturelle de L_{k+1} sur B_k ; l'application composée $L_{k+2} \xrightarrow{d_{k+2}} L_{k+1} \xrightarrow{\alpha} B_k$ est nulle donc α est un cocycle. Puisque $H^{k+1}(\varphi, \varphi|Y', B_k) = 0$, ce cocycle est un cobord; ce qui signifie qu'il existe une application $\beta : L_k \longrightarrow B_k$

qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L_{k+1} & \xrightarrow{\alpha} & B_k \\
 \downarrow d_{k+1} & \searrow \beta & \\
 L_k & &
 \end{array}$$

Puisque α est surjectif, $\beta|_{B_k} = \text{Id}_{B_k}$; donc B_k est facteur direct dans L_k , donc il est projectif. De plus $B_k \subset Z_k \xrightarrow{\beta} B_k$ montre que B_k est aussi facteur direct dans Z_k .

Comme pour $i \neq k$, $H_i(\varphi, \varphi|_{Y'}, A) = 0$, on a les suites exactes :

$$(1) \quad \begin{cases} 0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow B_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow Z_k \longrightarrow L_k \longrightarrow B_{k-1} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0 \longrightarrow B_{k+1} \longrightarrow L_{k+1} \longrightarrow B_k \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow L_N \longrightarrow L_{N-1} \longrightarrow B_{N-2} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Puisque B_k et tous les L_i sont projectifs, tous les B_i et Z_k sont projectifs, et comme B_k est facteur direct dans Z_k , $H_k(\varphi, \varphi|_{Y'}, A)$ est projectif.

De plus les suites exactes (1) montrent que Z_k est stablement libre, et les suites exactes (2) montrent que B_k est stablement libre; donc $H_k(\varphi, \varphi|_{Y'}, A)$ est stablement libre. Ce qui termine la démonstration du

Considérons maintenant le π -module différentiel gradué H_* défini par $H_i = 0$ pour $i \neq k$ et $H_k = H_k(\varphi, \varphi|Y', A)$. Soit $\theta : H_k \longrightarrow Z_k$ une section de la projection $Z_k \longrightarrow H_k$ (il en existe puisque B_k est facteur direct dans Z_k) ; considéré comme une application de H_k dans L_k , θ définit un homomorphisme θ_* de H_* dans L_* . θ_* est une équivalence d'homotopie, et sa classe d'homotopie ne dépend pas du choix de θ .

Définition : On dit que $\varphi : (Y, Y') \longrightarrow (X, X')$ est une application k -simple si $H_i(\varphi, \varphi|Y', A)$ est nul pour $i \neq k$, et est libre pour $i = k$, et si de plus $H_k(\varphi, \varphi|Y', A)$ possède une base telle que θ_* soit une équivalence d'homotopie simple.

Données de chirurgie réduites : cas absolu.

Définition 1 : Soit $\eta = (V, \varphi, \alpha, \lambda)$ une donnée de chirurgie sur X ; si $\dim X = 2k+1$, et si $\pi_i(\varphi) = 0$ pour $i < k$, on dit que η est réduite. Si $\dim X = 2k$, et si $\varphi : (V, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ est une application k -simple, on dit que η est réduite.

Théorème 4 : Si $\dim X \geq 4$, toute donnée de chirurgie $*$ sur X est $*$ cobordante à une donnée réduite.

Démonstration : Il est clair que pour $\dim X = 2k+1$, c'est une conséquence du théorème 3. Si $\dim X = 2k$, le théorème 3 nous ramène seulement au cas où $\pi_i(\varphi) = 0$ pour $i < k$. On a donc $H_i^W(\varphi, A) = H_i(\varphi) = 0$ pour $i < k$. On a aussi $H^{n-i}(\varphi, A) = 0$ pour $n-i < k$; d'où, par dualité de Poincaré relative, $H_i^W(\varphi, A) = H_i(\tilde{\varphi}) = 0$ pour $i > k$. Par ailleurs, quel que soit le π -module B , $H_{k-1}^W(\varphi, B) = 0$; donc par dualité de Poincaré

relative, $H^{k+1}(\varphi, B) = 0$. On peut donc appliquer à φ le lemme ci-dessus, ce qui nous montre que $H_k(\varphi, A) = H_k(\tilde{\varphi})$ est projectif stablement libre.

Faire une chirurgie de dimension k le long d'un plongement $S^k \longrightarrow V$ qui borde un disque, revient à faire la somme connexe de V et d'un tore $S^k \times S^k$; par conséquent une telle chirurgie ajoute $A \times A$ au module $H_k(\varphi, A)$, et ne change pas $H_i(\varphi, A)$ pour $i \neq k$. Par de telles chirurgies on se ramène au cas où $H_k(\varphi, A)$ est libre, puis au cas où φ est k -simple.

Définition 2: Soit $\eta = (V, V_0, V_1), \Psi, \beta, \mu)$ un $*$ cobordisme de $\eta|X \times \{0\}$ à $\eta|X \times \{1\}$. Si $\dim X = 2k$, et si $\pi_i(\Psi, \Psi|V_0) = \pi_i(\Psi, \Psi|V_1) = 0$ pour $i < k$, on dit que η est réduit. Si $\dim X = 2k-1$, et si $\Psi : (V, V_0) \longrightarrow (X \times I, X \times \{0\})$ est k -simple, on dit que η est réduit.

Théorème 5 : Si $\dim X \geq 4$, tout $*$ cobordisme entre deux données de chirurgie réduites sur X , est $*$ cobordant (modulo sa restriction à $X \times \{0,1\}$) à un cobordisme réduit.

Démonstration : Pour $\dim X = 2k$, c'est une conséquence du théorème 3. Pour $\dim X = 2k-1$, le théorème 3 nous ramène au cas où $\pi_i(\Psi) = 0$ pour $i < k$. Puisque $\eta|X \times \{0\}$ et $\eta|X \times \{1\}$ sont réduites, $\pi_i(\Psi|V_0) = \pi_i(\Psi|V_1) = 0$ pour $i < k-1$. On en déduit que $\pi_i(\Psi, \Psi|V_0) = \pi_i(\Psi, \Psi|V_1) = 0$ pour $i < k$. La dualité de Poincaré relative montre alors que les hypothèses du lemme ci-dessus sont vérifiées; donc $H_k(\Psi, \Psi|V_0, A)$ est projectif stablement libre. Comme dans la démonstration du théorème 4, on fait alors des chirurgies de dimension k pour se ramener au cas où

Remarque : Si $\dim X = 2k-1$, la définition des cobordisme réduits ne fait pas jouer un rôle symétrique à $\eta|X \times \{0\}$ et $\eta|X \times \{1\}$. En fait on pourrait montrer qu'un cobordisme réduit, reste réduit si on échange $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$; ceci ne servira à rien dans la suite.

Données de chirurgie réduites : cas relatif.

Définition 1' : Soit $\eta = ((V,W), \varphi, \alpha, \lambda)$ une donnée de chirurgie $*$ sur (X,Y) . Si $\dim X = 2k+1$, si $\eta|Y$ est réduite, et si $\pi_i(\varphi) = 0$ pour $i < k$, on dit que η est réduite. Si $\dim X = 2k$, si $\eta|Y$ est réduite, et si $\varphi : (V, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ est k -simple on dit que η est réduite.

Théorème 4' : Si $\dim X \geq 5$, toute donnée de chirurgie $*$ sur (X,Y) est $*$ cobordante à une donnée réduite.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 5.

Définition 2' : Soit $\eta = ((V, V_0, V_1, W), \Psi, \beta, \mu)$ un $*$ cobordisme entre les données $\eta|X \times \{0\}$ et $\eta|X \times \{1\}$ sur (X,Y) . Si $\dim X = 2k$, si $\eta|Y \times I$ est un cobordisme réduit entre $\eta|Y \times \{0\}$ et $\eta|Y \times \{1\}$, et si $\pi_i(\Psi, \Psi|V_0) = \pi_i(\Psi, \Psi|V_1) = 0$ pour $i < k$, on dit que η est un cobordisme réduit de $\eta|X \times \{0\}$ à $\eta|X \times \{1\}$. Si $\dim X = 2k-1$, si $\eta|Y \times I$ est un cobordisme réduit $\eta|Y \times \{0\}$ à $\eta|Y \times \{1\}$, et si $\Psi : (V, V_0) \longrightarrow (X \times I, X \times \{0\})$ est une application k -simple, on dit que η est un cobordisme réduit de $\eta|(X,Y) \times \{0\}$ à $\eta|(X,Y) \times \{1\}$.

Théorème 5' : Si $\dim X \geq 5$, tout $*$ cobordisme η entre deux données de chirurgie réduites sur (X, Y) , est $*$ cobordant (modulo sa restriction à $X \times \{0, 1\}$) à un cobordisme réduit.

La démonstration est analogue à celle du théorème 5. On remarque qu'ici la notion de cobordisme réduit fait jouer des rôles tout à fait différents à $X \times \{0\}$ et $X \times \{1\}$.

§6 - La suite exacte de Kervaire Milnor Wall.

Soit T un complexe de Poincaré, dont le bord est la réunion des complexes de Poincaré $T_1, \dots, T_k$. On appellera donnée de chirurgie mixte $(*/CP$ où $*$ = Diff ou PL) sur $(T, T_1, \dots, T_k)$, la donnée d'un quadruple $((U, U_1, \dots, U_k), \Phi, \beta, \lambda)$ où

- 1) U est un complexe de Poincaré dont le bord est la réunion du complexe de Poincaré U_1 et des variétés $* U_2, \dots, U_k$.
- 2) Φ est une application de degré 1 de (U, dU) dans (T, dT) , qui, quel que soit le système d'indices $i_1, \dots, i_p$, induit une application de degré 1 de $(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}, d(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}))$ sur $(T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_p}, d(T_{i_1} \cap \dots \cap T_{i_p}))$.
- 3) β est un fibré $*$ sur X .
- 4) λ est un isomorphisme de fibrés homotopiques de $\Phi^*(\beta)$ sur $\vee(U)$, dont la restriction à U_i ($i = 2, \dots, k$) est un isomorphisme de fibré $*$ de $\Phi^*(\beta)$ sur $\vee(U_i)$.

Lemme de lissage des données de chirurgie : Soit $((U, U_1, \dots, U_k), \Phi, \beta, \lambda)$
une donnée de chirurgie mixte sur $(T, T_1, \dots, T_k)$. On suppose

$$1) \dim T \geq 5$$

$$2) \pi_i(U, U_1) = 0 \text{ pour } i \leq 2$$

3) Il existe un complexe de Poincaré S , tel que (T, T_1) soit isomorphe à $(S \times I, S \times \{1\})$.

Alors il existe une donnée de chirurgie *

$\tilde{Z} = ((\tilde{U}, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_k), \tilde{\Phi}, \tilde{\beta}, \tilde{\lambda})$ sur $(T, T_1, \dots, T_k)$, et une application
 $\mu : (\tilde{U}, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_k) \longrightarrow (U, U_1, \dots, U_k)$ qui est un isomorphisme de complexe de Poincaré de $(\tilde{U}, d\tilde{U})$ sur (U, dU) , et tel que

1) $\mu|_{U_1}$ soit un isomorphisme de complexe de Poincaré de $(\tilde{U}_1, d\tilde{U}_1)$ sur (U_1, dU_1) .

2) $\mu|_{U_i} (i = 2, \dots, k)$ soit un isomorphisme de variété * de $\tilde{U}_i$ sur U_i .

$$3) \tilde{\Phi} = \Phi \cdot \mu$$

4) Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \nu(\tilde{U}) & \xrightarrow{\mu^*} & \nu(U) \\ \uparrow \lambda & & \uparrow \lambda \\ \tilde{\Phi}^*(\beta) & \xrightarrow{\mu^*} & \Phi^*(\beta) \end{array}$$

est un diagramme commutatif de fibrés homotopiques dont les restrictions à chacun des U_i ($i \geq 2$) est un diagramme commutatif de fibrés $*$.

Démonstration : Les hypothèses $\pi_i(U, U_1) = 0$ pour $i \leq 2$, et $n = \dim T \geq 5$, assurent que U est la réunion de $U_1 \times I$ et d'anses de dimension au moins 3 ; donc que U est la réunion de $U' \times I$ (où on pose $U_2 \cup \dots \cup U_k = U'$) et d'anses de dimension au plus $n-3$. On a donc des sous-complexes de Poincaré $U^0 = U' \times I \subset U^1 \subset \dots \subset U^p = U$ de U tel que, quel que soit i , U^{i+1} soit la réunion de U^i et d'une anse de dimension au plus $n-3$. On transforme successivement chacun des U^i en une variété $*$. Si U^i est déjà transformé en une variété $* \tilde{U}^i$, l'application d'attachement de l'anse qui fait passer de U^i à U^{i+1} est un plongement de complexe de Poincaré de $S^k \times D^{n-k-1}$ ($k \leq \dim dU^i - 3$) dans la variété $* dU^i - U'$. Soit η ce plongement, il définit un isomorphisme de fibré homotopique de fibré $* \tau(S^k \times D^{n-k-1})$ sur le fibré $* \eta^*(\tau(dU^i - U'))$. L'isomorphisme λ assure que cet isomorphisme de fibrés homotopiques est équivalent à un isomorphisme $*$. Puisque $\dim(U^i - U') - k \geq 3$, le théorème 4 du Chap. V, nous assure alors que η est isotope à un plongement $\tilde{\eta}$ de variété $*$ (muni d'un fibré normal trivialisé). La variété $* \tilde{U}^{i+1}$ obtenue en recollant l'anse par $\tilde{\eta}$, est, d'après le théorème de relèvement des isotopies (prop. 1 du chap. 5), un complexe de Poincaré isomorphe à U^{i+1} . Ce qui termine la démonstration du lemme.

Dans ce qui suit on note $\chi : \Omega^*(.) \longrightarrow \Omega^{CP}(.)$ l'application qui à toute donnée de chirurgie $*$ associe la donnée CP sous-jacente.

Théorème 6 : La suite

$$s^*(X) \xrightarrow{\xi} \Omega^*(X) \xrightarrow{\chi} \Omega^{CP}(X)$$

est exacte si $\dim X \geq 5$

La suite

$$s^*(X,Y) \xrightarrow{\xi} \Omega^*(X,Y) \xrightarrow{\chi} \Omega^{CP}(X,Y)$$

est exacte si $\dim X \geq 6$ (et aussi si $\dim X = 5$ et $Y = \emptyset$).

Démonstration : Il est clair qu'une donnée de chirurgie CP ,

$(V, \varphi, \alpha, \lambda)$ ou $((V, W), \varphi, \alpha, \lambda)$, où φ est une équivalence d'homotopie simple définit le point de base de Ω^{CP} : donc $\chi \cdot \xi(s^*)$ est le point de base de Ω^{CP} .

D'autre part si $z = (V, \varphi, \alpha, \lambda)$ est une donnée * sur X qui est cobordante à $(X, Id, \nu(X), Id)$ parmi les données CP, ce cobordisme définit une donnée mixte $((U, X, V), \psi, \beta, \mu)$ sur $(X \times I, X \times \{1\}, X \times \{0\})$ ($= (T, T_1, T_2)$). D'après le théorème 3, on peut supposer que $\pi_i(\psi) = 0$ pour $2i+1 \leq \dim X$, donc pour $i \leq 2$; donc $\psi_* : \pi_i(U) \longrightarrow \pi_i(X \times I)$ est un isomorphisme pour $i \leq 2$; soit $\alpha : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(U)$ l'application induite par l'inclusion $X \subset U$, $\psi_* \cdot \alpha : \pi_i(X) \longrightarrow \pi_i(X \times I)$ est un isomorphisme pour tout i , donc α est un isomorphisme pour $i \leq 2$; donc $\pi_i(U, X) = 0$ pour $i \leq 2$. On peut alors appliquer au cobordisme le lemme de lissage ci-dessus; il nous donne un cobordisme * $\tilde{Z}$ entre z et la donnée $\tilde{Z}|X \times \{1\} = (\tilde{X}, \tilde{\varphi}, \tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$ sur X , telle que

$\tilde{\varphi}$ soit une équivalence d'homotopie simple de $\tilde{X}$ sur X ; donc la classe de z dans $\Omega^*(X)$ est dans $\xi(s^*(X))$.

Dans le cas à bord on fait une démonstration en deux temps : dans un premier temps on fait une démonstration analogue au dessus de Y (il faut donc supposer que $\dim Y \geq 5$) ; dans un deuxième temps on fait une démonstration analogue au dessus de X . Si $Y = \emptyset$ il est clair que le premier temps est inutile, on suppose donc uniquement $\dim X \geq 5$.

On suppose maintenant que $s^*(X)$ est non vide, et on choisit un représentant $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ d'un de ses éléments. Soit $z = (U, \psi, \beta, \mu)$ une donnée de chirurgie CP sur $X \times I$, on peut supposer que $z|_{X \times \{0\}}$ est la donnée $*$ associée à $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$; z définit alors une donnée mixte sur $(X \times I, X \times \{1\}, X \times \{0\})$ ($\approx(T, T_1, T_2)$) . Si $\dim X \geq 5$, d'après le théorème 3, on peut supposer que $\pi_1(\psi) = 0$ pour $i \leq 2$; on peut alors appliquer le lemme de lissage, ce qui définit une donnée de chirurgie $*$ $\tilde{z}$ sur $(X \times I, X \times \{1\}, X \times \{0\})$. Soit $(X_z, \varphi_z, \alpha_z, \lambda_z)$ sa restriction à $X \times \{0\}$; φ_z est une équivalence d'homotopie simple, donc (X_z, φ_z) définit un élément de $s^*(X)$. Cet élément ne dépend que de $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ et de la classe de z dans $\Omega^{CP}(X \times I)$. En effet, si z' est une donnée sur $X \times I$ qui est CP cobordante à z par un cobordisme Z , et si $\tilde{z}$ et $\tilde{z}'$ sont les lissages de z et z' , Z apparaît comme une donnée mixte sur $(X \times I \times I, X \times \{1\} \times I, X \times \{0\} \times I, X \times I \times \{0\}, X \times I \times \{1\})$ ($\approx(T, T_1, T_2, T_3, T_4)$); on applique le lemme de lissage, on obtient une donnée $*$ Z , dont la restriction à $X \times \{0\} \times I$ est une équivalence entre (X_z, φ_z) et $(X_{z'}, \varphi_{z'})$ dans $s^*(X)$. On démontre de la même façon que la classe de (X_z, φ_z) ne dépend que de celle de $(\tilde{X}, \tilde{\varphi})$ dans $s^*(X)$. On obtient donc une application

$$\omega : s^*(X) \times \Omega^{\text{CP}}(X \times I) \longrightarrow s^*(X)$$

On définit de façon tout à fait analogue une application

$$\omega : s^*(X,Y) \times \Omega^{\text{CP}}(X \times I, Y \times I) \longrightarrow s^*(X,Y)$$

Si on munit $\Omega^{\text{CP}}(X \times I)$ et $\Omega^{\text{CP}}(X \times I, Y \times I)$ des lois de groupe définies au §1, ces applications définissent des opérations de $\Omega^{\text{CP}}(X \times I)$ sur $s^*(X)$ et de $\Omega^{\text{CP}}(X \times I, Y \times I)$ sur $s^*(X,Y)$. Il est clair que l'on a le

Théorème 7 : Deux éléments de $s^*(X)$ (resp. $s^*(X,Y)$) ont même image par ξ si et seulement si ils sont dans la même orbite de l'opération de $\Omega^{\text{CP}}(X)$ (resp. $\Omega^{\text{CP}}(X,Y)$).

On choisit maintenant un élément dans $s^*(X)$ (resp. $s^*(X,Y)$).

Ceci permet de parler de $\Omega^*(X \times I)$ et $\Omega^*(X \times I, Y \times I)$, et on a évidemment le

Théorème 8 : L'image inverse du point de base de s^* par ω , est égale à l'image de $\Omega^*(X \times I)$ dans $\Omega^{\text{CP}}(X \times I)$.

En continuant ces constructions pour $X \times I^n$ et $(X,Y) \times I^n$, on obtient des suites

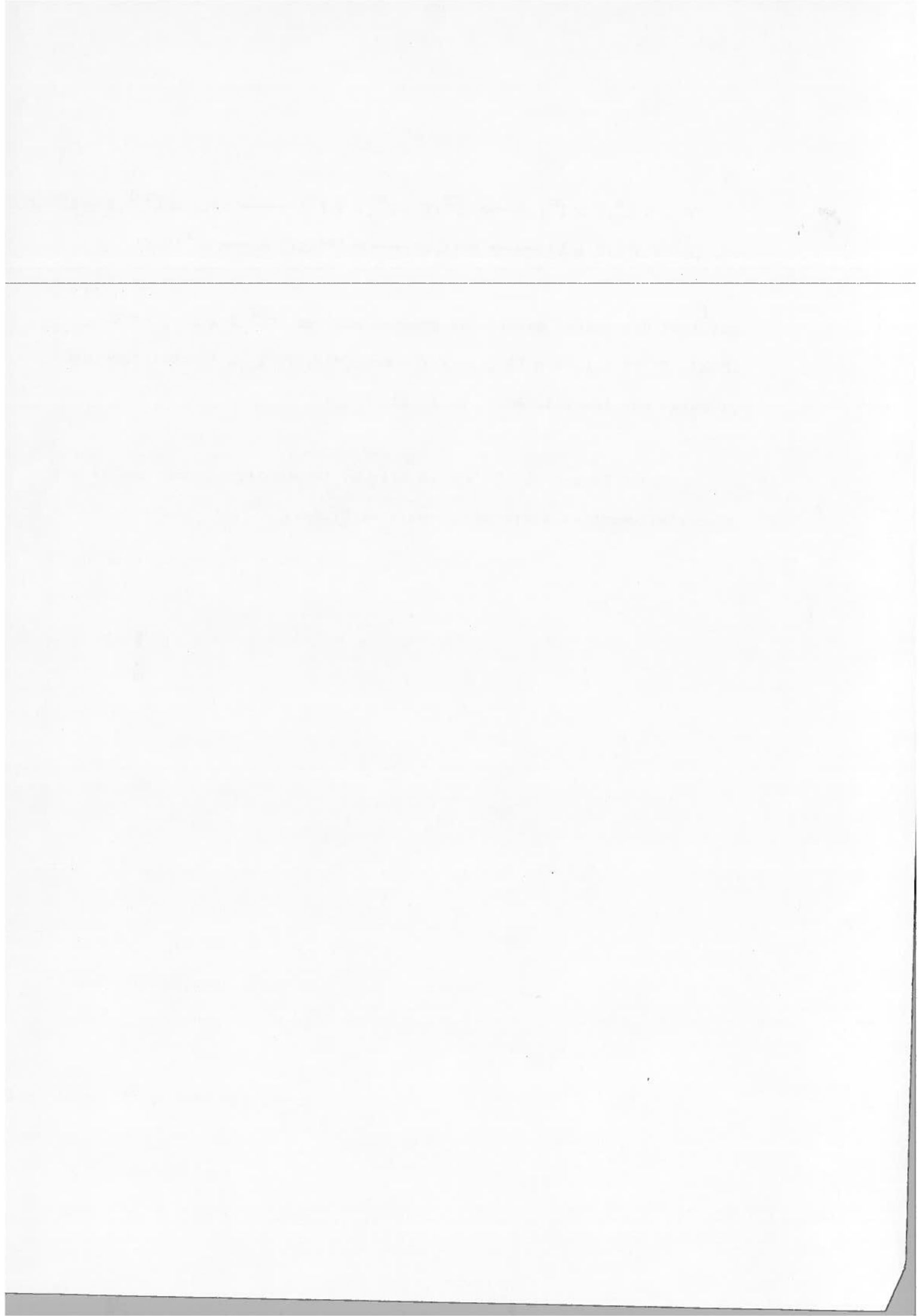
$$\begin{aligned} \dots \Omega^*(X \times I^n) &\longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X \times I^n) \longrightarrow s^*(X \times I^{n-1}) \longrightarrow \Omega^*(X \times I^{n-1}) \dots \\ \dots \Omega^*(X \times I) &\longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X \times I) \longrightarrow s^*(X) \longrightarrow \Omega^*(X) \longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dots \Omega^*(X \times I^n, Y \times I^n) &\longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X \times I^n, Y \times I^n) \longrightarrow s^*(X \times I^{n-1}, Y \times I^{n-1}) \dots \\ \dots \Omega^{\text{CP}}(X \times I, Y \times I) &\longrightarrow s^*(X, Y) \longrightarrow \Omega^*(X, Y) \longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X, Y) \end{aligned}$$

qui sont des suites exactes de groupes sauf en $\Omega^{\text{CP}}(X \times I)$, $s^*(X)$, $\Omega^*(X)$, $\Omega^{\text{CP}}(X \times I, Y \times I)$, $s^*(X, Y)$ et $\Omega^*(X, Y)$, où l'exactitude est précisée par les théorèmes 6, 7 et 8.

Dans le cas où X est un disque, la première de ces suites est essentiellement la suite de Kervaire et Milnor.



CHAPITRE 6 : OBSTRUCTION AU PLONGEMENT EN DIMENSION MOITIE .

Pour le calcul des Ω^{CP} au chapitre 8, on a besoin d'écrire la théorie des obstructions au plongement d'un disque D^n ou d'une sphère S^n dans un complexe de Poincaré Y de dimension $2n$. Pour cela, d'après les méthodes du chapitre 5, on va chercher les obstructions à plonger le fibré normal à D^n ou S^n dans le fibré de Spivak de Y .

Notations :

Dans ce qui suit X et Y sont deux complexes de Poincaré de dimensions respectives n et $2n$; le bord de Y est subdivisé en deux sous-complexes Y' et Y'' . On note (M, M') un voisinage régulier de $(X, \partial X)$ dans $(\mathbb{R}_+^{n+k}, \mathbb{R}_+^{n+k-1})$; on note (N, N', N'') un voisinage régulier de (Y, Y', Y'') dans $(\mathbb{R}_+^{2n+k}, \mathbb{R}_+^{2n+k-1}, \mathbb{R}_-^{2n+k-1})$; les bords relatifs seront notés (M^d, M'^d) et (N^d, N'^d, N''^d) . (M, M^d) et (N, N^d) définissent les fibrés de Spivak de X et de Y . Les variétés M et N sont orientées (ce sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^{n+k}$ et $\mathbb{R}^{2n+k}$). On note $\mathcal{H}_M$ (resp. $\mathcal{H}_N$) le faisceau de base M (resp. N) défini par l'homologie locale de dimension k de la paire (M, M^d) resp. (N, N^d) considérée comme un fibré de base M (resp. N) ; $\mathcal{H}_M$ et $\mathcal{H}_N$ sont des fibrés localement triviaux de fibre $\mathbb{Z}$. On choisit un point de base y dans N et on choisit un isomorphisme de $\mathcal{H}_{N,y}$ sur $\mathbb{Z}$.

On suppose X et N connexes, et on suppose que $\pi_1(X) = \pi_1(M) = 0$. On choisit une orientation de X ; cette orientation et celle de N définissent un isomorphisme naturel de $H_k(M, M^d) = \Gamma(\mathcal{H}_M, M)$ sur $\mathbb{Z}$. On suppose que Y est connexe, et on pose $\pi_1(Y) = \pi_1(N, y) = \pi$. On pose

$\mathbb{Z}(\pi) = A$. On note $w : \pi \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ la première classe de Stiefel Whitney de Y ; elle définit une anti-involution de A définie par
$$\overline{\sum_{\alpha} n_{\alpha} \alpha} = \sum_{\alpha} w(\alpha) n_{\alpha} \alpha^{-1}.$$
 On note Ω le groupe abélien quotient de A par le sous-groupe des éléments de la forme $a - (-1)^n \bar{a}$.

Si on se donne une application $f : (X, dX) \longrightarrow (Y, Y')$, telle que $f^*(\nu(Y)) = \nu(X)$, on sait (cf : chap 5) que f se prolonge en une application F de (M, M^d, M') dans (N, N^d, N') , et que $F|_{M'}$ est homotope à un plongement. Dans la suite F désignera toujours une telle application de (M, M^d, M') dans (N, N^d, N') dont la restriction à M' est un plongement de $(M', M' \cap M^d)$ dans $(N', N' \cap N^d)$. On fixera un point de base x dans M , et un chemin γ de $F(x)$ à y dans N . On supposera que l'on a choisi F et γ de façon qu'ils vérifient la condition

- (a) L'isomorphisme de $H_{N, F(x)}$ sur $\mathbb{Z}$ défini par l'isomorphisme de $H_{M, x}$ sur $H_{N, F(x)}$ (défini par F) coïncide avec celui que l'on définit en suivant le long de γ l'isomorphisme choisi $H_{N, y} \approx \mathbb{Z}$.

§ 1 : Classe d'intersection de deux applications.

On se donne $F_0 : (M_0, M_0^d, M'_0) \longrightarrow (N, N^d, N')$ et $F_1 : (M_1, M_1^d, M'_1) \longrightarrow (N, N^d, N')$ comme ci-dessus, telles que $F_0(M'_0) \cap F_1(M'_1) = \emptyset$. On se donne des chemins γ_0 et γ_1 de y à $F_0(x_0)$ et $F_1(x_1)$ comme ci-dessus. On suppose que

$$F_0 \times F_1 : M_0 \times M_1 \longrightarrow N \times N$$

est transverse à Δ_N . Posons alors $(F_0 \times F_1)^{-1}(\Delta_N) = Z$. Z est une réunion de composantes connexes Z_j qui sont des variétés de dimension k , dont le bord Z_j^d est égal à $Z_j \cap (M_0^d \times M_1^d)$. Soient $\pi_{0,j}, \pi_{1,j}$ et π_j les projections de Z_j sur M_0, M_1 et N respectivement. Les orientations de M_0, M_1 et N définissent une orientation de Z_j . On définit pour chaque Z_j

- 1) Un élément α_j de π : en mettant bout à bout γ_0 , puis l'image par F_0 d'un chemin qui joint dans M_0 le point x_0 à l'image par $\pi_{0,j}$ d'un point z de Z_j , puis l'image par F_1 d'un chemin qui joint dans M_1 le point $\pi_{1,j}(z)$ au point x_1 , puis γ_1 (parcouru dans le sens $F_1(x_1), y$). Il est clair que la classe de ce chemin dans $\pi_1(N, y) = \pi$ ne dépend pas des choix qui ont été faits dans sa construction.

- 2) Un élément n_j de $\mathbb{Z}$: en prenant l'image de la classe fondamentale de (Z_j, Z_j^d) dans $H_k(M_0, M_0^d)$ qui est naturellement isomorphe à $\mathbb{Z}$.

On pose alors $i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1)) = \sum_j n_j \alpha_j$; c'est un élément de A que l'on appelle la classe d'intersection de (F_0, γ_0) et de (F_1, γ_1) .

Théorème 1 : $i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1)) = (-1)^n \overline{i((F_1, \gamma_1), (F_0, \gamma_0))}$

Démonstration : L'intersection géométrique Z ne change pas, on regarde comment varient les α_j et les n_j . Il est clair que les lacets qui définissent les α_j sont les mêmes mais qu'on les parcourt en sens inverse. D'autre part si n est impair l'orientation de Z_j est changée,

la classe fondamentale de (Z_j, Z_j^d) est multipliée par $(-1)^n$; et il est clair que l'image dans $\mathbb{Z}$ d'un élément de $H_k(Z_j, Z_j^d)$ est multipliée par $w(\alpha_j)$.

Théorème 2 : Si on remplace γ_1 par $\gamma_1\beta$ (où β est un lacet d'origine et extrémité y dans N , et où $\gamma_1\beta$ désigne le chemin de $F_1(x_1)$ à y obtenu en mettant bout à bout γ_1 et le chemin β), on a

$$i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1\beta)) = i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1)) \beta .$$

Démonstration : L'intersection géométrique Z n'ayant pas changé, on regarde comment varient les α_j et les n_j . Il est clair que les n_j ne changent pas, et que α_j est changé en $\alpha_j\beta$.

Théorème 3 : Soit M une variété de dimension $n+k+1$ connexe et simplement connexe, dont le bord est la réunion de M^d , des M_u ($u = 1, \dots, p+q$) , et d'une variété M' ; où les M_u sont des variétés comme ci-dessus. On suppose donné un isomorphisme $H_k(M, M^d) \approx \mathbb{Z}$, tel que les homomorphismes naturels $H_k(M_u, M_u^d) \approx \mathbb{Z}$ coïncident avec les homomorphismes $H_k(M_u, M_u^d) \longrightarrow H_k(M, M^d) \approx \mathbb{Z}$. Soit

$$G : (M, M^d, \bigcup_{u \leq p} M_u, \bigcup_{u > p} M_u, M') \longrightarrow (N \times I, N^d \times I, N \times \{0\}, N \times \{1\}, N' \times I)$$

une application dont la restriction à M' est un plongement. On pose $G|_{M_u} = F_u : M_u \longrightarrow N$; et on choisit des chemins γ_u de $F_u(x_u)$ à y qui sont homotopes parmi les couples $(x, \gamma(x))$ où x est un point de M , et $\gamma(x)$ un chemin dans $N \times I$ qui joint $G(x)$ à y . Alors, quel que soit le couple (F_0, γ_0) tel que $G(M')$ et $F_0(M'_0) \times I$ soient des sous ensembles disjoints de $N' \times I$, on a

$$\sum_{u \leq p} i((F_0, \gamma_0), (F_u, \gamma_u)) = \sum_{u > p} i((F_0, \gamma_0), (F_u, \gamma_u))$$

Démonstration : On peut supposer que $F_0 \times \text{Id}_I \times G : M_0 \times I \times M \longrightarrow N \times I \times N \times I$ est transverse à $\Delta_{N \times I}$; posons $(F_0 \times G)^{-1}(\Delta_{N \times I}) = Z$, et $(F_0 \times F_u)^{-1}(\Delta_N) = Z^u$. On note Z_α les composantes connexes de Z . Le bord de chaque Z_α est la réunion de Z_α^d , et de la réunion des $Z_\alpha \cap Z^u$; le procédé qui a permis de définir les α_j appliqué à Z_α définit un élément β de π , qui coïncide avec chacun des α_j^u correspondant aux Z_j^u contenus dans Z_α . Il suffit donc de démontrer que

$$\sum_{u \leq p} \left(\sum_{Z_j^u \subset Z_\alpha} n_j^u \right) = \sum_{u > p} \left(\sum_{Z_j^u \subset Z_\alpha} n_j^u \right)$$

Compte tenu de la condition imposée aux isomorphismes de Z sur $H_k(M_u, M_u^d)$ et $H_k(M, M^d)$, il s'agit de démontrer que les cycles définis par $\bigcup_{u \leq p} \bigcup_{Z_j^u \subset Z_\alpha} (Z_j^u, Z_j^{u,d})$ et $\bigcup_{u > p} \bigcup_{Z_j^u \subset Z_\alpha} (Z_j^u, Z_j^{u,d})$ dans $C_k(M, M^d)$ sont homologues ; c'est immédiat puisqu'ils forment le bord de la chaîne (Z_α, Z_α^d) .

Corollaire : $i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1))$ ne dépend que des classes d'homotopie de F_0 et F_1 (parmi les applications qui coïncident avec F_0 et F_1 sur M_0 et M_1 respectivement), et des classes d'homotopie de γ_0 et γ_1 .

Compte tenu du théorème 1, il suffit d'appliquer le théorème 3 à une homotopie $G : M_1 \times I \longrightarrow N \times I$ entre deux applications F_1 et F_1' de M_1 dans N . Ce corollaire permet de parler de (F_0, γ_1) quand $F_0 \times F_1$ n'est pas transverse à Δ_N ; il est clair que les théorèmes 1 et 2 restent valables

§2 - Classe de self intersection d'une immersion.

Soit $F : (M, M^d, M') \longrightarrow (N, N^d, N')$ une immersion, et soit γ un chemin de y à $F(x)$. On suppose que la restriction de $F \times F$ à $M \times M - \Delta_M$ est transverse à Δ_N ; alors $(F \times F)^{-1}(\Delta_N)$ est la réunion de Δ_M et d'une sous-variété V de $M \times M - \Delta_M$. V est munie d'une involution σ définie par $\sigma(x, x') = (x', x)$. Soit I le quotient de V par l'action de σ , et soit χ la projection de V sur I . I est une variété de dimension k , dont le bord I^d est l'image de $V \cap M^d \times M^d$. Soient I_i les composantes connexes de I .

A toute composante connexe I_i on va associer un élément ω_i de Ω . Pour cela à tout I_i on associe d'abord un élément α_i de π , en mettant bout à bout γ , puis l'image par F d'un chemin qui joint dans M le point x à un point z de $\chi^{-1}(I_i)$, puis l'image par F d'un chemin qui joint dans M le point $\sigma(z)$ au point x , puis γ (parcouru dans le sens $F(x), y$). Il est clair que si l'on inverse les rôles de z et $\sigma(z)$ dans cette construction on trouve α_i^{-1} au lieu de α_i , mais que les autres choix que l'on a faits ne changent pas la classe d'homotopie du lacet trouvé. On distingue donc deux cas

- 1) Si $\alpha_i = \alpha_i^{-1}$, on définit un élément p_i de $\mathbb{Z}_2$ en prenant l'image de la classe fondamentale de I_i dans $H_k(N, N^d, \mathbb{Z}_2)$. On pose alors $\omega_i = p_i \alpha_i \in \Omega$.
- 2) Si $\alpha_i^{-1} \neq \alpha_i$. Alors $\chi^{-1}(I_i)$ a deux composantes connexes (si $\chi^{-1}(I_i)$ est connexe le passage de $(z, \sigma(z))$ à $(\sigma(z), z)$ peut se faire continument le long d'un chemin qui joint z à $\sigma(z)$ dans $\chi^{-1}(I_i)$, par conséquent $\alpha_i = \alpha_i^{-1}$).

Comme V est orientée (par les orientations de $M \times M$ de $N \times N$ et de Δ_N), I_i est orientable, et sera même orientée si on choisit l'une des composantes connexes de $\chi^{-1}(I_i)$. C'est ce que l'on fait maintenant. En décidant de prendre le point z dans cette composante connexe on fixe l'élément α_i de π associé à I_i . On définit alors un entier p_i en prenant l'image de la classe fondamentale de I_i dans $H_k(M, M^d, \mathbb{Z})$ (que l'on a identifié à $\mathbb{Z}$). Ceci définit un élément $p_i \alpha_i$ de A . Cet élément dépend du choix que l'on a fait d'une composante connexe de $\chi^{-1}(I_i)$; si on inverse ce choix, au lieu d'obtenir $p_i \alpha_i$, on obtient $(-1)^n w(\alpha_i) p_i \alpha_i^{-1}$; ces deux éléments de A définissent le même élément de Ω que l'on note ω_i .

On pose alors $\Theta(F, \gamma) = \sum_{I_i} \omega_i$; c'est la classe de self intersection de l'immersion (F, γ) .

Théorème 4 : On suppose donnés m, G , les M_u et les γ_u comme dans le théorème 3; on suppose que G est une immersion, alors

$$\begin{aligned} \sum_{u \leq p} \Theta(F_u, \gamma_u) + \sum_{\substack{u' \leq p \\ u \neq u'}} [i((F_u, \gamma_u), (F_{u'}, \gamma_{u'}))] &= \\ = \sum_{u > p} \Theta(F_u, \gamma_u) + \sum_{\substack{u' > p \\ u \neq u'}} [i((F_u, \gamma_u), (F_{u'}, \gamma_{u'}))]. \end{aligned}$$

Démonstration : Elle est analogue à celle du théorème 3. $[a]$ désigne la classe dans Ω de l'élément a de A .

Corollaire : $\Theta(F, \gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie régulière de F (parmi les immersions qui coïncident avec F sur M') et de la classe d'homotopie de γ . Ceci permet de parler de la classe de self-intersection de (F, γ) quand $F \times F$ n'est pas transverse à Δ_N .

Démonstration : On applique le théorème 4 à l'homotopie régulière $G : M \times I \longrightarrow N \times I$, entre les deux immersions données.

Théorème 5 : $\Theta(F, \gamma\beta) = \beta^{-1}\Theta(F, \gamma)\beta$.

Démonstration : Elle est analogue à celle du théorème 2.

§3 - Signification géométrique de i et de Θ .

Il est clair que si F est un plongement, $\Theta(F, \gamma) = 0$. Il est clair que si les deux applications considérées au §1 ont des images disjointes, $i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1)) = 0$. On va démontrer réciproquement

Théorème 6 : Soit F une immersion (comme au §2) telle que $\Theta(F, \gamma) = 0$; si $n \geq 3$, F est régulièrement homotope à un plongement, parmi les immersions de (M, M^d, M') dans (N, N^d, N') qui coïncident avec F sur M' .

Théorème 7 : Soient F_0 et F_1 deux applications comme au §1, on suppose que ce sont des immersions, que $i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1)) = 0$ et que $n \geq 3$, alors il existe une homotopie régulière de F_0 à F'_0 (parmi les immersions de (M_0, M_0^d, M'_0) dans (N, N^d, N') qui coïncident avec F_0 sur M'_0) et une homotopie régulière de F_1 à F'_1 (parmi les immersions de (M_1, M_1^d, M'_1) dans (N, N^d, N') qui coïncident avec F_1 sur M'_1)

de telle façon que $F'_0(M_0) \cap F'_1(M_1) = \emptyset$. Si F_0 et F_1 sont des plongements on peut s'arranger pour que F'_0 et F'_1 soient des plongements, et pour que les homotopies régulières soient des isotopies.

Avant de commencer les démonstrations de ces théorèmes, on va faire une étude détaillée de la self intersection d'une immersion simple. Il est d'abord clair que si F est une immersion simple de (M, M^d, M') dans (N, N^d, N') , la variété I (les notations sont celles du §2) est isomorphe à l'ensemble des points de N qui sont images de deux points de M . Il est clair que, pour toute composante connexe I_i , $\chi^{-1}(I_i)$ est formé de deux sous-variétés isomorphes à I_i . On va associer à I_i un entier positif : Si $\alpha_i \neq \alpha_i^{-1}$, cet entier est $q_i = |p_i|$. Si $\alpha_i = \alpha_i^{-1}$, chacune des composantes connexes de $\chi^{-1}(I_i)$ est une sous-variété orientable de M , les images de leurs classes fondamentales dans $H_k(M, M^d, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, sont égales ou opposées ; q_i est la valeur absolue commune de ces images. Un cas important est celui où I_i est isomorphe au disque D^k ; on peut alors associer à (I_i, I_i^d) un élément de $\pi_k(M, M^d) \approx \mathbb{Z}$, il est clair que cet élément est dans tous les cas égal à q_i ou à $-q_i$.

On démontrera aussi le lemme suivant qui joue le rôle du lemme de Whitney classique dans le cas des variétés.

Lemme de connexion : Soient A et B deux variétés de dimension $n + k$ ($n \geq 3$) et C une variété de dimension $2n + k$. Soient φ et ψ des plongements de A et B dans C (qui induisent des plongements de dA et dB dans dC). Supposons que φ et ψ soient transverses.

On suppose

1) $\varphi(A) \cap \psi(B)$ est formé de deux composantes connexes U et V .

2) A , B et C sont orientées (donc U et V le sont aussi).

3) Il existe un point $u = (\varphi(a'), \psi(b'))$ dans U et un point $v = (\varphi(a''), \psi(b''))$ dans V , et des chemins Γ qui joint a' à a'' dans A , et Δ qui joint b' à b'' dans B , tels que le lacet de C formé par $\varphi(\Gamma)$ et $\psi(\Delta)$ soit homotope à 0.

Alors on peut trouver une isotopie de φ à φ' (parmi les plongements de A dans C qui coïncident avec φ sur dA) telle que l'intersection de $\varphi'(A)$ et $\psi(B)$ soit la somme conexe orientée (sur l'intérieur) des variétés orientées U et V .

Démonstration : On peut toujours supposer que les chemins Γ et Δ sont plongés dans A et B , qu'ils sont normaux à U et V en leurs extrémités, et qu'ils ne rencontrent U et V qu'en leurs extrémités. Le fait que la codimension est au moins égale à 3, permet d'affirmer que l'on peut alors plonger un disque dans C dont le bord est formé de $\varphi(\Gamma)$ et de $\psi(\Delta)$, qui ne rencontre $\varphi(A)$ que le long de $\varphi(\Gamma)$, et $\varphi(B)$ que le long de $\psi(\Delta)$, et qui est normal à $\varphi(A)$ et $\psi(B)$. Ceci permet de plonger le bord du modèle de déformation défini au §2 du chapitre 4 (le fait que tout est orientable assure que les fibrés que l'on doit trivialisier sont triviaux), la déformation ainsi définie a alors évidemment l'effet désiré. Ce raisonnement est analogue au pas de la démonstration du lemme 3 du §4 du chapitre 4.

Démonstration du théorème 6 : On peut se ramener au cas où F est une immersion simple. On prend une décomposition en anses du complexe de Poincaré X , on note X_0 la réunion des anses de dimension au plus $n/2$ et X_1 la réunion de dX et des anses de dimension plus grande que $n/2$. En prenant des voisinages réguliers de X_0 et X_1 dans $\mathbb{R}^{n+k}$, on trouve une partition de M en (M_0, M_0^d, M'_0) et (M_1, M_1^d, M'_1) recollés le long de (T, T^d, T') , analogue à celle qui est construite dans le lemme 2 de la sixième étape du §3 du chapitre 4, mais les conditions sur les $\pi_i(T, T^d)$ sont plus fortes que celles que l'on a obtenues à cet endroit puisque $\pi_i(T, T^d) = 0$ pour $i \leq k-1$, et l'application $\pi_k(T, T^d) \longrightarrow \pi_k(M, M^d)$ est surjective. Ceci permet de répéter la démonstration du lemme 3 de la sixième étape du §3 du chapitre 4 (les conditions plus fortes sur les $\pi_i(T, T')$ assurent que le lemme b est encore vrai). On supposera donc dans la suite que F est simple. On peut alors faire subir à sa self intersection $I = I_i$ les quatre opérations suivantes.

- 1) Transformer chacun des I_i en une boule D^k : Pour cela on montre que si chacun des I_i est une réunion d'anses de dimension au plus r ($r \geq 1$), et si $\mu : D^{k-r}, S^{k-r-1} \longrightarrow (I, I^d)$ est un plongement, on peut transformer F de façon à enlever un voisinage tubulaire de ce plongement. Pour cela on applique le lemme de réduction des immersions du chapitre 4. Cette transformation ne change qu'un des I_i , les ω_i et les q_i correspondant à ces I_i ne varient évidemment pas. Si I_u est celui qui change, il est clair que ω_u ne change pas, puisque la somme des ω_i ne doit pas changer. q_u ne change pas puisque I_u et I'_u définissent la même cycle dans $H_k(M, M^d)$.

- 2) Enlever les I_i isomorphes à D^k pour lesquels $q_i = 0$: Une fois que tous les I_i sont isomorphes à D^k , si pour un u , on a $q_u = 0$, on sait que l'élément de $\pi_k(M, M^d)$ défini par I_u est nul. On peut donc appliquer le lemme de réduction des immersions du chapitre 4, pour enlever cet I_u .
- 3) Faire la somme connexe de I_u et I_v si α_u est égal à α_v ou à α_v^{-1} : Si α_u est égal à α_v ou à α_v^{-1} , on peut joindre un point u de $\chi^{-1}(I_u)$ à un point v de $\chi^{-1}(I_v)$ par un chemin Γ et $\sigma(u)$ à $\sigma(v)$ par un chemin Δ tels que $F(\Gamma)$ et $F(\Delta)$ définissent un lacet homotope à 0 dans N . On choisit alors une partition de M en $G \cup B$ telle que u, v et Γ soient dans G , et que $\sigma(u), \sigma(v)$ et B soient dans B . On enlève à la figure un voisinage régulier ouvert η de $F(G \cap B)$; il reste $C = N - \eta$, $A = (F|_G)^{-1}(C)$ et $B = (F|_B)^{-1}(C)$. L'intersection de $F(A)$ et de $F(B)$ est réduite à $I_u \cup I_v$. On applique alors le lemme de connexion. On obtient une immersion simple (parcequ'elle est injective sur G et sur B) G de M dans N dont la self intersection est formée des I_i pour $i \neq u$ et v , et de la somme connexe de I_u et I_v . Il est clair que cette opération ne change pas les ω_i et les q_i pour $i \neq u$ et v . Si on note I_w la somme connexe de I_u et I_v , on a $\omega_w = \omega_u + \omega_v$ (car la somme de tous les ω doit rester fixe). Il est clair que l'image dans $H_k(M, M^d)$ de la classe fondamentale de I_w est la somme des images des classes fondamentales de I_u et I_v , on a donc $q_w = |q_u \pm q_v|$. Si $\alpha_u \neq \alpha_v^{-1}$, on n'a pas le choix du signe $+$ ou $-$, puisque l'on a $p_w = p_u + p_v$. Si $\alpha_u = \alpha_v^{-1}$, la construction que l'on vient

de faire n'est pas bien déterminée : si on a joint u à v et $\sigma(u)$ à $\sigma(v)$, on aurait aussi pu joindre u à $\sigma(v)$ et v à $\sigma(u)$. La différence entre les deux constructions obtenues, est que l'on a inversé l'orientation de l'une des variétés I_u et I_v ; par conséquent si l'une des constructions donne $q_w = q_u + q_v$, l'autre donne $q'_w = |q_u - q_v|$.

- 4) Décomposer un I_i isomorphe à D^k , en deux morceaux : Si tous les I_i sont isomorphes à D^k , on peut appliquer le lemme de réduction des immersions à un plongement $\mu : (D^{k-1}, S^{k-2}) \longrightarrow (I_u, I_u^d)$. Ceci a bien entendu pour effet de remplacer I_u par deux disques I_u^1 et I_u^2 . On a $\omega_u = \omega_u^1 + \omega_u^2$. On va comparer q_u à q_u^1 et q_u^2 . La construction effectuée dans le lemme de réduction des immersions, n'est pas bien définie, elle dépend du plongement H (choisi au lemme a de la cinquième étape du §3 du chapitre), il est clair que des variétés I_u^1 et I_u^2 sont obtenues en recollant l'image de H à chacune des moitiés de I_u définies par l'image de μ . Par conséquent si α est l'image de I_i dans $\pi_k(M, M^d)$, on peut choisir comme on veut les images α^1 et α^2 de I_u^1 et I_u^2 dans $\pi_k(M, M^d)$ pourvu que $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2$. Il en résulte que si q_u^1 et q_u^2 sont deux entiers positifs tels que $q_u^1 + q_u^2 = q_u$, on peut faire cette construction de façon à ce que ce soient les entiers positifs associés à I_u^1 et I_u^2 .

Grace à ces quatre opérations on va faire disparaître I . On commence par appliquer 3) un nombre suffisant de fois pour que $I_i \neq I_j$ entraîne α_i différent de α_j et de α_j^{-1} , on a alors nécessairement

$\omega_i = 0$ pour tout i (puisque $\Theta(F, \Gamma) = 0$). En appliquant 1) on se ramène alors au cas où de plus chaque I_i est un disque. Pour tout i tel que $\alpha_i \neq \alpha_i^{-1}$ on a alors $q_i = 0$ (puisque $\omega_i = 0$); pour les i tels que $\alpha_i = \alpha_i^{-1}$, on peut seulement affirmer que q_i est pair. On applique alors 4) pour décomposer ces I_i en deux morceaux dont les q sont égaux à $q_i/2$; puis en appliquant 3) on regroupe ces deux morceaux de façon à obtenir un nouvel I_i dont le q_i est nul. On réapplique alors 1) pour se ramener au cas où tous les I_i sont des boules (dont les q_i sont nuls), et on conclut en appliquant 2) à chacune de ces boules.

Démonstration du théorème 7 : Elle est tout à fait analogue ; je ne l'écris pas, mais je vais donner quelques indications sur la démonstration du rabirot. Il est clair que si F_0 et F_1 sont des plongements la variété Z (cf : notations du §1) est isomorphe à $F_0(M_0) \cap F_1(M_1)$. On applique alors le lemme de connexion pour se ramener au cas où $Z_i \neq Z_j$ entraîne $\alpha_i \neq \alpha_j$; on a alors $n_j \alpha_j = 0$ pour tout j , donc $n = 0$ pour tout j . On applique alors le lemme de réduction élémentaire (§3 du chapitre 4) pour se ramener au cas où tous les Z_j sont des disques D^k . Comme $n_j = 0$ pour tout j , chacun de ces disques représente 0 dans $\pi_k(M_0, M_0^d)$, et par conséquent on peut encore appliquer le lemme de réduction élémentaire pour enlever chacun de ces disques.

§4 - Sommes connexes.

Soient X_1 et X_2 deux complexes de Poincaré de dimension n , et soit X leur somme connexe (sur l'intérieur ou sur le bord). En même temps que cette somme connexe on construit un complexe de Poincaré V de

dimension $n+1$, dont le bord est la réunion de X_1 de X_2 et d'un complexe V' de dimension n qui est la réunion disjointe de $dX_1 \times I$ et $dX_2 \times I$ si on fait la somme connexe sur l'intérieur, et qui est la somme connexe de $dX_1 \times I$ et $dX_2 \times I$ si on fait la somme connexe sur le bord. V a le type d'homotopie de la réunion de $X_1 \cup X_2$ et d'un chemin qui joint un point de X_1 à un point de X_2 . V' a le type d'homotopie de la réunion de dX_1 et dX_2 , ou celui de $dX_1 \cup dX_2$ union un chemin qui joint un point de dX_1 à dX_2 .

On note M_1, M_2 et M les voisinages réguliers de X_1, X_2 et X . On note L un voisinage régulier de V dans $\mathbb{R}^{n+k+1}_+$. Le bord de L est la réunion du bord relatif L^d , de M_1 , de M_2 , de M et d'une variété L' qui est un voisinage régulier de V' dans $\mathbb{R}^{n+k}$.

Soient f_1 et f_2 des applications de (X_1, dX_1) et (X_2, dX_2) dans (Y, Y') ; soient $F_1 : (M_1, M_1^d, M_1') \longrightarrow (N, N^d, N')$ et $F_2 : (M_2, M_2^d, M_2') \longrightarrow (N, N^d, N')$ les applications fibrées correspondantes. Soient γ_1 et γ_2 des chemins de $F_1(x_1)$ et $F_2(x_2)$ à y , tels que la condition a soit vérifiée par (F_1, γ_1) et (F_2, γ_2) . On suppose $F_1(M_1') \cap F_2(M_2') = \emptyset$.

Le chemin $(\gamma_1)^{-1} \gamma_2$ joint le point $F_1(x_1)$ au point $F_2(x_2)$; il définit donc une application E de L dans $N \times I$ qui prolonge $F_1 \cup F_2 : M_1 \cup M_2 \longrightarrow N \times \{0\}$. Si on prend la somme connexe sur l'intérieur on peut toujours considérer que E est une application de $(L, M_1 \cup M_2, M, L')$ dans $(N \times I, N \times \{0\}, N \times \{1\}, N' \times I)$. Si on prend la somme connexe sur le bord c'est encore possible à condition que le chemin $(\gamma_1)^{-1} \gamma_2$ se rétracte dans $N' \times I$, ce qui est assuré par

l'hypothèse que $\pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(Y)$ est surjectif. Le fait que (F_1, γ_1) et (F_2, γ_2) vérifient la condition a assure que l'on peut se ramener au cas où E est une application fibrée (dont la restriction à L' est un plongement)

$$E : (L, L^d, M_1 \cup M_2, M, L') \longrightarrow (N \times I, N^d, N \times \{0\}, N \times \{1\}, N' \times I)$$

Théorème 8 : Quel que soit (F_0, γ_0) tel que $F_0(M'_0)$, $F_1(M'_1)$ et $F_2(M'_2)$ soient disjoints, on a (où $\gamma = \gamma_1$ ou γ_2) :

$$i((F_0, \gamma_0), (F_1, \gamma_1)) + i((F_0, \gamma_0), (F_2, \gamma_2)) = i((F_0, \gamma_0), (F, \gamma))$$

Démonstration : On applique le théorème 3 à L et E .

Si F_1 et F_2 sont des immersions, le théorème de classification des immersions assure qu'il existe dans la classe d'homotopie de E , une immersion et une seule qui prolonge $F_1 \cup F_2$, on a alors

Théorème 9 : $\mathcal{O}(F, \gamma) = \mathcal{O}(F_1, \gamma_1) + \mathcal{O}(F_2, \gamma_2) + [i((F_1, \gamma_1), (F_2, \gamma_2))] (où [a] désigne la classe dans Ω de l'élément a de A) .$

Démonstration : On applique le théorème 4 à L et E .

CHAPITRE 7 : LE CALCUL DES Ω^{CP}

Notations : Dans ce qui suit un certain nombre de complexes de Poincaré seront notés X (ou X' , X_1 , etc...), on posera alors $\pi_1(X) = \pi$, et w désignera la première classe de Stiefel-Whitney. L'anneau $\mathbb{Z}(\pi)$ sera noté A , il sera muni de l'anti-involution $\alpha = \sum n(g)g \longrightarrow \bar{\alpha} = \sum n(g)w(g)g^{-1}$. On considérera aussi un sous-complexe Y (ou Y' , Y_1 , etc...) du bord de X , on posera $\pi_1(Y) = \pi'$, l'inclusion $Y \subset X$ induit l'homomorphisme θ de π' dans π . On note w' la classe de Stiefel-Whitney de Y ($w' = w \cdot \theta$). On posera $\mathbb{Z}(\pi') = A'$; w' induit une anti-involution $\beta \longrightarrow \bar{\beta}$ sur A' . Pour tout entier k , on notera Ω_k (resp. Ω'_k) le groupe abélien quotient de A (resp. A') par le sous-groupe formé des éléments de la forme $a - (-1)^k \bar{a}$; on notera $[a]$ la classe dans Ω_k de l'élément a de A . Si M est un A -module (resp. A' -module) libre, on dira que deux bases de M sont équivalentes, si la matrice de passage définit l'élément 0 de $\text{Wh}(\pi)$ (resp. $\text{Wh}(\pi')$); les classes de cette relation d'équivalence seront appelées les classes de bases de M . Si M et M' sont munis chacun d'une classe de bases, $M \oplus M'$ est muni d'une classe de bases; le module A^p est naturellement muni d'une classe de bases. Un isomorphisme $\varphi : M \longrightarrow M'$ qui fait correspondre les classes de bases, est appelé un isomorphisme simple. Nous ne considérerons en général que des modules à droite; si nous rencontrons un module à gauche (par exemple $\text{Hom}_A(M, A)$, où M est un module à droite) N , nous le remplacerons par le module à droite $\tilde{N}$ (ou $\tilde{N}$ est identique à N comme groupe abélien, mais où on a posé $n.a = \bar{a}.n$). Notons encore que pour tout module libre M muni d'une classe de bases, $\widetilde{\text{Hom}_A(M, A)}$ est libre muni d'une classe de bases.

§ 1 : Objets quadratiques et groupes de Wall.

Définition 1 : On appelle forme quadratique de degré $2k$ sur (π, w) (ou encore objet quadratique de dimension $2k$ sur (π, w)) la donnée d'un triple $Q = (M, \lambda, \mu)$, où

- 1) M est un A module libre muni d'une classe de bases
- 2) λ est une application de $M \times M$ dans A
- 3) μ est une application de M dans Ω_k

tels que

- 1) Pour tout $x \in M$, $y \mapsto \lambda(x, y)$ est A -linéaire
- 2) Pour tout couple (x, y) : $\lambda(x, y) = (-1)^k \overline{\lambda(y, x)}$
- 3) Pour tout couple (x, y) : $\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y) + [\lambda(x, y)]$
- 4) Pour tout $x \in M$, et pour tout élément a de A tel que $[a] = \mu(x)$, $\lambda(x, x) = a + (-1)^k \overline{a}$
- 5) Pour tout $x \in M$, et tout $a \in A$: $\mu(x, a) = \overline{a} \cdot \mu(x) \cdot a$.

Remarques : 1) Pour tout A -module M , on définit une forme quadratique $Q^k(M)$ de la façon suivante : on prend le module $M \oplus \widetilde{\text{Hom}_A(M, A)}$ et on définit λ par $\lambda(x+y, x'+y') = y(x') + (-1)^k \overline{y'(x)}$, et μ par $\mu(x+y) = [y(x)]$.

2) Si $Q_1 = (M_1, \lambda_1, \mu_1)$ et $Q_2 = (M_2, \lambda_2, \mu_2)$ sont deux formes quadratiques, on définit une forme quadratique $Q = (M_1 \oplus M_2, \lambda, \mu)$, en posant $\lambda(x_1+x_2, y_1+y_2) = \lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2)$, et $\mu(x_1+x_2) = \mu_1(x_1) + \mu_2(x_2)$. Cette forme Q est appelée la somme directe de Q_1 et Q_2 , on la notera $Q_1 \oplus Q_2$.

3) Un isomorphisme de la forme $Q = (M, \lambda, \mu)$ sur la forme $Q' = (M', \lambda', \mu')$ est un isomorphisme simple de M sur M' qui commute avec λ et μ . On dira qu'une application φ de M dans M' est un morphisme de Q dans Q' , s'il existe une forme quadratique Q'' est un isomorphisme de $Q \oplus Q''$ sur Q qui prolonge φ .

Définition 2 : On appelle objet quadratique de dimension $2k+1$ sur (π, w) , la donnée d'un triple (Q, M_0, M_1) où $Q = (M, \lambda, \mu)$ est une forme quadratique de degré $2k$ sur (π, w) , et où M_0 et M_1 sont deux sous-modules libres munis chacun d'une classe de bases tels que l'injection de M_0 dans M se prolonge en un isomorphisme de $Q^k(M_0)$ sur Q , et que l'injection de M_1 dans M se prolonge en un morphisme de $Q^k(M_1)$ dans Q .

Remarques : 1) Pour tout module M , $(Q^k(M), M, \widetilde{\text{Hom}}_A(M, A))$ est un objet quadratique de dimension $2k+1$; on l'appelle l'objet trivial engendré par M .

2) Pour tout couple (Q, M_0, M_1) , (Q', M'_0, M'_1) , on définit la somme directe $(Q \oplus Q', M_0 \oplus M'_0, M_1 \oplus M'_1)$.

3) Pour toute forme quadratique $Q = (M, \lambda, \mu)$, en associant à tout $x \in M$, l'application A -linéaire de M dans A définie par $y \mapsto \lambda(x, y)$, on définit une application A -linéaire φ_Q de M dans $\widetilde{\text{Hom}}_A(M, A)$. Soit (Q, M_0, M_1) un objet quadratique de dimension $2k+1$, notons θ l'homomorphisme composé

$$M_1 \hookrightarrow M \longrightarrow \widetilde{\text{Hom}}_A(M, A) \longrightarrow \widetilde{\text{Hom}}_A(M_0, A) .$$

Si (Q, M_0, M_1) est l'objet trivial engendré par M_0 , θ est un isomorphisme simple; il en est de même pour tout objet isomorphe à un objet trivial. Réciproquement, si θ est un isomorphisme, l'application de $M_0 \oplus \widetilde{\text{Hom}}_A(M_0, A)$ dans M qui à $x+y$ associe $x+\theta^{-1}(y)$, définit un isomorphisme de l'objet trivial engendré par M_0 sur (Q, M_0, M_1) . Si θ n'est pas un isomorphisme son noyau et conoyau seront appelés l'homologie de (Q, M_0, M_1) .

Définition 3 : Pour toute forme quadratique $Q = (M, \lambda, \mu)$ de degré $2k$ sur (π, w) , on appelle bord de Q l'objet quadratique de dimension $2k-1$ sur (π, w) , $dQ = (Q^{k-1}(M), \text{Im}(\text{Id}_M \oplus (-\varphi_Q)), M)$.

Remarques : 1) On vérifie que l'on a bien défini un objet quadratique de dimension $2k-1$, en vérifiant que l'application de $M \oplus \widetilde{\text{Hom}_A(M, A)}$ dans lui-même qui à $x+y$ associe $x - \varphi_Q(x)+y$, est un isomorphisme de $Q^{k-1}(M)$ sur elle-même.

2) Si φ_Q est un isomorphisme simple l'application A -linéaire de $M \oplus \widetilde{\text{Hom}_A(M, A)}$ qui à $x+y$ associe $x - \varphi_Q^{-1}(y)+y$, est un isomorphisme de $Q^{k-1}(M)$ sur elle-même, cet isomorphisme envoie M sur M et $\widetilde{\text{Hom}_A(M, A)}$ sur $\text{Im}(\text{Id}_M \oplus (-\varphi_Q))$, c'est donc un isomorphisme de l'objet trivial de dimension $2k-1$ engendré par M sur dQ . Réciproquement si dQ est un objet trivial, φ_Q est un isomorphisme simple car l'application $\theta_{dQ} : M \longrightarrow \widetilde{\text{Hom}_A(\text{Im}(\text{Id}_M \oplus (-\varphi_Q)), A)} \approx \widetilde{\text{Hom}_A(M, A)}$ s'identifie à φ_Q .
Une forme Q telle que φ_Q soit un isomorphisme simple est aussi appelée une forme non dégénérée.

Définition 4 : Soit (Q, M_0, M_1) un objet quadratique de dimension $2k+1$, il existe (cf. déf. 2) une forme $Q'' = (M'', \lambda'', \mu'')$ de degré $2k$ et un isomorphisme θ de $Q^k(M_1) \oplus Q''$ sur Q , qui est l'identité sur M_1 . Il en résulte que M_1 est contenu dans l'orthogonal $M_1^\perp$ de M_1 dans Q , et θ induit un isomorphisme de M'' sur $M_1^\perp/M_1$. Les restrictions de λ et μ à $M_1^\perp$ passent au quotient pour donner des applications λ' et μ' qui définissent une forme quadratique $(M_1^\perp/M_1, \lambda', \mu')$. Cette forme quadratique sera appelée le bord de (Q, M_0, M_1) . Il est clair que θ induit un isomorphisme de Q'' sur le bord $d(Q, M_0, M_1)$ de (Q, M_0, M_1) .

Définition 5 : On notera $L_{2k}(\pi, w)$ le monoïde quotient du monoïde (pour la somme directe) des classes d'isomorphisme des formes quadratiques non dégénérées de degré $2k$ sur (π, w) , par le sous-monoïde des formes du type $Q^k(M)$. Ce monoïde quotient est un groupe, cela résultera de l'étude géométrique du § 3.

Définition 6 : On notera $L_{2k+1}(\pi, w)$ le monoïde quotient du monoïde (pour la somme directe) des classes d'isomorphisme des objets quadratiques de dimension $2k+1$ sur (π, w) dont le bord est nul (c'est-à-dire que $\dim M_0 = \dim M_1$), par le sous-monoïde engendré par les objets triviaux et par les bords des formes de degré $2k+2$. C'est un groupe, cela résultera de l'étude géométrique du § 3.

§ 2 : Extensions.

Soit X un complexe de Poincaré de dimension n , supposons qu'il soit partagé en deux sous-complexes de Poincaré X_0 et X_1 , recollés le long d'une partie Z de leur bord ; et soit ξ_0 une donnée de chirurgie CP sur X_0 . La restriction de ξ_0 à Z est la donnée triviale sur Z , donc ξ_0 et la donnée triviale sur X_1 se recollent pour former une donnée de chirurgie CP ξ sur X . La donnée ξ est appelée l'extension de ξ_0 à X . Si ξ_0 est réduite, ξ l'est aussi. Il est clair que ce procédé d'extension s'applique aussi aux cobordismes, et qu'il induit une application ϵ de $\Omega^{\text{CP}}(X_0)$ dans $\Omega^{\text{CP}}(X)$.

Soit maintenant un découpage de $\overline{dX_0 - Z}$ en deux sous-complexes de Poincaré Y et T , et soit ξ_0 une donnée sur (X_0, Y) ; le procédé précédent associe à ξ_0 une donnée ξ sur (X, Y) . Ceci définit une application ϵ de $\Omega^{\text{CP}}(X_0, Y)$ dans $\Omega^{\text{CP}}(X, Y)$.

Considérons maintenant deux sous-complexes de Poincaré Y et Y_0 du bord de X , tels que Y soit la réunion de Y_0 et d'un sous-complexe Y_1 ; toute donnée de chirurgie CP ξ_0 sur (X, Y_0) peut-être considérée comme une donnée ξ sur (X, Y) (on oublie qu'elle est triviale sur Y_1). On dira encore que ξ est obtenue par extension de ξ_0 à (X, Y) . On en déduit une application ϵ de $\Omega^{\text{CP}}(X, Y_0)$ dans $\Omega^{\text{CP}}(X, Y)$.

Théorème 1 : Soit X_0 un complexe de Poincaré de dimension n dont le bord est partagé en deux sous-complexes Y et T_0 . Soit X un complexe de Poincaré obtenu en attachant sur T une certaine anse de dimension $n-k$. Le bord de X est naturellement subdivisé en deux sous-complexe, l'un est Y , l'autre sera noté T . On suppose :

$$1) \quad n \geq 5 \quad \text{et} \quad k \leq \inf(n-3, n/2)$$

$$2) \quad \pi_i(X, T) = 0 \quad \text{pour} \quad i < k \quad .$$

Si ξ est une donnée CP réduite sur (X, Y) , il existe une donnée réduite ξ_0 sur (X_0, Y) dont l'extension à (X, Y) est (isomorphe à) ξ . Si $\hat{\xi}$ est un cobordisme CP réduit entre les étendues à (X, Y) de deux données ξ^1 et ξ^2 sur (X_0, Y) , et si n est impair, il existe un cobordisme réduit $\hat{\xi}_0$ entre ξ^1 et ξ^2 dont l'extension à $(X, Y) \times I$ est (isomorphe à) $\hat{\xi}$.

Corollaire : Soit X un complexe de Poincaré de dimension $n \geq 5$, il existe un sous-complexe de X de la forme $X_1 \times I$, tel que

$$(1) \quad \pi_1(X_1) \longrightarrow \pi_1(X) \quad \text{soit un isomorphisme}$$

(2) X soit la réunion de $X_1 \times I$ et d'anses de dimension au moins $\inf(3, n/2)$.

Pour un tel X_1 , l'application $\epsilon : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X)$ est bijective si n est impair, et surjective si n est pair.

Démonstration du théorème 1 : On va d'abord traiter le cas particulier où T est une variété (diff ou PL) et où les données et cobordismes considérés sont dans la catégorie PL ou diff. Le cas général se traite de la même façon mais avec des techniques plus compliquées.

Cas particulier : Supposons que T est une variété, et soit

$\xi = ((V, W), \varphi, \alpha, \eta)$ une donnée réduite diff ou PL sur (X, Y) .

On peut remplacer X par un voisinage tubulaire $\hat{X}$ de X dans $\mathbb{R}^{n+N}$; le triple (X, Y, T) devient alors un triple $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{T})$ où $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont des variétés, et où $\hat{T}$ est un fibré de base T et de fibre D^N . Si N est assez grand, on peut supposer que φ est un plongement de (V, W, T)

dans $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{T})$. On peut trouver un plongement θ de $(D^k, S^{k-1}) \times D^N$ dans $(\hat{X}, \hat{T})$, tel que le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $\text{Im } \theta$ soit un complexe de Poincaré $\hat{X}_0$ équivalent à X_0 . Si φ et θ sont transverses, et si $\varphi^{-1}(\text{Im } \theta)$ est une boule D^k , il est clair que, en notant V_0 le complémentaire d'un voisinage tubulaire de $\varphi^{-1}(\text{Im } \theta)$, la donnée $\xi_0 = (V_0, W, \varphi|_{V_0}, \alpha|_{X_0}, \eta|_{V_0})$ est la donnée réduite cherchée, dont l'étendue à (X, Y) est isomorphe à $\mathfrak{B}$. On peut supposer que φ et θ sont transverses, posons $Z = \varphi^{-1}(\text{Im } \theta)$; c'est une variété de dimension k dont le bord dZ est contenu dans T . Le lemme de connexion du chapitre VI permet de se ramener au cas où Z est connexe; pour se ramener au cas où Z est une boule D^k , il suffit de prendre une décomposition en anses de Z et d'enlever successivement toutes les anses de dimension strictement positive. Pour enlever une de ces anses on est amené à démontrer que si Z est réunion d'anses de dimension au plus $k-u$ ($u < k$), et si $\psi : (D^u, S^{u-1}) \longrightarrow (Z, dZ)$ est un plongement, on peut déformer θ de façon à se ramener à une intersection isomorphe au complémentaire dans Z d'un voisinage tubulaire de l'image de ψ . Pour cela on applique le lemme de réduction élémentaire du chapitre III; avec $(A, A') = (X, T)$, $(C, C') = (\varphi(V), \varphi(T))$, $(B, B') = (D^k, S^{k-1}) \times D^N$ et $h = \theta$. On vérifie facilement les hypothèses de ce lemme de réduction.

Pour les cobordismes, on emploie une méthode tout à fait analogue (l'hypothèse n impair permet de vérifier l'hypothèse 5 du lemme de réduction).

Cas général : Le processus est analogue, mais il faut utiliser les méthodes des paragraphes 4 et 5 du chapitre III. On remplace $\varphi : V \longrightarrow X$ par l'application fibrée $\Phi : (\mathcal{V}, \mathcal{V}^d) \longrightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{X}^d)$, où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$ sont les fibrés en boules de Spivak de dimension M de V et de X (cf. définition des données de chirurgie) et où $\mathcal{V}^d$ et $\mathcal{X}^d$ sont les fibrés en sphères. On peut ensuite remplacer Φ par un

plongement (encore noté Φ) de (U, U^d) dans $(X \times D^N, X^d \times D^N)$. On remplace θ par un plongement Θ de $(D^k \times D^M, S^{k-1} \times D^M, D^k \times S^{M-1}) \times (D^N, S^{N-1})$ dans $(X, X|T, X^d) \times (D^N, S^{N-1})$. On rend Φ et Θ transverses, on pose $Z = \Phi^{-1}(\text{Im } \Theta)$, $Z^d = Z \cap U^d$ et $dZ = Z \cap U|T$, et on cherche à se ramener au cas où (Z, Z^d, dZ) est isomorphe à $(D^k \times D^M, D^k \times S^{M-1}, S^{k-1} \times D^M)$. On commence par rendre Z connexe en appliquant le lemme de connexion du chapitre 6. Puis par application du lemme de régularisation (§ 4 du chap. 3) on se ramène au cas où (Z, Z^d, dZ) est isomorphe à $(A \times D^M, A \times S^{M-1}, dA \times D^M)$, où A est une variété de dimension k de bord dA . Ensuite les méthodes du § 5 du chapitre III permettent d'enlever toutes les anses de dimension strictement positive d'une présentation de A , et ainsi de se ramener au cas où $A = D^k$.

§ 3 : Calcul de $\Omega^{\text{CP}}(X)$ (k est un entier au moins égal à 2)

A) : Forme quadratique associée à une donnée réduite sur (X^{2k}, Y) .

Soit $\xi = ((V, W), \varphi, \alpha, \eta)$ une donnée réduite sur (X, Y) (où $\dim X = 2k$). Par définition (chap V, § 5) $H_k(\varphi, A)$ est un A -module libre, qui possède une classe de bases privilégiée. Par ailleurs $H_k(\varphi, A) = \pi_k(\varphi)$, donc un élément de $H_k(\varphi, A)$ peut-être représenté par un triple (f, h, γ) où f est une application de S^k dans V , h une homotopie de $\varphi \circ f$ à zéro, et γ un chemin qui joint dans V le point de base de V à l'image par f du point de base de S^k . Pour faire la chirurgie sur (f, h) on doit remplacer f par un plongement dont le fibré normal est convenablement trivialisé. Pour cela on applique les méthodes du chapitre IV ; f peut-être remplacée par une application F de la variété $(S^k \times D^N, S^k \times S^{N-1})$ dans la variété (U, dU) - où U est un voisinage régulier d'une injection de V dans R^{N+2k} . Le fibré $F^*(\tau(U))$ est trivialisé par h, α et η ; cette trivialisatión définit, dans la classe d'homotopie de F , une classe d'homotopie régulière d'immersions de $S^k \times (D^N, S^{N-1}) \times R^k$ dans (U, dU) ; désormais on considérera que F est une immersion de $S^k \times (D^N, S^{N-1})$ dans (U, dU) , induite par une immersion de cette classe. A tout élément de $H_k(\varphi, A)$ on a donc associé une immersion F et un chemin γ , on va leur appliquer les constructions du chapitre VI. On définit une forme quadratique $Q(\xi) = (M, \lambda, \mu)$ de degré $2k$ sur (π, w) , en posant $H_k(\varphi, A) = M$ (c'est un module libre muni d'une classe de bases) et

1) pour tout couple (x, y) d'éléments de M aux quels on a associé des immersions F et F' , et des chemins γ et γ' :

$$\lambda(x, y) = i((F, \gamma), (F', \gamma'))$$

2) pour tout élément x de M représenté par une immersion F et un chemin $\gamma : \mu(x) = \sigma(F, \gamma)$.

Remarques : 1) Si $(X_0, Y) \subset (X, Y)$, et si ξ est obtenue par extension à (X, Y) d'une donnée ξ_0 sur (X_0, Y) , il est clair que $Q(\xi) = Q(\xi_0)$. De même si $Y_0 \subset Y$, et si ξ est obtenue par extension à (X, Y) de la donnée ξ_0 sur (X, Y_0) , $Q(\xi) = Q(\xi_0)$.

2) Si $X = X_1 \times I$ et $Y = Y_1 \times I$ (où $Y_1 \subset dX_1$), pour tout couple (ξ, ξ') de données réduites sur (X, Y) , on a défini une donnée réduite $\xi + \xi'$ sur (X, Y) obtenue en recollant $\xi|_{X_1 \times \{0\}}$ et $\xi'|_{X_1 \times \{1\}}$; on a évidemment $Q(\xi) + Q(\xi') = Q(\xi + \xi')$.

3) Si on fait une chirurgie de dimension $k-1$ sur l'intérieur de V , on obtient une nouvelle donnée réduite $\xi' = ((V', W), \varphi', \alpha', \eta')$; V' peut-être considérée comme la somme connexe de V et d'un tore $S^k \times S^k$; on en déduit que $Q(\xi')$ est isomorphe à la somme directe de $Q(\xi)$ et de $Q^k(A)$. Il est clair que, inversement, si $Q(\xi)$ est décomposé en la somme de $Q^k(A)$ et d'une forme Q , on peut faire la chirurgie correspondant à l'élément de $H_k(\varphi, A)$ qui est identifié à l'élément unité de $A \subset A + \widetilde{\text{Hom}}_A(A, A)$, et que cette chirurgie transforme ξ en une donnée ξ' dont la forme quadratique est isomorphe à Q .

B) : Objet quadratique associé à un partage d'une donnée réduite sur $(X^{2k} \times I, X \times \{1\})$: Soit X un complexe de Poincaré de dimension $2k$, et soit ξ une donnée réduite sur $(X \times I, X \times \{1\})$. $\xi = ((V, W), \varphi, \alpha, \eta)$, et V est la réunion de $X \times I$ (ou de $W \times I$) et d'anses de dimension k et $k+1$. Ordonnons une telle présentation et coupons là en son milieu, on obtient deux données de chirurgie $\xi_0 = ((V_0, T), \varphi, \alpha, \eta)$ qui est une donnée réduite sur $(X \times [0, \frac{1}{2}], X \times \{\frac{1}{2}\})$, et $\xi_1 = ((V_1, T, W), \varphi, \alpha, \eta)$ qui est une donnée sur $(X \times [\frac{1}{2}, 1], X \times \{\frac{1}{2}\}, X \times \{1\})$; de plus V_0 est la

réunion de X et d'anses de dimension k , et V_1 est la réunion de W et d'anses de dimension k . Une telle décomposition est appelée un partage de ξ . Regardons la donnée sur X $\xi(P) = \xi_0|_{X \times \{\frac{1}{2}\}} = \xi_1|_{X \times \{\frac{1}{2}\}}$; elle est obtenue à partir de la donnée triviale sur X en faisant un certain nombre de chirurgies de dimension $k-1$; donc (d'après la remarque 3 ci-dessus) sa forme quadratique $Q(\xi, P)$ est isomorphe à $Q^k(A^P)$ (pour un certain p). En fait il n'y a aucun isomorphisme canonique de $Q(\xi, P)$ sur $Q^k(A^P)$: pour obtenir une décomposition de T en la somme connexe de X et de p tores $S^k \times S^k$, il faut choisir, pour chaque plongement $S^{k-1} \xrightarrow{\alpha} X$ sur lequel on va faire une chirurgie, un plongement $D^k \xrightarrow{\beta} X$, qui prolonge α . On remarque cependant que, quelle que soit la décomposition en anses de V_0 que l'on a choisie, et quels que soient les β , les sphères transverses des anses donnent une base du noyau M_0 de l'homomorphisme $H_k(\varphi|_T, A) \longrightarrow H_k(\varphi|_{V_0}, A)$, et que l'isomorphisme de $Q(\xi, P)$ sur $Q^k(A^P)$ que l'on obtient, envoie M_0 isomorphiquement sur A^P , c'est donc un isomorphisme de $Q(\xi(P))$ sur $Q^k(M)$. De la même façon on notera M_1 le noyau de l'homomorphisme $H_k(\varphi|_T, A) \longrightarrow H_k(\varphi|_{V_1}, A)$, et il existe un isomorphisme de $Q(\xi, P)$ sur la somme directe de $Q(M_1)$ et de $Q(\xi|_{X \times \{1\}})$, qui prolonge l'injection de M_1 dans $H_k(\varphi|_T, A)$. Il en résulte que $(Q(\xi, P), M_0, M_1)$ est un objet quadratique de dimension $2k-1$ sur (π, w) ; on le notera $O(\xi, P)$.

Remarques : 1) Si $X = X_1 \times I$, et si ξ et ξ' sont deux données réduites sur $(X \times I, X \times \{1\})$ munies de partages P et P' , P et P' se recollent en un partage $P+P'$ de la donnée $\xi + \xi'$; et on a évidemment $O(\xi, P) + (O(\xi', P')) = O(\xi + \xi', P+P')$.

2) $O(\xi, P)$ dépend non seulement de ξ , mais aussi du partage P .

On appellera changement de partage élémentaire l'opération qui consiste à enlever à V_1 une anse que l'on rajoute à V_0 . Si P' est le nouveau partage, $Q(\xi, P')$ est isomorphe à $Q(\xi, P) \oplus Q^k(A)$, M'_0 est le sous-

module engendré par M_0 et A , et M'_1 le sous-module engendré par M_1 et $\widetilde{\text{Hom}}_A(A, A)$. Donc $O(\xi, P')$ est la somme directe de $O(\xi, P)$ et de l'objet trivial de dimension $2k+1$ engendré par A . Deux partages quelconques deviennent identiques si l'on fait sur chacun d'eux un certain nombre de changements de partages élémentaires.

3) Supposons que ξ soit la donnée triviale ; on peut la partager de façon triviale ($V_0 = X \times [0, \frac{1}{2}]$ et $V_1 = X \times [\frac{1}{2}, 1]$), l'objet quadratique associé à ce partage est clairement nul. D'après 2), pour tout autre partage P de la donnée triviale ξ , $O(\xi, P)$ est un objet quadratique trivial.

4) On a un diagramme naturel

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & H_k(\varphi|T) & \xrightarrow{\gamma} & H_k(\varphi|V_1) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \uparrow \delta \\
 & & & & & & H_k(\varphi|W) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

et l'image de δ est identique à l'image par γ de l'orthogonal de M_1 dans $H_k(\varphi|T)$; donc δ identifie $H_k(\varphi|W)$ à $M_1^\perp/M_1$. Ce qui définit un isomorphisme (naturel) de $Q(\xi|X \times \{1\})$ sur $d(O(\xi, P))$.

5) Soit P un partage de ξ , $\pi_k(\varphi|T) \longrightarrow \pi_k(\varphi)$ est surjectif. Soit α un élément de $\pi_k(\varphi)$, il existe un changement de partage élémentaire ($P \longrightarrow P'$) et un isomorphisme de $O(\xi, P')$ sur $O(\xi, P) \oplus (Q^k(A), A, \widetilde{\text{Hom}}_A(A, A))$ qui fait correspondre à l'élément unité de A un relèvement $\bar{\alpha}$ de α dans $\pi_k(\varphi|T')$. On associe à $\bar{\alpha}$ un plongement f de S^k dans T' et une homotopie de $\varphi.f$ à zéro, et si on fait

la chirurgie sur (f, h) , on obtient une donnée ξ'' munie d'un partage naturel P'' , et $O(\xi'', P'')$ est isomorphe à $O(\xi, P) \oplus (Q^k(A), A, A)$.

Théorème 2 : Soit X un complexe de Poincaré de dimension $2k-1$ ($k \geq 3$), alors

- 1) Pour toute forme quadratique Q de degré $2k$ sur (π, w) il existe une donnée réduite ξ sur $(XXI, XX\{1\})$, telle que $Q(\xi) = Q$.
- 2) Si $X = X_1 \times I$, quelle que soit la donnée réduite ξ sur $(IXI, XX\{1\})$, on peut construire naturellement un partage P de $\xi|_{XX\{1\}}$ (défini à isomorphisme près), et un isomorphisme de $O(\xi|_{XX\{1\}}, P)$ sur $d(Q(\xi))$.

Démonstration : Pour simplifier le langage on se place délibérément dans le cas où X et V sont des variétés ; les théorèmes démontrés au chapitre VI permettent d'étendre cette démonstration au cas général.

Soient $f_1, \dots, f_n$ des immersions de D^k dans XXI dont les restrictions à S^{k-1} sont des plongements d'images disjointes. Soient γ_i des chemins qui joignent le point de base de XXI aux images des f_i . Les invariants de self intersection et d'intersection définissent une forme quadratique de degré $2k$ sur le A -module libre engendré par les (f_i, γ_i) . Il est clair que toute forme quadratique Q définie sur A^n peut-être obtenue de cette façon. Les fibrés normaux aux plongements $f_i|_{S^{k-1}}$ sont naturellement trivialisés, ce qui permet d'attacher n anses de dimension k à XXI . On obtient une variété V , et les f_i définissent une application de V dans X . On obtient ainsi une donnée de chirurgie sur $(XXI, XX\{1\})$, elle est réduite et sa forme quadratique est isomorphe à la forme quadratique définie par les f_i et les γ_i .

Toute donnée réduite sur $(XXI, XX\{1\})$ peut-être obtenue par ce procédé de construction. Si $X = X_1 \times I$ on peut supposer que

$f_i(s_-^{k-1}) \subset X_1 \times [0, \frac{1}{2}]$, et que $f_i(s_+^{k-1}) \subset X_1 \times [\frac{1}{2}, 1]$. Soit alors V_1 un voisinage régulier de $X_1 \times [0, \frac{1}{2}] \cup (\bigcup_i f_i(s_+^{k-1}))$; c'est le début d'un partage P de la donnée triviale ξ sur $X_1 \times I$ ($P = V_0 \cup_T V_1$ où T est le bord relatif de V_1 dans $V_1 \times I$, et où $V_1 = \overline{X_1 \times I - V_0}$). Pour chaque i on peut construire une isotopie naturelle qui relie $f_i|_{S^{k-1}} : S^{k-1} \rightarrow V_1$, à un plongement $\gamma_i : S^{k-1} \rightarrow T$, de façon que les γ_i et les sphères transverses ϵ_i forment une base de $\pi_{k-1}(\varphi|T)$ qui trivialise $Q(\xi_0|T)$. Par ailleurs V_0 est la réunion de T et d'anses de dimension k ; les γ_i ne sont pas en général les sphères d'attachement d'un tel système d'anses, car γ_i ne représente pas toujours 0 dans $\pi_{k-1}(\varphi|V_0)$. Soit $Q = (M, \lambda, \mu)$ la forme quadratique associée aux f_i ; identifions M au sous-module de $\pi_{k-1}(\varphi|T)$ engendré par les γ_i et $\widetilde{\text{Hom}}_A(M, A)$ au sous-module engendré par les ϵ_i . Un calcul simple montre que les images γ'_i des γ_i par $\text{Id}_M - \varphi_Q : M \rightarrow M \oplus \widetilde{\text{Hom}}_A(M, A)$ sont homotopes à zéro dans V_0 , et sont les sphères d'attachement d'une décomposition en anses de V_0 par rapport à T .

C) Calcul de $\Omega^{\text{CP}}(X)$ pour $\dim X = 2k$ ($k \geq 3$).

Considérons un sous-complexe de X de la forme $X_1 \times I$, tel que $\pi_1(X_1) \rightarrow \pi_1(X)$ soit un isomorphisme, et que X soit la réunion de $X_1 \times I$ et d'anses de dimension au moins 3; d'après le corollaire du théorème 1, $\epsilon : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \rightarrow \Omega^{\text{CP}}(X)$ est surjectif. Soit ξ une donnée sur X , et soit ξ_1 une donnée sur $X_1 \times I$ dont l'étendue à X est ξ ; on sait que $Q(\xi) = Q(\xi_1)$, et d'après le théorème 2, $dQ(\xi_1)$ est trivial; ce qui signifie que $Q(\xi_1)$ et $Q(\xi)$ sont des formes non dégénérées. Les chirurgies de dimension $k-1$ et k sur ξ , ont pour effet d'ajouter ou de retrancher à $Q(\xi)$ une forme triviale; donc la classe de $Q(\xi)$ dans $L_{2k}(\pi, w)$ est un invariant de la classe de ξ dans $\Omega^{\text{CP}}(X)$. On en déduit une application naturelle $\chi : \Omega^{\text{CP}}(X) \rightarrow L_{2k}(\pi, w)$.

On construit de façon analogue une application naturelle

$$\chi' : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \longrightarrow L_{2k}(\pi, w), \text{ et } \chi' = \chi \circ \epsilon. \text{ Puisque } \epsilon \text{ est surjectif,}$$

pour montrer que χ est bijectif, il suffit de montrer que χ' est

bijectif. Le théorème 2 montre que χ' est surjectif. Puisque c'est un homomorphisme de groupes,*) pour démontrer qu'il est injectif, on démontre que si $Q(\xi)$ est triviale, ξ est cobordante à zéro. Pour cela on remarque que si $Q(V, \varphi, \alpha, \eta) = Q^k(A^P)$, on a p plongements disjoints $S^k \longrightarrow V$ (correspondant à la base de $A^P \subset \pi_k(\varphi)$) ; les chirurgies sur ces plongements définissent un cobordisme de ξ à la donnée triviale.

Ce qui démontre le

Théorème 3 : Pour tout X de dimension $2k$ ($k \geq 3$), on a une bijection naturelle $\chi : \Omega^{\text{CP}}(X) \longrightarrow L_{2k}(\pi, w)$. Si X est de la forme $X_1 \times I$, cette bijection est un homomorphisme de groupes.

D) Calcul de $\Omega^{\text{CP}}(X)$ pour $\dim X = 2k+1$ ($k \geq 2$).

Considérons d'abord le cas où $X = X_1 \times I$ (donc $\dim X_1 = 2k$).

Pour toute donnée réduite ξ sur $X_1 \times I$, et tout partage P de ξ , $O(\xi, P)$ est un objet quadratique de dimension $2k+1$ sans bord ; il définit un élément de $L_{2k+1}(\pi, w)$. Cet élément ne dépend pas du partage, il est invariant par chirurgie, on a donc défini une application

$$\chi : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \longrightarrow L_{2k+1}(\pi, w) .$$

C'est un homomorphisme de monoïdes.

Il est surjectif si $k \geq 3$: Soit (Q, M_0, M_1) un objet quadratique de dimension $2k+1$, sans bord ; en ajoutant des anses de dimension k à $X_1 \times I$, on construit une donnée $\xi_0 = ((V_0, T), \varphi_0, \alpha, \eta)$ sur

*) χ' est surjectif, et est un homomorphisme de monoïdes, donc L_{2k} est un groupe et χ' est un homomorphisme de groupe.

$(X \times [0, \frac{1}{2}], X \times \{\frac{1}{2}\})$ telle que $Q(\xi_0 | X_1 \times \{\frac{1}{2}\}) = Q$ et que M_0 soit le noyau de $\pi_k(\varphi_0 | T) \longrightarrow \pi_k(\varphi_0 | V_0)$. On a alors une identification naturelle de M_1 à un sous module de $\pi_k(\varphi_0 | T)$; et puisque $Q(\xi_0 | X_1 \times \{\frac{1}{2}\})$ est isomorphe à $Q^k(M_1)$ et $k \geq 3$, une base de M_1 peut-être représentée par des plongements de S^k dans T , d'images disjointes ; si on attache des anses à V_0 le long de ces plongements, on obtient une donnée de chirurgie ξ sur $X_1 \times I$, qui est réduite et possède un partage P (celui qui est donné par la construction ci-dessus) tel que $O(\xi, P) = (Q, M_0, M_1)$. Donc χ est surjectif. Donc L_{2k} est un groupe.

Il est injectif : puisque c'est un homomorphisme, il suffit de montrer que si $O(\xi, P)$ représente 0 dans $L_{2k+1}(\pi, w)$, ξ est cobordante à la donnée triviale. Si $O(\xi, P)$ représente ainsi zéro, on a $O(\xi, P) + \text{trivial} = \text{trivial} + dQ$ (où Q est une forme quadratique de degré $2k+2$). En changeant P et Q , on se ramène au cas où $O(\xi, P) = dQ$. Par définition, dQ s'écrit $(Q^k(M), \text{Im}(\text{Id}_M - \varphi_Q), M)$; si l'on fait les chirurgies sur tous les éléments d'une base de M , on obtient une nouvelle donnée ξ' , munie d'un partage P' , et $O(\xi', P') = (Q^k(M), \text{Im}(\text{Id}_M - \varphi_Q), \widetilde{\text{Hom}_A(M, A)})$. Cet objet quadratique est trivial, donc ξ' est la donnée triviale. On a ainsi démontré le

Théorème 4 : Pour tout X_1 de dimension $2k$ ($k > 2$), il existe un isomorphisme naturel $\chi : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \longrightarrow L_{2k+1}(\pi, w)$. Si $k = 2$ on a encore un homomorphisme injectif $\chi : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \longrightarrow L_{2k+1}(\pi, w)$, il n'est peut-être pas surjectif.

Remarque : L'application χ n'est bien définie que quand on s'est donné un isomorphisme du complexe de Poincaré considéré sur $X_1 \times I$. Pour toute donnée $\xi = (V, \varphi, \alpha, \eta)$ sur $X_1 \times I$, si on compose φ avec l'application $(x, t) \longrightarrow (x, 1-t)$ de $X_1 \times I$ dans lui-même, on obtient une nouvelle donnée sur $X_1 \times I$; son image dans L_{2k+1} est l'opposée de celle de ξ .

Donc si on se donne un complexe de Poincaré isomorphe à $X_1 \times I$, sans préciser un isomorphisme particulier, χ n'est défini qu'au signe près.

Considérons maintenant un complexe de Poincaré quelconque de dimension $2k+1$ ($k \geq 2$), il existe dans X un sous-complexe de la forme $X_1 \times I$, tel que $\pi_1(X_1) \longrightarrow \pi_1(X)$ soit un isomorphisme, et que X soit la réunion de $X_1 \times I$ et d'anses de dimension au moins 3 ; d'après le corollaire du théorème 1, $\epsilon : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) \longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X)$ est bijectif ; en composant ϵ et χ , on obtient une application $\chi_{X_1} : \Omega^{\text{CP}}(X) \longrightarrow L_{2k+1}(\pi, w)$. Cette application est bijective si $k \geq 3$, elle est injective si $k = 2$. Si on se donne un sous-complexe X_2 de X_1 tel que $\pi_1(X_2) = \pi_1(X_1)$ il est clair que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I) & \xrightarrow{\chi} & L_{2k+1}(\pi, w) \\
 \uparrow \epsilon & \nearrow \chi & \\
 \Omega^{\text{CP}}(X_2 \times I) & &
 \end{array}$$

est commutatif. Donc si X est la réunion de $X_2 \times I$ et d'anses de dimension au moins 3, χ_{X_2} et χ_{X_1} coïncident. On en déduit le

Théorème 5 : Pour tout sous complexe X' de dimension $2k+1$ du complexe X de dimension $2k+1$, tel que $\pi_1(X') = \pi_1(X)$, $\Omega^{\text{CP}}(X') \longrightarrow \Omega^{\text{CP}}(X)$ est bijectif. Il existe une application naturelle $\Omega^{\text{CP}}(X) \longrightarrow L_{2k+1}(\pi, w)$ (définie au signe près) compatible avec les extensions, qui est injective si $k \geq 2$, et surjective si $k \geq 3$.

§ 4 : Calcul de $\Omega^{\text{CP}}(X,Y)$ pour $\dim X \geq 6$ et $Y \neq \emptyset$.

On va se contenter d'esquisser la méthode ; elle est analogue à celle que l'on a utilisée pour le cas absolu : le théorème 1 permet de n'étudier que le cas où (X,Y) est d'une forme très simple.

Cas impair ($\dim X = 2k+1$) : On fait le calcul pour $(X,Y) = (X_1 \times I, Y \times \{1\})$, où Y est un sous-complexe de codimension zéro de X_1 . Au § 3, on a associé à toute donnée réduite ξ sur $(X_1 \times I, X_1 \times \{1\})$ munie d'un partage P , un objet quadratique $O(\xi, P)$ sur (π, w) , dont le bord est naturellement isomorphe à $Q(\xi|_{X_1 \times \{1\}})$. Si ξ est une donnée sur $(X_1 \times I, Y \times \{1\})$, $Q(\xi|_{X_1 \times 1})$ est naturellement isomorphe à $Q(\xi|_Y \times 1) \otimes_A A$. Ainsi l'objet algébrique associé à une donnée ξ sur $(X_1 \times I, Y \times \{1\})$ munie d'un partage P , est un triple (Θ, Q', ψ) , où Θ est un objet quadratique de dimension $2k+1$ sur (π, w) , Q' une forme quadratique de degré $2k$ sur (π', w') et ψ un isomorphisme de $d\Theta$ sur $Q' \otimes_A A$. Les triples de cette forme s'ajoutent de façon évidente ; on note $L_{2k+1}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$ le monoïde quotient (c'est un groupe) du monoïde des classes d'isomorphismes de tels triples, par le sous-monoïde engendré par

- 1) les triples $((Q^k(M), M, \widetilde{\text{Hom}}_A(M, A)), 0, 0)$
- 2) les triples $(dQ, 0, 0)$ (où Q est une forme de degré $2k+2$ sur (π, w))
- 3) les triples $(d(O' \otimes_A A), dO', \psi_0)$ (où $O' = (Q', M'_0, M'_1)$, $O' \otimes_A A = (Q' \otimes_A A, M'_0 \otimes_A A, M'_1 \otimes_A A)$, et où ψ_0 est l'isomorphisme naturel de $d(O' \otimes_A A)$ sur $dO' \otimes_A A$).

Pour tout couple (ξ, P) la classe de (Θ, Q', ψ) dans $L_{2k+1}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$ est un invariant de la classe de ξ dans $\Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I, Y \times \{1\})$ (les chirurgies sur l'intérieur ajoutent ou retranchent des triples de la forme 2, les changements de partage des triples de la forme 1, et les chirurgies sur le bord des triples de la forme 3).

On montre alors facilement que l'application de $\Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I, Y \times \{1\})$ dans $L_{2k+1}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$ ainsi définie est bijective (car $\dim X_1 \geq 6$) ; on en déduit le

Théorème 6 : Pour tout couple (X, Y) , où $\dim X = 2k+1 \geq 7$, on a une bijection naturelle de $\Omega^{\text{CP}}(X, Y)$ sur $L_{2k+1}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$; si (X, Y) est de la forme $(X' \times I, Y' \times I)$, où Y' est un sous-complexe de dX' , cette bijection est un isomorphisme de groupe.

Cas pair ($\dim X = 2k$) : On fait le calcul pour $(X_1 \times I, Y \times I)$, où $X_1 = X_2 \times I$ et $Y \subset X_2 \times \{1\}$. Au § 3, on a associé à toute donnée réduite ξ sur $(X_1 \times I, X_2 \times \{1\} \times I)$ une forme quadratique Q de degré $2k$, un partage P de $\xi|_{X_2 \times \{1\} \times I}$, et un isomorphisme naturel de dQ sur $O(\xi|_{X_2 \times \{1\} \times I}, P)$. Si ξ est une donnée sur $(X_1 \times I, Y \times I)$, il existe un partage P' de $\xi|_{Y \times I}$, et un isomorphisme naturel de $O(\xi|_{Y \times I}, P') \otimes_{A'} A$ sur la somme de dQ et d'un objet trivial. Donc à toute donnée réduite ξ sur $(X_1 \times I, Y \times I)$, et à certains partages P' de $\xi|_{Y \times I}$, on attache un triple (Q, Θ', ψ) , où Q est une forme de degré $2k$ sur (π, w) , Θ' un objet quadratique de degré $2k-1$ sur (π', w') et ψ un isomorphisme de $\Theta' \otimes_{A'} A$ sur la somme de dQ et d'un objet trivial. Les triples de cette forme s'ajoutent de façon naturelle ; on note $L_{2k}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$ le monoïde quotient (c'est un groupe) du monoïde des classes d'isomorphismes de tels triples, par le sous-monoïde engendré par

1) les triples de la forme $(O, \Theta^{k-1}(M'), \psi_{M'})$, où $\Theta^{k-1}(M')$ est l'objet trivial de dimension $2k-1$ engendré par le A' -module M' , et $\psi_{M'}$ l'isomorphisme naturel de $\Theta^{k-1}(M') \otimes_{A'} A$ sur $\Theta^{k-1}(M' \otimes_{A'} A) = dO \oplus \Theta^{k-1}(M' \otimes_{A'} A)$.

2) les triples de la forme $(Q' \otimes_A A, dQ', \psi)$, où ψ est l'isomorphisme naturel de $d(Q' \otimes_A A)$ sur $dQ' \otimes_A A$.

3) les triples de la forme $(Q^k(M), 0, 0)$.

La classe du triple (Q, Θ', ψ) associé à (ξ, P') est un invariant de la classe de ξ dans $\Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I, Y \times I)$ (les changements de partage retranchent ou ajoutent des triples de la forme 1, les chirurgies sur l'intérieur des triples de la forme 3, et les chirurgies sur le bord des triples de la forme 2). On a ainsi défini une application

$\chi : \Omega^{\text{CP}}(X_1 \times I, Y \times I) \longrightarrow L_{2k}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$; on montre facilement qu'elle est injective si $k \geq 3$, et qu'elle est surjective si $\dim X_1 \geq 7$;

on montre aussi que c'est un homomorphisme de groupes. On en déduit le

Théorème 7 : Pour tout couple (X, Y) , où $\dim X = 2k \geq 6$, on a une application naturelle de $\Omega^{\text{CP}}(X, Y)$ dans $L_{2k}(\Theta : \pi' \longrightarrow \pi, w)$; elle est bijective si $\dim X \geq 8$, elle est injective si $\dim X = 6$, si $(X, Y) = (X' \times I, Y' \times I)$, où $Y' \subset dX'$, c'est un homomorphisme de groupes.

1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem of the existence of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

2. In the second part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

3. In the third part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

4. In the fourth part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

5. In the fifth part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

6. In the sixth part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

7. In the seventh part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.

8. In the eighth part of the paper we consider the case of a solution of the system of equations (1) for arbitrary values of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \varphi$.