Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

(Von Herrn *E. Netto*.)

Im 84. Bande dieses Journals hat Herr *G. Cantor* nachgewiesen, dass eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen und eine solche von m Dimensionen unter gegenseitiger Eindeutigkeit auf einander bezogen werden können. Es wird also in Folge dieses interessanten Resultates der Ausspruch *Riemanns*: „dass die Ortsbestimmung in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen zurückgeführt sei" einer Präcisirung unterliegen müssen. Diese bietet sich leicht in der Hinzunahme der Stetigkeit zur eindeutigen Beziehung dar, und in der That haben auch die Herren *Lüroth, Jürgens* und *Thomae* von dieser Seite her den Beweis für die Unmöglichkeit eindeutiger und stetiger Beziehung zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen geliefert. Es beziehen sich aber die Beweise der Herren *Lüroth* und *Jürgens* nur auf die einfachsten Fälle, auf die Abbildung von Mannigfaltigkeiten höherer Dimension in solche der ersten oder zweiten; das gemeinsame Princip der Beweise scheint in den weiteren Fällen nur schwer anwendbar zu sein. Der Beweis des Herrn *Thomae* geht freilich auf den allgemeinen Satz, doch enthält er zwei Voraussetzungen, deren Richtigkeit nicht ohne weiteres ersichtlich scheinen möchte: Bedenken, welche Herr *Lüroth* bereits hervorgehoben hat. Es soll nun im Folgenden gleichfalls ein allgemeiner Beweis versucht werden, der auf ganz anderen Voraussetzungen beruht, als die oben erwähnten. Gehen nämlich die obigen Demonstrationen davon aus, die Stetigkeit der Beziehung zu Grunde zu legen, und daraus die Existenz der Mehrdeutigkeit zu folgern, so soll hier aus gleichzeitiger Annahme der Eindeutigkeit und der Stetigkeit ein Widerspruch gegen die letztere Eigenschaft, d. h. gegen die Stetigkeit gefolgert werden.

1. Eine eindeutige Beziehung zwischen einer einfachen Mannigfaltigkeit M_1, einer Linie, und einer nullfachen M_0, einem Punkte, ist nicht möglich. Daraus folgt dieselbe Unmöglichkeit für die Abbildung von M_n $(n > 1)$ auf M_0.

2. Eine stetige zweifache Mannigfaltigkeit M_2 sei eindeutig auf eine einfache Mannigfaltigkeit M_1 abgebildet. Dann denken wir uns in M_2 eine einfache geschlossene Linie $\mathfrak{A}$ gezogen und betrachten deren Abbild A in M_1. Nach (1.) kann A kein Punkt sein; es wird also ein bestimmtes Stück der Linie M_1 werden. A wird von M_1 verschieden sein, da die Linie $\mathfrak{A}$ jedenfalls als von M_2 verschieden angesehen werden kann. Wir betrachten auf M_1 einen im Innern von A gelegenen Punkt; dann kann man von diesem nicht auf stetigem Wege zu einem anderen nicht zu A gehörigen Punkte von M_1 gelangen, ohne einen gewissen Grenzpunkt (oder einen von zwei solchen Grenzpunkten) zu überschreiten. Diesem einen Grenzpunkte α_1 (oder diesen beiden Grenzpunkten α_1, α_2) entsprechen nach (1.) in M_2 und auf $\mathfrak{A}$ auch nur Punkte, a_1 (resp. a_1, a_2). Wäre nun die Abbildung von M_2 auf M_1 stetig, so könnte man auch in M_2 von einem Punkte des Gebildes $\mathfrak{A}$ nur zu einem andern nicht $\mathfrak{A}$ angehörigen Punkte kommen, wenn man a_1 (resp. a_1 oder a_2) überschritte; denn in M_1 findet das Entsprechende statt. Das ist aber nicht der Fall: jeder Punkt der Linie $\mathfrak{A}$ grenzt in der Fläche M_2 unmittelbar an Punkte, die nicht zu $\mathfrak{A}$ gehören. Daraus folgt, dass die eindeutige Abbildung keine stetige Beziehung zur Folge haben kann. Dasselbe gilt dann, wie unmittelbar zu erkennen ist, von der Abbildung jeder Mannigfaltigkeit M_n $(n > 2)$ auf M_1.

3. Eine stetige dreifache Mannigfaltigkeit M_3 sei eindeutig und stetig auf eine stetige zweifache Mannigfaltigkeit M_2 abgebildet. Dann wählen wir in M_3 eine beliebige Fläche $\mathfrak{A}$ und bilden diese auf M_2 als Flächenstück A gemäss (2.) ab. Das Flächenstück A wird gegen den übrigen Theil von M_2 durch eine oder mehrere Curven $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ begrenzt, und es ist nicht möglich, von einem Punkte in A (der nicht zu diesen Grenzcurven gehört) zu einem ausserhalb A gelegenen Punkte auf stetigem Wege zu gelangen, ohne eine der Curven $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zu überschreiten. Diesen Grenzcurven entsprechen in M_3 auf $\mathfrak{A}$ nach (2.) wieder

Curven $a_1, a_2, \ldots$, und wenn die Abbildung wirklich stetig wäre, dürfte man auch hier von keinem Punkte auf $\mathfrak{A}$ nach einem anderen nicht zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Punkte von M_3 gelangen können, ohne eine der Curven $a_1, a_2, \ldots$ zu überschreiten. Das ist aber nicht der Fall, da im Raume jeder Punkt einer Fläche unmittelbar an andere nicht zur Fläche gehörige Punkte des Raumes grenzt. Es folgt also wie oben, dass eine eindeutige, stetige Abbildung eines Gebildes M_n $(n \geqq 3)$ auf ein Gebilde M_2 nicht möglich ist.

4. Das Prinzip dieser Beweise ist folgendes: „In einer Mannigfaltigkeit νten Grades wird jedes Gebilde νten Grades durch ein anderes von geringerem Grade begrenzt; in einer Mannigfaltigkeit $(\nu+1)$ten Grades fällt jedes Gebilde νten Grades mit seiner Grenze zusammen". In den Fällen $\nu = 1, 2$ ergab sich dies allenfalls aus der Anschauung; im allgemeinen Falle muss zu strenger Begründung auch der Begriff eines Gebildes νter Dimension, eines Punktes im Innern oder auf der Grenze eines Gebildes u. s. w. festgestellt werden. Wir verfahren dabei folgendermassen:

A) Im Raume von $m \geqq n$ Dimensionen sei ein durch die Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_m$ bestimmtes Gebilde gegeben. Es werde in ihm ein dem Punkte $x_1, x_2, \ldots x_m$ benachbarter Punkt $x_1 + \delta_1, x_2 + \delta_2, \ldots x_m + \delta_m$ ausgewählt. Die δ mögen durch passende lineare Transformation der x sämmtlich von Null verschieden gemacht sein. Ergeben sich durch die Festsetzung von n der Incremente z. B. $\delta_1' < \delta_1$, $\delta_2' < \delta_2, \ldots \delta_n' < \delta_n$ die übrigen $\delta_{n+1}, \ldots \delta_m'$ im allgemeinen eindeutig, so heisse das Gebilde *von der nten Dimension.* Findet eine mehrdeutige Bestimmung der $m-n$ nicht festgesetzten Incremente nur auf einer endlichen Anzahl von Gebilden niederer Dimension statt, so heisse das Gebilde *regulär.*

B) Für den Punkt $x_1, x_2, \ldots x_m$ eines Gebildes $n$ter Dimension $(m \geqq n)$ sei es möglich, n der Coordinaten so auszuwählen, dass, wenn man ihren Incrementen dem absoluten Werthe nach hinreichend kleine, sonst aber beliebige positive, verschwindende oder negative Werthe beilegt, jedem solchen Systeme ein Punkt desselben Gebildes entspricht. Dann sagen wir: der Punkt $x_1, x_2, \ldots x_m$ liegt *im Innern* des Gebildes. Aus A) ergiebt sich $x_1 + \frac{\delta_1}{2}, \ldots x_m + \frac{\delta_m}{2}$ als ein solcher Punkt.

Ein Punkt $x_1, x_2, \ldots x_m$ liegt *auf der Grenze zweier Gebilde* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$, wenn ihm beliebig nahe noch Punkte im Innern von $\mathfrak{A}$ und Punkte im Innern von $\mathfrak{B}$ liegen.

C) Kann man von jedem Punkte eines Gebildes zu einem bestimmten Punkte desselben Gebildes und folglich auch zu jedem anderen auf einer Linie gelangen, die ganz dem Gebilde angehört, so heisse dasselbe *zusammenhängend.*

D) Aus einer n-fachen Mannigfaltigkeit M_n schneiden wir ein Gebilde $n$ter Dimension $\mathfrak{A}$ aus, welcher mit dem Reste $\mathfrak{B}$ von M_n keinen Punkt gemein hat. Wäre die Grenze $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichfalls von der $n$ten Dimension, so könnte man nach A) und B) einen Punkt im Innern von $\mathfrak{G}$ wählen, für den z. B. $x_1, x_2, \ldots x_n$ beliebige Incremente haben könnten, falls sie sämmtlich dem absoluten Werthe nach kleiner als die endliche Grösse δ sind. Nach der Definition der Grenze liegt dem $x_1, \ldots x_m$ beliebig nahe ein Punkt $y_1 = x_1 + \varepsilon_1, \ldots y_n = x_n + \varepsilon_n, \ldots$ im Innern von $\mathfrak{A}$; wir können also $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n < \frac{\delta}{2}$ machen; dann liegt $y_1, y_2, \ldots y_m$ im Innern von $\mathfrak{A}$ und auch noch im Innern von $\mathfrak{G}$. Es giebt also nach B) eine endliche Grenze ζ, unterhalb deren man die Incremente z. B. von $y_1, y_2, \ldots y_n$ annehmen kann, ohne dass man das Innere von $\mathfrak{A}$ und von $\mathfrak{G}$ verlässt. Da $y_1, \ldots y_m$ im Innern von $\mathfrak{G}$ liegt, so giebt es nach B) in beliebiger Nähe noch Punkte, die zum Innern von $\mathfrak{B}$ gehören, z. B. $y_1 + \vartheta_1, y_2 + \vartheta_2, \ldots y_m + \vartheta_m$, und man kann die ϑ beliebig klein, also auch kleiner als ζ machen. Der so erhaltene Punkt $y_1 + \vartheta_1, \ldots y_m + \vartheta_m$ liegt dann gleichzeitig im Innern von $\mathfrak{A}, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}$. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keinen Punkt gemein haben. Dass es wirklich zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Grenzpunkte und in $\mathfrak{G}$ Punkte im Innern giebt, folgt leicht aus A), B).

Hieraus ergiebt sich, dass die Grenze zweier wesentlich verschiedener Gebilde derselben $n$ten Dimension von niederer als dieser Dimension ist. Denn da die Grenze beiden Gebilden angehört, kann sie nicht von höherer Dimension sein, und da beide Gebilde bei gleicher Dimension mit der Grenze nach dem eben Bewiesenen Punkte im Innern gemein hätten, so könnten sie nicht wesentlich verschieden sein.

E. Um nun den allgemeinen Satz zu beweisen, nehmen wir an, wir wüssten bereits, dass ein Gebilde νter Dimension für $\nu \leqq n-1$ nur dann auf ein anderes der ν'ten ($\nu' \leqq n-1$) eindeutig und stetig abgebildet werden kann, wenn dasselbe gleichfalls von der νten Dimension, also $\nu' = \nu$ ist. Es soll nun derselbe Satz für ν, $\nu' \leqq n$ bewiesen werden. Hierbei erkennt man zuerst, dass ein Gebilde $n$ter Dimension nicht eindeutig und stetig auf ein solches von geringerer als der $(n-1)$ten Dimension bezogen werden kann. Denn man kann in dem ersteren eine Mannigfaltigkeit $(n-1)$ter Dimension aufstellen, der in dem zweiten eine solche von geringerer Dimension entspräche; dies streitet gegen die Voraussetzung. Es ist also nur die Unmöglichkeit einer Abbildung von M_n auf M_{n-1} nachzuweisen.

Wir betrachten im Innern von M_n einen regulären Punkt, dessen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots x_m$ $(m \geqq n)$ sein mögen. Da derselbe im Innern von M_n liegt, so giebt es n Coordinaten z. B. $x_1, x_2, \ldots x_n$ derart, dass ihnen beliebige Incremente $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ beigelegt werden können, falls sie nur ihrem absoluten Werthe nach kleiner als eine hinreichend kleine, aber von Null verschiedene Grösse d sind; da der Punkt regulär ist, so wird durch $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n < d$ immer nur ein System $\delta_{n+1}, \ldots \delta_m$, also auch nur ein einziger Punkt bestimmt. Wir nehmen nun der bequemeren Bezeichnung wegen $x_1, \ldots x_m$ zum Coordinaten - Anfang. Dann bildet die Gesammtheit der Punkte von M_n, welche der Gleichung $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2 = d^2$ genügen, ein stetiges und zusammenhängendes Gebilde $\mathfrak{A}$ der $(n-1)$ten Dimension; die Gesammtheit der Punkte von M_n, für die $\delta_1^2 + \cdots + \delta_n^2 < d^2$ ist, ein stetiges und zusammenhängendes Gebilde $\mathfrak{B}$ der $n$ten Dimension. Jetzt bilden wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als A und B auf M_{n-1} ab; dann sind A wie B den Voraussetzungen nach von der $(n-1)$ten Dimension. $\mathfrak{A}$ ist in allen Punkten seine eigene Grenze gegen $\mathfrak{B}$; denn von $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$, einem Punkte von $\mathfrak{A}$, kommt man durch $\delta_1 - \lambda$, $\delta_2, \ldots \delta_m$ für jedes beliebig kleine, positive, von Null verschiedene λ auf Punkte im Innern von $\mathfrak{B}$. (Alle diese Eigenschaften sind analytisch ohne weiteres nachweisbar.)

Man muss also auch von jedem Punkte von A in gleicher Weise ins Innere von $\boldsymbol{B}$ kommen können. A ist also mit seiner Grenze $\boldsymbol{G}$ gegen $\boldsymbol{B}$ identisch, d. h. auch von der $(n-1)$ten Dimension; hierdurch ersieht man, es sei $\boldsymbol{B}$ von gleicher Dimension mit seiner Grenze $\boldsymbol{G}$ gegen A; also haben A und $\boldsymbol{B}$ Punkte im Innern gemeinsam. Dieser Umstand steht im Widerspruch zu der Beziehung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu einander. Eine stetige und eindeutige Abbildung ist also nicht möglich, sobald die Gebilde von ungleicher Dimension $\leqq n$ sind.

Berlin im October 1878.