

BULLETIN DE LA S. M. F.

FRÉDÉRIC PHAM

Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 333-367.

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__333_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__333_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULES DE PICARD-LEFSCHETZ GÉNÉRALISÉES ET RAMIFICATION DES INTÉGRALES;

PAR

FRÉDÉRIC PHAM.

Préambule.

Le théorème de Picard-Lefschetz ([1], [4], [5]) décrit la ramification de l'homologie d'une variété analytique complexe au voisinage d'un point singulier quadratique. La première partie de ce travail généralise le théorème à une classe assez étendue de singularités non quadratiques. Cette première partie se suffit à elle-même, et contient, sous une forme dépouillée de toutes complications inessentiels, la méthode de raisonnement qui servira dans la suite. La partie *I bis* ne fait que reprendre la partie I avec d'autres groupes d'homologie. Son utilité apparaîtra dans la partie II. Celle-ci étudie la ramification d'une fonction analytique définie par une intégrale. Les « sous-variétés singulières » de l'intégrand sont supposées, comme dans la référence [2], avoir un « pincement quadratique », mais l'intégrand peut lui-même être *ramifié* autour de ses sous-variétés singulières; par uniformisation de l'intégrand, on se ramène alors au cas où celui-ci n'est pas ramifié, mais subit un pincement *non quadratique* du type étudié dans les parties I et *I bis*.

Les résultats de cette deuxième partie, énoncés aux paragraphes 5 et 6, répondent à des préoccupations physiques. Dans la plupart des théories actuelles des interactions élémentaires [7], les propriétés analytiques des amplitudes de réaction en fonction des grandeurs cinématiques (impulsions-énergies des particules initiales et finales de la réaction) jouent un rôle dynamique essentiel : aux particules, stables ou instables, existant dans la nature, correspondent des pôles, réels ou complexes, des amplitudes de réaction; les résidus de ces pôles s'interprètent comme les forces des interactions dont ces particules sont responsables; les amplitudes ont aussi des singularités du type « point de branchement » et

les discontinuités autour de ces points de branchement peuvent aussi s'interpréter comme des forces, ou, vues d'une autre façon, comme des « amplitudes d'absorption » dont un exemple classique est l'indice d'absorption d'un milieu optique ⁽¹⁾. Connaissant des relations intégrales entre les amplitudes de réaction, on en déduit donc, par les formules (Disc 1) et (Disc 4) de la partie II (§ 6), des relations intégrales entre les « amplitudes d'absorption » ou « forces ».

Le formalisme algébrique dont nous nous servirons fera jouer un rôle central au « groupe structural » Ω de la ramification.

Soient Ω un groupe, J_Ω l'anneau libre de ce groupe, H un J_Ω -module à gauche. Si J est l'anneau des entiers rationnels, le J -dual H^* de H peut être muni d'une structure de J_Ω -module à droite :

$$\begin{aligned} H^* \times \Omega &\longrightarrow H^*; \\ h^*, \omega &\leadsto h^* \omega : \langle h^* \omega | h \rangle = \langle h^* | \omega h \rangle. \end{aligned}$$

En particulier, si $H = J_\Omega$, J_Ω^* coïncide avec J^Ω , ensemble des applications de l'ensemble Ω dans l'ensemble J ; J^Ω est donc un J_Ω -module à droite :

$$\begin{aligned} J^\Omega \times \Omega &\longrightarrow J^\Omega; \\ j^*, \omega &\leadsto j^* \omega : (j^* \omega)(\omega') = j^*(\omega \omega'). \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs aussi le considérer comme un J^Ω -module à gauche :

$$\begin{aligned} \Omega \times J^\Omega &\longrightarrow J^\Omega; \\ \omega, j^* &\leadsto \omega j^* : (\omega j^*)(\omega') = j^*(\omega' \omega). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que l'application

$$\begin{aligned} H^* \times H &\longrightarrow J^\Omega; \\ h^*, h &\leadsto (h^* | h) : (h^* | h)(\omega) = \langle h^* | \omega h \rangle \end{aligned}$$

est J_Ω -bilinéaire, et que $H^* = \text{Hom}_{J_\Omega}(H, J^\Omega)$ ⁽²⁾.

Si, en particulier, Ω est un groupe fini, $J_\Omega = J^\Omega$, et H^* est le J_Ω -dual de H .

Dans toute la suite, Ω sera un groupe de difféomorphismes d'une variété analytique Ξ , et H le module d'homologie singulière (à coefficients entiers) de cette variété, modulo la J -torsion.

H^* peut donc s'interpréter comme le module de *cohomologie* de Ξ (dualité de De Rham), ou le module d'*homologie à supports fermés* de Ξ (dualité de Poincaré) : rappelons que le passage de la première interprétation à la deuxième se fait par l'isomorphisme de Poincaré, et que cet

⁽¹⁾ Cf. [7], p. 17.

⁽²⁾ Plus généralement, cf. [6], lemme 7.5, chap. III.

isomorphisme transforme l'opérateur à droite ω^* de la cohomologie en l'opérateur à gauche ω_*^{-1} de l'homologie, de sorte que la formule

$$\langle h^* \omega^* | h \rangle = \langle h^* | \omega_* h \rangle$$

devient dans la deuxième interprétation

$$\langle \omega_*^{-1} k | h \rangle = \langle k | \omega_* h \rangle$$

ou encore

$$\langle k | h \rangle = \langle \omega_* k | \omega_* h \rangle,$$

formule évidente géométriquement si l'on se rappelle que $\langle k | h \rangle$ est l'indice d'intersection des cycles h et k .

De même, la J_Ω -bilinéarité de la forme (|) :

$$\begin{aligned} (h^* | j_* h) &= j(h^* | h), \\ (h^* j^* | h) &= (h^* | h) j \end{aligned}$$

devient dans la deuxième interprétation

$$\begin{aligned} (k | j_* h) &= j(k | h), \\ (j_* k | h) &= (k | h) \bar{j}, \end{aligned}$$

où $j \rightsquigarrow \bar{j}$ est l'involution induite dans l'anneau J_Ω par l'automorphisme $\omega \rightsquigarrow \omega^{-1}$.

Je remercie, pour les fécondes discussions que nous avons eues ensemble, mes camarades des centres de Physique théorique de Saclay et de l'École Polytechnique, et surtout Marcel FROISSART, Jean LASCoux, et Dimitri FOTIADI qui m'a initié à la topologie algébrique. Je suis reconnaissant au Professeur R. THOM pour les conseils qu'il m'a généreusement prodigués, me permettant d'améliorer une première version de ce travail.

I. Formule de Picard-Lefschetz généralisée.

1. **Introduction.** — Considérons, dans l'espace euclidien complexe

$$\mathbf{C}^{n+1} \ni (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})$$

la variété algébrique $\Xi^\nu(t)$ à n dimensions complexes, d'équation

$$\Xi^\nu(t) : \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^{\nu_i} = t;$$

$\nu = \{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+1}\}$ est un ensemble indexé d'entiers positifs, t est un paramètre complexe.

Lorsque t s'annule, $\Xi^\nu(t)$ acquiert un point singulier à l'origine. Nous nous proposons d'étudier l'automorphisme de l'homologie de $\Xi^\nu(t)$ induit par un tour de t autour de zéro, généralisant ainsi les résultats locaux établis par É. PICARD et S. LEFSCHETZ [4] dans le cas $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{n+1} = 2$ (cas de la singularité quadratique). Plus précisément, à un lacet de t autour de 0 on peut associer une « isotopie ambiante » [2] g de $\Xi^\nu(t)$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$, égale à l'identité en dehors d'une boule $B \subset \mathbf{C}^{n+1}$ assez grande⁽³⁾. Donc si γ est une chaîne de Ξ^ν (à support fermé quelconque), la chaîne $g_*\gamma - \gamma$ équivaut à une chaîne ayant son support dans B , c'est-à-dire une chaîne à support compact. Ainsi $g_* - 1$ induit un homomorphisme de l'homologie fermée dans l'homologie compacte, homomorphisme que nous noterons « Var » (pour « variation »)

$$\text{Var} : H^F_*(\Xi^\nu(t)) \rightarrow H^c_*(\Xi^\nu(t)).$$

C'est cet homomorphisme que nous nous proposons d'expliciter.

La variété $\Xi^\nu(1)$ (que nous écrirons dorénavant pour abréger Ξ^ν) admet un groupe d'automorphismes Ω^ν , à savoir le groupe fini commutatif à $n + 1$ générateurs $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$:

$$\omega_i(\zeta_1, \dots, \zeta_i, \dots, \zeta_{n+1}) = (\zeta_1, \dots, e^{2\pi i \nu_i / \nu_i} \zeta_i, \dots, \zeta_{n+1})$$

(Ω^ν est une somme de groupes cycliques d'ordre $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+1}$); ce groupe d'automorphismes, qui est lié au type particulier de dégénérescence considéré ici, sera le centre d'intérêt de notre étude : autrement dit, si nous désignons par J_ν l'anneau du groupe Ω^ν (avec les notations du préambule, $J_\nu = J_{\Omega^\nu}$), les groupes d'homologie dont nous étudierons la variation seront considérés dans leur structure de J_ν -modules.

Précisons un peu les notations :

Un élément j de l'anneau J_ν sera noté comme une combinaison linéaire formelle

$$j = \sum_{\omega \in \Omega^\nu} j(\omega) \omega^{-1}.$$

Si γ est un cycle de Ξ^ν , sa classe d'homologie sera notée $|\gamma\rangle$ ou $|\gamma\rangle$, selon qu'on la considérera comme élément du groupe ou du J_ν -module d'homologie. On écrira

$$j|\gamma\rangle = |j_*\gamma\rangle = \sum_{\omega \in \Omega^\nu} j(\omega) |\omega_*^{-1}\gamma\rangle.$$

⁽³⁾ Nous ne chercherons pas ici à prouver cette affirmation, d'ailleurs assez intuitive, car elle n'est qu'un cas particulier du « lemme de localisation », prouvé dans la partie II (§ 4).

On définira dans l'anneau J_v une *involution* :

$$j = \sum_{\omega \in \Omega^v} j(\omega) \omega^{-1} \leadsto \bar{j} = \sum_{\omega \in \Omega^v} j(\omega) \omega.$$

Si $\langle \gamma' | \gamma \rangle$ est l'indice d'intersection des cycles, la forme

$$(\gamma' | \gamma) = \sum_{\omega \in \Omega^v} \langle \gamma' | \omega_* \gamma \rangle \omega^{-1} \in J_v$$

est J_v -linéaire en $|\gamma\rangle$ et J_v -antilinéaire en $\langle \gamma' |$:

$$j(\gamma' | \gamma) = (\gamma' | j_* \gamma) = (\bar{j}_* \gamma' | \gamma).$$

2. Étude de l'homologie. — Considérons dans Ξ^v la « cellule évanouissante »

$$(1) \quad \mathbf{e} : \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1} \text{ réels } \geq 0, \quad \sum_i \xi_i^{\nu_i} = 1$$

(ainsi appelée parce qu'elle s'évanouit avec t).

Pour voir que c'est une cellule, il suffit de remarquer qu'elle est homéomorphe au simplexe standard

$$\Delta_n = \left\{ \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1} \text{ réels } \geq 0 : \sum_i \eta_i = 1 \right\}$$

par l'application (que nous noterons aussi $\mathbf{e}$)

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} \xi_1 = \eta_1^{\nu_1} \\ \xi_2 = \eta_2^{\nu_2} \\ \vdots \\ \xi_{n+1} = \eta_{n+1}^{\nu_{n+1}} \end{pmatrix}$$

(où l'on a choisi pour les radicaux la détermination positive).

Soit maintenant e la chaîne

$$(2) \quad e = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2) \dots (1 - \omega_{n+1})_* \mathbf{e}.$$

Cette chaîne est un cycle : en effet, le support de $\partial_i e$ ($i^{\text{ème}}$ bord du simplexe $\mathbf{e}$) obéit à l'équation $\xi_i = 0$, donc $\omega_i \partial_i e = \partial_i e$.

Nous allons voir que ce « cycle évanouissant » engendre le J_v -module d'homologie de Ξ^v .

Plus précisément,

THÉORÈME 1. — En homologie réduite,

$$\begin{aligned} H_*^c(\Xi^v) &= 0 & \text{si } * \neq n, \\ H_n^c(\Xi^v) &\approx K_v = \frac{J_v}{I_v}, \end{aligned}$$

où I_ν désigne l'idéal de J_ν engendré par les éléments $(1 + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{y_i-1})$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; de plus, $H_n^c(\Xi^\nu)$ est engendré, en tant que J_ν -module, par la « classe évanouissante » $|e|_n^c(\Xi^\nu)$, classe du cycle évanouissant e .

Preuve du théorème 1. — La collection des cellules $\{\omega_* \mathbf{e}\}_{\omega \in \Omega^\nu}$ engendre évidemment un complexe simplicial $\mathcal{E}^\nu$, muni du groupe d'automorphismes Ω^ν .

LEMME. — L'espace $|\mathcal{E}^\nu|$ est rétracte de déformation de Ξ^ν par une déformation-rétraction r^ν compatible avec le groupe Ω^ν . En effet, considérons les hyperplans analytiques complexes

$$X = \left\{ (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} = \sum_i \eta_i = 1 \right\},$$

$$S_i = \{ \eta \in X : \eta_i = 0 \},$$

et construisons une déformation-rétraction r du système d'hyperplans $(X, S_1, \dots, S_{n+1})$ sur le système simplicial $(\Delta_n, \partial_1 \Delta_n, \dots, \partial_{n+1} \Delta_n)$: ceci peut se faire en combinant la déformation-rétraction évidente de l'hyperplan complexe X sur sa partie réelle avec la déformation-rétraction réelle symbolisée par la figure 1.

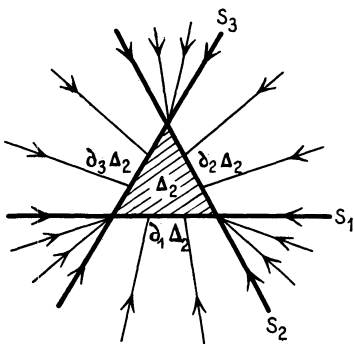


Fig. 1. — Déformation-rétraction sur le système simplicial $(\Delta_2, \partial_1 \Delta_2, \partial_2 \Delta_2, \partial_3 \Delta_2)$.

Par le changement de variables $\tilde{z}_i = \eta_i^{1/\nu_i}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, on déduit de r une déformation-rétraction r^ν de Ξ^ν sur $|\mathcal{E}^\nu|$, en suivant par continuité la détermination du radical.

Ayant ainsi prouvé le lemme, il est très facile de démontrer le théorème; il suffit en effet de calculer l'homologie simpliciale de $\mathcal{E}^\nu$, ce qui se fait directement : c'est l'homologie du complexe de chaînes

$$0 \rightarrow J_\nu \{ \mathbf{e} \} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_i J_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \dots \nu_{n+1}} \{ \partial_i \mathbf{e} \} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{i < j} J_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \nu_i \nu_{j-1} \nu_j \dots \nu_{n+1}} \{ \partial_i \partial_j \mathbf{e} \} \xrightarrow{\partial} \dots$$

COROLLAIRE 1 :

$$\left. \begin{aligned} H_*^F(\Xi^\vee) &= 0 & \text{si } * \neq n \neq 2n; \\ H_{2n}^F(\Xi^\vee) &\approx J, \\ H_n^F(\Xi^\vee) &\approx K_\vee = \frac{J_\vee}{I_\vee} \end{aligned} \right\} \text{sauf si } n = 0, \text{ auquel cas } H_0^F(\Xi^\vee) \approx J_\vee.$$

De plus, $H_n^F(\Xi^\vee)$ est engendré, en tant que $J_\vee$ -module, par la « classe co-évanouissante » $|\varepsilon)_n^F(\Xi^\vee)$, classe du cycle représenté (à l'orientation près) par

$$(3) \quad \varepsilon : \left\{ \begin{aligned} \operatorname{Re}(\zeta_i^{\vee}) &= \frac{1}{n+1}, \\ -\frac{\pi}{\nu_i} &< \operatorname{Arg} \zeta_i^{\vee} < \frac{\pi}{\nu_i}, \quad \sum_i \operatorname{Im}(\zeta_i^{\vee}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Preuve du corollaire 1. — La dualité de Poincaré nous dit que $H_*^F(\Xi^\vee)$ est le J -dual de $H_{2n-*}^c(\Xi^\vee)$ par la forme bilinéaire $\langle \gamma' | \gamma \rangle$, indice d'intersection des cycles γ et γ' . On en déduit (cf. préambule) que $H_*^F(\Xi^\vee)$ est le $J_\vee$ -module dual de $H_{2n-*}^c(\Xi^\vee)$ par la forme $J_\vee$ -bilinéaire

$$(\gamma' | \gamma) = \sum_{\omega \in \Omega^\vee} \langle \gamma' | \omega_* \gamma \rangle \omega^{-1}.$$

Soit donc $|e)$ le générateur de $H_n^c(\Xi^\vee) \approx K_\vee = \frac{J_\vee}{I_\vee}$, et soit $(\eta |$ un élément de son $J_\vee$ -dual.

Posons $(\eta | e) = j_0$,

$$\forall j \in J_\vee, \quad (\eta | j_* e) = jj_0.$$

Or, si $j \in I_\vee$, $|j_* e) = 0$, donc $jj_0 = 0$, c'est-à-dire que tout $(\eta |$ détermine un élément j_0 de $J_\vee$ annulé par $I_\vee$. Réciproquement, tout élément j_0 pris dans l'annulateur de $I_\vee$ détermine une forme $J_\vee$ -linéaire $(\eta |$ sur $H_n^c(\Xi^\vee)$, par la loi $(\eta | j_* e) = jj_0$.

Comme l'annulateur de $I_\vee$ est l'idéal engendré par l'élément $(1 - \omega_1)(1 - \omega_2) \dots (1 - \omega_{n+1})$, $H_n^F(\Xi^\vee)$ sera le $J_\vee$ -module, isomorphe à $K_\vee$, engendré par la forme $(\varepsilon |$ définie par

$$(4) \quad (\varepsilon | e) = (1 - \omega_1)(1 - \omega_2) \dots (1 - \omega_{n+1}).$$

Or le cycle ε décrit par la formule (3) définit bien une telle forme : pour le voir, il suffit d'utiliser (2) et de vérifier la formule d'intersection

$$(5) \quad (\varepsilon | e) = 1$$

(évidente géométriquement, au signe près : ce signe définit l'orientation de ε).

3. Formule de plongement. — Soit $\text{pl}_1 : H_*^c(\Xi^\nu) \rightarrow H_*^F(\Xi^\nu)$ l'homomorphisme naturel (de « plongement ») de l'homologie compacte dans l'homologie fermée. Cet homomorphisme est donné par la « formule de plongement »

$$(\text{pl}_1 | e) = (-)^{n(n+1)/2} (1 - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}) | \varepsilon).$$

Preuve. — Il suffit de comparer la formule d'intersection (4) à la formule d'intersection

$$(e | e) = (-)^{n(n+1)/2} (1 - \omega_1) \dots (1 - \omega_{n+1}) \overline{(1 - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1})},$$

elle-même déduite de (2) et des formules (1), (2) de l'Appendice I ⁽⁴⁾.

COROLLAIRE. — Le plongement pl_1 est un *monomorphisme*, sauf dans le cas $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{n+1} = 2$, n impair, où c'est l'homomorphisme nul : en effet, K_ν est un anneau d'intégrité, de sorte que le seul cas où pl_1 pourrait avoir un noyau non nul est le cas

$$1 - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} = 0 \bmod I_\nu,$$

cas qui ne se présente que si $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{n+1} = 2$ ($\omega_i = -1 \bmod I_\nu$), n impair.

4. Formule de Picard-Lefschetz généralisée. — Quand t décrit le cercle de rayon 1 : $t = e^{2i\pi\tau}$, il existe une isotopie ambiante de $\Xi^\nu(t)$ dans $\mathbf{C}^{n+1}$:

$$f_\tau : \Xi^\nu(1) \rightarrow \Xi^\nu(e^{2i\pi\tau})$$

définie par

$$f_\tau : (z_i) \rightarrow (e^{2i\pi\tau/\nu_i} z_i).$$

En particulier, pour $\tau = 1$, on obtient l'automorphisme $f = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}$.

Or cette isotopie ambiante f est *équivalente* à g ⁽⁵⁾ [voir la note de bas de page ⁽⁵⁾], de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*^F(\Xi^\nu) & \xrightarrow{f_* - 1} & H_*^F(\Xi^\nu) \\ \downarrow \text{Var} & \nearrow \text{pl}_1 & \\ H_*^c(\Xi^\nu) & & \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\text{pl}_1 \circ \text{Var} | \varepsilon) = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} - 1) | \varepsilon) = - (-)^{n(n+1)/2} \text{pl}_1 | e).$$

⁽⁴⁾ Rappelons que $\langle \gamma | \gamma' \rangle = (-)^{\dim \gamma \cdot \dim \gamma'} \langle \gamma' | \gamma \rangle$ et que, par conséquent, $\langle \gamma | \gamma' \rangle = (-)^{\dim \gamma \cdot \dim \gamma'} \langle \gamma' | \gamma \rangle$, ce qui donne pour deux chaînes de dimension n : $\langle \gamma | \gamma' \rangle = (-)^n \langle \gamma' | \gamma \rangle$.

⁽⁵⁾ C'est-à-dire définit la même « classe d'isotopie » (au sens de [2]).

Dans le cas général où pl_1 est un *monomorphisme*, on en tire

$$(\text{Var } 1) \quad \boxed{\text{Var } | \varepsilon) = -(-)^{(n(n+1))/2} | e)}.$$

Dans le cas particulier $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{n+1} = 2$, n impair, pl_1 est l'homomorphisme nul, et le raisonnement précédent ne nous apprend rien. Néanmoins la formule (Var 1) reste vraie, comme on voit immédiatement en appliquant cette formule au cas $\nu_1 = 4, \nu_2 = \dots = \nu_{n+1} = 2$ par exemple et en utilisant la projection évidente

$$\Xi^{4,2,\dots,2} \longrightarrow \Xi^{2,2,\dots,2}, \\ (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}) \leadsto (\zeta_1^2, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1})$$

qui transforme $| \varepsilon)^{4,2,\dots,2}$ en $| \varepsilon)^{2,2,\dots,2}$ et $| e)^{4,2,\dots,2}$ en $| e)^{2,2,\dots,2}$.

Soit maintenant $| h)_n^F(\Xi^\nu)$ une classe d'homologie quelconque. Nécessairement,

$$\exists j \in J_\nu : | h) = j | \varepsilon),$$

donc

$$\text{Var } | h) = -(-)^{(n(n+1))/2} j | e).$$

Or on peut calculer j en observant que

$$(\mathbf{e} | h) = j(\mathbf{e} | \varepsilon) = (-)^n j(\overline{\varepsilon} | \mathbf{e}) = (-)^n j.$$

Ceci donne la « *formule de Picard-Lefschetz généralisée* » :

$$(\text{PL } 1) \quad \boxed{\text{Var } | h) = (-)^{(n+1)(n+2)/2} (\mathbf{e} | h) | e)}.$$

Remarque. — Dans cette formule, l'indice d'intersection $(\mathbf{e} | h)$ n'est pas indépendant du cycle choisi pour représenter $| h)$, mais c'est sans importance, car sa *classe modulo* I_ν en est indépendante, et I_ν annule $| e)$.

I bis. Nouvelles formules de Picard-Lefschetz.

1. Introduction. — Soit $\Xi_i^\nu(t) = \Xi^{\nu_1, \nu_2, \dots, \hat{\nu}_i, \dots, \nu_{n+1}}(t)$ la sous-variété de $\Xi^\nu(t)$ définie par l'équation $\zeta_i = 0$, c'est-à-dire

$$\Xi_i^\nu(t) : \sum_{k \neq i} \zeta_k^{\nu_k} = t; \quad \zeta_i = 0;$$

posons

$$\Sigma_{i_1, i_2, \dots, i_m}(t) = \bigcup_{i=i_1, i_2, \dots, i_m} \Xi_i^\nu(t), \quad \Sigma(t) = \Sigma_{1, 2, \dots, n+1}(t).$$

Nous allons démontrer des formules analogues à celles de la partie 1, pour la ramification de l'homologie de $\Xi^\nu - \Sigma$, et la ramification de l'homologie relative de la paire (Ξ^ν, Σ) . Les groupes et les homomorphismes à étudier sont résumés par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_*^F(\Xi^\nu - \Sigma) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & H_*^F(\Xi^\nu - \Sigma), \\ \begin{array}{c} \uparrow \text{pl}_2 \\ \downarrow \text{Var} \end{array} & & \begin{array}{c} \uparrow \text{pl}_2 \\ \downarrow \text{Var} \end{array} \\ H_*^c(\Xi^\nu - \Sigma) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & H_*^c(\Xi^\nu, \Sigma), \end{array}$$

où les pointillés indiquent la dualité de Poincaré.

Le symbole $H_*^F(\Xi^\nu - \Sigma)$ désigne, comme dans la référence [4], le groupe d'homologie des chaînes fermées de $\Xi^\nu - \Sigma$ qui sont fermées dans Ξ^ν .

Le raisonnement suit de très près celui de la partie I.

2. Étude des homologies.

THÉORÈME 2 :

$$H_*^c(\Xi^\nu, \Sigma) = 0 \text{ si } \star \neq n;$$

$H_n^c(\Xi^\nu, \Sigma) \approx J_\nu$ est le J_ν -module libre engendré par la « classe évanouissante relative » $|\mathbf{e}\rangle_n^c(\Xi^\nu, \Sigma)$, classe de la cellule évanouissante $\mathbf{e}$ déjà décrite :

$$\mathbf{e} : \zeta_i \text{ réels } \geq 0, \quad \sum_i \zeta_i^{\nu_i} = 1.$$

Preuve. — C'est évident sur le complexe simplicial $\mathcal{S}^\nu$ déjà utilisé pour prouver le théorème 1.

COROLLAIRE 2 :

$$H_*^F(\Xi^\nu - \Sigma) = 0 \text{ si } \star \neq n;$$

$H_n^F(\Xi^\nu - \Sigma) \approx J_\nu$ est le J_ν -module libre engendré par $|\varepsilon\rangle_n^F(\Xi^\nu - \Sigma)$, classe du « cycle co-évanouissant » ε déjà décrit :

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}(\zeta_i^{\nu_i}) = \frac{1}{n+1}, \\ -\frac{\pi}{\nu_i} < \operatorname{Arg} \zeta_i < \frac{\pi}{\nu_i}, \quad \sum_i \operatorname{Im}(\zeta_i^{\nu_i}) = 0. \end{array} \right.$$

Preuve du corollaire 2. — Il suffit d'appliquer la « dualité de Poincaré généralisée » [2], qui nous dit que $H_*^F(\Xi^\nu - \Sigma)$ est dual de $H_{2n-\star}^c(\Xi^\nu, \Sigma)$.

Le cycle ε est bien le générateur du dual, comme le montre la formule d'intersection (déjà citée) :

$$(5) \quad \boxed{(\varepsilon | \mathbf{e}) = 1.}$$

THÉOREME 3. — $H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma)$ est le quotient du J_ν -module libre $J_\nu \{ \tilde{e} \} \bigoplus_{i=1}^{n+1} J_\nu \{ \partial^n o_i \}$ par le sous-module M engendré par les éléments suivants :

$$M \left\{ \begin{array}{l} (1 - \omega_k) | \partial^n o_i \quad (k \neq i); \\ \prod_{k \neq i} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{y_k-1}) | \tilde{e} - (1 - \omega_i) | \partial^n o_i; \end{array} \right.$$

Dans ces formules, $|\tilde{e}|$ est la classe du cycle $\tilde{e}$ décrit dans l'appendice I (cycle compact de $\Xi^\nu - \Sigma$, homologue dans Ξ^ν à e); $|\partial^n o_i|$ est le cobord de Leray [5], itéré n fois, de la classe du point

$$o_i \in \bigcap_{k \neq i} \Xi_k^\nu, \quad o_i : \begin{cases} \xi_i = 1, \\ \xi_k = 0 \text{ pour } k \neq i. \end{cases}$$

La preuve de ce théorème est donnée dans l'Appendice II.

COROLLAIRE 3. — $H_n^F(\Xi^\nu - \Sigma)$ est le quotient du J_ν -module libre $\bigoplus_{i=1}^{n+1} J_\nu \{ \varepsilon_i \}$ par le sous-module N engendré par les éléments suivants :

$$N : (\overline{1 - \omega_k}) | \varepsilon_i - (\overline{1 - \omega_i}) | \varepsilon_k;$$

$|\varepsilon_i|$ est la classe du cycle ε_i décrit par

$$\varepsilon_i : \begin{cases} \xi_i \text{ réel,} \\ \text{Arg } \xi_k = \frac{\pi}{y_k} \text{ pour } k \neq i, \end{cases} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k^{y_k} = 1.$$

Preuve du corollaire 3. — On utilise la dualité de Poincaré.

Soit $|\eta\rangle$ un élément du dual de $H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma)$.

Posons

$$(\eta | \tilde{e}) = \tilde{j}, \quad (\eta | \partial^n o_i) = j_i.$$

Pour que la famille $\{\tilde{j}, j_1, \dots, j_{n+1}\}$ définisse une forme linéaire sur le J_ν -module du théorème 3, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned} (1 - \omega_k) j_i &= 0 \quad (k \neq i), \\ \prod_{k \neq i} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{y_k-1}) \tilde{j} &= (1 - \omega_i) j_i. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de j'_i tels que

$$\begin{aligned} j_i &= j'_i \prod_{k \neq i} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{y_k-1}), \\ \tilde{j} &= \sum_i (1 - \omega_i) j'_i. \end{aligned}$$

Le dual cherché peut donc être engendré par les $n + 1$ formes linéaires $|\varepsilon_1\rangle, |\varepsilon_2\rangle, \dots, |\varepsilon_{n+1}\rangle$ définies par

$$(6) \quad \begin{cases} (\varepsilon_i | \partial^n o_k) = 0 & \text{si } i \neq k, \\ (\varepsilon_i | \partial^n o_i) = \prod_{k \neq i} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{k-1}), \\ (\varepsilon_i | \tilde{\varepsilon}) = 1 - \omega_i, \end{cases}$$

formes liées par les relations

$$(\overline{1 - \omega_k} | \varepsilon_i) = (\overline{1 - \omega_i} | \varepsilon_k).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les formules (6) sur le cycle ε_i du corollaire 3 : la méthode de calcul est analogue à celle employée dans l'Appendice I, pour établir les formules (2) et (5) de cet appendice.

3. Formules de plongement :

$$(pl\ 2) \quad \boxed{\begin{aligned} pl_2 | \tilde{\varepsilon} &= (-)^{(n(n+1))/2} (1 - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} | \varepsilon), \\ pl_2 | \partial^n o_i &= (-)^{(n(n+1))/2} \prod_{k \neq i} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{k-1} | \varepsilon). \end{aligned}}$$

Preuve de (pl 2). — Il suffit de comparer la formule (5) : $(\varepsilon | \mathbf{e}) = 1$ aux formules d'intersection (2) et (5) de l'Appendice I

$$(pl\ 3) \quad \boxed{pl_3 | \mathbf{e} = (-)^{(n(n-1))/2} [|\varepsilon_1\rangle + \overline{\omega_1} | \varepsilon_2\rangle + \overline{\omega_1 \omega_2} | \varepsilon_3\rangle + \dots + \overline{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n} | \varepsilon_{n+1}\rangle].}$$

Preuve de (pl 3). — Il suffit de comparer la formule (6) du paragraphe précédent aux formules d'intersection (2) et (5) de l'Appendice I.

Remarque. — Malgré les apparences, la formule (pl 3) est invariante par permutation des indices 1, 2, 3, ..., $n + 1$: pour s'en assurer il suffit de regarder le sous-module N du corollaire 3 (§ 2).

4. Nouvelles formules de Picard-Lefschetz. — De la formule de plongement (pl 2), par un raisonnement analogue à celui de la partie I, on déduit la formule

$$(Var\ 2) \quad \boxed{Var | \varepsilon = - (-)^{(n(n+1))/2} | \tilde{\varepsilon} \rangle.}$$

Si $|h\rangle_n^F(\Xi - \Sigma)$ est une classe d'homologie quelconque,

$$|h\rangle = j | \varepsilon \rangle, \quad (\mathbf{e} | h) = j(\mathbf{e} | \varepsilon) = (-)^n j(\overline{\varepsilon} | \mathbf{e}) = (-)^n j,$$

et (Var 2) devient la « deuxième formule de Picard-Lefschetz » :

$$(PL\ 2) \quad \boxed{\text{Var} \mid h) = (-1)^{((n+1)(n+2))/2} (e \mid h) \mid \tilde{e}).}$$

De même, en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_*^F(\Xi^\vee - \Sigma) & \xrightarrow{f_*^{-1}} & H_*^F(\Xi^\vee - \Sigma) \\ \downarrow \text{Var} & \nearrow \text{pl}_2 & \\ H_*^c(\Xi^\vee, \Sigma) & & \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \text{pl}_3 \circ \text{Var} \mid \varepsilon_1) &= (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} - 1) \mid \varepsilon_1) \\ &= \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} (\overline{1 - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}}) \mid \varepsilon_1) \\ &= \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} [(\overline{1 - \omega_1}) + \overline{\omega_1 (1 - \omega_2)} + \overline{\omega_1 \omega_2 (1 - \omega_3)} + \dots \\ &\quad + \overline{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n (1 - \omega_{n+1})}] \mid \varepsilon_1) \\ &= \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} (\overline{1 - \omega_1}) [\mid \varepsilon_1) + \overline{\omega_1} \mid \varepsilon_2) + \overline{\omega_1 \omega_2} \mid \varepsilon_3) + \dots \\ &\quad + \overline{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n} \mid \varepsilon_{n+1})] \\ &= (-1)^{(n(n-1))/2} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} (\overline{1 - \omega_1}) \text{pl}_3 \mid e) \end{aligned}$$

de sorte que plus généralement

$$(Var\ 3) \quad \boxed{\text{Var} \mid \varepsilon_i) = (-1)^{n(n-1)/2} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} (\overline{1 - \omega_i}) \mid e).}$$

Si $|h)_n^F(\Xi^\vee - \Sigma)$ est une classe d'homologie quelconque,

$$\mid h) = \sum_i j_i \mid \varepsilon_i), \quad (\tilde{e} \mid h) = (-1)^n \sum_i j_i (\overline{1 - \omega_i}),$$

et (Var 3) devient la « troisième formule de Picard-Lefschetz »

$$(PL\ 3) \quad \boxed{\text{Var} \mid h) = (-1)^{n(n+1)/2} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} (\tilde{e} \mid h) \mid e).}$$

Indiquons pour finir une « quatrième formule de Picard-Lefschetz », dont (PL 1), (PL 2) et (PL 3) ne sont que des cas particuliers ⁽⁶⁾; cette formule décrit la variation d'une classe d'homologie

$$\mid h)_n^F(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,\mu} - \Sigma_{\mu+1,\dots,m}),$$

$$(PL\ 4) \quad \boxed{\text{Var} \mid h) = (-1)^\mu (-1)^{((n+1)(n+2))/2} \times \omega_1 \omega_2 \dots \omega_\mu (\tilde{e}_{\mu+1,\dots,n+1} \mid h) \mid^{\mu+1\dots m} \tilde{e}_{1,2,\dots,\mu}).}$$

⁽⁶⁾ La preuve de cette formule est laissée en exercice au lecteur patient.

Dans cette formule, $\tilde{e}_{\mu+1, \dots, n+1}$ est une chaîne compacte de $\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, \mu}$, bordant dans $\Sigma_{\mu+1, \dots, n+1}$, définie par une construction analogue à celle de $\tilde{e}$: nous la caractériserons simplement par la relation, analogue à la formule (1) de l'Appendice I

$$|\tilde{e}_{\mu+1, \dots, n+1}\rangle_n^c(\Xi^\nu, \Sigma_{\mu+1, \dots, n+1}) = |(1 - \omega_1) \dots (1 - \omega_\mu)_* \mathbf{e}\rangle_n^c(\Xi^\nu, \Sigma_{\mu+1, \dots, n+1}).$$

Quant à ${}^{\mu+1 \dots m} \tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu}$, c'est la chaîne compacte de $\Xi^\nu - \Sigma_{\mu+1, \dots, m}$, bordant dans $\Sigma_{1, 2, \dots, \mu}$, définie par

$${}^{\mu+1 \dots m} \tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu} = (1 - \omega_{m+1}) \dots (1 - \omega_{n+1})_* \tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu, m+1, \dots, n+1},$$

où $\tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu, m+1, \dots, n+1}$ est défini comme $\tilde{e}_{\mu+1, \dots, n+1}$, au changement d'indices près.

II. Ramification des intégrales.

1. **Introduction.** — On se propose d'étudier le prolongement analytique du germe de fonction holomorphe défini au point t_0 par l'intégrale

$$J_{t_0}(t) = \int_{\Gamma} \varphi_t,$$

où t est un point, proche de t_0 , d'une variété analytique complexe T . Γ est un cycle compact « au-dessus » d'une variété analytique complexe X , et sa dimension réelle est égale à la dimension complexe n de X ; φ_t est une forme holomorphe « au-dessus » de X , représentable localement par

$$\varphi_t(x) = f(x, t) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

où f est une fonction analytique « multivaluée » de x et t . Précisons ce que nous entendons ici par « forme » et « cycle » « au-dessus » de X . Soit $Y = X \times T$ la variété produit, $\text{pr} : Y \rightarrow T$ la projection canonique. Nous ferons l'abus de langage d'identifier la « fibre » $Y_t = \text{pr}^{-1}(t)$ à la variété X . Soit $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ une application analytique, surjective, *analytiquement stratifiée* [9], de variétés analytiques complexes, telle que la restriction de p à chaque strate soit un homéomorphisme local. Le sous-ensemble stratifié, union des strates de codimension complexe ≥ 1 , sera noté S (dans l'espace but Y), $\tilde{S}$ (dans l'espace source $\tilde{Y}$). La forme φ_t sera supposée définir (quand t parcourt T) une forme φ sur $\tilde{Y}$ (univaluée), holomorphe sauf peut-être sur un sous-ensemble stratifié $\tilde{S}'$ de $\tilde{S}$, appelé « lieu singulier » de φ . On posera $S' = p(\tilde{S}')$. L'ensemble $\tilde{S}$ sera composé, d'une part par ces « lieux singuliers » de φ , d'autre part par les « lieux de ramification » de φ (strates autour desquelles l'application p se ramifie effec-

tivement). Γ_t sera un cycle compact de $\tilde{Y}_t - \tilde{S}'_t = [p^{-1} \circ pr^{-1}(t)] \cap (\tilde{Y} - \tilde{S}')$, dont l'image Γ dans X sera indépendante de t , pour t proche de t_0 .

Nous étudierons aussi le cas où Γ_t borde dans $\tilde{S}'_t - \tilde{S}''_t$, où $\tilde{S}''$ est un autre sous-ensemble stratifié de $\tilde{S}$: remarquons à ce propos que si l'ensemble $\tilde{S}'_t$ est de codimension ≥ 1 dans $\tilde{Y}_t$ (ce qui est le cas général), la restriction $\varphi_t|_{\tilde{S}'_t}$ est nulle, de sorte que l'intégrale $J_{t_0}(t) = \int_{\Gamma_t} \varphi_t$ ne dépend que de la classe d'homologie relative de Γ_t dans $(\tilde{Y}_t - \tilde{S}'_t, \tilde{S}''_t)$.

2. Prolongement du germe par isotopie. — En plus des hypothèses du paragraphe précédent, nous supposons que l'application p est *propre*. Restreinte à l'image inverse d'une strate de Y , c'est alors un homéomorphisme local propre, donc un *revêtement fini*. Dans ces conditions, on a le

THÉORÈME DE TRIVIALITÉ (¹). — Soit $\mathfrak{S} \subset T$ une sous-variété connexe telle que la stratification de Y soit *fibrée localement triviale* au-dessus de $\mathfrak{S}$. Alors, il en est de même de la stratification de $\tilde{Y}$ (projetée sur $\mathfrak{S}$ par $\tilde{p}r = pr \circ p$), et la trivialisat[i]on commute avec p : ceci peut s'exprimer en disant que « la stratification de $p : \tilde{Y}|_{\mathfrak{S}} \rightarrow Y|_{\mathfrak{S}}$, projetée sur $\mathfrak{S}$ par $(\tilde{p}r, pr)$, est *fibrée localement triviale* ».

Esquisse de démonstration. — Soit V un champ de vecteurs de Y , tangent aux strates, dont l'intégration réalise la trivialisat[i]on de Y (cf. [2]). Grâce à la propriété de revêtement, ce champ de vecteurs se relève de façon unique en un champ $\tilde{V}$ tangent aux strates de $\tilde{Y}$. Le théorème sera prouvé si nous savons démontrer que $\tilde{V}$ est suffisamment « régulier » (il suffira qu'il soit localement lipschitzien). Nous laisserons de côté ce point délicat, nous contentant de le vérifier directement sur le modèle très simple étudié au paragraphe suivant. Remarquons que l'application p n'a pas besoin d'être propre, il suffit qu'elle *revête* chaque strate de Y (le revêtement pouvant être infini). En effet, la propriété de revêtement assure l'intégrabilité *globale* du champ $\tilde{V}$ dans chaque strate de $\tilde{Y}$. Le rôle de la condition de Lipschitz est simplement d'assurer, localement, la continuité du « raccord » entre les strates.

COROLLAIRE 1. — A tout chemin dans $\mathfrak{S}$ est associée une isotopie de la fibre $(\tilde{Y}_t, \tilde{S}_t)$, dont la classe d'isotopie ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin.

(¹) Ce théorème n'est qu'un cas particulier très simple d'un théorème de THOM (cf. [9], théorème 3). L'absence d'« éclatement », essentielle pour le théorème de Thom, est assurée ici par la condition d'*homéomorphisme local* de chaque strate.

COROLLAIRE 2. — Le germe $J_{t_0}(t)$ se prolonge en une fonction $J(t)$ holomorphe en tous les points de la *composante d'isotopie* $\mathfrak{E}_0$ de t_0 , c'est-à-dire le plus grand $\mathfrak{E}$ contenant t_0 .

Variétés de Landau. — La projection $\text{pr} : Y \rightarrow T$ induit sur T une stratification (cf. [9], théorème 6), et chaque strate $\mathfrak{E}$ de T satisfait les hypothèses du théorème de trivialité. On supposera que la composante d'isotopie de t_0 est une strate $\mathfrak{E}_0$ de dimension maximale, et l'on appellera « *variétés de Landau* » ⁽⁸⁾ les strates de codimension complexe 1 incidentes à $\mathfrak{E}_0$. Parmi les variétés de Landau, on trouvera des « projections », ou des « contours apparents » de strates de S .

Nous nous proposons d'étudier comment varie l'intégrale $J(t)$ quand t décrit un lacet infinitésimal autour d'une telle variété de Landau. En nous plaçant dans la droite analytique complexe orthogonale à cette variété, nous nous ramènerons au cas où $T = \mathbf{C}$ (et alors $\dim_{\mathbf{C}} Y = n + 1$).

3. Lieux de ramification en position générale. — (Dans tout ce paragraphe, m désigne la dimension de Y .)

Supposons que S soit une union de sous-variétés $S_1, S_2, \dots$ de codimension 1 dans Y , se coupant en position générale, avec la stratification évidente. Quelles sont alors, localement, les structures possibles de l'application stratifiée p ? Dans tout ce paragraphe, on travaillera dans un ouvert de Y (ouvert noté simplement Y), muni d'une carte $y \leadsto (y_1, y_2, \dots, y_m)$ telle que

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m, \quad S_i = \{y : y_i = 0\} \quad (9).$$

PROPOSITION. — Chaque composante connexe de la variété $\tilde{Y} = p^{-1}(Y)$ peut être munie d'une carte $\tilde{y} \leadsto (z_1, z_2, \dots, z_m)$ dans laquelle p soit de la forme

$$(z_1, z_2, \dots, z_m) \xrightarrow{p} (y_1, y_2, \dots, y_m),$$

$y_i = z_i^{\nu_i}$, où les ν_i sont des entiers positifs.

Pour prouver la proposition, nous aurons besoin du

LEMME ⁽¹⁰⁾. — Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}^m$ (resp. $\mathbf{R}^m$), et $r : U \rightarrow U$ une application analytique (resp. différentiable de classe $\mathcal{C}^s$, $s \geq 1$) qui *rétracte* U sur un sous-ensemble S [c'est-à-dire $r(U) = S$, et $r|_S = \text{identité}$].

Alors S est une *sous-variété* analytique (resp. différentiable de classe $\mathcal{C}^s$).

⁽⁸⁾ D'après L. D. LANDAU.

⁽⁹⁾ Le fait que nous ayons pris le nombre maximal m de surfaces S_i ne restreint évidemment pas la généralité.

⁽¹⁰⁾ Ce lemme, dans le cas analytique, est dû à H. ROSSI [8], théorème 5. 2. La présente démonstration m'a été indiquée par le Professeur B. MALGRANGE.

Preuve. — Puisque r est une rétraction, $r \circ r = r$, donc

$$(1) \quad r'_{r(x)} r'_x = r'_x,$$

où r'_ξ désigne l'application tangente au point ξ .

En particulier, sur S , on a la relation $r'_x r'_x = r'_x$, qui veut dire que r'_x est un *projecteur* : donc son rang est une fonction *continue* de x [car le rang d'une matrice continue est une fonction semi-continue inférieurement, et $rg(r'_x) + rg(1 - r'_x) = m$]. Comme S , image continue d'un connexe, est connexe, on en déduit que le rang de r'_x est *constant sur S* : soit k sa valeur. Pour x quelconque dans U , on déduit de (1) que $rg(r'_x) \leq k$. Mais, par semi-continuité, $rg(r'_x) \geq k$ pour x assez proche de S .

Donc $rg(r'_x) = k$ dans un voisinage de S .

Par conséquent, tout point $x \in S$ admet un voisinage U_x tel que $r(U_x)$ soit une sous-variété S'_x , de dimension k . Posons

$$S'_x = S_x \cap U_x = S \cap U_x \quad \text{et} \quad U'_x = U_x \cap r^{-1}(S'_x).$$

Il est facile de voir que U'_x est un voisinage de x , dont l'intersection avec S est la sous-variété S'_x . Le lemme est ainsi démontré.

Preuve de la proposition. — Si $\dim Y = 1$, elle est évidente.

Supposons la vraie pour $\dim Y < m$, et prouvons-la pour $\dim Y = m$. Soient

$$(h) \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad (h) \neq \emptyset, \quad S^{(h)} = \bigcap_{i \in (h)} S_i.$$

Nous allons montrer qu'on peut « relever » la rétraction évidente $r^{(h)} : Y \rightarrow S^{(h)}$ [définie en annulant les coordonnées y_i , $i \in (h)$] en une *rétraction analytique*

$$\tilde{r}^{(h)} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{S}^{(h)}.$$

Ceci permet de définir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{r}^{(h)} \times \tilde{r}^{(k)}} & \tilde{S}^{(h)} \times \tilde{S}^{(k)} \\ p \downarrow & & p^{(h)} \downarrow \times p^{(k)} \\ Y & \xrightarrow{r^{(h)} \times r^{(k)}} & S^{(h)} \times S^{(k)} \end{array} \quad \left[\text{avec } (k) = \complement(h) \right].$$

En vertu du lemme, $\tilde{S}^{(h)}$ et $\tilde{S}^{(k)}$ sont des *variétés* analytiques de dimensions $|k|$ et $|h| < m$, de sorte que la colonne de droite du diagramme est connue par hypothèse de récurrence. Or $r^{(h)} \times r^{(k)}$ est évidemment un isomorphisme. De plus, $\tilde{S}^{(k)}$, surface de niveau de la rétraction $\tilde{r}^{(h)}$, coupe

donc $\tilde{S}^{(h)}$ transversalement, de sorte que l'application analytique $\tilde{r}^{(h)} \times \tilde{r}^{(k)}$ est de rang m près de $\tilde{S}^{(h)} \cap \tilde{S}^{(k)}$; un raisonnement analogue (fait avec les autres surfaces de niveau des rétractions) montre qu'elle est de rang m partout; c'est donc un isomorphisme analytique local, qui est d'ailleurs *propre* (car $r^{(h)} \times r^{(k)}$ et p sont propres) : ainsi, $\tilde{r}^{(h)} \times \tilde{r}^{(k)}$ est un *revêtement fini*, ce revêtement est *trivial* puisque $\tilde{S}^{(h)} \times \tilde{S}^{(k)}$ est simplement connexe, et c'est même un *isomorphisme* puisque la fibre au-dessus de $\tilde{S}^{(h)}$ se réduit à un point.

La proposition est ainsi prouvée : il nous reste à montrer comment construire la rétraction analytique $\tilde{r}^{(h)}$. Sa construction dans $\tilde{Y} - \tilde{S}_{(k)}$

$$\left(\tilde{S}_{(k)} = \bigcup_{i \in (k)} \tilde{S}_i \right)$$

est évidente. L'analyticité se lit sur le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} - \tilde{S}_{(k)} & \xrightarrow{\tilde{r}^{(h)}} & \tilde{S}^{(h)} - \tilde{S}_{(k)} \\ \rho \downarrow \text{analytique} & & \rho \downarrow \text{isomorphisme} \\ Y - S_{(k)} & \xrightarrow[r^{(h)}]{\text{analytique}} & S^{(h)} - S_{(k)} \end{array}$$

De plus, $\tilde{r}^{(h)}$ est *bornée* au voisinage de $\tilde{S}_{(k)}$ (car $r^{(h)}$ l'est, et $p^{(h)} : \tilde{S}^{(h)} \rightarrow S^{(h)}$ est *propre*). Donc, d'après le théorème de Riemann, $\tilde{r}^{(h)}$ se prolonge en une fonction analytique sur $\tilde{Y}$ tout entier, qui est la rétraction cherchée.

REMARQUE 1. — $\tilde{Y} - \tilde{S} \xrightarrow{p} Y - S$ n'est pas le revêtement fini le plus général qu'on puisse construire sur $Y - S$. En effet, $\pi_1(Y - S)$ est le groupe libre commutatif engendré par $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, classes d'homotopie de « lacets élémentaires » autour de $S_1, S_2, \dots, S_m$; son sous-groupe $p_* \pi_1(\tilde{Y} - \tilde{S})$ est, d'après la proposition, engendré par $\omega_1^{\nu_1}, \omega_2^{\nu_2}, \dots, \omega_m^{\nu_m}$, alors que son sous-groupe le plus général devrait comprendre des termes « croisés » parmi ses générateurs. On peut dire que la proposition conduit à ne retenir, parmi les revêtements possibles de $Y - S$, que ceux pour lesquels les ramifications autour de $S_1, S_2, \dots, S_m$ sont « indépendantes ».

REMARQUE 2. — Pour compléter, dans le cas des strates en position générale, la preuve du théorème de trivialité (§ 2), notons que l'image inverse par p d'un champ de vecteurs V de classe $\mathcal{C}^2$, tangent aux strates de S , est un champ de vecteurs $\tilde{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tangent aux strates de $\tilde{S}$ (par contre, si l'on suppose V lipschitzien seulement, $\tilde{V}$ n'est pas forcément lipschitzien, sauf dans le cas $m = 1$).

4. Étude locale du pincement quadratique. — Le paragraphe 2 nous permet de « remonter » dans l'espace $\tilde{Y}$ tous les résultats de la référence [2] relatifs aux isotopies dans l'espace Y . Comme annoncé à la fin du paragraphe 2, nous faisons $T = \mathbb{C}$, donc $\dim Y = n + 1$.

4.1. Pincement quadratique. — Supposons que S soit une union de sous-variétés fermées $S_1, S_2, \dots$ en position générale, et qu'au voisinage d'un point de la strate $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m - \bigcup_{i>m} S_i$, on puisse prendre des coordonnées locales $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ telles que

$$S_i = \{y : y_i = 0\} \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad S_i = \emptyset, \quad (i > m);$$

$$t = \text{pr}(y) = (y_1 + y_2 + \dots + y_m) + (y_{m+1}^2 + \dots + y_{n+1}^2).$$

L'application $\text{pr} : S_1 \cap \dots \cap S_m$ a un point critique quadratique à l'origine, dont la projection $t = 0$ est une *variété de Landau*, qu'on peut appeler « contour apparent » de la strate $S_1 \cap \dots \cap S_m$ ⁽¹⁾.

Dans la fibre $\text{pr}^{-1}(t)$ (qui s'identifie à X), on peut prendre comme coordonnées $x_1 = y_2, \dots, x_n = y_{n+1}$, et les lieux de ramification $S_{it} = S_i \cap \text{pr}^{-1}(t)$ s'écrivent

$$(4.1) \quad \begin{cases} S_{1t} : s_1 \equiv t - (y_2 + \dots + y_m) - (y_{m+1}^2 + \dots + y_{n+1}^2) = 0, \\ S_{2t} : s_2 \equiv y_2 = 0, \\ \dots \quad \dots\dots\dots, \\ S_{mt} : s_m \equiv y_m = 0. \end{cases}$$

On reconnaît la situation étudiée dans la référence [2] : les variétés S_{it} , en position générale pour $t \neq 0$, ont pour $t = 0$ un « pincement quadratique ».

4.2. Localisation. — Supposons, pour fixer les idées, que la représentation (4.1) soit valable dans un voisinage du produit $\overline{W} \times \Theta$, où $\overline{W}$ est l'adhérence de la boule

$$W = \left\{ x \in X : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 < 2 \right\},$$

et Θ le disque, $\Theta = \{t \in T : |t|^2 < 1\}$. On vérifie que les S_{it} sont, pour tout $t \in \Theta$, en position générale avec la frontière $\tilde{W}$ de la boule W . Par conséquent, « si tout se passe bien à l'extérieur de $\overline{W}$ » (par exemple

⁽¹⁾ Un cas particulier est le cas où $m = n + 1$, et $t = \text{pr}(y) = y_1 + y_2 + \dots + y_{n+1}$. La variété de Landau $t = 0$ s'interprète alors comme la « projection » de la strate $S_1 \cap \dots \cap S_{n+1}$.

si $\forall t \in \Theta$, les S_{it} sont en position générale dans $X - \bar{W}$, et si X est compacte) on prouve, exactement comme dans la référence [2], le

LEMME DE LOCALISATION. — Soit ω_L un lacet « élémentaire » de $\Theta - \{O\}$ (c'est-à-dire tournant une fois dans le sens positif autour de O); posons

$$\tilde{W}_t (\text{resp. } \tilde{W}_t, \tilde{W}_t) = \tilde{Y}_t \cap p^{-1}(W) (\text{resp. } \bar{W}, \dot{W}).$$

Au lacet ω_L est associée une isotopie $\tilde{g}$ de l'ensemble stratifié $\tilde{Y}_t$, cette isotopie laisse $\tilde{W}_t$ globalement invariant, et détermine donc une isotopie interne $\tilde{g}|_{\tilde{W}_t}$ et une isotopie externe $\tilde{g}|_{\tilde{Y}_t - \tilde{W}_t}$; de plus, l'isotopie externe est équivalente à l'identité.

Ce lemme permet de prendre $\tilde{g}$ égale à l'identité en dehors d'un ouvert relativement compact de $\tilde{W}_t$, de sorte que $\tilde{g}_* - 1$ induit un homomorphisme des groupes d'homologie

$$\text{Var} : H_*^c(\tilde{Y}_t) \rightarrow H_*^c(\tilde{W}_t)$$

qui se factorise en

$$\text{Var} = \text{Var} \circ w^* : H_*^c(\tilde{Y}_t) \xrightarrow{w^*} H_*^F(\tilde{W}_t) \xrightarrow{\text{Var}} H_*^c(\tilde{W}_t),$$

où w^* est l'homomorphisme « trace dans la boule $\tilde{W}_t$ », à la signification géométrique évidente ⁽¹²⁾.

4.3. **Formules de Picard-Lefschetz.** — Si nous dotons $\widetilde{W \times \Theta}$ des coordonnées $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ du paragraphe 3, la projection

$$p : \widetilde{W \times \Theta} \rightarrow W \times \Theta$$

s'écrit

$$y_i = \begin{cases} z_i \rightsquigarrow y_i, \\ z_i^{y_i} & (i = 1, 2, \dots, m), \\ z_i & (i = m+1, \dots, n+1), \end{cases}$$

$\tilde{W}_t$ est donc donné par l'équation

$$\tilde{\text{pr}}(z) \equiv z_1^{y_1} + \dots + z_m^{y_m} + z_{m+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2 = t$$

et coïncide avec la variété $\Xi^v(t)$ de la partie I, pour

$$v = \{v_1, \dots, v_m, 2, \dots, 2\}.$$

⁽¹²⁾ On peut le définir précisément comme suit : l'inclusion $w : \tilde{W}_t \rightarrow \tilde{Y}_t$ induit un homomorphisme de « restriction » $w^* : H_*^c(\tilde{Y}_t) \rightarrow H_*^F(\tilde{W}_t)$ des groupes de cohomologie, auxquels on applique l'isomorphisme de Poincaré.

Soit $|h\rangle \in H_n^F(\tilde{W})$ (nous faisons dorénavant $t = 1$, et notons $\tilde{W} = \tilde{W}_{t=1}$). La formule (PL 1) s'écrit

$$(4.31) \quad \text{Var } |h\rangle = (-)^{((n+1)(n+2))/2} (\mathbf{e}_{1,2,\dots,n+1} | h)^\nu | e),$$

où nous avons rajouté les indices $1, 2, \dots, n+1$ pour rappeler que la cellule $\mathbf{e}_{1,2,\dots,n+1}$ borde dans $\Sigma = \{z_1, z_2, \dots, z_{n+1} = 0\}$, et l'exposant ν pour rappeler que le symbole $(\cdot)^\nu$ est défini par rapport au groupe $\Omega^\nu = \Omega^{\nu_1, \dots, \nu_m, 2, \dots, 2}$. Si nous notons $(\cdot | \cdot)$ l'indice d'intersection défini par rapport au groupe $\Omega \equiv \Omega^{\nu_1, \dots, \nu_m}$, nous avons

$$(4.32) \quad (\cdot | \cdot)^\nu = \sum_{\omega' \in \Omega'} (\omega'_* | \cdot) \omega',$$

où $\Omega' = \Omega^{2, \dots, 2}$ est le groupe engendré par $\omega_{m+1}, \dots, \omega_{n+1}$. Or, $\forall i > m$, $(1 + \omega_i) | e) = 0$, c'est-à-dire $\omega_i | e) = - | e)$, de sorte que la formule (4.31) devient, compte tenu de (4.32) :

$$(4.33) \quad \text{Var } |h\rangle = (-)^{((n+1)(n+2))/2} (\mathbf{e}_{1,2,\dots,m} | h) | e),$$

où $\mathbf{e}_{1,2,\dots,m}$ est la chaîne $(1 - \omega_{m+1}) \dots (1 - \omega_{n+1})_* \mathbf{e}_{1,2,\dots,n+1}$, qui borde dans $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \dots \cup \tilde{S}_m$. Or cette chaîne n'est qu'une subdivision de la cellule

$$(4.34) \quad \mathbf{e} : \begin{cases} z_1, z_2, \dots, z_{n+1} \text{ réels;} \\ z_1, z_2, \dots, z_m \geq 0; \\ z_1^{\nu_1} + \dots + z_m^{\nu_m} + z_{m+1}^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1 \end{cases}$$

(pour voir que $\mathbf{e}$ est bien une cellule, notez que p la projective homéomorphiquement sur la cellule de W décrite dans les coordonnées du paragraphe 4.1 par $x_1, \dots, x_n$ réels, $s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0$).

Nous récrivons donc (4.33) sous la forme

$$(PL 1) \quad \boxed{\text{Var } |h\rangle = (-)^{((n+1)(n+2))/2} (\mathbf{e} | h) | e),}$$

où la cellule évanouissante $\mathbf{e}$ est donnée par (4.34), tandis que le cycle évanouissant e s'en déduit par

$$\boxed{e = (1 - \omega_1) \dots (1 - \omega_m)_* \mathbf{e}.}$$

De façon analogue, on établira pour $|h\rangle \in H_n^F(\tilde{W} - \tilde{S})$ la formule

$$(PL 2) \quad \boxed{\text{Var } |h\rangle = (-)^{((n+1)(n+2))/2} (\mathbf{e} | h) | \tilde{e}),}$$

et pour $|h\rangle \in H_n^F(\tilde{W} - \tilde{S})$,

$$(PL 3) \quad \boxed{\text{Var } |h\rangle = (-)^{(n(n+1))/2} (-)^{n-m+1} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m (\tilde{e} | h) | \mathbf{e}).}$$

Plus généralement, pour $|h\rangle \in H_n^F(\tilde{W} - \tilde{S}_1 \cup \dots \cup \tilde{S}_\mu - \tilde{S}_{\mu+1} \cup \dots \cup \tilde{S}_m)$, on aura la formule

$$(PL\ 4) \quad \boxed{\text{Var } |h\rangle = (-)^{\mu} (-)^{(n+1)(n+2)/2} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{\mu} (\tilde{e}_{\mu+1, \dots, m} | h) | \tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu} \rangle,}$$

où $\tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu}$ est une chaîne compacte de $\tilde{W} - \tilde{S}_{\mu+1} \cup \dots \cup \tilde{S}_m$, bordant dans $\tilde{S}_1 \cup \dots \cup \tilde{S}_{\mu}$, dont la classe d'homologie dans $(\tilde{W}, \tilde{S}_1 \cup \dots \cup \tilde{S}_{\mu})$ est égale à celle de $(1 - \omega_{\mu+1}) \dots (1 - \omega_m)_*$ **e**; $\tilde{e}_{\mu+1, \dots, m}$ est définie de façon analogue.

5. Cas non ramifié. — La référence [2] a déjà étudié le cas de l'intégrand non ramifié, en supposant que les surfaces $S_1, S_2, \dots, S_m$ participant au pincement étaient les singularités polaires de l'intégrand. Nous supposons ici plus généralement que l'intégrand φ_t a des singularités polaires sur $S_{\mu+1}, S_{\mu+2}, \dots, S_m$ seulement, tandis que la chaîne d'intégration Γ borde dans $S_1, S_2, \dots, S_{\mu}$, c'est-à-dire définit une *classe d'homologie relative*

$$|h\rangle (X - S_{\mu+1, \dots, m}, S_{1, 2, \dots, \mu}),$$

avec

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_k} = \bigcup_{t=i_1, i_2, \dots, i_k} S_t$$

(rappelons que $\varphi_t | S_{1, 2, \dots, \mu} = 0$).

Les résultats s'expriment en fonction de la *cellule évanouissante e* qui, dans les coordonnées locales $x_1, x_2, \dots, x_n$ du paragraphe 4.1, s'écrit

$$(5.1) \quad \mathbf{e} : \begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_n \text{ réels;} \\ s_1, s_2, \dots, s_m \geq 0. \end{cases}$$

La variation de la classe d'homologie $|h\rangle (X - S_{\mu+1, \dots, m}, S_{1, 2, \dots, \mu})$ quand le paramètre t tourne autour de la « variété de Landau » L est

$$(5.2) \quad \boxed{\text{Var}_L |h\rangle = N | \tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu} \rangle,}$$

où le « cycle évanouissant » $\tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu}$ est défini par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{e} & \tilde{e}_{1, 2, \dots, \mu} & \\ \partial_{\mu+1} \downarrow & \uparrow \partial_{\mu+1} & \\ \vdots & \vdots & \\ \partial_m \downarrow & \uparrow \partial_m & \\ \mathbf{e}^{\mu+1, \dots, m} & & \end{array}$$

où δ_i désigne le cobord de Leray « autour » de la sous-variété S_i , et ∂_i le bord pris relativement à la sous-variété S_i ; le nombre N est un « indice d'intersection » :

$$(5.3) \quad N = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} (-1)^{(\mu(2n-\mu-1))/2} \langle \mathbf{e}^{1,2,\dots,\mu} | h^{1,2,\dots,\mu} \rangle,$$

avec $\mathbf{e}^{1,2,\dots,\mu}$ (resp. $h^{1,2,\dots,\mu}$) = $\partial_\mu \circ \dots \circ \partial_1 \mathbf{e}$ (resp. h).

Lorsque $\mu = 0$, on retrouve bien les résultats de la référence [2] ⁽¹³⁾.

Preuve. — Il suffit évidemment d'appliquer la formule (PL 4) du paragraphe 4, avec $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_m = 1$. La formule

$$|\tilde{\mathbf{e}}_{1,2,\dots,\mu}\rangle = \partial_{\mu+1} \circ \dots \circ \partial_m |\mathbf{e}^{\mu+1,\dots,m}\rangle$$

s'obtient en explicitant le cobord de Leray δ comme dans la preuve du théorème 3'.1 (Appendice II). L'indice d'intersection

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_{\mu+1,\dots,m} | h \rangle = \langle \partial_1 \circ \dots \circ \partial_\mu \mathbf{e}^{1,2,\dots,\mu} | h \rangle$$

se transforme par dualité comme dans l'Appendice I (§ 3).

6. Résultats dans le cas général. — De la ramification des cycles, donnée par les formules (PL) du paragraphe 4, on déduit trivialement la ramification de l'intégrale

$$J(t) = \int_{\Gamma} \varphi_t.$$

Rappelons quelques notations :

Le « groupe structural de la ramification » est le groupe commutatif (noté multiplicativement)

$$\Omega = \bigoplus_{i=1}^m \Omega^{\nu_i},$$

où Ω^{ν_i} est le groupe cyclique d'ordre ν_i engendré par ω_i , classe d'un « lacet élémentaire » autour de S_i ; pour s'en tenir strictement aux hypothèses du paragraphe 4, nous devrions prendre tous les ν_i finis; mais en fait l'Appendice III montre que tous nos résultats s'étendent au cas de la ramification infinie.

Si ψ est une forme différentielle définie sur $\tilde{Y}$ nous noterons $\omega^* \psi$ la forme définie par

$$[\omega^* \psi](x) = \psi(\omega x) \quad (\omega \in \Omega).$$

⁽¹³⁾ Attention, la convention de signe que nous utilisons ici pour δ est celle de LERAY [5]. C'est le δ_* de la référence [2], et non le δ^* .

La « discontinuité de ψ autour de S_i » est la forme

$$\text{Disc}_i \psi = (1 - \omega_i^*) \psi.$$

On définit de même, dans l'espace des paramètres, ω_L , classe d'un lacet élémentaire autour de la variété de Landau L , et

$$\text{Disc}_L J = (1 - \omega_L^*) J.$$

Si $\Gamma \in |h\rangle(\tilde{Y}_t)$, on a la formule

$$(\text{Disc } 1) \quad \boxed{\text{Disc}_L J(t) = (-)^{n(n-1)/2} (\mathbf{e} | h) \int_{\mathbf{e}} \text{Disc}_1 \text{Disc}_2 \dots \text{Disc}_m \varphi_t,}$$

où $\mathbf{e}$ est la « cellule évanouissante » définie au paragraphe 4.3 (form. 4.34) (c'est si l'on veut la cellule $\mathbf{e}$ du paragraphe 5 « remontée » sur un « feuillet » arbitraire); le symbole $(\mathbf{e} | h)$ désigne la combinaison linéaire formelle

$$\sum_{\omega \in \Omega} \langle \mathbf{e} | \omega^{-1} h \rangle \omega, \quad \langle . | . \rangle \text{ désignant l'indice d'intersection des cycles,}$$

et $\omega \int_{\mathbf{e}} \varphi_t$ signifiant $\int_{\omega_* \mathbf{e}} \varphi_t$, encore égal à $\int_{\mathbf{e}} \omega^* \varphi_t$.

Si $\Gamma \in |h\rangle(\tilde{Y}_t - \tilde{S}_t)$, les sous-variétés $\tilde{S}_{1t}, \dots, \tilde{S}_{mt}$ étant des « lieux singuliers » pour la forme φ_t , on a la formule

$$(\text{Disc } 2) \quad \boxed{\text{Disc}_L J(t) = (-)^{n(n-1)/2} (\mathbf{e} | h) \int_{\mathbf{e}} \varphi_t,}$$

où le « cycle évanouissant » $\tilde{e}$, cycle compact de $\tilde{Y}_t - \tilde{S}_t$, se déduit de $\mathbf{e}$ par la construction de l'Appendice I.

Si $\Gamma \in |h\rangle(\tilde{Y}_t, \tilde{S}_t)$, on a la formule

$$(\text{Disc } 3) \quad \boxed{\text{Disc}_L J(t) = (-)^{n(n+1)/2} (-)^{n-m} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_m (\tilde{e} | h) \int_{\mathbf{e}} \varphi_t.}$$

Un « cas mixte » intéressant est celui où $\Gamma \in |h\rangle(\tilde{Y}_t - \tilde{S}_{\mu+1, \dots, m})$, les sous-variétés $\tilde{S}_{\mu+1}, \dots, \tilde{S}_m$ étant des « lieux de singularité polaire » (non ramifiés) pour la forme φ_t . Le cycle $\tilde{e}$ de la formule (Disc 2) peut alors s'écrire

$$\tilde{e} = \partial_{\mu+1} \circ \dots \circ \partial_m (1 - \omega_1) (1 - \omega_2) \dots (1 - \omega_\mu) \mathbf{e}^{\mu+1, \dots, m},$$

où ∂_i est le cobord de Leray autour de la sous-variété S_i , et

$$\mathbf{e}^{\mu+1, \dots, m} = \partial_m \circ \dots \circ \partial_{\mu+1} \mathbf{e}$$

(le raisonnement est analogue à celui du paragraphe 5).

En appliquant le *théorème des résidus* de Leray [5], on obtient donc

$$(Disc\ 4) \quad \boxed{\begin{aligned} Disc_L J(t) &= (-1)^{(n(n-1))/2} (e|h) (2\pi i)^{n-\mu} \\ &\times \int_{e^{u+1}, \dots, m} Res_{\mu+1} \dots Res_m Disc_1 Disc_2 \dots Disc_{\mu} \varphi_t. \end{aligned}}$$

Remarque. — La formule (Disc 1) peut être valable même si l'intégrand est singulier sur $\tilde{S}$: en effet, on peut la déduire de (Disc 2) par l'homotopie (cf. Appendice I, § 1), qui transforme $\tilde{e}$ en $e = (1 - \omega_1) \dots (1 - \omega_m)_* e$, pourvu que l'intégrale converge uniformément tout au long de cette homotopie : ce sera le cas par exemple si φ_t a sur chaque S_i des singularités en $\frac{1}{\sqrt{s_i}}$, ou en $\log s_i$, etc., c'est-à-dire chaque fois qu'on pourra établir près de chaque point de S une majoration du type $|\varphi_t(x)| < \frac{M(x, t)}{\prod_i s_i^{\alpha_i}}$, où $\alpha_i < 1$,

et $M(x, t)$ est une fonction continue sur $\tilde{Y} - \tilde{S}$, bornée tant que x ne tourne qu'un nombre fini de fois autour de S . Une remarque analogue vaut pour (Disc 3) et (Disc 4).

APPENDICE I : Formules d'intersection.

1. Description du cycle évanouissant $\tilde{e}$. — Rappelons d'abord les définitions du paragraphe 1.2 :

e est la cellule de $\Xi^\vee$, bordant dans Σ , décrite par

$$e : \tilde{z}_i \text{ réels } \geq 0;$$

e est le cycle compact de $\Xi^\vee$ défini par

$$e = (1 - \omega_1) (1 - \omega_2) \dots (1 - \omega_{n+1})_* e.$$

Nous allons maintenant construire un cycle $\tilde{e}$, compact dans $\Xi^\vee - \Sigma$, et homologue dans $\Xi^\vee$ à e : l'idée est de déformer dans $\Xi^\vee$ le cycle e de façon à lui faire éviter Σ . Pour réaliser cette déformation, nous choisirons dans le plan complexe pointé $\mathbf{C} - \{0\}$ une courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{C} - \{0\} \\ \psi &\quad \psi \\ \tau &\rightsquigarrow \gamma(\tau) = \gamma(\tau) + i\beta(\tau) \end{aligned}$$

telle que

(γ_1) $\text{Arg } \gamma(\tau)$ est une fonction croissante de τ ;

(γ_2)
$$\begin{cases} \alpha(\tau) \leq 0 & \text{pour } \tau \in (-1, +1); \\ \alpha(\tau) \geq 0 & \text{pour } \tau \notin (-1, +1); \end{cases}$$

de plus, $\alpha(\tau) \rightarrow \infty$ pour $\tau \rightarrow \pm \infty$; un exemple de courbe γ est donné par la figure A I.

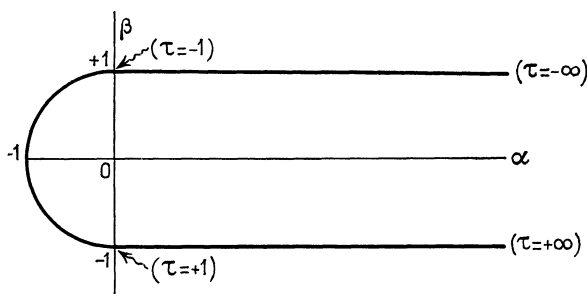


Fig. A I. — Exemple de courbe γ .

Le cycle $\tilde{e}$ sera alors défini, à l'orientation près, par le paramétrage suivant en fonction de

$$\begin{aligned} \{\tau\} &= \left\{ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(\tau_i) = 1 \right\}; \\ \tilde{e} &\begin{cases} \text{Re}(\tilde{z}_i^{\nu_i}) = \alpha(\tau_i), \\ \text{Im}(\tilde{z}_i^{\nu_i}) = \beta(\tau_i) - \left(\sum_k \beta(\tau_k) \right) \alpha(\tau_i); \end{cases} \\ -\frac{\pi}{2\nu_i} &< \text{Arg} \tilde{z}_i \leq \frac{\pi}{2\nu_i} & \text{pour } \tau_i \leq -1; \\ \frac{\pi}{2\nu_i} &\leq \text{Arg} \tilde{z}_i \leq \frac{3\pi}{2\nu_i} & \text{pour } -1 \leq \tau_i \leq +1; \\ \frac{3\pi}{2\nu_i} &\leq \text{Arg} \tilde{z}_i < \frac{5\pi}{2\nu_i} & \text{pour } +1 \leq \tau_i. \end{aligned}$$

Il est évident que ce paramétrage définit un cycle compact de $\Xi^\nu - \Sigma$, et qu'une homotopie de la courbe γ induit une homotopie de $\tilde{e}$, de sorte que la classe d'homologie $|\tilde{e}\rangle_n^c(\Xi^\nu - \Sigma)$ ne dépend pas de la courbe γ choisie; de plus, en déformant γ par une homothétie de centre O , on définit dans Ξ^ν une homotopie entre $\tilde{e}$ et e (à l'orientation près) de sorte qu'il existe une orientation de $\tilde{e}$ pour laquelle

$$(1) \quad |\tilde{e}\rangle_n^c(\Xi^\nu) = |e\rangle_n^c(\Xi^\nu).$$

2. Calcul de l'indice d'intersection $(\mathbf{e}|\tilde{\mathbf{e}})$. — Considérons une cellule $\omega_*\mathbf{e}$, avec

$$\omega = \omega_1^{a_1} \omega_2^{a_2} \dots \omega_{n+1}^{a_{n+1}};$$

elle s'écrit

$$\begin{aligned} \xi_i^{\nu_i} \text{ réels } &\geq 0, \\ \text{Arg } \xi_i &= \frac{2\pi a_i}{\nu_i}. \end{aligned}$$

Choisissons pour définir $\tilde{\mathbf{e}}$ la courbe γ représentée sur la figure A I : on en retiendra la propriété que $\beta = \pm 1$ pour $\alpha > 0$, d'où l'on déduit facilement que les seuls points de $\tilde{\mathbf{e}}$ à satisfaire la condition $\xi_i^{\nu_i}$ réels ≥ 0 sont les points

$$\xi^{(0)} : \xi_i^{(0)} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{\nu_i}} \quad \text{et} \quad \xi^{(1)} : \xi_i^{(1)} = \left(\frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{\nu_i}} \exp\left(\frac{2i\pi}{\nu_i} \right).$$

Au point $\xi^{(0)}$ se rencontrent les chaînes $\mathbf{e}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$, qui s'écrivent localement

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \quad &\xi_i^{\nu_i} \text{ réels } \geq 0; \\ \tilde{\mathbf{e}} : \quad &\text{Im}(\xi_i^{\nu_i}) = 1 - (n+1) \text{Re}(\xi_i^{\nu_i}); \end{aligned}$$

au point $\xi^{(1)}$ se rencontrent les chaînes $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} \mathbf{e}$ et $\tilde{\mathbf{e}}$, qui s'écrivent localement :

$$\begin{aligned} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} \mathbf{e} : \quad &\xi_i^{\nu_i} \text{ réels } \geq 0; \\ \tilde{\mathbf{e}} : \quad &\text{Im}(\xi_i^{\nu_i}) = -1 + (n+1) \text{Re}(\xi_i^{\nu_i}). \end{aligned}$$

Ces chaînes se coupent donc en position générale.

De plus, si l'orientation de $\mathbf{e}$ est donnée par le système d'indicatrices

$$\{ \text{Re}(\xi_1^{\nu_1}), \text{Re}(\xi_2^{\nu_2}), \dots, \text{Re}(\xi_n^{\nu_n}) \},$$

l'orientation de $\tilde{\mathbf{e}}$ sera donnée près de $\xi^{(0)}$ par le système d'indicatrices

$$\{ -\text{Im}(\xi_1^{\nu_1}), -\text{Im}(\xi_2^{\nu_2}), \dots, -\text{Im}(\xi_n^{\nu_n}) \},$$

et près de $\xi^{(1)}$ par le système d'indicatrices

$$(-)^{n+1} \{ \text{Im}(\xi_1^{\nu_1}), \text{Im}(\xi_2^{\nu_2}), \dots, \text{Im}(\xi_n^{\nu_n}) \},$$

[le signe $(-)^{n+1}$ est le signe du terme $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} \mathbf{e}$ dans la décomposition de $\mathbf{e}$ en simplexes].

Donc

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e} | \tilde{\mathbf{e}} \rangle &= (-)^{(n(n-1))/2}; \\ \langle \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1} \mathbf{e} | \tilde{\mathbf{e}} \rangle &= -(-)^{(n(n-1))/2}; \\ \langle \omega_* \mathbf{e} | \tilde{\mathbf{e}} \rangle &= 0 \quad \text{si} \quad \omega \neq 1 \neq \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}, \end{aligned}$$

formules qui se condensent en

$$(2) \quad (\mathbf{e} | \tilde{\epsilon}) = (-)^{(n(n-1))/2} (\mathbf{I} - \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n+1}).$$

3. **Dualité entre ∂ et $\bar{\partial}$.** — Soit η une chaîne à n dimensions de Ξ^γ , bordant dans Ξ_i^γ , et σ un cycle de Ξ_i^γ .

On connaît [2] la formule de dualité ⁽¹⁴⁾

$$\langle \eta | \bar{\partial} \sigma \rangle = (-)^{n-1} \langle \partial \eta | \sigma \rangle.$$

Or, évidemment, $\omega_{i*}^{a_i} \partial \eta = \partial \eta$, de sorte que

$$\langle \omega_{i*}^{a_i} \eta | \bar{\partial} \sigma \rangle = (-)^{n-1} \langle \partial \eta | \sigma \rangle, \quad \forall a_i,$$

formule qui se résume en

$$(3) \quad \begin{aligned} & (\eta | \bar{\partial} \sigma)^{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}} \\ &= (-)^{n-1} (\mathbf{I} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\gamma_i-1}) (\partial \eta | \sigma)^{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \hat{\gamma}_i, \dots, \gamma_{n+1}}. \end{aligned}$$

Si, en particulier,

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbf{e}_n (\partial \eta = \mathbf{e}_{n-1}) \quad (15), \\ \sigma &= \tilde{\epsilon}_{n-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e} | \bar{\partial} \tilde{\epsilon}_{n-1}) &= (-)^{n-1} (\mathbf{I} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\gamma_i-1}) (\mathbf{e} | \tilde{\epsilon})_{n-1} \\ &= (-)^{n-1} (\mathbf{I} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\gamma_i-1}) \\ &\quad \times (-)^{((n-1)(n-2))/2} (\mathbf{I} - \omega_1, \omega_2, \dots, \hat{\omega}_i, \dots, \omega_{n+1}) \\ &= (-)^{(n(n-1))/2} (\mathbf{I} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\gamma_i-1}) (\mathbf{I} - \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad (\mathbf{e} | \bar{\partial} \tilde{\epsilon}_{n-1}) = (\mathbf{I} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\gamma_i-1}) (\mathbf{e} | \tilde{\epsilon})_n.$$

Si maintenant nous faisons

$$\begin{aligned} \eta &= \mathbf{e}_n, \\ \sigma &= \bar{\partial}^{n-1} 0_{n+1}, \end{aligned}$$

⁽¹⁴⁾ Le signe $(-)^{n-1}$ ne figurait pas dans [2], qui utilisait pour définir $\bar{\partial}$ une convention de signe différente de celle de Leray [5] : nous utilisons ici la convention de Leray.

⁽¹⁵⁾ Les indices $n, n-1, \dots$ rappellent ici la *dimension* des chaînes : par exemple $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}$ est la cellule évanouissante de Ξ^γ , $\mathbf{e}_{n-1}$ est la cellule évanouissante de Ξ_i^γ , etc.

la formule (3) devient

$$(\mathbf{e} \mid \partial^n o_{n+1})_n = (-)^{n-1} (\mathbf{1} + \omega_1 + \omega_1^2 + \dots + \omega_1^{v_1-1}) (\mathbf{e} \mid \partial^{n-1} o_{n+1})_{n-1}$$

et, par itération,

$$(\mathbf{e} \mid \partial^n o_{n+1})_n = (-)^{(n(n-1))/2} \prod_{i=1, 2, \dots, n} (\mathbf{1} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{v_i-1}) (\mathbf{e} \mid o_{n+1})_0,$$

mais comme $(\mathbf{e})_0 = (o_{n+1})_0 =$ un point,

$$(5) \quad (\mathbf{e} \mid \partial^n o_{n+1})_n = (-)^{(n(n-1))/2} \prod_{i=1, 2, \dots, n} (\mathbf{1} + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{v_i-1}).$$

APPENDICE II : Calcul de $H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma)$.

Nous allons prouver le théorème 3 (partie I bis), en établissant le théorème plus général suivant :

THÉORÈME 3' :

$$(3'.1) \quad \text{Si } m < n, H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma_{1, 2, \dots, m}) \approx \frac{J_\vee}{I_{v_{m+1}, \dots, v_{n+1}}} \text{ est engendré par}$$

la classe $(\tilde{e})$.

(3'.2) Si $m = n$, $H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma_{1, 2, \dots, n})$ est le quotient du $J_\vee$ -module libre $J_\vee \{ \tilde{e} \} \oplus J_\vee \{ \partial^n o_{n+1} \}$ par le sous-module M' engendré par les éléments

$$M' \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{1} + \omega_{n+1} + \omega_{n+1}^2 + \dots + \omega_{n+1}^{v_{n+1}-1}) \mid \tilde{e}, \\ (\mathbf{1} - \omega_k) \mid \partial^n o_{n+1} \quad (k \neq n+1), \\ \prod_{k \neq n+1} (\mathbf{1} + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{v_k-1}) \mid \tilde{e} - (\mathbf{1} - \omega_{n+1}) \mid \partial^n o_{n+1}. \end{array} \right.$$

(3'.3) Si $m = n+1$, $H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma)$ est le quotient du $J_\vee$ -module libre $J_\vee \{ \tilde{e} \} \oplus J_\vee \{ \partial^n o_i \}$ par le sous-module M engendré par les éléments

$$M \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{1} - \omega_k) \mid \partial^n o_i \quad (k \neq i), \\ \prod_{k \neq i} (\mathbf{1} + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{v_k-1}) \mid \tilde{e} - (\mathbf{1} - \omega_i) \mid \partial^n o_i. \end{array} \right.$$

Preuve. — On raisonne par récurrence sur m .

Si $m = 0$, le théorème n'est autre que le théorème 1 ⁽¹⁶⁾. Supposons-le vrai pour $m - 1$, et considérons la suite exacte courte, déduite de la suite exacte de Leray de la paire $\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1}$, $\Xi_m^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1}$ en remarquant que l'homomorphisme « d'intersection » est l'homomorphisme nul (cf. [2], preuve du « théorème de décomposition »).

$$0 \rightarrow H_{n-1}^c(\Xi_m^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1}) \xrightarrow{\hat{\delta}} H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m}) \xrightarrow{q} H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1}) \rightarrow 0.$$

Toute la difficulté d'emploi de cette suite tient au fait que les $J_\vee$ -modules ne sont pas libres.

Cas 3'. 1. — La suite s'écrit

$$0 \rightarrow \frac{J_{\nu_1, \dots, \hat{\nu}_m, \dots, \nu_{m+1}}}{I_{\nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}} \xrightarrow{\hat{\delta}} H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m}) \xrightarrow{q} \frac{J_{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}}}{I_{\nu_m, \nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}} \rightarrow 0.$$

engendré par engendré par
 $|\tilde{\epsilon}\rangle_{n-1}(\Xi_m^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1})$ $|\tilde{\epsilon}\rangle_n(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1})$

Considérons la classe $(1 + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\nu_i-1}) |\tilde{\epsilon}\rangle_n(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m})$. Si $i > m$, son image par q est nulle, donc

$$(1 + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\nu_i-1}) |\tilde{\epsilon}\rangle_n(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m}) \\ = j_i \hat{\delta} |\tilde{\epsilon}\rangle_{n-1}(\Xi_m^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m-1}).$$

En utilisant la formule d'intersection (4) de l'Appendice I, on vérifie aisément que $j_m = 1$, $j_i = 0$, $i > m$.

Ainsi l'idéal $I_{\nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}$ annule $|\tilde{\epsilon}\rangle_n(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m})$, de sorte qu'on peut définir un homomorphisme de $J_\vee$ -modules

$$\Phi: \frac{J_{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}}}{I_{\nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}} \rightarrow H_n^c(\Xi^\vee - \Sigma_{1,2,\dots,m}),$$

$$1 \leadsto |\tilde{\epsilon}\rangle_n$$

⁽¹⁶⁾ Il sera commode pour la récurrence de ranger sous les rubriques $m = n$ et $m = n + 1$ les cas ($n = 0$, $m = 0$) et ($n = 0$, $m = 1$). Les énoncés (3'. 2) et (3'. 3) sont alors valides, à condition de faire les conventions $|\delta^0 o_i\rangle = |o_i\rangle$ (classe du point $o_1: \xi_1 = 1$) et $\prod_{k \in \emptyset} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{\nu_k-1}) = 1$.

et cet homomorphisme rend *commutatif* le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 0 \rightarrow & \frac{J_{\nu_1, \dots, \nu_m, \dots, \nu_{n+1}}}{I_{\nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}} & \xrightarrow{\delta} & H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, m}) & \xrightarrow{q} & \frac{J_{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}}}{I_{\nu_m, \nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}} \rightarrow 0. \\
 & \searrow \text{Mult. par } (1 + \omega_m + \dots + \omega_m^{\nu_m - 1}) & & \uparrow \Phi & \nearrow \text{Passage au quotient} & \\
 & & & \frac{J_{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}}}{I_{\nu_{m+1}, \dots, \nu_{n+1}}} & &
 \end{array}$$

Comme la ligne du bas est, de même que celle du haut, une suite exacte de J_ν -modules, Φ est un isomorphisme, et le théorème (3'. 1) est démontré.

Cas 3'. 2. — La suite s'écrit

$$0 \rightarrow \frac{J_\nu \{ |\tilde{\epsilon}\rangle_{n-1} \} \oplus J_\nu \{ |\partial^{n-1} o_{n+1}\rangle_{n-1} \}}{M'_{n-1}} \xrightarrow{\delta} H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n}) \xrightarrow{q} \frac{J_{\nu_1, \dots, \nu_{n+1}}}{I_{\nu_n, \nu_{n+1}}} \{ |\tilde{\epsilon}\rangle_n \} \rightarrow 0.$$

Évidemment,

$$\begin{aligned}
 q | \tilde{\epsilon} \rangle_n (\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n}) &= | \tilde{\epsilon} \rangle_n (\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n-1}), \\
 q | \partial^n o_{n+1} \rangle_n &= 0, \\
 \delta | \partial^{n-1} o_{n+1} \rangle_{n-1} &= | \partial^n o_{n+1} \rangle_n.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'exactitude de la suite et les formules d'intersection (4) et (5) de l'Appendice I, on montre que

$$\delta | \tilde{\epsilon} \rangle_{n-1} = (1 + \omega_n + \omega_n^2 + \dots + \omega_n^{\nu_n - 1}) | \tilde{\epsilon} \rangle_n$$

et que les expressions M'_n s'annulent dans $H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n})$, ce qui permet de bâtir un diagramme commutatif analogue à celui du cas (3'. 1).

Cas 3'. 3. — La suite s'écrit

$$0 \rightarrow \frac{J_\nu \{ |\tilde{\epsilon}\rangle_{n-1} \} \oplus \bigoplus_{i=1}^n J_\nu \{ |\partial^{n-1} o_i\rangle_{n-1} \}}{M'_{n-1}} \xrightarrow{\delta} H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n+1}) \xrightarrow{q} \frac{J_\nu \{ |\tilde{\epsilon}\rangle_n \} \oplus J_\nu \{ |\partial^n o_{n+1}\rangle_n \}}{M'_n} \rightarrow 0.$$

On prouve les formules

$$\begin{aligned}
 q | \tilde{\epsilon} \rangle_n (\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n+1}) &= | \tilde{\epsilon} \rangle_n (\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n}); \\
 q | \partial^n o_i \rangle_n (\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n+1}) &= \begin{cases} 0 & (i \neq n+1), \\ | \partial^n o_{n+1} \rangle_n (\Xi^\nu - \Sigma_{1, 2, \dots, n}) & i = n+1; \end{cases} \\
 \delta | \tilde{\epsilon} \rangle_{n-1} &= (1 + \omega_{n+1} + \omega_{n+1}^2 + \dots + \omega_{n+1}^{\nu_{n+1} - 1}) | \tilde{\epsilon} \rangle_n; \\
 \delta | \partial^{n-1} o_i \rangle_{n-1} &= | \partial^n o_i \rangle_n
 \end{aligned}$$

et l'on achève le raisonnement comme tout à l'heure.

APPENDICE III : Cas de la ramification infinie.

1. — Nous allons montrer que tous nos résultats s'étendent au cas de la ramification infinie, grâce à l'artifice un peu barbare que voici : soit $\hat{\mathbf{C}}$ l'espace topologique obtenu en rajoutant à $\mathbf{C}$ un point θ (appelé « moins l'infini », en prenant pour base de voisinages de θ la famille

$$\{\hat{U}_f\}_f, \quad \text{où} \quad \hat{U}_f = U_f \cup \{\theta\}, \quad U_f = \{z : \operatorname{Re} z < f(\operatorname{Im} z)\},$$

f parcourant la famille des fonctions continues. Cet espace $\hat{\mathbf{C}}$ n'est pas une variété, il n'est même pas localement compact en θ . Cependant il peut être muni d'une structure de CW-complexe [3], par exemple à l'aide du « quadrillage » représenté sur la figure A III.

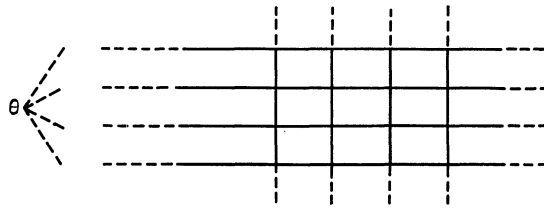


Fig. A III. — Le CW-complexe $\hat{\mathbf{C}}$.
(Remarquer que « l'étoile » du point θ est infinie.)

Évidemment,

($\hat{\mathbf{C}}_1$) $\hat{\mathbf{C}}$ est rétractile par déformation au point θ ; de plus, comme $\mathbf{C}$ lui aussi est contractile,

($\hat{\mathbf{C}}_2$) l'inclusion $i : \mathbf{C} \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ est une équivalence d'homotopie.

Définissons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &\rightarrow \mathbf{C}, \\ z &\rightarrow z^\infty = \begin{cases} e^z & \text{si } z \in \mathbf{C}, \\ 0 & \text{si } z = \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

C'est une application continue. Sa restriction à $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} - \{\theta\}$ est le revêtement universel de $\mathbf{C} - \{0\}$.

La projection $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ de la partie II (§ 3), qui s'écrivait

$$p(z)_i \equiv y_i = z_i^{y_i}$$

peut ainsi être « généralisée » formellement pour des y_i infinis (en prenant les z_i correspondants dans $\hat{\mathbf{C}}$ au lieu de $\mathbf{C}$). Bien sûr l'espace $\tilde{Y}$ ainsi

défini cesse d'être une variété, mais si l'on définit ses « lieux de ramification infinie » par

$$\tilde{S}_i = \{ z \in \tilde{Y} : z_i = 0 \} \quad (\nu_i = \infty),$$

on peut encore décomposer $\tilde{Y}$ en « strates » $\tilde{Y} - \tilde{S}, \tilde{S}_i - \bigcup_{j \neq i} \tilde{S}_j, \dots$ qui sont des *variétés*, et qui revêtent les strates correspondantes de Y .

2. — Reprenons l'énoncé des théorèmes concernant l'homologie de l'espace $\Xi^\nu(t) = \tilde{W}_t$, en indiquant ce qu'il y a de changé par rapport au cas de la ramification finie : la précaution essentielle est maintenant de ne plus confondre l'anneau $J_\nu = J_{\Omega^\nu}$ avec le module $J^\nu = J_{\Omega^\nu}$ (cf. préambule).

THÉORÈME 1. — $H_n^c(\Xi^\nu) \approx K_\nu = \frac{J_\nu}{I_\nu}$. Ici, I_ν est l'idéal de J_ν engendré par les éléments $(1 + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\nu_i-1})$, $\nu_i < \infty$.

Pour prouver ce théorème, on remarque que la propriété $(\hat{C}_1)$ permet de rétracter Ξ^ν sur un complexe à automorphismes $\mathcal{E}_\nu$ analogue à celui de la partie I.

COROLLAIRE 1. — $H_n^F(\Xi^\nu) \approx K^\nu = \frac{J^\nu}{I^\nu}$. Ici, I^ν est le sous-module de J^ν engendré par les éléments $(1 + \omega_i + \omega_i^2 + \dots + \omega_i^{\nu_i-1})$, $\nu_i \leq \infty$.

Pour prouver ce corollaire, on remarque que la dualité de Poincaré est encore valable bien que Ξ^ν ne soit plus une variété : il suffit de le vérifier dans chaque « carte locale » de Ξ^ν , où $\mathbf{C}$ est remplacé éventuellement par $\hat{\mathbf{C}}$. De cette J -dualité, on déduit une « J^ν -dualité » au sens du préambule.

THÉORÈME 2. — $H_n^c(\Xi^\nu, \Sigma) = J_\nu \{ \mathbf{e} \}$.

Ce théorème se prouve comme le théorème 1.

COROLLAIRE 2. — $H_n^F(\Xi^\nu - \Sigma) = J^\nu \{ \varepsilon \}$.

Pour voir que la « dualité de Poincaré généralisée » est encore valable pour les « $\hat{\mathbf{C}}$ -variétés » considérées ici, on vérifie l'existence d'une « suite exacte de Leray »

$$\dots \rightarrow H_{n-1}^F(\Xi_i^\nu) \xrightarrow{\hat{\sigma}} H_n^F(\Xi^\nu - \Xi_i^\nu) \rightarrow H_n^F(\Xi^\nu) \rightarrow \dots$$

transposée de la suite exacte d'homologie

$$\dots \leftarrow H_{n-1}^c(\Xi_i^\nu) \xleftarrow{\hat{\theta}} H_n^c(\Xi^\nu, \Xi_i^\nu) \leftarrow H_n^c(\Xi^\nu) \leftarrow \dots$$

THÉORÈME 3. — Supposons $\nu_i < \infty$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, $\nu_i = \infty$ pour $i > m$.

En vertu de $(\hat{\mathbf{C}}_2)$ on a l'isomorphisme

$$H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma) \approx H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma_{1,2,\dots,m}).$$

En raisonnant comme dans l'Appendice II, on montre que

$$H_n^c(\Xi^\nu - \Sigma_{1,2,\dots,m}) = \begin{cases} J_\nu\{\tilde{\epsilon}\} & \text{si } m < n, \\ (J^\nu\{\tilde{\epsilon}\} \oplus J_\nu\{\partial^n o_{n+1}\})/M' & \text{si } m = n, \end{cases}$$

où M' est le sous-module engendré par

$$M' \left\{ \begin{array}{l} (1 - \omega_k) \mid \partial^n o_{n+1} \quad (k \neq n+1), \\ \prod_{k \neq n+1} (1 + \omega_k + \omega_k^2 + \dots + \omega_k^{n-1}) \mid \tilde{\epsilon} - (1 - \omega_{n+1}) \mid \partial^n o_{n+1}. \end{array} \right.$$

COROLLAIRE 3. — Ce corollaire peut s'énoncer comme dans le cas de la ramification finie :

$$H_n^F(\Xi^\nu - \Sigma) = \left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} J^\nu\{\varepsilon_i\} \right) / N,$$

où N est le sous-module engendré par les éléments $N: (\overline{1 - \omega_k}) \mid \varepsilon_i - (\overline{1 - \omega_l}) \mid \varepsilon_k$.

On peut préférer la

VARIANTE :

$$H_n^F(\Xi^\nu - \Sigma) = J^\nu\{\varepsilon_{n+1}\}$$

qui s'en déduit en remarquant que

$$(1 - \omega_{n+1})(1 + \omega_{n+1} + \omega_{n+1}^2 + \dots) = 1,$$

de sorte que $\forall i, \mid \varepsilon_i \in J^\nu\{\varepsilon_{n+1}\} \bmod N$.

3. Preuve des formules de Picard-Lefschetz. — Connaissant maintenant les groupes d'homologie, nous en déduisons des « *formules de plongement* », formellement identiques à (pl 1), (pl 2), (pl 3) (§ 3 des parties I et I bis), d'où nous tirons la variation des classes « co-évanouissantes » $\mid \varepsilon$ et $\mid \varepsilon_i$, par des formules identiques à (Var 1), (Var 2), (Var 3) (§ 4 des parties I et I bis). On a ainsi des homomorphismes $\text{Var} : \bar{H}^F(\) \rightarrow H^c(\)$, où $\bar{H}^F(\)$ désigne le *sous-groupe* de $H^F(\)$ J_ν -engendré par $\mid \varepsilon$ [resp. $\mid \varepsilon_i$], $i = 1, 2, \dots, n+1$: notons bien que $\bar{H}^F(\)$ n'est pas $H^F(\)$ tout entier, car J_ν est plus petit que J^ν . Mais les images des homomorphismes w^* de « trace dans la boule W » (partie II, § 4.2) appartiennent justement à ces sous-groupes $\bar{H}^F$: pour le voir, il suffit d'appliquer la dualité en remarquant que si $\mid h$ est une classe d'homologie compacte de $\tilde{Y}_i$, resp. $\tilde{Y}_i - \tilde{S}$, resp. $(\tilde{Y}_i, \tilde{S})$, l'indice

d'intersection $(e | h)$ resp. $(\tilde{e} | h)$ est un élément de l'anneau J_v . On a donc les factorisations

$$\begin{aligned} \text{Var} = \text{Var} \circ w^* : \quad & H_n^c(\tilde{Y}_l) \xrightarrow{w^*} \overline{H}_n^F(\tilde{W}_l) \xrightarrow{\text{Var}} H_n^c(\tilde{W}_l), \\ & H_n^c(\tilde{Y}_l - \tilde{S}) \xrightarrow{w^*} \overline{H}_n^F(\tilde{W}_l - \tilde{S}) \xrightarrow{\text{Var}} H_n^c(\tilde{W}_l - \tilde{S}), \\ & H_n^c(\tilde{Y}_l, \tilde{S}) \xrightarrow{w^*} \overline{H}_n^F(\tilde{W}_l - \tilde{S}) \xrightarrow{\text{Var}} H_n^c(\tilde{W}_l, \tilde{S}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les formules de Picard-Lefschetz.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] FARY (Istvan). — Cohomologie des variétés algébriques, *Annals of Math.*, Series 2, t. 65, 1957, p. 21-73.
- [2] FOTIADI (D.), FROISSART (M.), LASCoux (J.) and PHAM (F.). — Applications of an isotopy theorem, *Topology* (à paraître).
- [3] HILTON (Peter J.). — *An introduction to homotopy theory*. — Cambridge, Cambridge University Press, 1961 (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics, 43).
- [4] LEFSCHETZ (Solomon). — *L'analysis situs et la géométrie algébrique*. — Paris, Gauthier-Villars, 1950 (Collection de Monographies sur la théorie des fonctions).
- [5] LERAY (Jean). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.
- [6] MAC LANE (Saunders). — *Homology*. — Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 114).
- [7] *Relations de dispersion et particules élémentaires*. Cours de l'École d'Été de Physique théorique [1960, Les Houches]. — Paris, Hermann, 1960.
- [8] ROSSI (Hugo). — Vector fields in analytic spaces, *Annals of Math.*, Series 2, t. 78, 1963, p. 455-467.
- [9] THOM (René). — La stabilité topologique des applications polynomiales, *L'Enseignement mathématique*, Genève, 2^e série, t. 8, 1962, p. 24-33.

(Manuscrit reçu le 3 mars 1965.)

Frédéric PHAM,
Service de Physique théorique,
C. E. N., Saclay,
Gif-sur-Yvette (Seine-et-Oise).