

ŒUVRES
DE
HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES
SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR
LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME VI

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION DE

RENÉ GARNIER

ET

JEAN LERAY

MEMBRE DE L'INSTITUT

MEMBRE DE L'INSTITUT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1953

TOPOLOGIE

PRÉFACE

Quand H. Poincaré rédigea en 1901 cette Analyse de ses travaux scientifiques, qui parut en 1921 dans le tome 38 des *Acta Mathematica*, il écrivit : « Une méthode qui nous ferait connaître les relations qualitatives dans l'espace à plus de trois dimensions pourrait, dans une certaine mesure, rendre des services analogues à ceux que rendent les figures. Cette méthode ne peut être que l'*Analysis situs* à plus de trois dimensions. Malgré tout, cette branche de la Science a été jusqu'ici peu cultivée. Après Riemann est venu Betti qui a introduit quelques notions fondamentales ; mais Betti n'a été suivi par personne. Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'*Analysis situs*. J'avais besoin des données de cette Science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et, en particulier, à celles du problème des trois corps. J'en avais besoin pour l'étude des fonctions non uniformes de deux variables. J'en avais besoin pour l'étude des périodes des intégrales multiples et pour l'application de cette étude au développement de la fonction perturbatrice. Enfin, j'entrevois dans l'*Analysis situs* un moyen d'aborder un problème important de la théorie des groupes, la recherche des groupes discrets ou des groupes finis contenus dans un groupe continu donné. »

Les recherches, auxquelles H. Poincaré se consacra pour toutes ces raisons, se poursuivent à l'heure actuelle si activement, si diversement et trouvent tant d'applications, qu'il est impossible d'en dresser ici un tableau même sommaire ⁽¹⁾. Leur nom a changé : on ne parle plus d'*Analysis situs*, mais de *Topologie algébrique* ; leur définition aussi : leur objet ne semble plus être de « faire connaître les relations qualitatives de l'espace », mais d'attacher des notions

⁽¹⁾ Pour la période extérieure à 1935, voir la Préface et l'Introduction du beau traité de Topologie de P. Alexandroff-H. Hopf (Springer, 1935).

quantitatives ou, plus précisément, algébriques à des données qualitatives ou, plus exactement, topologiques. C'est ce que fit H. Poincaré qui, indiscutablement, créa toute la Topologie algébrique moderne : L. E. J. Brouwer s'inspira directement de H. Poincaré quand il donna à la Topologie des polyèdres et des multiplicités cet aspect combinatoire, qu'Alexandroff et Čech devaient appliquer même aux espaces topologiques ; quand la théorie des enlacements devint prépondérante, grâce à Lebesgue et Brouwer, quand Alexander en tira son théorème de dualité et H. Hopf son invariant, la définition due à H. Poincaré de l'intersection était la base de départ et son théorème de dualité le résultat le plus cité ; quand Birkhoff et Kellog, puis Schauder, révélèrent l'importance de la théorie des points fixes en Analyse et que Lefschetz découvrit sa célèbre formule, c'étaient le dernier Mémoire de H. Poincaré et les premiers théorèmes de Brouwer qui donnaient leurs fruits ; quand M. Morse renouvela le calcul de variations, quand l'*Analysis situs* donna un nouvel essor à la Géométrie algébrique, ce fut aussi sous l'influence de H. Poincaré ; on crut que la cohomologie était une notion entièrement neuve, jusqu'au jour où É. Cartan en expliqua l'essence par une page de H. Poincaré jusqu'alors incomprise ; H. Poincaré définit, sous le nom de groupe fondamental, le premier groupe d'homotopie ; la découverte en 1935 par Hurewicz des autres groupes d'homotopie et de leurs propriétés, les si importantes applications qu'en firent de nombreux mathématiciens paraissent être les premières découvertes tout à fait étrangères à celles qu'avait faites H. Poincaré.

Sa terminologie est périmée ; il dut lui-même corriger ses définitions initiales ; chaque progrès ultérieur exigea une refonte du vocabulaire et des notions de base : la topologie algébrique ne cesse de changer de but, de méthode, de langage ; aussi, de même qu'un philologue ne peut ignorer les racines indo-européennes, un topologue doit-il connaître les Mémoires de H. Poincaré.



LEXIQUE

Notations et terminologie.

De Henri Poincaré.	De 1950.
$\frac{dF_p}{dx_n}$.	$\frac{\partial F_p}{\partial x_n}$.
$x \equiv y$.	Le bord de x est y .
$x \equiv y$ (équivalence).	x est homotope à y .
$N(a_i^j, b_j^{p-q})$.	Indice de Kronecker.
Variété continue.	Variété connexe.
» fermée.	» close (cycle).
» finie.	» compacte.
» illimitée.	» sans bord.
» bilatère, unilatère,	» orientable, non orientable.
Variétés opposées.	Variété à orientations opposées.
Réseau (chaîne) continu de variétés.	Système de cartes locales.
Surface.	Hypersurface.
La surface unilatère que tout le monde connaît.	La bande de Möbius.
Frontière complète.	Bord.
Simplement connexe.	Homéomorphe à une boule.
Tétraèdre généralisé, case, hypercase.	Simplexe.
Polyèdre (réciproque).	Complexe (dual).
« dérivé.	Subdivision.
Homéomorphie.	Homéomorphie différentiable.
Groupe dérivé de.	Groupe engendré par.
Forme d'un groupe.	Structure d'un groupe.
Isomorphisme (mériédrique).	Homomorphisme sur (qui n'est pas un isomorphisme).
» holoédrique.	Isomorphisme sur.
Holomorphe.	Isomorphe.
Nombre de Betti.	1 + nombre de Betti.

SOMMAIRE

1. *Sur l'Analysis situs.* — Résume le Mémoire suivant.

2. *Analysis situs.* — Les paragraphes 1-6, que complète le paragraphe 8, définissent l'homologie; signalons que les nombres de Betti qu'utilise H. Poincaré sont les nombres de Betti actuels, augmentés de 1. Le paragraphe 7 introduit la cohomologie; il pose des problèmes que É. Cartan a explicités (*Ann. Soc. pol. math.*, t. 8, 1929, p. 181-225) et que G. de Rham a résolus (*J. math. pures et appl.*, t. 10, 1931, p. 115-200). Le paragraphe 9 définit l'intersection, actuellement nommée produit, et énonce le célèbre théorème de dualité de Poincaré; à la suite de critiques de Heegaard, H. Poincaré a, dans le *Complément à l'Analysis situs*, entièrement repris la démonstration de ce théorème. Les paragraphes 12 et 13 définissent le groupe fondamental, nommé depuis groupe de Poincaré, puis premier groupe d'homotopie. Les paragraphes 16, 17 et 18 établissent la formule d'Euler-Poincaré. La démonstration repose sur une triangulation que reprend le paragraphe XI du *Complément à l'Analysis situs*. Les paragraphes 10, 11, 14 et 15 traitent huit exemples de polyèdres, dont les sept premiers sont des multiplicités de dimension 3; chaque point a un voisinage homéomorphe à la boule de dimension 3; rappelons que le problème de caractériser ceux des polyèdres de dimension $n > 3$ qui sont des multiplicités n'est pas résolu.

3. *Sur les nombres de Betti.* — Résume le Mémoire suivant.

4. *Complément à l'Analysis situs.* — Ce Mémoire contient des fondements de la topologie combinatoire. Le paragraphe I expose les défauts de la démonstration du théorème de dualité que donne le paragraphe 9 d'*Analysis situs*. Le paragraphe II définit le tableau des coefficients d'incidence d'un complexe. Le paragraphe III déduit de ce tableau les nombres de Betti. Le paragraphe IV définit la subdivision d'un complexe. Le paragraphe V prouve qu'une subdivision ne modifie pas les nombres de Betti. Le paragraphe VI complète les raisonnements antérieurs. Le paragraphe VII définit la subdivision barycentrique et le dual d'un complexe. Le paragraphe VIII établit l'égalité des nombres de Betti de dimensions complémentaires; le paragraphe IX établit la dualité des groupes de Betti de dimensions complémentaires; précisons qu'il est nécessaire de supposer la variété orientable. Le paragraphe X étend le paragraphe VII aux complexes abstraits; le *Second complément à l'Analysis situs* développera cette étude. Le paragraphe XI triangule une variété analytique.

5. *Second complément à l'Analysis situs.* — Ce Mémoire définit les groupes de torsion d'une variété et leur étend le théorème de dualité; il consiste en l'étude du tableau des coefficients d'incidence. Ce Mémoire et les précédents sont classiques : voir la *Topologie*, d'Alexandroff et Hopf (Springer, 1935) et l'*Algebraic topology*, de Lefschetz (*Amer. Math. Soc.*, coll. publ. 1942).

6. *Sur l'Analysis situs.* — Annonce le Mémoire suivant.

7. *Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'Analysis situs.* — Détermination du premier groupe d'homotopie de la variété algébrique d'équation $z^2 = F(x, y)$, F étant un polynôme, x, y, z des variables complexes.

8. *Sur la connexion des surfaces algébriques.* — Résume le Mémoire suivant.

9. *Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à l'Analysis situs.* — Ce Mémoire détermine les groupes de Betti d'une surface algébrique à partir du groupe de Picard et des cycles évanouissants : on coupe la surface $f(x, y, z) = 0$ par un plan non tangent $y = \text{const.}$ et l'on envisage les groupes de Betti de cette section; le groupe de Picard est le groupe des substitutions linéaires que subissent ces groupes de Betti quand y décrit un lacet; les cycles évanouissants sont les classes d'homologie qui s'annulent quand le plan $y = \text{const.}$ devient tangent à la surface. On trouvera une étude plus complète dans l'*Analysis situs et la Géométrie algébrique*, de Lefschetz (Gauthier-Villars, 1^{re} éd., 1924; 2^e éd. 1950).

10. *Cinquième complément à l'Analysis situs.* — Ce Mémoire donne un exemple de variété close à trois dimensions dont l'homologie est triviale sans que son premier groupe d'homotopie le soit; il énonce une célèbre hypothèse, qui n'est pas encore élucidée : toute multiplicité close à trois dimensions, dont le premier groupe d'homotopie est trivial, est-elle homéomorphe à la sphère à trois dimensions? Au cours de ce Mémoire, H. Poincaré approfondit la topologie des surfaces, puis étudie la topologie d'espaces qu'engendre une surface variable.

11. *Sur un théorème de Géométrie.* — Ce Mémoire, le dernier que publia H. Poincaré, énonce un théorème de point fixe que H. Poincaré n'avait pas réussi à établir et qui devait être prouvé quelques mois plus tard, par G. D. Birkhoff (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 14, 1913, p. 14-22). H. Poincaré applique ce théorème aux géodésiques fermées et aux trajectoires périodiques; l'étude de ces deux sujets se poursuit encore actuellement.



SUR L'ANALYSIS SITUS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 115, p. 663-636 (31 octobre 1892).

On sait ce qu'on entend par l'ordre de connexion d'une surface et le rôle important que joue cette notion dans la théorie générale des fonctions, bien qu'elle soit empruntée à une branche toute différente des Mathématiques, c'est-à-dire à la géométrie de situation ou *Analysis situs*.

C'est parce que les recherches de ce genre peuvent avoir des applications en dehors de la Géométrie qu'il peut y avoir quelque intérêt à les poursuivre en les étendant aux espaces à plus de trois dimensions. Riemann l'a bien compris; aussi, désireux de généraliser sa belle découverte, il s'est appliqué à l'étude de ces espaces au point de vue de l'*Analysis situs* et il a laissé sur ce sujet des fragments malheureusement très incomplets. Betti, dans le tome IV, 2^e série des *Annali di Matematica*, a retrouvé et complété les résultats de Riemann. Considérant une surface (variété à n dimensions) dans l'espace à $n + 1$ dimensions, il a défini $n - 1$ nombres

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$$

qu'il appelle les $n - 1$ ordres de connexion de la surface.

Les personnes que rebute la Géométrie à plus de trois dimensions pourraient croire ce résultat sans utilité et le regarder comme un vain jeu de l'esprit, si elles n'étaient averties de leur erreur par l'usage qu'a fait des nombres de Betti notre confrère M. Picard dans des travaux d'Analyse pure ou de Géométrie ordinaire.

La question n'est pas épuisée cependant. On peut se demander si les nombres de Betti suffisent pour déterminer une surface fermée au point de vue de l'*Analysis situs*, c'est-à-dire si, étant données deux surfaces fermées qui possèdent

mêmes nombres de Betti, on peut toujours passer de l'une à l'autre par voie de déformation continue. Cela est vrai dans l'espace à trois dimensions et l'on pourrait être tenté de croire qu'il en est encore de même dans un espace quelconque. C'est le contraire qui est vrai.

Pour nous en rendre compte, je vais envisager la question à un point de vue nouveau. Soient x_1, x_2, \dots, x_{n+1} les coordonnées d'un point de la surface; ces $n + 1$ quantités sont liées entre elles par l'équation de la surface. Soient maintenant

$$F_1, F_2, \dots, F_p$$

p fonctions quelconques de ces $n + 1$ coordonnées x (coordonnées que je suppose toujours liées par l'équation de la surface et auxquelles je conviens de ne donner que des valeurs réelles).

Je ne suppose pas que les fonctions F soient uniformes, mais je suppose que si le point $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ décrit sur la surface un contour fermé *infiniment petit*, chacune des fonctions F revient à sa valeur primitive. Cela posé, supposons que notre point décrive sur la surface un contour fermé *fini*, il pourra se faire que nos p fonctions ne reviennent pas à leurs valeurs initiales, mais deviennent

$$F'_1, F'_2, \dots, F'_p$$

ou, en d'autres termes, qu'elles subissent la substitution

$$(F_1, F_2, \dots, F_p; F'_1, F'_2, \dots, F'_p).$$

Toutes les substitutions correspondant aux divers contours fermés que l'on peut tracer sur la surface forment un groupe qui est discontinu (au moins en ce qui concerne sa forme).

Ce groupe dépend évidemment du choix des fonctions F ; supposons d'abord que ces fonctions soient les plus générales que l'on puisse imaginer en ne s'imposant pas d'autre condition que celle que nous avons énoncée plus haut; et soit G le groupe correspondant. Soit G' le groupe correspondant à un autre choix de ces fonctions; G' sera isomorphe à G , holoédriquement en général, méridriquement dans quelques cas particuliers.

Le groupe G peut donc servir à définir la forme de la surface et s'appeler le groupe de la surface. Il est clair que si deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre par voie de déformation continue, leurs groupes sont isomorphes. La réciproque, quoique moins évidente, est encore vraie, pour des

surfaces fermées, de sorte que *ce qui définit une surface fermée au point de vue de l'Analysis situs, c'est son groupe.*

Nous sommes donc conduit à nous poser la question suivante : *Deux surfaces fermées qui ont mêmes nombres de Betti ont-elles toujours des groupes isomorphes ?*

Pour résoudre cette question en nous servant d'un mode de représentation simple dans l'espace ordinaire, nous supposerons qu'il s'agisse de définir une surface dans l'espace à quatre dimensions seulement. Considérons pour l'espace ordinaire un groupe G proprement discontinu. L'espace se trouvera ainsi décomposé en une infinité de domaines fondamentaux, transformés les uns des autres par les substitutions du groupe. Je suppose que le domaine fondamental ne s'étende pas à l'infini et qu'aucune substitution du groupe ne laisse inaltéré aucun point de l'espace.

Soient alors

$$X_1, X_2, X_3, X_4$$

quatre fonctions des coordonnées x, y, z de l'espace ordinaire, inaltérées par les substitutions de G . Si l'on considère X_1, X_2, X_3, X_4 comme les coordonnées d'un point dans l'espace à quatre dimensions, ce point décrira une surface fermée dont le groupe sera isomorphe à G , holoédriquement si les fonctions X sont les plus générales qui soient inaltérées par G .

Considérons, en particulier, le groupe dérivé des trois substitutions

$$\begin{aligned} (x, y, z; x+1, y, z), \\ (x, y, z; x, y+1, z), \\ (x, y, z; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1), \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Je l'appellerai, pour abrégier, le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Le domaine fondamental sera un cube.

On observera d'abord que deux groupes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta), (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ne peuvent être isomorphes que si les deux substitutions

$$(x, y; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y), (x, y; \alpha' x + \beta' y, \gamma' x + \delta' y)$$

sont transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coefficients entiers.

Cela n'arrivera pas en général.

Cherchons maintenant à déterminer les nombres de Betti pour la surface qui

admet le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Nous verrons que l'une des connexions est toujours quadruple et que l'autre (la connexion linéaire) est

Double dans le cas général ;

Triple si $\alpha + \delta = 2$;

Quadruple si $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$.

Ce qui précède montre que les nombres de Betti peuvent être les mêmes pour deux surfaces, sans que leurs groupes soient isomorphes et, par conséquent, sans que l'on puisse passer de l'une à l'autre par déformation continue.

C'est là une remarque qui peut jeter quelque lumière sur la théorie des surfaces algébriques ordinaires et rendre moins étrange un fait découvert par M. Picard, à savoir que les surfaces n'ont pas de cycle à une dimension, si elles sont les plus générales de leur degré.



ANALYSIS SITUS

Journal de l'École Polytechnique, t. 1, p. 1-121 (1895).

Introduction.

La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter; nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de son objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

Peut-être ces raisons ne sont-elles pas suffisantes? Ce n'est pas assez, en effet, qu'une science soit légitime : il faut que l'utilité ne puisse en être contestée. Tant d'objets divers sollicitent notre attention, que les plus importants ont seuls droit de l'obtenir.

Aussi y a-t-il des parties de l'Hypergéométrie auxquelles il n'y a pas lieu de beaucoup s'intéresser : telles sont, par exemple, les recherches sur la courbure des surfaces dans l'espace à n dimensions. On est sûr d'avance d'obtenir les

mêmes résultats qu'en Géométrie ordinaire et l'on n'entreprend pas un long voyage pour retrouver des spectacles tout pareils à ceux que l'on rencontre chez soi.

Mais il y a des problèmes où le langage analytique serait tout à fait incommode.

On sait quelle est l'utilité des figures géométriques dans la théorie des fonctions imaginaires et des intégrales prises entre des limites imaginaires, et combien on regrette leur concours quand on veut étudier, par exemple, les fonctions de deux variables complexes.

Cherchons à nous rendre compte de la nature de ce concours; les figures suppléent d'abord à l'infirmité de notre esprit en appelant nos sens à son secours; mais ce n'est pas seulement cela. On a bien souvent répété que la Géométrie est l'art de bien raisonner sur des figures mal faites; encore ces figures, pour ne pas nous tromper, doivent-elles satisfaire à certaines conditions; les proportions peuvent être grossièrement altérées, mais les positions relatives des diverses parties ne doivent pas être bouleversées.

L'emploi des figures a donc avant tout pour but de nous faire connaître certaines relations entre les objets de nos études, et ces relations sont celles dont s'occupe une branche de la Géométrie que l'on a appelée *Analysis situs*, et qui décrit la situation relative des points des lignes et des surfaces, sans aucune considération de leur grandeur.

Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperespace; il y a donc une *Analysis situs* à plus de trois dimensions, comme l'ont montré Riemann et Betti.

Cette science nous fera connaître ce genre de relations, bien que cette connaissance ne puisse plus être intuitive, puisque nos sens nous font défaut. Elle va ainsi, dans certains cas, nous rendre quelques-uns des services que nous demandons d'ordinaire aux figures de Géométrie.

Je me bornerai à trois exemples.

La classification des courbes algébriques en genres repose, d'après Riemann, sur la classification des surfaces fermées réelles, faite au point de vue de l'*Analysis situs*. Une induction immédiate nous fait comprendre que la classification des surfaces algébriques et la théorie de leurs transformations birationnelles sont intimement liées à la classification des surfaces fermées réelles de l'espace à cinq dimensions au point de vue de l'*Analysis situs*. M. Picard, dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences, a déjà insisté sur ce point.

D'autre part, dans une série de Mémoires insérés dans le *Journal de Liou-*

ville, et intitulés : *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, j'ai employé l'*Analysis situs* ordinaire à trois dimensions à l'étude des équations différentielles. Les mêmes recherches ont été poursuivies par M. Walther Dyck. On voit aisément que l'*Analysis situs* généralisée permettrait de traiter de même les équations d'ordre supérieur et, en particulier, celles de la Mécanique céleste.

M. Jordan a déterminé analytiquement les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire à n variables. M. Klein avait antérieurement, par une méthode géométrique d'une rare élégance, résolu le même problème pour le groupe linéaire à deux variables. Ne pourrait-on pas étendre la méthode de M. Klein au groupe à n variables ou même à un *groupe continu quelconque* ? Je n'ai pu jusqu'ici y parvenir, mais j'ai beaucoup réfléchi à la question et il me semble que la solution doit dépendre d'un problème d'*Analysis situs* et que la généralisation du célèbre théorème d'Euler sur les polyèdres doit y jouer un rôle.

Je ne crois donc pas avoir fait une œuvre inutile en écrivant le présent Mémoire ; je regrette seulement qu'il soit trop long ; mais, quand j'ai voulu me restreindre, je suis tombé dans l'obscurité ; j'ai préféré passer pour un peu bavard.

Tables des matières.

§ 1. Première définition des variétés.....	196
§ 2. Homéomorphisme.....	198
§ 3. Deuxième définition des variétés.....	200
§ 4. Variétés opposées.....	204
§ 5. Homologies.....	206
§ 6. Nombres de Betti.....	207
§ 7. Emploi des intégrales.....	209
§ 8. Variétés unilatères et bilatères.....	212
§ 9. Intersection de deux variétés.....	218
§ 10. Représentation géométrique.....	229
§ 11. Représentation par un groupe discontinu.....	236
§ 12. Groupe fondamental.....	239
§ 13. Équivalences fondamentales.....	242
§ 14. Conditions de l'homéomorphisme.....	247
§ 15. Autres modes de génération.....	258
§ 16. Théorème d'Euler.....	270
§ 17. Cas où p est impair.....	280
§ 18. Deuxième démonstration.....	282

les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, pourvu que ces valeurs satisfassent aux conditions (1); ou bien cela ne sera pas toujours possible.

Dans le premier cas, nous dirons que la variété définie par les conditions (1) est *continue*.

Dans ce qui va suivre, je ne considérerai que des variétés continues et, en ce qui concerne celles qui ne sont pas continues, je me bornerai à faire observer que l'on peut toujours les décomposer en un nombre fini ou infini de variétés continues.

Soit, par exemple, la variété

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0.$$

Ici $n = 2$ et le point x_1, x_2 est un point du plan; notre variété n'est alors autre chose qu'une courbe du 4^e degré; mais, comme cette courbe se compose de deux branches de courbe fermées, notre variété n'est pas continue.

Mais nous pouvons la décomposer en deux autres, à savoir :

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0, \quad x_1 > 0$$

et

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0, \quad x_1 < 0$$

et chacune d'elles, se réduisant à une seule branche de courbe fermée, est continue.

Je dirai qu'une variété est *finie* si tous ses points satisfont à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < K^2,$$

K étant une constante donnée.

Considérons maintenant le système de relations

$$(2) \quad \begin{cases} F_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, p), \\ \varphi_\beta = 0 \\ \varphi_\gamma > 0 & (\gamma \geq \beta) \end{cases}$$

qui se compose de $p + 1$ égalités et de $q - 1$ inégalités.

Il peut arriver, ou bien qu'il n'y ait aucun point satisfaisant aux conditions (2), ou bien qu'il y en ait et, dans ce cas, ils formeront une variété, continue ou non, qui aura moins de $n - p$ dimensions.

L'ensemble des points qui satisferont à l'un des q systèmes de relations

$$(3) \quad \begin{cases} F_\alpha = 0, & \varphi_1 = 0, & \varphi_\gamma > 0 & (\gamma \geq 1), \\ F_\alpha = 0, & \varphi_2 = 0, & \varphi_\gamma > 0 & (\gamma \geq 2), \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ F_\alpha = 0, & \varphi_q = 0, & \varphi_\gamma > 0 & (\gamma \geq q) \end{cases}$$

s'appellera la *frontière complète* de la variété définie par les conditions (1), Mais nous nous placerons quelquefois à un autre point de vue et nous ne considérerons comme une véritable variété frontière que celles qui auront $n - p - 1$ dimensions.

Il pourra se faire qu'il n'y ait aucune variété à $n - p - 1$ dimensions qui satisfasse à l'un des q systèmes (3). Dans ce cas, la variété définie par les conditions (1) sera dite *illimitée*. Dans le cas contraire, elle sera dite *limitée*.

Si une variété est à la fois finie, continue et illimitée, elle sera dite *fermée*.

Pour abrégier un peu le langage, nous donnerons le nom de *surfaces* aux variétés à $n - 1$ dimensions, sauf dans le cas de $n = 2$; et nous donnerons, dans tous les cas, le nom de *courbes* aux variétés à une dimension.

§ 2. Homéomorphisme.

Considérons une substitution qui change x_1, x_2, \dots, x_n en x'_1, x'_2, \dots, x'_n , que j'assujettis seulement aux conditions suivantes.

On a

$$(4) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dans un certain domaine, les fonctions φ_i sont uniformes, finies et continues; elles ont des dérivées continues et leur déterminant fonctionnel ne s'annule pas.

Si l'on résout les équations (4) par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n , il vient

$$x_k = \varphi'_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

et les fonctions φ'_k satisfont aux mêmes conditions que les fonctions φ_i .

Il est clair que l'ensemble des substitutions qui satisfont à ces conditions forme un groupe, et ce groupe est un des plus généraux que l'on puisse imaginer. La Science dont l'objet est l'étude de ce groupe et de quelques autres analogues a reçu le nom d'*Analysis situs*.

Il est clair qu'une substitution de ce groupe transformera une variété de m dimensions en une variété de m dimensions, et que la variété transformée sera continue, ou finie, ou illimitée si la variété donnée l'est elle-même (et inversement).

Soient deux variétés d'un même nombre de dimensions définies V et V' respectivement par les conditions

$$(1) \quad \begin{cases} F_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, p), \\ \varphi_\beta = 0 & (\beta = 1, 2, \dots, q), \end{cases}$$

et

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} F'_\alpha = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, p), \\ \varphi'_\beta > 0 & (\beta = 1, 2, \dots, q'). \end{cases}$$

Supposons que l'on puisse faire correspondre à un point x_1, x_2, \dots, x_n de la variété V un point x'_1, x'_2, \dots, x'_n de la variété V' , de telle sorte que l'on ait

$$(5) \quad x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Je considère le domaine D défini par les inégalités

$$F_\alpha > -\varepsilon \quad F_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi_\beta > 0.$$

La variété V est évidemment contenue tout entière dans le domaine D .

Je suppose que *dans le domaine* D les fonctions ψ_k sont finies, continues et uniformes, qu'elles ont des dérivées continues et que leur déterminant fonctionnel n'est jamais nul.

Résolvons maintenant les équations (5), nous trouverons

$$(6) \quad x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Je considère le domaine D' défini par les inégalités

$$F'_\alpha > -\varepsilon \quad F'_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi'_\beta > 0$$

et je suppose que *dans le domaine* D' les fonctions ψ'_k sont finies, continues et uniformes, qu'elles ont des dérivées continues et que leur déterminant fonctionnel n'est pas nul.

Il résulte de ces hypothèses qu'à tout point de V correspond un point de V' et un seul et inversement; à toute variété W contenue dans V correspondra une variété W' , d'un même nombre de dimensions, contenue dans V' ; si W est continue, finie ou illimitée, il en sera de même de W' et inversement.

Si toutes ces conditions sont remplies, nous dirons que les deux variétés V et V' sont équivalentes au point de vue de l'*Analysis situs*, ou, pour abrégier le langage, qu'elles sont *homéomorphes*, c'est-à-dire de forme pareille.

Je pourrai dire aussi que deux figures plus compliquées, composées d'un nombre quelconque de variétés, sont homéomorphes quand on passera de l'une à l'autre par une transformation de la forme (5).

Ainsi deux polygones d'un même nombre de côtés seront homéomorphes; deux polyèdres dont les faces seront en même nombre auront le même nombre de côtés et seront semblablement disposées, seront homéomorphes, etc.

si, dans un certain domaine, les F sont des fonctions holomorphes des x , dont le déterminant fonctionnel ne s'annule pas; nous pouvons, dis-je, résoudre ces équations et en tirer

$$(\beta) \quad x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

les θ_i étant des fonctions des y holomorphes dans un certain domaine.

Soit maintenant une variété V satisfaisant à notre première définition, c'est-à-dire définie par les relations

$$(1) \quad F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Reprenons alors les équations (α) ; prenons-y, pour F_1, F_2, \dots, F_p , les premiers membres des p égalités (1). Quant aux autres fonctions

$$F_{p+1}, F_{p+2}, \dots, F_n,$$

ce seront $n - p$ fonctions holomorphes quelconques des x . Je les assujettirai seulement à une condition.

Soit $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ un point quelconque M_0 de la variété V . Je m'arrangerai de telle façon que le déterminant fonctionnel des n fonctions F ne s'annule pas pour

$$x_i = x_i^0.$$

Cela est évidemment possible, puisque j'ai supposé que les déterminants fonctionnels des p fonctions

$$F_1, F_2, \dots, F_p,$$

par rapport à p quelconques des variables x , ne s'annulent jamais tous à la fois.

Je puis supposer encore que $F_{p+1}, F_{p+2}, \dots, F_n$ s'annulent au point M_0 , c'est-à-dire pour

$$x_i = x_i^0.$$

Alors, d'après le théorème cité plus haut, on peut résoudre les équations (α) et l'on trouve que les x_i s'expriment en séries ordonnées, suivant les puissances de

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

et convergentes pourvu que ces quantités satisfassent à certaines inégalités.

Soient donc

$$(\beta) \quad x_i = \theta_i$$

ces équations et

$$\lambda_k(y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$$

les conditions auxquelles les y doivent satisfaire pour que les séries soient convergentes.

Faisons maintenant

$$y_1 = y_2 = \dots = y_p = 0;$$

les p premières équations (α) ne différencieront plus des p équations (1); et les fonctions θ_i , ne dépendant plus de $n - p = m$ variables, seront de la forme (8).

Alors l'ensemble des relations

$$x_i = \theta_i, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \lambda_k > 0$$

représentera une variété ν , qui sera définie à la seconde manière et qui, ne différant pas de

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \lambda_k > 0,$$

fera partie de V .

Le point M_0 , qui est un point *quelconque* de V , fait partie de ν . On peut donc construire, autour d'un point quelconque de V , une variété analogue à ν .

Le cas le plus simple est celui où les conditions de convergence $\lambda_k > 0$ sont une conséquence des inégalités $\varphi_\beta > 0$.

Alors ν ne diffère pas de V et l'on peut se contenter, pour définir ν , des égalités (8) et des inégalités

$$(9) \quad \psi_\beta > 0.$$

que l'on obtient en substituant les θ à la place des x dans les inégalités

$$\varphi_\beta > 0,$$

Remarquons en passant que tous les déterminants fonctionnels de m des fonctions θ par rapport aux y ne s'annuleront jamais à la fois.

Si les conditions $\lambda_\beta > 0$ n'étaient pas une conséquence des inégalités $\varphi_\beta > 0$, on partagerait la variété V en variétés partielles; c'est ainsi, par exemple, que la variété V peut évidemment être décomposée en deux variétés partielles

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \psi > 0$$

et

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0, \quad \psi < 0,$$

ψ étant une fonction quelconque de x_1, x_2, \dots, x_n .

Cela posé, nous pourrions toujours partager V en variétés partielles, ou mieux construire sur V un certain nombre de variétés partielles, empiétant les unes sur les autres et assez petites pour que l'on puisse, pour chacune d'elles,

trouver un système de variables auxiliaires, qui permette de représenter cette variété partielle par des égalités et des inégalités de la forme (8) et (9), satisfaisant à toutes les conditions que je viens d'énoncer. Tout point M_0 de V appartiendra à l'une de ces variétés partielles et l'ensemble de ces variétés formera un réseau continu. La première définition est ainsi ramenée à la seconde.

Pourtant, il reste une remarque à faire; il peut arriver qu'à deux systèmes différents de valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ corresponde un même système de valeurs des fonctions $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ et, par conséquent, un même point de la variété V .

Dans ce cas, il convient d'adjoindre aux inégalités (9) d'autres inégalités

$$(10) \quad \psi_\gamma > 0$$

en les choisissant de telle sorte que des divers systèmes de valeurs des variables γ , qui correspondent à un même point de V , il y en ait toujours un et un seul qui satisfasse aux inégalités (9) et (10).

Soit, par exemple, un tore, dont l'équation sera

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= (R + r \cos \gamma_1) \cos \gamma_2, \\ x_2 &= (R + r \cos \gamma_1) \sin \gamma_2, \\ x_3 &= r \sin \gamma_1. \end{aligned}$$

Nous voyons qu'à un même point du tore correspondront une infinité de systèmes de valeurs des γ , compris dans la formule

$$\gamma_1 + 2K_1\pi, \quad \gamma_2 + 2K_2\pi,$$

où les K sont entiers.

Mais si nous assujettissons les γ aux conditions

$$0 < \gamma_1 < 2\pi, \quad 0 < \gamma_2 < 2\pi,$$

nous n'aurons plus qu'un système de valeurs des γ , qui correspondront à un point du tore.

§ 4. Variétés opposées.

Avec l'une comme avec l'autre définition, il y a lieu de faire une distinction dont on comprendra plus tard l'importance.

représentent encore V et que si, Δ est négatif, elles représentent la variété opposée.

Voyons maintenant ce qui arrive lorsqu'on passe d'une définition à l'autre.

Soit une variété V définie par

$$F_1 = F_2 = \dots = F_p = 0$$

et par certaines inégalités.

Adjoignons à ces p équations les suivantes :

$$y_1 = F_{p+1}, \quad y_2 = F_{p+2}, \quad \dots, \quad y_{n-p} = F_n,$$

$F_{p+1}, F_{p+2}, \dots, F_n$ étant $n - p$ fonctions quelconques des x .

Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel Δ des n fonctions F_1, F_2, \dots, F_n n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations par rapport aux x et qu'on trouve ainsi n équations

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_{n-p}),$$

qui représentent une variété à $n - p$ dimensions. Mais on peut se demander si elles représenteront V ou la variété opposée.

Nous conviendrons de dire qu'elles représentent V si Δ est positif et la variété opposée si Δ est négatif.

Considérons la variété à $n - p$ dimensions

$$F_\alpha = 0, \quad \dots, \quad \varphi_\beta > 0.$$

que j'appelle V . Nous avons vu que la variété à $n - p - 1$ dimensions

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\gamma = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\beta \neq \gamma),$$

que j'appelle ν , fait partie de la frontière de V .

Mais il importe de ranger les équations qui définissent ν dans l'ordre suivant :

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_p = 0, \quad \varphi_\gamma = 0,$$

car si deux d'entre elles étaient permutées, nous conviendrions de dire que ces équations ne représentent plus la frontière de V ou une partie de cette frontière, mais une variété opposée à cette frontière.

§ 5. Homologies.

Considérons une variété V à p dimensions; soit maintenant W une variété à q dimensions ($q \leq p$) faisant partie de V . Supposons que la frontière complète de W se compose de λ variétés continues à $q - 1$ dimensions

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\lambda.$$

Nous exprimerons ce fait par la notation

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_\lambda \sim 0.$$

Plus généralement la notation

$$k_1 \nu_1 + k_2 \nu_2 \sim k_3 \nu_3 + k_4 \nu_4,$$

où les k sont des entiers et les ν des variétés à $q-1$ dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de V et dont la frontière complète se composera de k_1 variétés peu différentes de ν_1 , de k_2 variétés peu différentes de ν_2 , de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée à ν_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à ν_4 .

Les relations de cette forme pourront s'appeler des *homologies*.

Les homologies peuvent se combiner comme des équations ordinaires. Nous emploierons aussi la notation suivante; supposons que l'on ait

$$k_1 \nu_1 + k_2 \nu_2 + \dots + k_p \nu_p \sim \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p$$

et que les variétés $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ fassent partie de la frontière de V ; nous écrirons quelquefois

$$k_1 \nu_1 + k_2 \nu_2 + k_p \nu_p \sim \varepsilon.$$

§ 6. Nombres de Betti.

Nous dirons que les variétés

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\lambda,$$

d'un même nombre de dimensions et faisant partie de V , sont *linéairement indépendantes*, si elles ne sont liées par aucune homologie à coefficients entiers.

S'il existe P_m-1 variétés *fermées* à m dimensions faisant partie de V et linéairement indépendantes et s'il n'en existe que P_m-1 , nous dirons que l'ordre de connexion de V par rapport aux variétés à m dimensions est égal à P_m .

Ainsi se trouvent définis, en ce qui concerne une variété V à m dimensions, $m-1$ nombres que j'appellerai

$$P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$$

et qui sont les ordres de connexion de V par rapport aux variétés de

$$1, 2, \dots, m-1$$

dimensions.

Je les appellerai dans la suite les *nombres de Betti*.

Rendons ces définitions plus claires par un exemple :

Soit D un domaine faisant partie de l'espace ordinaire et limité par n surfaces fermées

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

qui ne se coupent pas.

Ce domaine est une variété à trois dimensions. Il admet donc deux nombres de Betti P_1 et P_2 .

Cette variété est alors définie par les inégalités

$$\varphi_1 > 0, \quad \varphi_2 > 0, \quad \dots, \quad \varphi_n > 0$$

si les équations des n surfaces S sont

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0.$$

Comme les surfaces ne se coupent pas, il n'y a pas de valeurs de x_1, x_2, x_3 qui satisfassent à la fois à deux de ces équations

$$\varphi_l = 0, \quad \varphi_k = 0.$$

Les surfaces S_1, S_2, \dots, S_n , ayant deux dimensions, n'auront qu'un seul nombre de Betti, qui sera l'ordre de connexion de Riemann; soient

$$2Q_1 + 1, \quad 2Q_2 + 1, \quad \dots, \quad 2Q_n + 1$$

les ordres de connexion (qui sont impairs, puisque les surfaces sont fermées) des n surfaces

$$S_1, S_2, \dots, S_n,$$

on aura

$$P_2 = n, \quad P_1 = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n + 1.$$

Ainsi, pour la région intérieure à une sphère

$$P_2 = 1, \quad P_1 = 1;$$

pour la région comprise entre deux sphères,

$$P_2 = 2, \quad P_1 = 1;$$

pour la région intérieure à un tore,

$$P_2 = 1, \quad P_1 = 2;$$

pour la région comprise entre deux tores,

$$P_2 = 2, \quad P_1 = 2.$$

§ 7. Emploi des intégrales.

Considérons une variété V que l'on puisse représenter par les inégalités et égalités (8), (9) et (10) de façon à satisfaire à toutes les conditions énoncées plus haut.

On sait alors ce que l'on doit entendre par l'intégrale multiple d'ordre m

$$\int F dy_1, dy_2, \dots, dy_m$$

étendue à la variété V ; je désigne, bien entendu, par F une fonction donnée des y . Il faut effectuer l'intégration successivement par rapport aux m variables y , et les limites d'intégration seront définies par les inégalités (9) et (10).

Cela posé, je vais définir l'intégrale suivante

$$(11) \quad \int \sum X_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \dots dx_{\alpha_m}.$$

Les différentielles $dx_{\alpha_1}, dx_{\alpha_2}, \dots, dx_{\alpha_m}$ sont m quelconques des n différentielles dx_1, dx_2, \dots, dx_n . Les fonctions $X_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}$ sont des fonctions données de x_1, x_2, \dots, x_n et il y en a autant qu'il y a de combinaisons possibles des indices

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$$

c'est-à-dire qu'il y a de combinaisons de n lettres m à m . Il faut convenir que la fonction X est nulle si deux de ses indices sont égaux et qu'elle change de signe quand on permute deux de ses indices.

Cela posé, l'intégrale (11) sera, par définition, égale à l'intégrale d'ordre m

$$\int \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_m})}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} dy_1, dy_2, \dots, dy_m.$$

Si maintenant la variété V n'était pas susceptible d'être représentée par des relations de la forme (8), (9) et (10) satisfaisant à toutes les conditions énoncées, on décomposerait la variété V en variétés partielles assez petites pour être susceptibles de ce mode de représentation et l'intégrale (11), étendue à la variété totale V , serait par définition la somme des intégrales (11) étendues aux diverses variétés partielles.

Cette définition laisse toutefois subsister encore une ambiguïté.

En effet, si l'on permute deux des lettres y_1 et y_2 , l'intégrale change de

signe; il importe donc de se donner l'ordre de ces lettres et la permutation de deux de ces lettres équivaudrait à un changement du sens de l'intégration dans l'étude des intégrales simples. Je dirai donc le sens de l'intégration pour parler de l'ordre dans lequel on convient de ranger les lettres y_1, y_2, \dots, y_m .

J'ai eu l'occasion de m'occuper d'une question analogue dans un Mémoire *sur les résidus des intégrales doubles*, inséré au tome IX des *Acta mathematica* et, en particulier, dans le paragraphe 3 de ce Mémoire intitulé : *Conditions d'intégrabilité*.

J'ai recherché dans quels cas ces *conditions d'intégrabilité* sont remplies, c'est-à-dire dans quels cas l'intégrale (11) est nulle toutes les fois qu'elle s'applique à une variété fermée.

Voici ce que j'ai trouvé; écrivons pour abréger l'écriture

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

au lieu de $X_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}$ et $[\alpha_p]$ au lieu de x_{α_p} .

Nos conditions d'intégrabilité s'écriront

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{d[\alpha_{m+1}]} \pm \frac{d(\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1})}{d[\alpha_1]} \\ \pm \frac{d(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_1)}{d[\alpha_2]} \pm \dots \pm \frac{d(\alpha_{m+1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1})}{d[\alpha_m]} = 0, \end{array} \right.$$

Voici la loi suivant laquelle doivent être choisis les signes \pm . On prendra toujours le signe $+$ si m est pair, et alternativement le signe $+$ et le signe $-$ si m est impair.

Il y aura autant d'équations (12) qu'il y a de systèmes possibles d'indices

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1},$$

c'est-à-dire, puisque ces indices doivent être choisis parmi les lettres,

$$1, 2, \dots, n,$$

autant qu'il y a de combinaisons de n lettres $m+1$ à $m+1$.

Supposons maintenant que les conditions (12), au lieu d'être satisfaites pour toutes les valeurs possibles des n variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

le soient seulement pour certaines valeurs de ces variables. Par exemple considérons une variété V définie par les conditions

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Soit ensuite un domaine D comprenant tous les points voisins de ceux de V et défini, par exemple, par les conditions

$$-\varepsilon < F_\alpha < \varepsilon, \quad \varphi_\beta > -\varepsilon,$$

ε étant un très petit nombre positif.

Supposons que les conditions (12) soient satisfaites pour tous les points du domaine D .

En répétant le raisonnement du Mémoire cité et en le modifiant convenablement, on démontrera ce qui suit : Soit une variété V' à $m + 1$ dimensions faisant partie de V (le nombre $m + 1$ doit donc être inférieur ou au plus égal au nombre des dimensions de V).

Supposons que la frontière complète de V' se compose des k variétés à m dimensions

$$W_1, W_2, \dots, W_k,$$

de sorte que $W_1 + W_2 + \dots + W_k \sim 0$.

Alors si l'intégrale (11) satisfait aux conditions (12) dans le domaine D , la somme algébrique des intégrales (11) étendue aux variétés W_1, W_2, \dots, W_k est nulle. Il faut, bien entendu, pour chacune d'elles, faire attention au sens de l'intégration.

Les conditions (12) sont suffisantes pour qu'il en soit ainsi, mais elles ne sont pas nécessaires; ces conditions, nous l'avons vu, sont en nombre égal à celui des combinaisons de n lettres $m + 1$ à $m + 1$; il suffirait, pour que le résultat que je viens d'énoncer fût encore exact, que l'intégrale (11) satisfît pour tous les points de V à certaines conditions en nombre égal à celui des combinaisons de $n - p$ lettres $m + 1$ à $m + 1$, $n - p$ étant le nombre des dimensions de V .

Ces conditions seraient aisées à former, mais cela m'entraînerait trop loin de mon sujet.

Si alors une intégrale (11) satisfait aux conditions (12) dans le domaine D , les diverses valeurs que cette intégrale pourra prendre quand on l'étendra à diverses variétés fermées à m dimensions faisant partie de V seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un certain nombre d'entre elles que l'on pourra appeler les périodes de l'intégrale (11).

Le nombre maximum des périodes est égal à $P_m - 1$; car, si l'on considère P_m variétés fermées quelconques à m dimensions, il y aura toujours une variété à $m + 1$ dimensions qui admettra comme frontière complète ces P_m

variétés ou quelques-unes d'entre elles. Il y aura donc toujours entre les P_m intégrales correspondantes une relation linéaire à coefficients entiers. On pourrait d'ailleurs faire voir qu'il existe toujours des intégrales de la forme (11) pour lesquelles le nombre maximum des périodes est atteint. Cette manière de faire comprendre la définition des nombres de Betti a été employée par Betti lui-même pour le premier et le dernier de ces nombres, c'est-à-dire pour P_1 et P_{m-1} ; mais nous venons de voir qu'il est aisé de faire de même pour les autres nombres de Betti.

§ 8. Variétés unilatères et bilatères.

Considérons une variété V définie à la seconde manière, c'est-à-dire formée d'une chaîne ou d'un réseau de variétés partielles dont chacune est définie elle-même par des relations de la forme (8) et (9).

Soit ν_1 une variété partielle définie par les conditions

$$\begin{aligned} x_i &= \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_m), \\ |y_k| &< \beta_k. \end{aligned}$$

Soit ν_2 une autre variété partielle et définie par les conditions

$$\begin{aligned} x_i &= \theta'_i(z_1, z_2, \dots, z_m), \\ |z_k| &< \gamma_k. \end{aligned}$$

Supposons que ces deux variétés aient une partie commune ν' formant une variété continue. Je dis qu'à l'intérieur de cette variété le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)}$$

est toujours de même signe.

En effet, il ne pourrait changer de signe sans s'annuler ou sans devenir infini. Or on a

$$\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)},$$

de sorte que Δ est lui-même le rapport de deux déterminants fonctionnels; comme ces deux déterminants fonctionnels sont essentiellement finis, Δ ne pourrait s'annuler que si l'on avait

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_m)} = 0$$

et comme rien ne distingue les m premières variables x_1, x_2, \dots, x_m des $n - m$ autres $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, il faudrait que le déterminant fonctionnel de m quelconque des x par rapport aux z fût nul.

Tous les déterminants fonctionnels des fonctions θ' devraient donc s'annuler, à la fois, ce qui n'a jamais lieu par hypothèse. Δ ne peut donc s'annuler, et l'on verrait absolument de même qu'il ne peut pas non plus devenir infini.

Δ est donc toujours de même signe et nous pourrions choisir l'ordre des variables z de telle façon que ce signe soit toujours positif.

Une difficulté pourrait se présenter dans certains cas; supposons que la partie commune à v_1 et à v_2 , au lieu de se réduire à une seule variété continue v' , se compose de plusieurs variétés continues v', v'', v''' ; dans chacune d'elles, le signe de Δ demeurera constant, mais il pourra changer lorsque l'on passera de l'une à l'autre. Dans ce cas, nous dirons que la variété V est *unilatère*.

Supposons que cette circonstance ne se présente pas, et considérons une suite de variétés partielles formant une chaîne fermée

$$v_1, v_2, \dots, v_q, v_1.$$

Soient

$$y_1^i, y_2^i, \dots, y_m^i$$

les m variables qui jouent le rôle de y_1, y_2, \dots, y_m par rapport à v_i .

Supposons que v_1 et v_2 aient une partie commune v'_1 , v_2 et v_3 une partie commune v'_2 , \dots , v_{q-1} et v_q une partie commune v'_{q-1} et v_q et enfin v_1 une partie commune v'_q .

Soit Δ_i le déterminant fonctionnel de

$$y_1^{i+1}, y_2^{i+2}, \dots, y_m^{i+1}$$

par rapport à

$$y_1^i, y_2^i, \dots, y_m^i.$$

Ce déterminant sera défini à l'intérieur de v'_i .

Je définis de même à l'intérieur de v'_q le déterminant fonctionnel Δ_q de

$$y_1^1, y_2^1, \dots, y_m^1$$

par rapport à

$$y_1^q, y_2^q, \dots, y_m^q.$$

D'après ce que nous venons de voir, nous pouvons toujours choisir l'ordre des variables de telle façon que

$$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{q-1}.$$

soient toujours positifs. D'autre part, Δ_q est toujours de même signe, mais ce signe constant est-il le signe + ou le signe — ?

Si c'est le signe —, je dirai encore que la variété V est *unilatère*. Je pourrai dire aussi que les variétés $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$ forment une chaîne unilatère.

Supposons maintenant que l'on ait construit un certain réseau continu de variétés partielles

$$(4) \quad \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q,$$

de telle sorte que tout point de V soit à l'intérieur (j'exclus la frontière) de l'une des variétés (4) ou de plusieurs d'entre elles. Si, dans la partie commune à deux quelconques des variétés (4), le déterminant Δ est positif, je dirai que la variété V est *bilatère*. Si elle ne l'était pas, il est clair qu'on pourrait toujours, avec quelques-unes des variétés (4), former une chaîne unilatère et que la variété V serait unilatère. Je pourrai dire aussi que le réseau des variétés (4) forme un système bilatère.

Mais pour justifier complètement notre définition, il faut faire voir que V ne peut pas être à la fois unilatère et bilatère. Il est clair d'abord que, dans le système bilatère (4), on ne peut pas trouver de chaîne unilatère.

Mais il reste à montrer que le système (4) restera bilatère quand on y adjoindra une variété quelconque ν_{q+1} faisant partie de V .

Soit ν'_i la partie commune à ν_i et à ν_{q+1} ; tout point de ν_{q+1} appartiendra au moins à l'une des variétés ν'_i et, comme ν_{q+1} est continu, si je considère deux points M_1 et M_k de ν_{q+1} appartenant respectivement à ν'_1 et à ν'_k , on pourra trouver des variétés intermédiaires que je pourrai appeler (puisque le numérotage reste arbitraire)

$$\nu'_1, \nu'_2, \dots, \nu'_k,$$

et qui formeront une chaîne.

Je pourrai toujours choisir l'ordre des variables analogues aux y qui définissent la variété ν_{q+1} , de telle façon que, dans ν'_1 , le déterminant analogue à Δ et relatif à ν_1 et ν_{q+1} soit positif; je l'appellerai Δ_1 .

Appelons, de même, Δ_i le déterminant analogue à Δ et relatif à ν_i et ν_{q+1} ; Δ_i est défini à l'intérieur de ν'_i .

Soit ensuite Δ' le déterminant relatif à ν_1 et ν_2 ; il sera défini dans toute la partie commune à ces deux variétés et, en particulier, dans la partie commune à ν'_1 et ν'_2 ; il sera positif puisque le système (4) est bilatère.

Alors, dans la partie commune à ν'_1 et ν'_2 , Δ_1 et Δ' seront positifs, il en résulte que leur rapport

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta'}$$

est positif, et comme il conserve toujours le même signe, il sera positif pour tous les points de ν'_2 .

On démontrerait de proche en proche que $\Delta_3, \dots, \Delta_k$ sont également positifs.

Le système restera donc bilatère après l'adjonction de ν_{q+1} ; il le restera encore si, dans l'expression des équations d'une des variétés ν_i , on remplace les variables $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ par des fonctions holomorphes de variables nouvelles $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_m$ dont le déterminant fonctionnel ne s'annule jamais (ce qui est nécessaire si l'on veut qu'à un système de valeurs des γ corresponde un seul système de valeurs des γ'). Il faut, bien entendu, choisir l'ordre des nouvelles variables γ' de telle façon que ce déterminant fonctionnel soit positif.

Le système restant toujours bilatère, on n'y pourra construire de chaîne unilatère, de sorte qu'une variété ne peut pas être à la fois bilatère et unilatère.

c. q. f. d.

Tout le monde connaît l'exemple de surface unilatère que l'on obtient en pliant un rectangle de papier ABCD (dont les côtés opposés sont AB et CD d'une part, BC et DA d'autre part), et en collant ensuite ensemble les côtés AB et CD de façon que A soit colé avec C et B avec D.

Les exemples de variétés bilatères sont plus aisés encore à former. Ainsi dans l'espace à n dimensions :

- 1° Tout domaine à n dimensions est bilatère;
- 2° Toute courbe à 1 dimension est bilatère;
- 3° Toute surface *fermée* à $n - 1$ dimensions est bilatère.

Mais on peut aller plus loin.

Considérons une variété V définie à la première manière, c'est-à-dire par des égalités et des inégalités de la forme (1). Je dis qu'elle sera toujours bilatère.

Soient, en effet,

$$F_1 = F_2 = \dots = F_p = 0$$

les p égalités qui, avec quelques inégalités que nous n'écrirons pas, défi-

nissent V . Partageons V en un certain nombre de variétés partielles ν , définies par des relations de la forme (8) et (9). Soient

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q, \nu_1$$

un certain nombre de variétés partielles formant une chaîne continue, c'est-à-dire telles que chacune d'elles ait avec la suivante une partie commune. Je dis que cette chaîne est toujours bilatère.

En effet, nous avons supposé plus haut que les déterminants fonctionnels des p fonctions F par rapport à p quelconques des variables x ne s'annulent jamais tous à la fois. Je puis donc supposer que les variétés ν sont assez petites pour que, à l'intérieur de ν_1 , l'un des déterminants fonctionnels (que j'appellerai Δ_1) ne s'annule pas; pour que, à l'intérieur de ν_2 , un autre de ces déterminants (que j'appellerai Δ_2) ne s'annule pas, et ainsi de suite.

S'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à subdiviser chacune des variétés ν en variétés plus petites.

Soit, par exemple,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_p)}{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p})}, \\ \Delta_2 &= \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_p)}{\partial(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_p})}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comme l'ordre des lettres $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p}$ reste arbitraire et que Δ_1 conserve le même signe à l'intérieur de ν_1 , je pourrai toujours supposer que Δ_1 est positif à l'intérieur de ν_1 . De même, Δ_2 sera positif à l'intérieur de ν_2 ; et ainsi de suite.

Posons alors à l'intérieur de ν_1

$$(13) \quad \begin{cases} F_1 = 0, & F_2 = 0, & \dots, & F_p = 0, \\ y_1^1 = x'_{\alpha_1}, & y_2^1 = x'_{\alpha_2}, & \dots, & y_m^1 = x'_{\alpha_m}. \end{cases}$$

Ici $m = n - p$; les variables x'_{α_i} sont les $m = n - p$ variables x qui restent quand on a supprimé les p variables x_{α_i} .

Posons de même à l'intérieur de ν_2

$$(14) \quad \begin{cases} F_1 = 0, & F_2 = 0, & \dots, & F_p = 0, \\ y_1^2 = x'_{\beta_1}, & y_2^2 = x'_{\beta_2}, & \dots, & y_m^2 = x'_{\beta_m}. \end{cases}$$

Les variables x'_{β_i} sont les $m = n - p$ variables x qui restent quand on a supprimé les p variables x_{β_i} .

Et ainsi de suite.

Je supposerai que l'ordre des variables x'_{α_i} ait été choisi de telle sorte que l'on puisse passer de l'ordre normal des variables x , c'est-à-dire de l'ordre

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

à l'ordre

$$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_p}, x'_{\alpha_1}, x'_{\alpha_2}, \dots, x'_{\alpha_m},$$

par une substitution du groupe alterné.

Alors, en résolvant les équations (13), on verrait qu'à l'intérieur de ν_1 les x sont des fonctions holomorphes de

$$y^1_1, y^1_2, \dots, y^1_n$$

et ainsi de suite. En général, à l'intérieur de ν_i , les x seront des fonctions holomorphes de

$$y^i_1, y^i_2, \dots, y^i_m.$$

Il s'agit alors de calculer le déterminant

$$\frac{\partial(y^2_1, y^2_2, \dots, y^2_m)}{\partial(y^1_1, y^1_2, \dots, y^1_m)},$$

ou, pour abréger,

$$\frac{\partial y^2_i}{\partial y^1_i}$$

à l'intérieur de la partie commune à ν_1 et à ν_2 .

Pour cela, remplaçons les équations (13) et (14) par les équations plus générales

$$(13 \text{ bis}) \quad \begin{cases} F_1 = \lambda_1, & F_2 = \lambda_2, & \dots, & F_p = \lambda_p, \\ & & & y^i = x'_{\alpha_i} \end{cases}$$

et

$$(14 \text{ bis}) \quad F_k = \lambda_k, \quad y^i = x'_{\beta_i}.$$

Nous ferons ensuite $\lambda_k = 0$.

Résolvons les équations (13 bis), nous aurons les x en fonction des λ_k et des y^i holomorphes à l'intérieur de ν_1 et le déterminant fonctionnel de

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

par rapport à

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, y^1_1, y^1_2, \dots, y^1_n$$

sera évidemment $\frac{1}{\Delta_1}$.

Résolvons de même les équations (14 bis), nous aurons les x en fonction

des λ_k et des y_i^2 , holomorphes à l'intérieur de ν_2 et le déterminant fonctionnel sera $\frac{1}{\Delta_2}$.

Il viendra alors, pour les points communs à ν_1 et à ν_2 ,

$$\frac{\partial y_i^2}{\partial y_i^1} = \frac{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, y_1^2, y_2^2, \dots, y_m^2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, y_1^1, y_2^1, \dots, y_m^1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Il ne reste plus ensuite qu'à faire $\lambda_k = 0$ dans les expressions des x .

On trouverait de même, dans la partie commune à ν_h et ν_{h+1} ,

$$\frac{\partial y_i^{h+1}}{\partial y_i^h} = \frac{\Delta_h}{\Delta_{h+1}},$$

et dans la partie commune à ν_q et à ν_1 ,

$$\frac{\partial y_i^1}{\partial y_i^q} = \frac{\Delta_q}{\Delta_1}.$$

Nous avons vu plus haut que l'on peut toujours supposer que Δ_i est, à l'intérieur de ν_i , positif. Tous ces rapports sont donc positifs et la chaîne est bilatère.

C. Q. F. D.

Toutes les variétés qui rentrent dans la première définition sont donc bilatères et, comme j'ai cité plus haut un exemple de variété unilatère satisfaisant à la deuxième définition, nous devons conclure que les variétés qui satisfont à la deuxième définition ne satisfont pas toutes à la première. C'est ce que j'avais annoncé plus haut.

Toute variété unilatère est, par définition, *opposée à elle-même*.

§ 9. Intersection de deux variétés. ⁽¹⁾

Soient V et V' deux variétés définies à la seconde manière, ayant l'une p dimensions, l'autre $n - p$ dimensions, et soient M_0 et M'_0 deux points appartenant respectivement à V et à V' et ayant respectivement pour coordonnées

$$x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$$

et

$$x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_n'^0.$$

Autour du point M_0 , construisons sur V une variété partielle ν , analogue à

⁽¹⁾ Le Complément à l'*Analysis situs* reprend ce numéro 9.

celles que nous avons envisagées dans le paragraphe 3, de telle façon qu'en un point x_1, x_2, \dots, x_n de ν on ait

$$x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

De même, autour de M'_0 , construisons sur V' une variété ν' telle qu'en un point x'_1, x'_2, \dots, x'_n de ν' on ait

$$x'_i = \theta'_i(y'_1, y'_2, \dots, y'_{n-p}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Envisageons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dy_1} & \frac{dx_2}{dy_1} & \dots & \frac{dx_n}{dy_1} \\ \frac{dx_1}{dy_2} & \frac{dx_2}{dy_2} & \dots & \frac{dx_n}{dy_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_1}{dy_p} & \frac{dx_2}{dy_p} & \dots & \frac{dx_n}{dy_p} \\ \frac{dx'_1}{dy'_1} & \frac{dx'_2}{dy'_1} & \dots & \frac{dx'_n}{dy'_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx'_1}{dy'_{n-p}} & \frac{dx'_2}{dy'_{n-p}} & \dots & \frac{dx'_n}{dy'_{n-p}} \end{vmatrix}$$

C'est une fonction de $y_1, y_2, \dots, y_p, y'_1, y'_2, \dots, y'_{n-p}$; cette fonction dépendra donc de la position des points M et M' de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n et x'_1, x'_2, \dots, x'_n sur les variétés ν et ν' . Je l'appellerai donc $f(M, M')$.

Je puis changer de variables en remplaçant y_1, y_2, \dots, y_p par des fonctions holomorphes de p variables nouvelles z_1, z_2, \dots, z_p choisies de telle sorte qu'à un système de valeurs de y corresponde un seul système de valeurs des z . Il faut pour cela que le déterminant fonctionnel des y par rapport aux z ne s'annule pas et je puis toujours supposer, en rangeant les z dans un ordre convenable, que ce déterminant est positif.

La fonction $f(M, M')$ est alors multipliée par ce déterminant fonctionnel et, par conséquent, conserve son signe.

Il en est encore de même quand on fait un changement de variables analogues sur la variété ν' .

Considérons maintenant une autre variété ν_1 , analogue à ν , construite sur V , et une variété ν'_1 , analogue à ν' , construite sur V' .

Soit M_1 un point de ν_1 et M'_1 un point de ν'_1 . Nous pourrions construire une fonction analogue à $f(M, M')$ et que j'appellerai $f_1(M_1, M'_1)$.

Supposons maintenant que les variétés ν_1 et ν (de même que les variétés ν'_1

et ν') aient une partie commune, et que les points M et M_1 se confondent, de même que les points M' et M'_1 .

Comparons les deux fonctions

$$f(M, M'), \quad f_1(M, M').$$

Supposons que les deux variétés V et V' soient bilatères. Nous pourrions supposer alors (en choisissant convenablement l'ordre des variables y relatives à ν_1), que le déterminant analogue à celui que nous avons appelé Δ dans le numéro 8, et relatif à ν et ν_1 , est positif dans la partie commune à ν et ν_1 ; de même, le déterminant analogue à Δ et relatif à ν' et ν'_1 sera également positif.

Alors f et f_1 seront de même signe.

Soit alors $S(M, M')$ une fonction qui sera égale à $+1$, à -1 ou à 0 , selon que $f(M, M')$ sera positif, négatif ou nul. Cette fonction sera alors parfaitement déterminée, elle ne dépendra que de la position des points M et M' sur V et V' ; elle ne dépendra pas de la manière dont les variétés ν et ν' auront été construites autour de M et de M' .

Cela ne serait plus vrai si l'une des variétés V et V' était unilatère, ce que je ne suppose pas.

Supposons, en particulier, que les points M et M' se confondent et, par conséquent, que le point M soit un point d'intersection de V et de V' ; la considération de la fonction $S(M, M')$ présente alors un grand intérêt.

Supposons que l'on forme la fonction $S(M, M)$ pour tous les points d'intersection M de V et de V' , et faisons la somme de toutes les fonctions S ainsi obtenues; je désignerai cette somme par $N(V, V')$.

Cette définition de $N(V, V')$ s'applique quand les variétés V et V' ont été définies comme au numéro 3. Mais on peut la simplifier quand V et V' ont été définies comme au numéro 1.

Soient alors

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p; \beta = 1, 2, \dots, q)$$

les conditions qui définissent V , et soient

$$F'_\gamma = 0, \quad \varphi'_\delta > 0 \quad (\gamma = 1, 2, \dots, n - p; \delta = 1, 2, \dots, q'),$$

celles qui définissent V' . V aura $n - p$ dimensions et V' en aura p .

Considérons un point M de V ayant pour coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n et

un point M' de V' ayant pour coordonnées x'_1, x'_2, \dots, x'_n et formons le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dx_1} & \frac{dF_2}{dx_1} & \dots & \frac{dF_p}{dx_1} & \frac{dF'_1}{dx'_1} & \frac{dF'_2}{dx'_1} & \dots & \frac{dF'_{n-p}}{dx'_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dF_1}{dx_n} & \frac{dF_2}{dx_n} & \dots & \frac{dF_p}{dx_n} & \frac{dF'_1}{dx'_n} & \frac{dF'_2}{dx'_n} & \dots & \frac{dF'_{n-p}}{dx'_n} \end{vmatrix}$$

que j'appellerai $\psi(M, M')$. Quelle relation y a-t-il entre $\psi(M, M')$ et $S(M, M')$?

Pour nous en rendre compte, posons

$$x'_i = x_i + h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

faisons ensuite varier à la fois les x'_i et les x_i , mais de telle façon que leur différence h_i demeure constante.

Posons

$$\begin{aligned} F_\alpha(x_i) &= y_\alpha, \\ F'_\gamma(x_i + h_i) &= y'_\gamma. \end{aligned}$$

Si le déterminant $\psi(M, M')$ n'est pas nul, nous pourrions résoudre ces équations par rapport aux x_i et nous en tirerons

$$x_i = \theta_i(y_\alpha, y'_\gamma).$$

Le déterminant fonctionnel des θ_i par rapport aux y_α et aux y'_γ sera alors $\frac{1}{\psi(M, M')}$.

Si nous faisons $y_\alpha = 0$, nous aurons

$$x_i = \theta_i(0, y'_\gamma);$$

ce sera là l'équation d'une variété à $n - p$ dimensions qui fera partie de V ; de même en faisant

$$x'_i = h_i + \theta_i(y_\alpha, 0),$$

on aura l'équation d'une variété à p dimensions qui fera partie de V' .

Si l'on définit de la sorte les variétés ν et ν' du commencement de ce numéro, on voit que le déterminant fonctionnel des θ_i n'est autre chose que $f(M, M')$, d'où

$$f(M, M')\psi(M, M') = 1.$$

Supposons maintenant que les deux variétés V et V' fassent toutes deux parties d'une variété W d'un plus grand nombre de dimensions. Soient, par exemple,

$$(1) \quad F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p; \beta = 1, 2, \dots, q)$$

les relations qui définissent W qui aura ainsi $n - p$ dimensions.

Soient

$$(2) \quad F'_\gamma = 0, \quad \varphi'_\delta > 0 \quad (\gamma = 1, 2, \dots, p; \delta = 1, 2, \dots, q')$$

les relations qui jointes à (1) définissent V qui aura ainsi $n - p - p'$ dimensions.

Soient enfin

$$(3) \quad F''_\varepsilon = 0, \quad \varphi''_\zeta > 0 \quad (\varepsilon = 1, 2, \dots, p''; \zeta = 1, 2, \dots, q'')$$

les relations qui jointes à (1) définiront V' qui aura ainsi $n - p - p''$ dimensions. Je suppose $p + p' + p'' = n$.

Soit M un point d'intersection de V et de V' .

Je formerai le déterminant fonctionnel des F_α , des F'_γ et des F''_ε par rapport aux x , et ce sera ce déterminant que j'appellerai $\psi(M)$.

Alors $S(M)$ sera, par définition, égal à $+1$ ou à -1 , selon que $\psi(M)$ sera positif ou négatif.

Je désignerai ensuite par $N(V, V')$ la somme de toutes les quantités $S(M)$ relatives à tous les points d'intersection de V et de V' .

Il est clair que, si l'une des variétés V ou V' est remplacée par la variété opposée, l'expression $N(V, V')$ change de signe.

Soit maintenant V une variété fermée à 1 dimension et soit W un domaine à n dimensions dont la frontière complète se compose des variétés à $n - 1$ dimensions

$$V_1, V_2, \dots, V_k,$$

de telle sorte que

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k \sim 0.$$

Je dis que

$$N(V, V_1) + N(V, V_2) + \dots + N(V, V_k) = 0.$$

En effet, la variété V va se composer d'un certain nombre de variétés continues à 1 dimension, c'est-à-dire d'un certain nombre de lignes fermées. Les équations d'une de ces lignes pourront se mettre sous la forme

$$x_i = \theta_i(t),$$

t étant une variable que nous ferons croître de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme la ligne est fermée, nous aurons

$$\theta_i(-\infty) = \theta_i(+\infty).$$

Envisageons maintenant un point M d'intersection d'une de ces lignes avec

la frontière de W ; si, quand on fait croître t , cette ligne passe de l'intérieur de W à l'extérieur, on aura

$$S(M) = 1.$$

Si elle passe de l'extérieur à l'intérieur, $S(M)$ sera égal à -1 . Mais la ligne étant fermée reviendra à son point de départ, de sorte que la somme de tous les $S(M)$ devra être nulle.

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que toutes les variétés que nous envisageons et, par exemple, $V, W, V_1, V_2, \dots, V_k$ fassent partie d'une variété U et que ce soit cette variété U dont nous étudions les ordres de connexion et par rapport à laquelle nous prenons les homologies.

(Voici ce que je veux dire; quand, au numéro 5, j'ai défini les homologies, il y avait une certaine variété V qui jouait dans cette définition un rôle important; eh bien, c'est ici U qui jouera ce rôle.)

Je suppose que U ait h dimensions, V une dimension, W h dimensions, V_1, V_2, \dots, V_k $h-1$ dimensions.

Il n'y a rien à changer à ce qui précède et l'on voit que, si V est fermé et à une dimension et que

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k \sim 0,$$

on aura

$$N(V, V_1) + N(V, V_2) + \dots + N(V, V_k) = 0.$$

Je dis que cela est encore vrai si la variété à une dimension V n'est plus fermée, mais a ses deux extrémités sur la frontière de U et si W n'a aucun point sur la frontière de U .

En effet, U se trouve partagé en deux régions continues ou non, à savoir : W et la région R extérieure à W . Par hypothèse, la frontière de U appartient tout entière à R .

La ligne V n'étant pas fermée, le point initial correspondant à $t = -\infty$ ne coïncidera plus avec le point final correspondant à $t = +\infty$; mais, par hypothèse, ces deux points appartiennent tous deux à la frontière de U et, par conséquent, à R .

Notre ligne passera donc précisément autant de fois de R dans W que de W dans R ; donc la somme des $S(M)$ est nulle.

C. Q. F. D.

Je vais maintenant établir la réciproque.

Soient V_1, V_2, \dots, V_k, k variétés fermées à $h-1$ dimensions situées

dans U , U n'ayant aucun point commun avec la frontière de V_i . Supposons que l'on n'ait pas

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k \sim 0;$$

je dis qu'on pourra toujours trouver une ligne V , située dans U , qui sera fermée, qui aura ses deux extrémités sur la frontière de U et qui sera telle que

$$N(V, V_1) + N(V, V_2) + \dots + N(V, V_k) \neq 0.$$

En effet, supposons d'abord que les variétés V_1, V_2, \dots, V_k ne partagent pas U en plusieurs régions distinctes. Alors on pourra aller d'un point quelconque de U à un autre point quelconque de U sans rencontrer aucune des variétés V_i .

Considérons alors une ligne très petite rencontrant V_1 en un point M et ne rencontrant aucune autre des variétés V_i ; nous pourrions joindre les deux extrémités de cette ligne par une autre ligne continue qui ne rencontrera aucune des variétés V_i ; nous aurons construit ainsi une ligne fermée qui ne rencontrera les variétés V_i qu'en un seul point. La somme des $S(M)$ ne pourra donc être nulle.

Supposons maintenant que les variétés V_i partagent U en plusieurs régions R ; mais cependant qu'elles soient linéairement indépendantes. Dans ce cas, la frontière complète d'aucune des régions R ne pourra être constituée par une partie des variétés V_i , sans quoi il y aurait entre ces variétés une homologie, ce que nous ne supposons pas.

La frontière complète de R se composera donc de quelques-unes des variétés V_i et d'une partie de la frontière de U . Il en résulte que d'un point quelconque de R on pourra aller à la frontière de U sans sortir de R et sans rencontrer aucune des variétés V_i .

Considérons alors une des variétés V_i, V_1 , par exemple, et envisageons une petite ligne coupant V_1 en un point M ; soient R et R' les régions auxquelles appartiennent les deux extrémités μ et μ' de cette petite ligne. De μ on pourra aller par une ligne continue à la frontière de U sans sortir de R ; de μ' on pourra aller par une troisième ligne continue à la frontière de U sans sortir de R' .

L'ensemble de ces trois lignes continues ira de la frontière de U à la frontière de U , et si je l'appelle V , on aura

$$N(V, V_1) = 1, \quad N(V, V_i) = 0 \quad (i > 1).$$

On peut donc choisir V de telle façon que tous les $N(V, V_i)$ soient nuls, excepté un d'entre eux qui sera égal à 1.

Supposons enfin qu'il y ait entre les V_i un certain nombre d'homologies, 3, par exemple,

$$(\alpha) \quad \Sigma k_i V_i \sim \Sigma k'_i V_i \sim \Sigma k''_i V_i \sim 0.$$

Nous pourrions alors, parmi les k variétés V_i , en trouver $k - 3$ qui soient linéairement indépendantes; soit, par exemple, V_1, V_2, \dots, V_{k-3} .

Nous pouvons choisir V de telle façon que tous les $N(V, V_i)$ où $i = 1, 2, \dots, k - 3$, soient nuls à l'exception de l'un quelconque d'entre eux qui sera égal à 1. Les valeurs de

$$N(V, V_{k-2}), \quad N(V, V_{k-1}), \quad N(V, V_k)$$

s'en déduiront à l'aide des relations

$$(\beta) \quad \Sigma k_i N(V, V_i) = \Sigma k'_i N(V, V_i) = \Sigma k''_i N(V, V_i) = 0$$

qui sont une conséquence nécessaire de nos homologies (α) .

Il ne peut pas arriver alors que l'on ait

$$(\gamma) \quad \Sigma N(V, V_i) = 0,$$

quelle que soit celle des $k - 3$ quantités

$$N(V, V_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k - 3)$$

qui soit égale à 1. Cela ne pourrait se faire, en effet, que si l'équation (γ) était une conséquence nécessaire des équations (β) ; mais alors l'homologie

$$(\delta) \quad \Sigma V_i \sim 0$$

serait une conséquence nécessaire des homologies (α) . Or nous avons supposé au début que cette homologie (δ) n'avait pas lieu.

On pourra donc toujours choisir V de manière que l'égalité (γ) n'ait pas lieu.

C. Q. F. D.

Nous désignerons sous le nom de *coupure* toute variété contenue dans U :

1° si elle est fermée; 2° si elle n'est pas fermée, mais si sa frontière fait partie de la frontière complète de U .

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui résume la discussion précédente :

La condition nécessaire et suffisante (si les variétés V_i sont fermées et

à $h - 1$ dimensions) pour que l'on puisse choisir la coupure V de telle sorte que l'égalité

$$\sum k_i N(V, V_i) = 0$$

n'ait pas lieu, c'est que l'homologie

$$\sum k_i V_i \sim 0$$

n'ait pas lieu.

Cherchons maintenant à étendre ce théorème au cas où V a p dimensions et où V_1, V_2, \dots, V_k en ont $h - p$.

Soient

$$F_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n - h)$$

les équations de U ; soient

$$F_\alpha = 0, \quad F'_\gamma = 0, \quad \varphi_\beta > 0 \quad (\gamma = 1, 2, \dots, h - p)$$

celles de V .

Quant à V_1, V_2, \dots, V_k , nous les définirons de la manière suivante. Nous pourrons toujours trouver $p - 1$ équations

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0$$

auxquelles satisfont tous les points de V_1, V_2, \dots, V_k ; c'est ainsi que si $h = 3$, $p = 2$, si U est l'espace ordinaire et si V_1, V_2, \dots, V_k sont des courbes, on pourra toujours, par ces courbes, quelles qu'elles soient, faire passer une surface.

Pour définir V_i , nous y adjoindrons une $p^{\text{ème}}$ égalité

$$F'_i = 0.$$

Soit alors U' la variété à $h - p + 1$ dimensions

$$F_\alpha = 0, \quad \Phi_\nu = 0, \quad \varphi_\beta > 0,$$

et V' la variété à 1 dimension

$$F_\alpha = F'_\gamma = \Phi_\nu = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

On aura d'abord

$$N(V', V_i) = N(V, V_i).$$

D'autre part, si l'homologie

$$\sum k_i V_i \sim 0$$

a lieu par rapport à U' , elle aura lieu par rapport à U . Il est vrai que la réciproque n'est pas vraie et que cette homologie peut avoir lieu par rapport à U

sans avoir lieu par rapport à U' ; mais, si elle a lieu par rapport à U , on pourra toujours, en choisissant convenablement les fonctions Φ , trouver une variété U' à $h - p + 1$ dimensions par rapport à laquelle elle ait lieu.

Nous devons donc conclure que le théorème est encore vrai quand V a plus d'une dimension.

Si donc V_1 et V_2 sont deux variétés fermées à $h - p$ dimensions, si pour toutes les coupures V à p dimensions, on a

$$N(V, V_1) = N(V, V_2),$$

on aura aussi

$$V_1 \sim V_2$$

et inversement.

Bornons-nous au cas où U est fermée. Alors U n'a pas de frontière et toutes les coupures sont fermées.

Le nombre des coupures de p dimensions linéairement indépendantes est $P_p - 1$.

Soient

$$C_1, C_2, \dots, C_\lambda \quad (\lambda = P_p - 1)$$

ces coupures.

Soient ensuite

$$V_i \quad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

μ variétés fermées à $h - p$ dimensions.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait entre elles une homologie

$$\sum k_i V_i \sim 0,$$

c'est que l'on ait

$$\sum k_i N(C_1, V_i) = \sum k_i N(C_2, V_i) = \dots = \sum k_i N(C_\lambda, V_i) = 0.$$

Or, si nombre μ des V_i est supérieur à λ , on pourra toujours trouver des entiers k_i satisfaisant à ces conditions, puisque nous aurons μ arbitraires k_i et λ conditions à remplir. Si donc les V_i sont linéairement indépendantes, on aura

$$\mu \leq \lambda.$$

Donc

$$P_{h-p} \leq P_p;$$

mais, en changeant p en $h - p$, on trouve

$$P_p \leq P_{h-p}.$$

Donc

$$P_p = P_{h-p}.$$

Par conséquent, pour une variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

Ce théorème n'a, je crois, jamais été énoncé; il était cependant connu de plusieurs personnes qui en ont même fait des applications.

Voyons maintenant ce qui se passe quand h est pair pour le nombre moyen $P_{\frac{h}{2}}$. Supposons que h soit multiple de $4 + 2$, de telle façon que $\frac{h}{2}$ soit impair.

On sait que, quand, dans un déterminant, on fait un nombre impair de permutations de lignes, il change de signe. Quand on permutera V et V_1 , qui ont $\frac{h}{2}$ dimensions, le déterminant $f(M, M)$ changera de signe; on aura donc

$$N(V, V_1) = -N(V_1, V);$$

on en déduit

$$N(V, V) = 0.$$

Le symbole $N(V, V)$ n'a, par lui-même, aucun sens, puisque, les deux variétés V et V coïncidant, le nombre des points d'intersection est infini; il faut donc préciser la définition; nous poserons donc

$$N(V, V) = N(V, V'),$$

où

$$V \sim V'.$$

Cela posé, je dis que $P_{\frac{h}{2}}$ est impair. Supposons, en effet, qu'il soit pair et soient

$$V_1, V_2, \dots, V_\mu$$

les μ variétés linéairement indépendantes à $\frac{h}{2}$ dimensions où

$$\mu = P_{\frac{h}{2}} - 1$$

est impair.

Formons le déterminant où le $i^{\text{ème}}$ terme de la $k^{\text{ème}}$ colonne est $N(V_i, V_k)$. Ce déterminant serait gauche, c'est-à-dire que les termes de la diagonale principale seraient nuls et que deux termes symétriques par rapport à cette diagonale seraient égaux et de signe contraire. Comme le nombre des colonnes

serait impair, ce déterminant serait nul. Il en résulterait, contrairement à l'hypothèse, que les variétés V_1, V_2, \dots, V_μ ne seraient pas linéairement indépendantes.

Donc $P_{\frac{h}{2}}$ est impair.

Cela ne serait plus vrai, ni si h était multiple de 4, ni si la variété U était unilatère; car tous nos raisonnements supposent les variétés bilatères. Nous en verrons plus loin des exemples.

§ 10. Représentation géométrique.

Il y a une manière de se représenter les variétés à trois dimensions situées dans l'espace à quatre dimensions, manière qui en facilite singulièrement l'étude.

Considérons, dans l'espace ordinaire, un certain nombre de polyèdres

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

Nous pouvons supposer qu'il existe, dans l'espace à quatre dimensions, un certain nombre de variétés à trois dimensions

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n$$

respectivement homéomorphes à P_1, P_2, \dots, P_n .

Soient F_1 une face du polyèdre P_1 et Φ_1 l'ensemble des points de la frontière de Q_1 qui correspondent aux divers points de F_1 . Soient, de même, F_2 une face de P_2 et Φ_2 l'image de cette face sur la frontière de Q_2 .

Il peut se faire que Φ_1 coïncide avec Φ_2 . Dans ce cas, les deux variétés Q_1 et Q_2 sont contiguës, et l'on passe de l'intérieur de l'une à l'intérieur de l'autre en franchissant Φ_1 .

Dans ce cas, nous dirons que les faces F_1 et F_2 sont *conjuguées*.

Il pourra arriver que les faces F_1 et F_2 appartiennent à un même polyèdre P_1 . Alors la variété à deux dimensions Φ_1 , qui ne diffère pas de la variété à deux dimensions Φ_2 , séparera l'une de l'autre deux portions de la variété Q_1 .

On le comprendra mieux si je compare avec un exemple se passant dans l'espace ordinaire. Considérons un rectangle ABCD et un tore, sur lequel nous tracerons deux coupures, à savoir : une circonférence méridienne et un parallèle; soit H le point d'intersection de ce parallèle et de ce méridien. La surface du tore ainsi découpée sera homéomorphe au rectangle; les deux lèvres de la

coupure formée par le méridien correspondront aux deux côtés AB et CD du rectangle; les deux lèvres de la coupure formée par le parallèle correspondront aux deux côtés AD et BC. On voit l'analogie avec ce qui précède : le rectangle correspond au polyèdre P_1 , le tore découpé à la variété Q_1 , les côtés AB et CD aux deux faces F_1 et F_2 , les deux lèvres de la coupure méridienne aux deux variétés Φ_1 et Φ_2 qui, comme on le voit, coïncident.

Cela posé, imaginons que parmi les faces des n polyèdres P_i il y en ait un certain nombre qui soient conjuguées deux à deux et un certain nombre qui restent *libres*.

Considérons la variété totale V formée par l'ensemble des variétés Q_i . Comme quelques-unes de ces variétés Q_i sont contiguës, il pourra se faire que la variété totale V soit continue : c'est ce que je supposerai.

Si parmi les faces des P_i il n'y en a aucune qui reste *libre*, la variété V sera fermée. Dans le cas contraire, les points qui correspondront aux faces restées libres formeront la frontière complète de V .

On conçoit que la connaissance des polyèdres P_i et celle du mode de conjugaison de leurs faces nous fournissent, dans l'espace ordinaire, une image de la variété V et que cette image suffise pour l'étude de ses propriétés au point de vue de l'*Analysis situs*.

Voyons comment doit être défini le mode de conjugaison des faces. Il est clair d'abord que, pour que deux faces puissent être conjuguées, il faut qu'elles aient le même nombre de côtés. Ensuite, pour connaître complètement le mode de conjugaison, il ne suffit pas de savoir que telle face est conjuguée de telle autre; il faut savoir, en outre, quel est le sommet ou le côté de cette face qui correspond à tel sommet ou à tel côté de sa conjuguée.

Alors seulement le mode de conjugaison sera complètement défini.

A deux faces conjuguées correspond, par définition, une même variété à deux dimensions intérieure à V . Il peut se faire aussi qu'à plusieurs arêtes des polyèdres P corresponde une même ligne intérieure à V , ou qu'à plusieurs sommets de ces polyèdres corresponde un même point intérieur à V . Nous dirons alors que ces arêtes ou ces sommets appartiennent à un même cycle.

Voici comment on peut former les cycles d'arêtes et les cycles de sommets.

Soit A_1 une arête, F'_1 l'une des deux faces qui passent par A_1 , F_2 la conjuguée de F'_1 , A_2 l'arête de F_2 qui correspond à A_1 , F'_2 l'autre face qui passe par A_2 , F_3 la conjuguée de F'_2 , A_3 l'arête correspondant à A_2 , etc.

On s'arrêtera quand on arrivera à une face libre ou quand on sera revenu à l'arête A_1 . Toutes les arêtes A_1, A_2, A_3, \dots formeront un cycle.

De même pour les sommets. Soient S_1 un sommet, F'_1 l'une des faces qui passent par S_1 , F_2 la conjuguée de F'_1 , S_2 le sommet correspondant à S_1 , F'_2 une des faces qui passent par S_2 , etc.

S_1, S_2, S_3, \dots appartiendront à un même cycle.

Seulement ici il passe par chaque sommet plus de deux faces; alors F'_2 , par exemple, peut être choisie de plusieurs manières; on ne devra s'arrêter qu'après avoir épuisé tous les choix possibles.

L'analogie avec la formation des cycles dans la théorie des groupes fuchsien est évidente. Elle le devient plus encore, si l'on suppose qu'il n'y a qu'un seul polyèdre P_1 .

Premier exemple. — L'exemple le plus simple est celui où l'on n'a qu'un seul polyèdre P_1 et où ce polyèdre est un cube $ABCD A'B'C'D'$ dont les sommets ont respectivement pour coordonnées

A.....	o	o	o	A'.....	o	o	1
B.....	o	1	o	B'.....	o	1	1
C.....	1	o	o	C'.....	1	o	1
D.....	1	1	o	D'.....	1	1	1

Je suppose que les faces opposées soient conjuguées et cela de la façon suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} ABDC \equiv A'B'D'C', \\ ACC'A' \equiv BDD'AB', \\ CDD'C' \equiv ABB'A'. \end{array} \right.$$

Voici ce que j'entends par cette notation : la relation

$$ABDC \equiv A'B'D'C'$$

signifie :

- 1° Que les faces $ABDC$ et $A'B'D'C'$ sont conjuguées;
- 2° Que les sommets se rencontrant sur la première de ces faces se rencontrent dans l'ordre circulaire $ABDC$;
- 3° Que les sommets A et A' , B et B' , D et D' , C et C' se correspondent.

Observons en passant que les sommets $ABDC$ se rencontrent sur la première de ces faces dans un ordre circulaire tel qu'en parcourant le périmètre dans le sens correspondant on ait la face à gauche. Au contraire, les sommets corres-

pondants $A'B'D'C'$ se rencontrent sur la seconde face dans un ordre tel qu'en parcourant le périmètre dans ce sens on ait la face à sa droite.

Cette condition doit toujours être remplie si l'on veut que V soit bilatère. Si deux faces F_1 et F_2 sont conjuguées et si un point décrit le périmètre de F_1 de façon à laisser la face à sa gauche, le point correspondant sur F_2 devra décrire le périmètre de cette face en la laissant à sa droite.

Cela posé, supposons donc que le mode de conjugaison soit défini par les relations (1). Il est aisé de voir alors que tous les sommets forment un seul cycle et qu'il y a trois cycles d'arêtes, comprenant respectivement celles des arêtes qui sont parallèles à l'axe des x , à celui des y et à celui des z .

Deuxième exemple. — Conservons toujours notre cube, mais changeons le mode de conjugaison et définissons-le par les relations

$$(2) \quad \begin{cases} ABDC \equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' \equiv DD'C'C, \\ ACC'A' \equiv DD'B'B; \end{cases}$$

il y aura alors deux cycles d'arêtes et deux cycles de sommets et je résume les résultats par les relations suivantes; j'ai mis le signe \equiv entre deux arête (ou deux sommets) pour exprimer qu'elles font partie d'un même cycle.

Deux cycles d'arêtes :

$$\begin{aligned} AB &\equiv B'D' \equiv C'C \equiv B'A' \equiv AC \equiv DD', \\ AA' &\equiv DC \equiv C'A' \equiv B'B \equiv C'D' \equiv DB. \end{aligned}$$

Deux cycles de sommets :

$$\begin{aligned} A &\equiv B' \equiv C' \equiv D, \\ B &\equiv D' \equiv C \equiv A'. \end{aligned}$$

Nous verrons plus tard pour quelles raisons ce mode de conjugaison est inadmissible.

Troisième exemple. — Conservons notre cube avec le mode de conjugaison suivant :

$$(3) \quad \begin{cases} ABDC \equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' \equiv C'CDD', \\ ACC'A' \equiv DD'B'B. \end{cases}$$

On trouve alors :

Quatre cycles d'arêtes :

$$\begin{aligned} AB &\equiv B'D' \equiv C'C, & AA' &\equiv C'D' \equiv DB, \\ AC &\equiv DD' \equiv B'A', & CD &\equiv BB' \equiv A'C'. \end{aligned}$$

Deux cycles de sommets :

$$\begin{aligned} A \equiv B' \equiv C' \equiv D, \\ B \equiv D' \equiv A' \equiv C. \end{aligned}$$

Quatrième exemple. — Soit maintenant

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} ABDC \equiv B'D'C'A', \\ ABB'A' \equiv CDD'C', \\ ACC'A' \equiv BDD'B'. \end{array} \right.$$

On trouve :

Trois cycles d'arêtes :

$$\begin{aligned} AA' \equiv CC' \equiv BB' \equiv DD', \\ AB \equiv CD \equiv B'D' \equiv A'C', \\ AC \equiv BD \equiv D'C' \equiv B'A' \end{aligned}$$

et un seul cycle de sommets.

Cinquième exemple. — Soit un octaèdre régulier; il y aura six sommets dont quatre formeront un carré BCED (les lettres sont rangées dans l'ordre circulaire dans lequel on rencontre les quatre sommets en parcourant le périmètre du carré) et dont deux, A et P, sont en dehors du carré. Soit

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} ABC \equiv FED, \\ ACE \equiv FDB, \\ AED \equiv FBC, \\ ADB \equiv FCE \end{array} \right.$$

le mode de conjugaison; on trouvera six cycles d'arêtes et trois cycles de sommets; chaque arête formera un cycle avec l'arête opposée, c'est-à-dire avec sa symétrique par rapport au centre de symétrie de l'octaèdre, et chaque sommet formant un cycle avec le sommet opposé.

Il est inutile de multiplier davantage les exemples; je me propose de reconnaître maintenant si tous les modes de conjugaison sont admissibles.

Appelons *aster* la figure formée par un certain nombre d'angles solides ayant même sommet et disposés autour de ce sommet de telle sorte que tout point de l'espace appartienne à un et à un seul de ces angles solides.

Dans la figure, on distinguera donc, outre les angles solides eux-mêmes et leur sommet, un certain nombre de faces communes à deux angles solides et un certain nombre d'arêtes communes à plusieurs angles solides.

Je pourrai supposer que les arêtes et les faces sont prolongées indéfiniment, ou bien qu'on les arrête à la surface d'une sphère ayant son centre au sommet

commun des angles solides. Alors ces divers angles solides vont découper sur la sphère un certain nombre de polygones sphériques, de sorte que la surface de la sphère sera subdivisée en polygones sphériques. Cette surface ainsi subdivisée pourra être regardée comme homéomorphe à un polyèdre convexe dont les faces correspondront aux polygones sphériques que je viens de définir.

Alors aux angles solides de l'aster correspondront les faces du polyèdre; aux faces de l'aster correspondront les arêtes du polyèdre et, aux arêtes de l'aster, ses sommets.

Soient S , F et A le nombre des angles solides, des faces et des arêtes de l'aster. Comme le polyèdre doit satisfaire au théorème d'Euler, on devra avoir

$$S - F + A = 2.$$

Revenons maintenant à nos polyèdres

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

et envisageons un cycle de sommets; à tous les sommets de ce cycle correspondra un même point de V que j'appelle M . Parmi les variétés

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n,$$

il y en aura un certain nombre qui auront le point M sur leur frontière; je les appellerai les variétés Q_α et ce seront celles qui correspondront à des polyèdres P_α auxquels appartiendront les divers sommets du cycle.

Considérons maintenant deux des variétés Q_α qui soient contiguës et la variété à deux dimensions qui leur sert de frontière commune. Les variétés à deux dimensions ainsi définies, je les appellerai les Φ_α ; elles correspondront à celles des faces des polyèdres P_α auxquelles appartiennent les divers sommets du cycle.

Nous envisagerons enfin les variétés à une dimension qui sont l'intersection de deux variétés Φ_α et que j'appellerai les L_α . Elles correspondront à celles des arêtes des polyèdres P_α auxquelles appartiennent les divers sommets du cycle.

Envisageons la figure formée par les variétés Q_α , Φ_α , L_α ou plutôt par les points de ces variétés qui satisfont à l'inégalité

$$(7) \quad (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 + (x_4 - x_4^0)^2 < \varepsilon^2.$$

ε est une très petite quantité; x_1^0 , x_2^0 , x_3^0 , x_4^0 sont les coordonnées du point M .

Cette figure est évidemment homéomorphe à un aster dont les faces et les arêtes seraient limitées à une sphère. Soit A cet aster.

Considérons une quelconque des variétés Q_α et, en outre, la variété W formée par ceux de ses points qui satisfont à l'inégalité (7). Cette variété sera continue ou ne le sera pas. Si elle ne l'est pas, je la décomposerai en plusieurs variétés continues, et les diverses variétés continues que l'on pourra ainsi former, je les appellerai les Q'_α . (Le nombre des Q'_α peut ainsi être plus grand que celui des Q_α si l'une des variétés W n'est pas continue.)

Je définirai de même les Φ'_α et les L'_α .

Soient q_α , φ_α , l_α le nombre des Q'_α , des Φ'_α et des L'_α ; ce sera aussi celui des angles solides, des faces et des arêtes de l'aster A .

D'où cette conclusion :

Pour d'un mode de conjugaison soit admissible, il faut que, pour tous les cycles de sommets, on ait

$$q_\alpha - \varphi_\alpha + l_\alpha = 2.$$

Voyons maintenant comment on pourra calculer les nombres q_α , φ_α , l_α pour un cycle de sommets quelconque α :

1° q_α sera le nombre des sommets du cycle.

2° Pour avoir φ_α , on n'a qu'à faire la somme des nombres des faces qui vont passer par les divers sommets du cycle et à diviser par deux. Si, par exemple, le cycle α se compose de trois sommets a , b , c appartenant respectivement aux polyèdres P_1 , P_2 et P_3 ; si le point a est le sommet d'un angle trièdre de sorte que trois faces de P_1 aillent passer par a ; si quatre faces de P_2 vont passer par b et cinq faces de P_3 par c , on aura

$$\varphi_\alpha = \frac{3 + 4 + 5}{2} = 6.$$

3° Pour avoir l_α , on énumérera les arêtes qui aboutissent aux divers sommets du cycle de la manière suivante : toutes les arêtes d'un même cycle d'arêtes ne compteront que pour une seule, si l'une des extrémités appartient au cycle α ; elles compteront pour deux si les deux extrémités appartiennent au cycle α .

Appliquons ces règles aux six exemples dont nous nous sommes occupés plus haut, nous aboutirons au tableau suivant :

Exemple.	q_α .	φ_α .	l_α .
Premier.....	8	12	6
Deuxième.....	4	6	2
Troisième.....	4	6	4
Quatrième.....	8	12	6
Cinquième.....	2	4	4

Il est à remarquer que, dans les exemples 2, 3 et 5, il y a plusieurs cycles de sommets, mais il arrive que les trois nombres q_α , φ_α , l_α ont mêmes valeurs pour tous les cycles d'un même exemple.

Ce tableau montre que la relation

$$q_\alpha - \varphi_\alpha + l_\alpha = 2$$

est satisfaite pour tous nos exemples, sauf pour le second. Le mode de conjugaison du second exemple doit donc être rejeté.

§ 11. Représentation par un groupe discontinu.

Voici un autre mode de représentation qui peut aussi être employé dans certain cas.

Soit (x, y, z) un point de l'espace ordinaire; considérons une série de substitutions qui changent respectivement x , y et z en

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x, y, z), & \psi_1(x, y, z), & \chi_1(x, y, z), \\ \varphi_2(x, y, z), & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \\ \varphi_n(x, y, z), & \psi_n(x, y, z), & \chi_n(x, y, z), \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

Supposons que l'ensemble de ces substitutions forme un groupe proprement discontinu. L'espace va se trouver partagé en une infinité de domaines.

$$D_0, D_1, D_2, \dots,$$

et cela de telle sorte qu'à chaque domaine D_i corresponde une substitution du groupe S_i qui change D_0 en D_i .

Considérons une surface Σ formant une portion de la frontière de D_0 séparant ce domaine D_0 du domaine D_i ; la substitution S_i^{-1} inverse de S_i change D_i en D_0 et comme les points de Σ appartiennent à la frontière de D_i , la transformée de la surface Σ sera une autre partie de la frontière de D_0 .

La frontière de D_0 va ainsi se trouver partagée en portions de surface qui seront conjuguées deux à deux, de telle façon que chacune d'elles sera la transformée de sa conjuguée par une des substitutions du groupe.

Le domaine D_0 , avec sa frontière ainsi subdivisée, sera homéomorphe à un polyèdre dont les faces seront conjuguées deux à deux, comme dans le numéro précédent. On pourra alors, comme dans le numéro précédent,

faire correspondre à ce polyèdre ou, par conséquent, au domaine D_0 , une variété fermée à trois dimensions située dans l'espace à quatre dimensions, et que l'on obtiendra en transportant D_0 dans l'espace à quatre dimensions, puis en déformant ce domaine jusqu'à ce qu'on puisse *coller* l'une contre l'autre les portions conjuguées de sa frontière.

L'analogie avec la théorie des groupes fuchsien est trop évidente pour qu'il soit nécessaire d'insister; je me bornerai à un seul exemple :

Sixième exemple. — Considérons le groupe dérivé des trois substitutions

$$(1) \quad \begin{cases} (x, y, z; x+1, y, z), \\ (x, y, z; x, y+1, z), \\ (x, y, z; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1), \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

J'appellerai ce groupe le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Je dis qu'il est proprement discontinu.

Pour nous en rendre compte, cherchons comment sont distribués dans l'espace les transformés d'un même point

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

D'abord, tous les transformés de ce point, par une combinaison quelconque des deux premières substitutions, seront compris dans la formule

$$(2) \quad x = a + k, \quad y = b + k_1, \quad z = c,$$

k et k_1 étant deux entiers; il est facile de voir d'ailleurs que ces deux substitutions sont permutable.

Transformons maintenant l'ensemble des points (2) par la troisième substitution; nous trouverons

$$(3) \quad x = \alpha(a+k) + \beta(b+k_1), \quad y = \gamma(a+k) + \delta(b+k_1), \quad z = c+1.$$

Si nous posons, pour abrégé,

$$\alpha a + \beta b = a_1, \quad \gamma a + \delta b = b_1,$$

de sorte que le point (a_1, b_1) soit le transformé du point (a, b) par la substitution

$$(x, y; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y),$$

que j'appellerai s .

Nous pourrions alors remplacer les équations (3) par les suivantes :

$$(4) \quad x = a_1 + k', \quad y = b_1 + k'_1, \quad z = c_1 + 1,$$

k' et k'_1 étant deux entiers nouveaux; en appliquant à ces points les deux premières substitutions on retombe donc toujours sur les mêmes points.

Appliquons-leur la troisième substitution.

Soit

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1, \quad b_2 = \gamma a_1 + \delta b_1,$$

de telle sorte que le point a_2, b_2 soit le transformé du point a_1, b_1 par s .

Alors les transformés des points (4) par la troisième substitution seront compris dans la formule

$$(5) \quad x = a_2 + k'', \quad y = b_2 + k''_1, \quad z = c + 2,$$

k'' et k''_1 étant deux entiers.

En général, supposons que les transformés successifs du point (a, b) par la substitution s soient $a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n; \dots$ et, de même, que les transformés successifs par la substitution inverse soient $a_{-1}, b_{-1}; a_{-2}, b_{-2}; \dots$

Alors tous les transformés du point (a, b, c) par les substitutions du groupe (1) seront donnés par la formule

$$x = a_n + k, \quad y = b_n + k_1, \quad z = c + n,$$

où n, k et k_1 sont trois entiers arbitraires.

On voit aisément d'ailleurs que le groupe dérivé des deux premières substitutions est permutable à la troisième.

Le domaine fondamental D_0 est un cube dont le côté est égal à 1 et limité par les six plans

$$x; y; z = 0; 1.$$

Le cas le plus simple est celui où

$$\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0,$$

parce qu'alors nos trois substitutions se réduisent à

$$(x, y, z; x + 1, y, z; x, y + 1, z; x, y, z + 1).$$

Chacune d'elles change une des faces du cube en la face opposée; nous retom-
bons donc tout simplement sur notre premier exemple.

Mais la manière dont la superficie du cube D_0 se subdivise en régions conjuguées n'est pas toujours aussi simple.

Supposons, par exemple,

$$\alpha = \beta = \delta = 1, \quad \gamma = 0;$$

chacune des faces parallèles à l'axe des z sera encore conjuguée de la face opposée; mais pour les faces $z = 0$, $z = 1$ perpendiculaires à l'axe des z , cela sera plus compliqué.

Supposons que les points ABCD, A'B'C'D' aient mêmes coordonnées que dans nos quatre premiers exemples, Chacune des faces ABCD, A'B'C'D' devra être partagée en deux triangles, à savoir : ABC et BCD d'une part, A'D'C' et A'B'D' d'autre part, et la loi de conjugaison des faces sera exprimée par les relations

$$\begin{aligned} ACC'A' &\equiv BDD'A', \\ CDD'C' &\equiv ABB'A', \\ ABC &\equiv A'D'C', \\ BCD &\equiv B'A'D'. \end{aligned}$$

Plus généralement, les faces parallèles de l'axe des z resteront conjuguées deux à deux, mais les faces perpendiculaires à l'axe des z devront être décomposées en polygones plus petits, d'autant plus nombreux que les nombres α , β , γ , δ seront plus grands et qui seront conjugués deux à deux suivant une loi plus ou moins compliquée.

Un cas simple est celui-ci :

$$\alpha = \delta = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1.$$

Dans ce cas, le mode de conjugaison est le même que dans notre quatrième exemple.

§ 12. Groupe fondamental.

Nous sommes ainsi conduit à la notion du groupe fondamental d'une variété.

Soient

$$F_1, F_2, \dots, F_\lambda,$$

λ fonctions des coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n d'un point M d'une variété V définie par les relations

$$f_\alpha = 0, \quad \varphi_\beta > 0.$$

Je ne suppose pas que les fonctions F soient uniformes. Lorsque le point M, partant de sa position initiale M_0 , reviendra à cette position, après avoir

parcouru un chemin quelconque, il pourra se faire que les fonctions F ne reviennent pas à leurs valeurs primitives.

Mais pour mieux fixer les idées et bien que cela n'ait rien d'essentiel, supposons que les fonctions F soient définies de la manière suivante. Elles devront satisfaire à des équations différentielles de la forme

$$(1) \quad dF_i = X_{i,1} dx_1 + X_{i,2} dx_2 + \dots + X_{i,n} dx_n,$$

où les coefficients $X_{i,k}$ seront des fonctions données des x_k et des F_i . Ces fonctions devront être uniformes, finies et continues, ainsi que leurs dérivées pour toutes les valeurs des F ainsi que pour tous les points de V et même pour tous les points suffisamment voisins de V .

Je suppose également que, pour tous les points suffisamment voisins de V , les équations (1) satisfassent aux conditions d'intégrabilité, qui peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{dX_{i,k}}{dx_q} + \frac{dX_{i,k}}{dF_1} X_{1,q} + \frac{dX_{i,k}}{dF_2} X_{2,q} + \dots + \frac{dX_{i,k}}{dF_\lambda} X_{\lambda,q} \\ & = \frac{dX_{i,q}}{dx_k} + \frac{dX_{i,q}}{dF_1} X_{1,k} + \frac{dX_{i,q}}{dF_2} X_{2,k} + \dots + \frac{dX_{i,q}}{dF_\lambda} X_{\lambda,k}. \end{aligned}$$

Si alors le point M décrit sur la variété V un contour infiniment petit, les fonctions F reviendront à leurs valeurs primitives. Il en sera encore de même, si le point M décrit sur la variété V un *lacet*, c'est-à-dire s'il va d'abord de M_0 en M_1 par un chemin quelconque M_0BM_1 , s'il décrit ensuite un contour infiniment petit et si, enfin, il revient de M_1 à M_0 par le *même* chemin M_1BM_0 .

Mais il pourra n'en plus être de même s'il décrit un contour fermé fini.

Supposons, par exemple, que nous soyons dans l'espace ordinaire et que notre variété V soit un tore. On pourra évidemment imaginer que les fonctions F reviennent à leurs valeurs primitives, quand le point M décrira un lacet sur ce tore, mais qu'il n'en soit plus de même si le point M décrit une circonférence méridienne ou un parallèle.

Les valeurs finales des fonctions F , quand le mobile M , partant d'un point initial M_0 , y reviendra après avoir décrit un contour fermé; ces valeurs finales, dis-je, dépendront naturellement des valeurs initiales.

Soient donc F_a^0 et F_a^1 les valeurs initiale et finale de F_a . Les F_a^1 seront des fonctions des F_a^0 ou, en d'autres termes, les fonctions F subiront, quand le point M décrira le contour fermé considéré, une certaine substitution, qui changera les F_a^0 en F_a^1 .

L'ensemble de toutes les substitutions que les fonctions F subiront ainsi,

quand le point M décrira tous les contours fermés que l'on peut tracer sur la variété V en partant du point initial M_0 , formera évidemment un groupe que j'appelle g .

Maintenant considérons un contour fermé M_0BM_0 tracé sur V et partant du point initial M_0 . Si ce contour fermé se réduit à un lacet, je conviendrai d'écrire

$$M_0BM_0 \equiv 0.$$

Si maintenant M_0AM_1 , M_0BM_1 , M_0CM_1 sont trois chemins différents tracés sur V et allant de M_0 à M_1 , je conviendrai d'écrire

$$M_0AM_1CM_0 \equiv M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0.$$

Il importe de remarquer que $M_0AM_1CM_0$ n'est pas la même chose que $M_0CM_1AM_0$, ni $M_0AM_1BM_0 + M_0BM_1CM_0$ la même chose que

$$M_0BM_1CM_0 + M_0AM_1BM_0;$$

on ne peut pas intervertir l'ordre des termes d'une somme.

Il résulte de cette convention que l'on aura

$$M_0BM_0 \equiv 0,$$

si le contour fermé M_0BM_0 constitue la frontière complète d'une variété à deux dimensions faisant partie de V ; et, en effet, ce contour fermé pourra alors être décomposé en un nombre très grand de lacets (¹).

Nous sommes ainsi conduit à envisager des relations de la forme

$$k_1 C_1 + k_2 C_2 \equiv k_3 C_3 + k_4 C_4,$$

où les k sont des entiers et les C des contours fermés tracés sur V et partant de M_0 . Ces relations, que j'appellerai des *équivalences*, ressemblent aux homologies que j'ai étudiées plus haut. Elles en diffèrent :

1° Parce que, dans les homologies, les contours peuvent partir d'un point initial quelconque;

2° Parce que, dans les homologies, on a le droit d'intervertir l'ordre des termes d'une somme.

On pourra ajouter deux équivalences l'une à l'autre, mais à la condition de ne pas intervertir l'ordre des termes, si donc on a

$$A \equiv B \quad \text{et} \quad C \equiv D,$$

(¹) Cet alinéa est manifestement faux; H. Poincaré le rectifie ultérieurement (Cinquième Complément, p. 449; p. 465 et 466).

on pourra en conclure

$$A + C \equiv B + D,$$

mais non

$$C + A \equiv B + D.$$

Ajoutons que de

$$2A \equiv 0,$$

on n'a pas le droit de conclure

$$A \equiv 0.$$

Cela posé, il est clair que l'on peut imaginer un groupe G satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A chaque contour fermé M_0BM_0 correspondra une substitution S du groupe ;

2° La condition nécessaire et suffisante pour que S se réduise à la substitution identique, c'est que

$$M_0BM_0 \equiv 0;$$

3° Si S et S' correspondent aux contours C et C' et si

$$C'' \equiv C + C',$$

la substitution correspondant à C'' sera SS' .

Le groupe G s'appellera le *groupe fondamental* de la variété V .

Comparons-le au groupe g des substitutions subies par les fonctions F .

Le groupe g sera isomorphe à G .

L'isomorphisme pourra être holoédrique.

Il pourra être mériédrique si un contour fermé M_0BM_0 non décomposable en lacets ramène les fonctions F à leurs valeurs primitives.

§ 13. Équivalences fondamentales.

Le groupe G sera dérivé d'un certain nombre de substitutions principales S_1, S_2, \dots, S_p . A chacune d'elles correspondra un contour fermé, de sorte que nous aurons p contours fermés fondamentaux C_1, C_2, \dots, C_p et qu'un contour fermé quelconque soit équivalent à une combinaison des contours fondamentaux se succédant dans un certain ordre.

Ces contours fondamentaux ne sont pas, en général, tout à fait indépendants et il y a entre eux certaines relations que j'appellerai *équivalences fondamentales*.

Supposons, par exemple, qu'on ait entre les contours fondamentaux, l'équivalence

$$k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_1' C_1 + k_3 C_3 \equiv 0.$$

Cela signifie que la substitution $S_1^{k_1} S_2^{k_2} S_1^{k_1'} S_3^{k_3}$ du groupe G se réduit à la substitution identique.

Les équivalences fondamentales nous font donc connaître la forme du groupe G .

Supposons que la variété V ait été définie par le mode de représentation du § 10 et que nous n'ayons qu'un seul polyèdre P_1 . Il est clair qu'on obtiendra tous les contours fondamentaux de la manière suivante. Soient M_0 un point intérieur à P_1 , A un point d'une des faces de P_1 , A' le point correspondant sur la face conjuguée. On ira de M_0 à A , puis de A' à M_0 sans sortir de P_1 ; le chemin correspondant sur la variété V sera fermé.

Il y aura donc autant de contours fondamentaux que de paires de faces.

Voici maintenant comment on formera les équivalences fondamentales :

Considérons un cycle d'arêtes. Soit, par exemple, une arête, intersection des faces F_1 et F'_μ , et que je désignerai pour cette raison sous le nom d'*arête* $F_1 F'_\mu$; soient F'_1 la face conjuguée de F_1 et F_2 , F'_1 l'arête correspondante à $F_1 F'_\mu$ sur cette face; soient F'_2 la face conjuguée de F_2 et F_3 , F'_2 l'arête correspondante à $F_2 F'_1$ sur cette face; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur la face F'_μ et l'arête $F_1 F'_\mu$.

Remarquons qu'en faisant cette opération l'on pourra retomber, plusieurs fois, sur la même face.

Soient A_i un point de F_i et A'_i le point correspondant de F'_i ; soit C_i le contour fondamental

$$M_0 A_i + A'_i M_0.$$

Alors, on aura l'équivalence fondamentale

$$C_1 + C_2 + \dots + C_\mu \equiv 0.$$

Il y aura donc autant d'équivalences fondamentales que de cycles d'arêtes.

Quand on aura formé ainsi les équivalences fondamentales, on en déduira les homologies fondamentales qui n'en diffèrent que parce que l'ordre des termes est indifférent. La connaissance de ces homologies fera immédiatement connaître le nombre de Betti P_1 .

Appliquons ces principes aux exemples cités plus haut, et remarquons que,

toutes les variétés citées dans ces exemples étant fermées et à trois dimensions, on aura

$$P_1 = P_2.$$

Premier exemple :

$$\begin{aligned} (C_1) \quad & ABDC \equiv A'B'D'C', \\ (C_2) \quad & ABB'A' \equiv CDD'C', \\ (C_3) \quad & ACC'A' \equiv BDD'B'. \end{aligned}$$

Voici ce que j'entends par la notation

$$(C_1) \quad ABDC \equiv A'B'D'C'.$$

Je veux dire que la face $ABDC$ est conjuguée de $A'B'D'C'$ et que α désignant un point de $ABDC$ et α' un point de $A'B'D'C'$, le contour fondamental $M_0 \alpha + \alpha' M_0$ est désigné par C_1 .

Équivalences fondamentales :

$$C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \quad C_1 + C_3 \equiv C_3 + C_1, \quad C_2 + C_3 \equiv C_3 + C_2.$$

Les homologies fondamentales se réduisent à des identités

$$P_1 = P_2 = 4.$$

Je passe tout de suite au troisième exemple, puisque nous avons vu que le second doit être rejeté.

Troisième exemple

$$\begin{aligned} (C_1) \quad & ABDC \equiv B'D'C'A, \\ (C_2) \quad & ABB'A' \equiv C'CDD', \\ (C_3) \quad & ACC'A' \equiv DD'B'B. \end{aligned}$$

Équivalences fondamentales :

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 + C_2 &\equiv 0, & C_1 - C_3 - C_2 &\equiv 0, \\ C_2 - C_1 - C_3 &\equiv 0, & C_3 - C_2 - C_1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$2C_1 \equiv 2C_2 \equiv 2C_3, \quad 4C_1 \equiv 0.$$

Homologies fondamentales :

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0,$$

d'où

$$P_1 = P_2 = 1.$$

On peut donner de ce résultat une interprétation géométrique simple.

Le groupe G est d'ordre fini et se compose seulement de huit substitutions distinctes correspondant aux contours suivants :

$$o, C_1, C_2, C_3, 2C_1, 3C_1, 3C_2, 3C_3.$$

Le groupe est isomorphe au groupe suivant :

$$\begin{aligned} (x, y, z, t; -y, x, -t, z; \\ -t, -z, y, x; z, -t, -x, y; \\ -x, -y, -z, -t; y, -x, t, -z; \\ t, z, -y, -x; -z, t, x, -y). \end{aligned}$$

Ce groupe, qui transforme en lui-même l'hypercube à quatre dimensions, dont les huit faces ont pour équations

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 1, \quad t = \pm 1,$$

pourrait être appelé le groupe *hypercubique*.

Quatrième exemple :

$$\begin{aligned} (C_1) \quad & ABCD \equiv B'D'C'A', \\ (C_2) \quad & ABB'A' \equiv CDD'C', \\ (C_3) \quad & ACC'A' \equiv BDD'B'. \end{aligned}$$

Équivalences fondamentales :

$$C_2 + C_3 \equiv C_3 + C_2, \quad C_3 + C_1 \equiv C_1 + C_2, \quad -C_2 + C_1 \equiv C_1 + C_3.$$

Homologies fondamentales :

$$C_2 \sim C_3 \sim o,$$

d'où

$$P_1 = P_2 = 2.$$

Cinquième exemple :

$$\begin{aligned} (C_1) \quad & ABC \equiv FED, \\ (C_2) \quad & ACE \equiv FDB, \\ (C_3) \quad & AED \equiv FBC, \\ (C_4) \quad & ADB \equiv FCE, \end{aligned}$$

Équivalences fondamentales :

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4, \quad 2C_1 \equiv o,$$

d'où

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim C_4 \sim o,$$

et

$$P_1 = P_2 = 1.$$

Le groupe G se réduit à deux substitutions correspondant aux contours o et C_1 .

Sixième exemple. — Le groupe G est évidemment holomorphe au groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Les trois substitutions

$$\begin{aligned} & (x, y, z; x+1, y, z), \\ & (x, y, z; x, y+1, z), \\ & (x, y, z; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, z+1) \end{aligned}$$

correspondront respectivement aux contours fondamentaux C_1, C_2 et C_3 .

Nous avons d'abord les équivalences fondamentales

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &\equiv C_2 + C_1, \\ C_1 + C_3 &\equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 &\equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2, \end{aligned}$$

d'où il résulte d'abord que toute combinaison des contours fondamentaux peut se mettre sous la forme

$$m_3 C_3 + m_1 C_1 + m_2 C_2,$$

les m étant des entiers. Et comme cette expression ne pourrait être équivalente à 0 que si les trois entiers m étaient nuls, il en résulte que nous possédons là toutes les équivalences fondamentales.

Homologies fondamentales :

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) C_1 + \gamma C_2 &\sim 0, \\ \beta C_1 + (\delta - 1) C_2 &\sim 0. \end{aligned}$$

Si ces deux homologies ne sont pas distinctes, on aura

$$C_1 \sim C_2 \sim 0,$$

d'où

$$P_1 = P_2 = 2;$$

c'est ce qui arrive dans le cas général et particulièrement pour notre quatrième exemple.

Si le déterminant de ces homologies est nul, c'est-à-dire que

$$(\alpha - 1)(\delta - 1) - \beta\gamma = 0$$

ou

$$\alpha + \delta = 2,$$

on aura

$$P_1 = P_2 = 3,$$

sauf le cas où les deux homologies se réduiraient à des identités. C'est ce qui arrive pour

$$\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0,$$

c'est-à-dire pour notre premier exemple; on a alors

$$P_1 = P_2 = 4.$$

§ 14. Conditions de l'homéomorphisme.

On sait que deux variétés fermées à deux dimensions qui ont même nombre de Betti sont homéomorphes. C'est ce qui résulte, par exemple, de l'étude des périodes des fonctions abéliennes. Considérons une surface de Riemann R et soit z la variable imaginaire correspondante; on pourra introduire une variable imaginaire nouvelle t , telle que z soit une fonction fuchsienne de t et que t , considéré comme fonction de z , n'ait aucun point singulier sur la surface R . Tous les groupes fuchsien correspondant à diverses surfaces de Riemann ayant même ordre de connexion seront isomorphes.

Ce groupe fuchsien ne sera, d'ailleurs, évidemment autre chose que le groupe fondamental g , relatif à la surface R considérée comme une variété à deux dimensions.

On remarquera que tous les groupes fuchsien ne sont pas susceptibles de définir ainsi une variété fermée à deux dimensions. Considérons le polygone fuchsien fondamental R_0 auquel, si la fonction fuchsienne existe dans tout le plan, il faudra ajointre son symétrique R'_0 par rapport à l'axe des quantités réelles; mais alors le domaine $R_0 + R'_0$ ne sera plus toujours simplement connexe. A chaque point de la variété fermée V devrait correspondre un point de R_0 (ou de $R_0 + R'_0$) et un seul, et réciproquement. Supposons qu'il existe un ou plusieurs cycles de sommets et que la somme des angles de ce cycle soit zéro ou $\frac{2\pi}{n}$, n étant un entier plus grand que 1; soit alors M le point de \hat{V} qui correspond à ce cycle de sommets et envisageons un lacet infiniment petit enveloppant M . D'après la définition du groupe g , à ce lacet doit correspondre, dans le groupe g , la substitution identique et, dans le groupe fuchsien, une substitution non identique. Le groupe fuchsien ne peut donc être isomorphe à g .

Restent alors les groupes fuchsien de la première famille tels que la somme des angles d'un cycle quelconque soit 2π , et ceux de la troisième famille. Mais ceux-ci doivent également être rejetés. En effet, si le groupe est de la troisième famille, le domaine $R_0 + R'_0$ n'est plus simplement connexe. Soit C un contour fermé tracé dans ce domaine et tel que l'on n'ait pas

$$c \sim 0.$$

A ce contour correspondra, dans le groupe fuchsien, une substitution identique (puisque la variable z sera revenue à son point de départ) et, dans le groupe g , une substitution non identique. Ici encore, le groupe fuchsien ne peut être isomorphe à g .

Il ne reste donc que les groupes de la première famille et tels que la somme des angles de chaque cycle soit égale à 2π .

Tous ceux de ces groupes qui sont du même genre sont isomorphes entre eux, et c'est pour cette raison que toutes les variétés fermées à deux dimensions qui ont même nombre de Betti sont homéomorphes.

En est-il de même quand le nombre des dimensions est plus grand; deux variétés fermées à h dimensions ($h > 2$) qui ont mêmes nombres de Betti sont-elles homéomorphes?

Nous allons voir que non et c'est ce qui nous fait voir combien les questions d'*Analysis situs* se compliquent quand le nombre des dimensions s'accroît.

Il est clair d'abord que, si deux variétés sont homéomorphes, leurs groupes g seront isomorphes.

Revenons maintenant à notre sixième exemple et recherchons si deux groupes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ peuvent être isomorphes.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ces deux groupes; soient $C_1, C_2, C_3; C'_1, C'_2, C'_3$ les trois contours fondamentaux de chacun de ces groupes;

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1, \\ C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2. \end{array} \right.$$

$$(1 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} C'_1 + C'_2 \equiv C'_2 + C'_1, \\ C'_1 + C'_3 \equiv C'_3 + \alpha' C'_1 + \gamma' C'_2, \\ C'_2 + C'_3 \equiv C'_3 + \beta' C'_1 + \delta' C'_2, \end{array} \right.$$

les équivalences fondamentales des deux groupes.

Supposons les deux groupes isomorphes et soient

$$\begin{aligned} a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2, \\ b_3 C_3 + b_1 C_1 + b_2 C_2, \\ c_3 C_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2, \end{aligned}$$

les contours du premier groupe qui correspondent respectivement aux contours C'_1, C'_2, C'_3 du second groupe; les a , les b et les c sont des entiers; nous avons vu en effet, plus haut, que tout contour du premier groupe peut se mettre sous cette forme.

Pour que l'isomorphisme ait lieu, il faut qu'en substituant, dans les équivalences (1 bis), $a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + \dots$ à la place de C'_1, C'_2, C'_3 , on retrouve les équivalences (1).

Il faut donc d'abord que les substitutions (que je désigne par les mêmes signes que les contours correspondants)

$$\begin{aligned} a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2, \\ b_3 C_3 + b_1 C_1 + b_2 C_2, \end{aligned}$$

soient permutables. Pour simplifier l'écriture, je vais employer la notation suivante :

Je poserai

$$a_3 = h, \quad b_3 = k, \quad a_1 C_1 + a_2 C_2 = S_0; \quad b_1 C_1 + b_2 C_2 = T_0,$$

de sorte que nos deux premières substitutions se réduisent à $h C_3 + S_0$, $k C_3 + T_0$.

Je désignerai par S_1 ce que devient S_0 quand on y fait subir aux coefficients la substitution linéaire $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, c'est-à-dire quand on remplace a_1 et a_2 par

$$\alpha a_1 + \beta a_2 \quad \text{et} \quad \gamma a_1 + \delta a_2.$$

S_2 sera ce que devient S_1 , quand on fait subir à ses coefficients la même substitution et ainsi de suite; de même, T_1, T_2, \dots seront les transformés successifs de T_0 .

Cela posé, on aura, en vertu des équivalences (1),

$$S_0 + h C_3 \equiv h C_3 + S_h.$$

Pour que nos substitutions soient permutables, il faut donc que

$$h C_3 + S_0 + k C_3 + T_0 \equiv k C_3 + T_0 + h C_3 + S_0$$

ou

$$(k + h) C_3 + S_k + T_0 \equiv (k + h) C_3 + T_h + S_0$$

ou

$$(2) \quad S_k + T_0 \equiv T_h + S_0,$$

Supposons d'abord que h soit égal à k et différent de 0; l'équivalence précédente pourra être remplacée par les égalités

$$\begin{aligned} (\alpha_h - 1)(a_1 - b_1) + \beta_h(a_2 - b_2) &= 0, \\ \gamma_h(a_1 - b_1) + (\delta_h - 1)(a_2 - b_2) &= 0, \end{aligned}$$

où j'ai désigné par

$$\begin{vmatrix} \alpha_h & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_h \end{vmatrix}$$

les coefficients de la puissance $h^{\text{ième}}$ de la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Ces égalités peuvent être satisfaites de deux manières :

1° Ou bien si

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2,$$

auquel cas les deux substitutions

$$h C_3 + S_0, \quad k C_3 + T_0$$

seraient identiques;

2° Ou bien si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_h - 1 & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_h - 1 \end{vmatrix}$$

est nul. Mais cela ne peut arriver que si l'on a

$$s^h = 1,$$

s étant une des racines de l'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha - s & \beta \\ \gamma & \delta - s \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire si la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est *elliptique*; ce qui veut dire que les racines de l'équation (2) en s sont imaginaires (dans l'espèce, elles doivent être égales à une racine $h^{\text{ième}}$ de l'unité) ou *parabolique*, ce qui veut dire que les racines de l'équation (2) sont égales.

Supposons donc que $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ soit *hyperbolique*, c'est-à-dire que les racines de l'équation en s soient réelles; et ne supposons plus $h = k$.

Alors la puissance $h^{\text{ième}}$ de

$$h C_3 + S_0$$

et la puissance $h^{\text{ième}}$ de

$$k C_3 + T_0$$

devront être permutables; soient

$$h' C_3 + S'_0,$$

$$k' C_3 + T'_0$$

ces deux puissances; comme on aura

$$h' = k' = hk,$$

ces deux puissances, d'après ce qui précède, devraient être identiques. Dans le

groupe $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ supposé isomorphe, la puissance $k^{\text{ième}}$ de C'_1 devrait être identique à la puissance $h^{\text{ième}}$ de C'_2 . Comme il ne saurait en être ainsi, on devra avoir

$$h = k = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_3 = b_3 = 0.$$

Passons au cas des substitutions elliptiques auxquelles nous assimilerons la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Alors le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_h - 1 & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_h - 1 \end{vmatrix}$$

peut s'annuler pour une certaine valeur de h que j'appelle ν .

Mais alors la substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_\nu & \beta_\nu \\ \gamma_\nu & \delta_\nu \end{vmatrix}$$

se réduit à la substitution identique, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha_\nu = \delta_\nu = 1, \quad \beta_\nu = \gamma_\nu = 0.$$

Alors il arrive d'abord que νC_3 est permutable à C_1 et à C_2 et plus généralement que deux substitutions

$$\begin{aligned} a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2, \\ b_3 C_3 + b_1 C_1 + b_2 C_2, \end{aligned}$$

sont permutables, pourvu que a_3 et b_3 soient divisibles par ν . Cette condition suffisante est d'ailleurs nécessaire, en excluant, comme nous l'avons fait plus haut, le cas où deux puissances de nos deux substitutions seraient identiques.

Pour le démontrer, je vais encore employer une notation plus abrégée; le symbole

$$m_1 C_1 + m_2 C_2$$

n'a de sens que si m_1 et m_2 sont entiers; mais le suivant

$$\mu(a'_1 C_1 + a'_2 C_2) + \rho(b'_1 C_1 + b'_2 C_2)$$

peut avoir un sens alors même que μ , ρ , les a' et les b' ne sont pas entiers, pourvu que

$$\mu a'_1 + \rho b'_1, \quad \mu a'_2 + \rho b'_2$$

soient entiers. Il est évident que ce qui nous permet d'agir ainsi, c'est que C_1 et C_2 sont permutables,

Choisissons alors

$$\begin{aligned}\xi_0 &= a'_1 C_1 + a'_2 C_2, \\ \eta_0 &= b'_1 C_1 + b'_2 C_2,\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\xi_1 = \xi_0 s, \quad \eta_1 = \eta_0 s^{-1};$$

ξ_1 et η_1 sont, d'après nos conventions, les transformées de ξ_0 et η_0 par la substitution linéaire $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; s est une des racines de l'équation (2). D'après la théorie des substitutions linéaires, on peut toujours choisir les nombres a' et b' (qui seront généralement irrationnels et même imaginaires) de façon qu'il en soit ainsi; posons alors

$$S_0 = \mu \xi_0 + \rho \eta_0, \quad T_0 = \mu' \xi_0 + \rho' \eta_0.$$

On aura

$$\mu \xi_0 + \rho \eta_0 + h C_3 \equiv h C_3 + \mu s^h \xi_0 + \rho s^{-h} \eta_0$$

et

$$k(h C_3 + \mu \xi_0 + \rho \eta_0) \equiv kh C_3 + \mu \frac{s^{kh} - 1}{s^h - 1} \xi_0 + \rho \frac{s^{-kh} - 1}{s^{-h} - 1} \eta_0.$$

Cela posé, l'équivalence (λ) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mu(s^k - 1) &= \mu'(s^h - 1), \\ \rho(s^{-k} - 1) &= \rho'(s^{-h} - 1).\end{aligned}$$

Si k et h ne sont pas divisibles par ν , ces relations ne sont pas satisfaites identiquement et nous pourrions poser

$$\mu = (s^h - 1)\varepsilon, \quad \mu' = (s^k - 1)\varepsilon, \quad \rho = (s^{-h} - 1)\zeta, \quad \rho' = (s^{-k} - 1)\zeta.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}k(h C_3 + S_0) &\equiv kh C_3 + \varepsilon(s^{kh} - 1)\xi_0 + \zeta(s^{-kh} - 1)\eta_0, \\ h(k C_3 + T_0) &\equiv kh C_3 + \varepsilon(s^{kh} - 1)\xi_0 + \zeta(s^{-kh} - 1)\eta_0\end{aligned}$$

ce qui montre que la puissance $k^{\text{ième}}$ de notre première substitution est identique à la puissance $h^{\text{ième}}$ de la seconde. Comme nous excluons ce cas, nous concluons que l'on doit avoir

$$a_3 \equiv b_3 \equiv 0 \pmod{\nu}.$$

Mais on peut aller plus loin; d'abord si nous appelons C'_1 et C'_2 nos deux premières substitutions, nous pouvons les remplacer par

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2, \quad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2,$$

les ω étant des entiers tels que $\omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1 = 1$. Nous pouvons donc toujours supposer que $b_3 = 0$ (sans quoi l'on remplacerait C'_1 et C'_2 par $\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2$ et $\omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2$ en choisissant les ω de façon à annuler le nouveau b_3).

Mais le sous-groupe dérivé de C'_1 et de C'_2 , à cause de l'isomorphisme avec $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, doit être permutable à toutes les substitutions du groupe et, en particulier, à C_3 .

Ecrivons donc que la substitution

$$-C_3 + C'_2 + C_3$$

fait partie du sous-groupe dérivé de C'_1 et de C'_2 . Nous avons

$$\begin{aligned} C'_2 &= \mu' \xi_0 + \rho' \eta_0, \\ -C_3 + C'_2 + C_3 &= \mu' s \xi_0 + \rho' s^{-1} \eta_0. \end{aligned}$$

Pour que cette seconde substitution fasse partie de son groupe, il faut, si α_3 n'est pas nul, que cette dernière substitution soit un multiple de C'_2 .

Or, cela ne peut évidemment avoir lieu que si $s = s^{-1} = -1$.

Si on laisse ce cas de côté, on devra avoir

$$\alpha_3 = b_3 = 0.$$

Si donc nous laissons de côté le cas où

$$\alpha + \delta = \pm 2$$

[substitutions paraboliques et substitution $(-1, 0, 0, -1)$], nous devons avoir

$$\alpha_3 = b_3 = 0.$$

J'ajoute que c_3 devra être égal à 1, sans quoi les combinaisons des trois substitutions fondamentales

$$\begin{aligned} a_1 C_1 + a_2 C_2 &\equiv C'_1, \\ b_1 C_1 + b_2 C_2 &\equiv C'_2, \\ c_3 C_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2 &\equiv C'_3, \end{aligned}$$

ne pourraient pas reproduire toutes les substitutions

$$m_3 C_3 + m_1 C_1 + m_2 C_2$$

du groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, mais seulement celles où l'entier m_3 serait divisible par c_3 .

Maintenant toute substitution du groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, doit pouvoir être mise sous la forme

$$m_3 C'_3 + m_1 C'_1 + m_2 C'_2.$$

Pour que C_1 puisse être mis sous la forme, il faut d'abord que m_3 soit nul; et ensuite que l'on ait identiquement

$$C_1 = m_1(a_1 C_1 + a_2 C_2) + m_2(b_1 C_1 + b_2 C_2)$$

et, de même,

$$C_2 = m'_1(a_1 C_1 + a_2 C_2) + m'_2(b_1 C_1 + b_2 C_2).$$

Comme les m et les m' sont entiers, j'en conclurai que le déterminant

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1.$$

Mais j'ai dit plus haut que l'on pouvait remplacer C'_1 et C'_2 par

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2, \quad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2.$$

Si $a_1 b_2 - a_2 b_1$ est égal à 1, nous pourrions choisir les ω de telle façon que

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2 = C_1, \quad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2 = C_2,$$

c'est-à-dire que nous pourrions toujours supposer

$$a_1 = b_2 = 1, \quad a_2 = b_1 = 0.$$

Mais alors l'équivalence (*1 bis*)

$$C'_1 + C'_3 \equiv C'_3 + \alpha' C'_1 + \gamma' C'_2$$

devient

$$C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha' C_1 + \gamma' C_2,$$

d'où

$$\alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma';$$

on trouverait, de même,

$$\beta = \beta', \quad \delta = \delta'.$$

Nous devons donc conclure que les deux groupes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ et $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ne peuvent être isomorphes que si l'on peut passer de l'un à l'autre en changeant C'_1 et C'_2 en

$$\omega_1 C'_1 + \omega_2 C'_2, \quad \omega'_1 C'_1 + \omega'_2 C'_2.$$

Cela peut s'énoncer d'une autre manière.

Soit

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

une substitution linéaire à coefficients entiers et telle que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Soit

$$T = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega'_1 & \omega'_2 \end{vmatrix}.$$

une autre substitution linéaire à coefficients entiers et telle que

$$\omega_1 \omega'_2 - \omega'_1 \omega_2 = 1.$$

La substitution $T^{-1}ST$, qui s'appelle la *transformée* de S par T , est aussi linéaire à coefficients entiers et a pour déterminant 1.

Si deux substitutions linéaires S et S' à coefficients entiers et de déterminant 1 sont transformées l'une de l'autre par une substitution de la forme T , je dirai que S et S' appartiennent à la même classe.

Il est clair d'abord que S et S' ne peuvent appartenir à la même classe que si la somme $\alpha + \delta$ a la même valeur pour l'une et pour l'autre, mais cette condition n'est pas suffisante et à une même valeur entière de $\alpha + \delta$ correspondront plusieurs classes de substitutions linéaires, de la même façon qu'à un même déterminant correspondent plusieurs classes de formes quadratiques.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les deux groupes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ soient isomorphes, c'est que les deux substitutions linéaires $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ appartiennent à la même classe.

Nous avons laissé de côté le cas où

$$\alpha + \delta = \pm 2.$$

Si $\alpha + \delta = 2$, la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sera de la même classe que $(1, h, 0, 1)$; le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sera isomorphe à $(1, h, 0, 1)$.

Celui-ci contient une substitution remarquable C_2 , qui n'est multiple d'aucune autre et qui est permutable à toutes les substitutions du groupe. On voit d'ailleurs sans peine que si h n'est pas nul, C_2 est la seule substitution qui jouisse de cette propriété.

Nous pouvons d'ailleurs laisser de côté le cas où h est nul, car le groupe $(1, 0, 0, 1)$, dont toutes les substitutions sont permutables deux à deux, ne peut être évidemment isomorphe à aucun autre groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Si $\alpha + \delta = -2$, le groupe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sera isomorphe à $(-1, h, 0, -1)$. Celui-ci contient une substitution remarquable C_2 , qui n'est multiple d'aucune autre, qui n'est pas permutable à toutes les substitutions du groupe, mais qui est permutable *au double* de toutes ces substitutions. Si h n'est pas nul, C_2 est la seule substitution qui jouisse de cette propriété. Si, au contraire, h est nul, il y en a une infinité, ce qui prouve déjà que $(-1, 0, 0, -1)$ ne peut être isomorphe à $(-1, h, 0, -1)$.

De même, la présence de cette substitution remarquable C_2 dans $(1, h, 0, 1)$

et l'absence de toute substitution jouissant de la même propriété dans $(-1, h', 0, -1)$ montrent que ces deux groupes ne sauraient être isomorphes.

Il me reste deux questions à résoudre :

1° Les groupes $(1, h, 0, 1)$ et $(1, h', 0, 1)$ ou $|h| \neq 0, |h'| \neq 0, |h| \neq |h'|$, peuvent-ils être isomorphes ?

2° Même question pour les groupes $(-1, h, 0, -1), (-1, h', 0, -1)$.

Commençons par la première question.

J'observe d'abord que, C_2 étant la seule substitution du premier groupe qui jouisse de la propriété caractéristique énoncée plus haut, on devra avoir

$$C'_2 \equiv C_2$$

(ou $C'_2 \equiv -C_2$, mais alors on changerait C'_1 et C'_2 en $-C'_1$ et $-C'_2$).

Maintenant, pour que l'on puisse, en combinant

$$C'_1 \equiv a_3 C_3 + a_1 C_1 + a_2 C_2,$$

$$C'_2 \equiv C_2,$$

$$C'_3 \equiv c_3 C_3 + c_1 C_1 + c_2 C_2,$$

retrouver toutes les substitutions du premier groupe, il faut que

$$a_3 c_1 - c_3 a_1 = 1.$$

On démontre alors aisément que

$$C'_1 + C'_3 \equiv C'_3 + C'_1 + h C'_2,$$

ce qui prouve que les deux groupes ne peuvent être isomorphes, que si

$$h = \pm h'.$$

Passons à la seconde question.

On verrait, comme tout à l'heure, que l'on doit avoir

$$C'_2 \equiv C_2.$$

$$a_3 c_1 - c_3 a_1 = 1.$$

Il vient ensuite

$$C'_1 + C'_3 \equiv (a_3 + c_3) C_3 + (c_1 + a_1 \varepsilon) C_1 + (c_2 + a_2 \varepsilon - a_1 c_3 h \varepsilon) C_2,$$

où

$$\varepsilon = (-1)^{c_3}$$

et

$$\begin{aligned} C'_3 - C'_1 &\equiv (c_3 - a_3) C_3 + (c_1 - a_1) \varepsilon' C_1 \\ &\quad + [c_2 - a_2] \varepsilon' + (a_1 + c_1) a_3 \varepsilon' h] C_2, \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon' = (-1)^{a_3}.$$

Si l'on veut que

$$C'_1 + C'_2 \equiv C'_3 - C'_1 + h' C'_2,$$

il faut que

$$\alpha_3 = 0, \quad \varepsilon' = 1, \quad \varepsilon = -1, \quad \alpha_1 c_3 = 1, \quad h = h'.$$

Donc nos deux groupes ne pourront être isomorphes que si

$$h = \pm h'.$$

Le résultat énoncé plus haut est donc général et s'étend aux substitutions paraboliques.

Si les deux substitutions linéaires $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ ne sont pas de la même classe, les deux groupes correspondants ne peuvent être isomorphes.

Il résulte de cette longue discussion que les différents groupes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ peuvent donner naissance à une infinité de variétés fermées V distinctes, c'est-à-dire non homéomorphes. Or, le nombre P_1 ne peut prendre que l'une des trois valeurs 2, 3 ou 4.

Pour que deux variétés fermées soient homéomorphes, il ne suffit donc pas qu'elles aient mêmes nombres de Betti.

C'est ce que nos autres exemples mettent également en évidence.

Dans le troisième exemple, le groupe G se réduit à huit substitutions et dans le cinquième exemple, à deux substitutions seulement.

Considérons, au contraire, l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1;$$

c'est une variété dont le groupe G se réduit à une seule substitution, la substitution identique.

Voilà donc trois variétés, dont les groupes G sont d'ordre fini ; mais ces groupes ne sont pas isomorphes ; de sorte que ces variétés ne seront pas homéomorphes ; et cependant elles auront mêmes nombres de Betti

$$P_1 = P_2 = 1.$$

Il paraîtra naturel de restreindre le sens du mot *simplement connexe* et de le réserver aux variétés, dont le groupe G se réduit à la substitution identique.

Alors une variété fermée de plus de deux dimensions pourra avoir son groupe G d'ordre fini sans être simplement connexe.

Cela n'arriverait pas avec les variétés de deux dimensions : leur groupe G ne pouvait être d'ordre fini sans se réduire à une seule substitution.

Nous avons vu pourquoi un groupe fuchsien, qui admet un cycle de sommets dont la somme des angles est égale à $\frac{2\pi}{n}$ ($n > 1$), ne peut être le groupe G d'une variété fermée à deux dimensions.

Il en est de même pour la même raison, de tout groupe d'ordre fini ou, plus généralement, de tout groupe contenant une substitution, dont une puissance entière se réduit à la substitution identique.

Il pourrait être intéressant de traiter les questions suivantes .

1° Étant donné un groupe G défini par un certain nombre d'équivalences fondamentales, peut-il donner naissance à une variété fermée à n dimensions ?

2° Comment doit-on s'y prendre pour former cette variété ?

3° Deux variétés d'un même nombre de dimensions, qui ont même groupe G , sont-elles toujours homéomorphes ?

Ces questions exigeraient de difficiles études et de longs développements. Je n'en parlerai pas ici.

Je veux toutefois attirer l'attention sur un point.

Riemann a rattaché l'étude des courbes algébriques à celle des variétés à deux dimensions au point de vue de l'*Analysis situs*.

De même, l'étude des surfaces algébriques se rattache à celle des variétés à quatre dimensions. Ces variétés ont trois nombres de Betti :

$$P_1 = P_3 \quad \text{et} \quad P_2.$$

M. Picard a montré que si la surface algébrique est la plus générale de son degré, le nombre P_1 se réduit à 1 ; il ne prend une valeur plus grande que 1 que dans certains cas particuliers. La connexion multiple se présentait ainsi comme un cas particulier de la connexion simple.

Ce résultat semble paradoxal ; peut-être nous le paraîtra-t-il un peu moins maintenant ; un groupe G peut être beaucoup plus complexe qu'un autre groupe G' et cependant correspondre à une valeur plus petite du nombre P_1 .

§ 15. Autres modes de génération.

On peut donner des variétés d'autres définitions, qui sont, pour ainsi dire, intermédiaires entre les deux premières.

Par exemple, on peut envisager une variété V formée de l'ensemble des points qui satisfont à certaines inégalités et aux équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_q) \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_q) \\ \dots \\ F_p(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_q) \end{array} \right\} = 0,$$

où les x sont des coordonnées d'un point et les y des paramètres arbitraires; le nombre des dimensions de V est alors à $n - p + q$.

On peut aussi adjoindre aux équations (1) les relations

$$\varphi_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_q) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \lambda),$$

entre les y . Les y ne sont plus alors des paramètres entièrement arbitraires et le nombre des dimensions de V devient égal à $n - p + q - \lambda$.

On peut encore envisager une variété V définie par certaines inégalités et par les relations

$$(2) \quad x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les y étant des paramètres liés par λ équations

$$\varphi_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_p) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \lambda)$$

Le nombre des dimensions de V est alors $p - \lambda$.

Considérons un instant y_1, y_2, \dots, y_p comme les coordonnées d'un point P dans l'espace à p dimensions. Les égalités

$$\varphi_\alpha = 0$$

définiront alors dans cet espace à p dimensions une certaine variété W.

A chaque point de W correspondra un point de V, puisque les équations (2) expriment les x en fonction des y .

Le cas le plus simple est celui où, réciproquement, à un point de V correspond un seul point de W. Mais un cas, qui est aussi très intéressant, est le suivant.

Supposons que la variété W demeure inaltérée, quand les y subissent les substitutions d'un certain groupe G. Soient P un point de W, P_1, P_2, \dots, P_h les transformées de P par les substitutions de G.

L'ensemble des points P, P_1, P_2, \dots, P_h formeront ce que j'appellerai un *système de points*.

Si les fonctions θ_i ne sont pas altérées par les substitutions de G , il est clair qu'aux divers points d'un même système correspondra un même point de V .

Le cas intéressant est celui où à un point de V correspond un seul système de points de W .

Étant donnée une variété W et un groupe G qui ne l'altère pas, on peut toujours construire une variété V , de telle façon qu'à tout point de V corresponde un système de points de W et un seul.

Pour que V soit bilatère, il faut et il suffit que la variété W soit bilatère et que toutes les substitutions de G jouissent de la propriété suivante.

Soient y_1, y_2, \dots, y_p les coordonnées de P , y'_1, y'_2, \dots, y'_p celles de son transformé; le déterminant fonctionnel des y' par rapport aux y doit être positif.

Septième exemple. — Soit

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$$

l'équation de la variété W , qui sera ainsi une sphère dans l'espace ordinaire.

Cette sphère n'est pas altérée, quand on change y_1, y_2, y_3 en $-y_1, -y_2, -y_3$. Ce sera là notre groupe G .

Si alors nous posons, par exemple,

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^2, & x_2 &= y_2^2, & x_3 &= y_3^2, \\ x_4 &= y_2 y_3, & x_5 &= y_1 y_3, & x_6 &= y_1 y_2, \end{aligned}$$

les x ne changeront pas, quand les y changeront de signe, et nous aurons défini une variété V à deux dimensions dans l'espace à six dimensions.

Cette variété sera fermée; elle sera *unilatère*.

Soit, en effet, P un point de W , dont les coordonnées seront y_1, y_2, y_3 . Pour définir la position de ce point sur la sphère W , il suffira de connaître deux de ces coordonnées, par exemple y_1 et y_2 ; car l'équation de la sphère nous fait connaître y_3 en fonction de y_1 et y_2 .

Son transformé P' dont les coordonnées sont $-y_1, -y_2$ et $-y_3$, est diamétralement opposé. Mais il ne faut pas se servir, pour définir la position du point P , de y_1 et de y_2 , parce que y_3 n'est pas une fonction uniforme de ces deux variables. Il vaut mieux poser

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos \varphi \sin \theta, \\ y_2 &= \sin \varphi \sin \theta, \\ y_3 &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Les coordonnées du point P dans ce nouveau système sont φ et θ ; celles de P' sont $\varphi + \pi$ et $\pi - \theta$. On voit alors que

$$\frac{d(\varphi + \pi, \pi - \theta)}{d(\varphi, \theta)} = -1 < 0.$$

La variété V est donc unilatère.

Huitième exemple. — Soient $y_1, y_2, \dots, y_q; z_1, z_2, \dots, z_q$, $2q$ paramètres liés par les relations

$$(3) \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 = 1, \\ z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_q^2 = 1. \end{cases}$$

Si nous regardons ces $2q$ paramètres comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2q$ dimensions, ces équations (3) représenteront une variété fermée W à $2q - 2$ dimensions.

Si nous regardons y_1, y_2, \dots, y_q et z_1, z_2, \dots, z_q comme les coordonnées de deux points Q et Q' dans l'espace à q dimensions, ces deux points devront se trouver tous deux sur l'*hypersphère* S qui a pour équation

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_q^2 = 1$$

et qui est une variété fermée à $q - 1$ dimensions.

A chaque couple de points de S correspondra ainsi un point de W et un seul et inversement, *pourvu que je convienne de regarder les deux couples de points QQ' et Q'Q comme distincts.*

Considérons maintenant les $\frac{q(q+3)}{2}$ combinaisons.

$$y_i + z_i, \quad y_i z_i, \quad y_i z_k + y_k z_i \quad (i, k = 1, 2, \dots, q),$$

égalons-les à $\frac{q(q+3)}{2} = n$ variables.

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n.$$

Nous aurons ainsi défini une variété V à $2q - 2$ dimensions dans l'espace à n dimensions.

Quand on change y_i en z_i et z_i en y_i (c'est-à-dire quand on permute les deux points Q et Q'), ces $\frac{q(q+3)}{2}$ combinaisons ne changent pas.

A chaque couple de points de l'*hypersphère* correspond ainsi un point et un seul de la variété V et inversement, mais à *la condition de ne pas regarder comme distincts les deux couples QQ' et Q'Q.*

Cette variété V est-elle fermée? Je vais montrer qu'elle ne l'est pas pour $q = 2$ et qu'elle l'est pour $q > 2$.

On a alors

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 + z_1, & x_2 &= y_1 z_1, & x_3 &= y_2 + z_2, \\x_4 &= y_2 z_2, & x_5 &= y_1 z_2 + y_2 z_1.\end{aligned}$$

On reconnaît alors que l'on doit avoir pour que les y et les z soient réels

$$x_1^2 > 4x_2, \quad x_3^2 > 4x_4.$$

On aurait des inégalités analogues pour $q > 2$; mais dans quel cas ces inégalités définissent-elles une véritable frontière pour notre variété V ?

Pour mieux nous en rendre compte, je vais traiter d'abord un exemple plus simple.

Soit d'abord, dans l'espace ordinaire, le cercle

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0,$$

Si l'on convient de ne conserver que les points de ce cercle pour lesquels y est positif, alors nous aurons les relations suivantes :

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad y > 0,$$

qui définiront une variété à une dimension (qui, dans ce cas, est une demi-circonférence).

Cette variété n'est pas fermée, elle admet deux points frontières :

$$x = \pm 1, \quad y = z = 0.$$

Considérons, au contraire, la surface suivante :

$$(4) \quad x^2 + y^2 - z^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0.$$

C'est la surface engendrée par la révolution d'une lemniscate autour de son grand axe. Elle se compose de deux nappes distinctes N_1 et N_2 ayant un point conique commun qui est l'origine; on ne peut aller d'une nappe à l'autre qu'en passant par l'origine. Adjoignons alors à l'équation (4) l'inégalité

$$(5) \quad z > 0.$$

Les relations (4) et (5) définissent une variété à deux dimensions qui n'est autre chose que la nappe N_1 . Cette variété doit être regardée comme fermée; elle est homéomorphe à une sphère; on ne doit pas regarder le point conique

$$x = y = z = 0$$

comme un véritable point frontière.

En général, si une variété à p dimensions n'est pas fermée, sa frontière sera formée par une ou plusieurs variétés à $p - 1$ dimensions. Si l'ensemble des points qu'on peut soupçonner d'être des points frontières forme une ou plusieurs variétés à moins de $p - 1$ dimensions, c'est qu'ils ne sont pas de véritables points frontières au point de vue qui nous occupe actuellement, et que la variété donnée est fermée.

Or, on obtiendra ici les points qu'on peut soupçonner d'être frontières, quand on supposera que les points Q et Q' se confondent, c'est-à-dire que

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \quad \dots, \quad y_q = z_q.$$

On obtiendra ainsi une variété à $q - 1$ dimensions. Ainsi la frontière complète de V n'aura que $q - 1$ dimensions, tandis que V en a $2q - 2$. V sera donc fermée, à moins que

$$2q - 2 = (q - 1) + 1 \quad \text{ou} \quad q = 2.$$

Pour mieux nous en rendre compte, comparons les deux exemples $q = 2$ et $q = 3$.

Soit d'abord $q = 2$ et envisageons notre variété dans le voisinage du point

$$y_1 = z_1 = 0, \quad y_2 = z_2 = 1,$$

c'est-à-dire du point

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 0.$$

Observons d'abord que, pour les valeurs petites de x_1 et de x_2 , les trois autres variables x_3 , x_4 et x_5 sont développables suivant les puissances de x_1 et de x_2 ; il nous suffira donc d'étudier les variations de x_1 et de x_2 .

Nous voyons alors que x_1 et x_2 peuvent prendre toutes les valeurs qui satisfont à

$$x_1^2 > 4x_2.$$

Le plan des x_1 , x_2 se trouve ainsi partagé en deux régions par la ligne

$$x_1^2 = 4x_2,$$

qui est une véritable ligne frontière.

On obtiendrait le même résultat si l'on étudiait la variété V dans le voisinage d'un autre point frontière quelconque. Cette variété n'est donc pas fermée.

Soit maintenant $q = 3$ et

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + z_1, & x_2 &= y_1 z_1, & x_3 &= y_2 + z_2, & x_4 &= y_2 z_2, & x_5 &= y_1 z_2 + y_2 z_1, \\ x_6 &= y_3 + z_3, & x_7 &= y_3 z_3, & x_8 &= y_1 z_3 + y_3 z_1, & x_9 &= y_2 z_3 + y_3 z_2. \end{aligned}$$

Étudions la variété V dans le voisinage du point P_0 , qui est tel que

$$y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = 0, \quad y_3 = z_3 = 1,$$

d'où

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0, \quad x_8 = 2, \quad x_9 = 1.$$

Nous voyons que, dans le voisinage de ce point, x_6, x_7, x_8, x_9 sont développables suivant les puissances de x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 , de sorte qu'il suffit d'étudier les variations de ces cinq dernières variables.

Pour ne conserver que trois variables et rendre possible une représentation géométrique, je coupe ma variété V par la variété plane

$$x_1 = 0, \quad x_3 = 0,$$

de sorte que l'intersection sera une variété à deux dimensions V' .

Soient x_2, x_4 et x_5 les coordonnées d'un point de V' ; nous pourrions regarder ces trois variables comme les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire et nous aurons ainsi une représentation géométrique de la variété V' ou plutôt de la portion de cette variété qui est voisine de P_0 .

On trouve alors

$$y_1 = -z_1, \quad y_2 = -z_2,$$

puisque x_1 et x_3 sont supposés nuls et, par conséquent,

$$x_2 = -y_1^2, \quad x_4 = -y_2^2, \quad x_5 = -2y_1y_2,$$

d'où

$$4x_2x_4 - x_5^2 = 0.$$

C'est l'équation d'un cône du second degré, mais une seule nappe de ce cône convient, parce qu'on doit avoir

$$x_2 < 0, \quad x_4 < 0.$$

La portion du cône qui convient est ainsi séparée de celle qui ne convient pas par le sommet qui ne saurait être regardé comme un véritable point frontière. C'est ainsi que la variété V' , de même que V , est encore fermée.

On obtiendrait un résultat analogue en étudiant V dans le voisinage d'un autre point frontière, ou en coupant V par d'autres variétés planes que la variété

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Je n'ai voulu qu'un exemple destiné à éclaircir le raisonnement qui précède. En résumé, *la variété V est fermée si $q > 2$ et ne l'est pas si $q = 2$.*

La variété V est-elle unilatère ou bilatère ?

Je me propose d'établir qu'elle est bilatère si q est impair et qu'elle est, au contraire, unilatère si q est pair.

Posons

$$\begin{array}{ll}
 y_1 = \cos \theta_1, & z_1 = \cos \theta'_1, \\
 y_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, & z_2 = \sin \theta'_2, \\
 y_3 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, & z_3 = \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 \sin \theta'_3, \\
 \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\
 y_{q-1} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{q-2} \cos \theta_{q-1}, & z_{q-1} = \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 \dots \sin \theta'_{q-2} \cos \theta'_{q-1}, \\
 y_q = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{q-2} \sin \theta_{q-1}, & z_q = \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 \dots \sin \theta'_{q-1} \sin \theta'_{q-1}.
 \end{array}$$

La position d'un point sur W est définie par les $2q - 2$ coordonnées

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-1}; \quad \theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{q-1}.$$

D'autre part, le groupe G se compose (outre la substitution identique) de l'unique substitution qui permute θ_i avec θ'_i . Pour que la variété V soit bilatère, il faut donc et il suffit que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\theta_i, \theta'_i)}{\partial(\theta'_i, \theta_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, q - 1)$$

soit positif. Or il est égal à $(-1)^{q-1}$, c'est-à-dire à $+1$ si q est impair et à -1 si q est pair. Donc

V est bilatère si q est impair,
 V est unilatère si q est pair.

C. Q. F. D.

Occupons-nous maintenant de déterminer le nombre de Betti, P_{q-1} .

Déterminons d'abord les nombres de Betti pour W .

Nous pouvons construire sur W deux variétés à $q - 1$ dimensions de la manière suivante. On sait que tout point de W correspond à un couple de points QQ' de l'hypersphère S . Aux couples Q_0Q' où Q_0 est fixe et où Q' décrit l'hypersphère tout entière correspondra alors une variété fermée U_1 à $q - 1$ dimensions et faisant partie de W . De même aux couples QQ_0 , où Q décrit l'hypersphère entière pendant que Q_0 est fixe, correspondra une variété fermée U_2 à $q - 1$ dimensions faisant partie de W .

Ces deux variétés seront linéairement indépendantes (au point de vue des homologies).

Considérons, en effet, l'intégrale d'ordre $q - 1$

$$J = \int \sin^{q-3} \theta_1 \sin^{q-3} \theta_2 \dots \sin^2 \theta_{q-2} \sin \theta_{q-1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{q-1}$$

et soit J' l'intégrale d'ordre $q - 1$ obtenue en remplaçant dans J les θ_i par les θ'_i .

Envisageons ensuite l'intégrale

$$J + \lambda J',$$

où λ est un nombre incommensurable.

Nous connaissons les x en fonction des θ et des θ' ; réciproquement, nous pouvons calculer les θ et les θ' en fonctions des x et cela de telle sorte que l'intégrale $J + \lambda J'$ prenne la forme

$$\int \sum X \delta,$$

X étant une fonction entière par rapport aux x , et δ le produit de $q - 1$ différentielles dx_i .

J'observe, en outre, que l'intégrale $J + \lambda J'$ est nulle quand elle est étendue à une variété fermée infiniment petite faisant partie de W .

Étendue à U_2 , elle est égale à σ (surface de l'hypersphère S) : étendue à U_1 , elle est égale à $\lambda\sigma$; et comme il n'y a aucune relation linéaire entre σ et $\lambda\sigma$, c'est que U_1 et U_2 sont linéairement indépendantes.

Le nombre de Betti P_{q-1} est donc au moins égal à 3.

Pour aller plus loin, considérons la variété W' obtenue en supprimant dans W tous les points des deux variétés U_1 et U_2 ; je me propose d'établir que W' est simplement connexe.

Considérons, de même, la variété S' obtenue en supprimant, dans l'hypersphère S , le point Q_0 . A tout couple de points QQ' de la variété S' correspondra un point de W' et réciproquement.

Mais S' est homéomorphe au domaine D ,

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{q-1}^2 < 1,$$

faisant partie de l'espace à $q - 1$ dimensions, où les coordonnées sont désignées par $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{q-1}$.

C'est ainsi que la surface d'une sphère ordinaire, quand on supprime un point, devient homéomorphe à la surface d'un cercle.

A chaque couple de points du domaine D correspondra un point de W' , d'où il suit que W' est homéomorphe au domaine Δ défini par les inégalités

$$\begin{aligned} \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{q-1}^2 &< 1, \\ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \dots + \zeta_{q-1}^2 &< 1 \end{aligned}$$

et situé dans l'espace à $2q - 2$ dimensions, où les coordonnées sont désignées par η_i et ζ_i

Or le domaine Δ est simplement connexe parce qu'il est convexe. Soit, en effet, ν une variété fermée d'un nombre quelconque de dimensions et faisant partie de Δ ; je dis qu'on peut, en la déformant d'une manière continue, la réduire à un point sans qu'elle sorte de Δ . Construisons une variété ν' en multipliant par un facteur positif k plus petit que 1 les coordonnées de tous les points de ν (la variété ν' sera homothétique à ν , le centre d'homothétie étant l'origine, et le rapport d'homothétie étant égal à k). La variété ν' sera tout entière à l'intérieur de Δ et, quand k décroîtra de 1 à 0, elle coïncidera d'abord avec ν et finira par se réduire à un point.

C. Q. F. D.

Donc Δ et, par conséquent, W' sont simplement connexes. Déterminons maintenant les nombres de Betti pour W et d'abord le nombre P_h où $h < q-1$. Considérons donc une variété fermée à h dimensions contenue dans W ; cette variété qu'elle rencontre ou non U_1 et U_2 , peut toujours être regardée comme homologue à une variété fermée à h dimensions, ne rencontrant ni U_1 ni U_2 ; celle-ci sera homologue à zéro dans W' (puisque W' est simplement connexe) et *a fortiori* dans W .

Ainsi P_h est égal à 1.

Comme, d'autre part, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux, P_h sera encore égal à 1 si h est plus grand que $q-1$.

Il reste à déterminer P_{q-1} .

Considérons une variété fermée ν à $q-1$ dimensions, faisant partie de W .

Si elle ne rencontre ni U_1 , ni U_2 , elle sera homologue à zéro; en effet, elle fait partie de W' et, par conséquent, sera homologue à zéro par rapport à W' et, *a fortiori* par rapport à W .

Supposons qu'elle rencontre U_1 et U_2 .

Les points de W , qui correspondront au couple $Q_1 Q'$, où Q_1 est fixe et où Q' décrit l'hypersphère entière, formeront une variété U'_1 , qui sera homologue à U_1 . Par tout point de W passe une variété U'_1 et une seule.

Les points de W qui correspondent au couple $Q Q_2$, où Q_2 est fixe et où Q décrit l'hypersphère entière formeront une variété U'_2 qui sera homologue à U_2 .

Par tout point de W passe une variété U'_2 et une seule.

Deux variétés U'_1 et U'_2 ont un point commun et un seul (à savoir le point qui correspond au couple $Q_1 Q_2$). Au contraire, deux variétés U'_1 (ou deux variétés U'_2) ne se rencontrent pas.

Cela posé, revenons à la variété ν et supposons, pour fixer les idées, qu'elle coupe U_1 en deux points M' et M'' et U_2 en un point N' . Par le point M' je puis

faire passer une variété U'_2 ; par le point M'' une variété analogue U''_2 ; par le point N' une variété U'_1 .

Je puis ensuite, en déformant infiniment peu la variété ν , m'arranger pour qu'elle ne coupe toujours U_1 et U_2 qu'aux points M' , M'' et N' , et pour qu'elle admette autour de M' une petite partie commune u'_2 avec U'_2 ; autour de N' une petite partie commune u'_1 avec U'_1 .

Alors l'ensemble des variétés

$$U'_1 - u'_1, \quad U_2 - u'_2, \quad U''_2 - u''_2, \quad -\nu + u'_1 + u'_2 + u''_2,$$

formera une variété fermée, qui ne rencontrera ni U_1 , ni U_2 , et qui sera, par conséquent, homologue à zéro; on aura donc

$$U'_1 - u'_1 + U_2 - u'_2 + U''_2 - u''_2 \sim \nu - u'_1 - u'_2 - u''_2,$$

d'où

$$\nu \sim U'_2 + U'_1 + U''_2 \sim U_1 + 2U_2.$$

Il pourrait aussi se faire que, par exemple, le nombre que nous avons appelé plus haut $S(M)$ n'ait pas la même valeur pour le point M' considéré comme point d'intersection de ν et de U_1 , ou pour le point M' considéré comme point d'intersection de U'_2 et de U_1 . Dans ce cas, il faudrait remplacer U'_2 par la variété opposée et l'on aura

$$\nu \sim U'_1 - U'_2 + U''_2 \sim U_1.$$

Dans tous les cas, ν , U_1 et U_2 ne seront pas linéairement indépendants et l'on aura

$$P_{q-1} = 3.$$

Déterminons enfin les nombres de Betti pour V .

Aux couples QQ' et $Q'Q$ correspondent un seul et même point de V ; il en résulte qu'à U_1 et à U_2 correspond dans V une seule et même variété, de sorte que je puis écrire

$$U_1 \sim U_2.$$

D'autre part, l'intégrale $J + J'$, étendue à cette variété, n'est pas nulle; ce qui montre que l'on n'a pas

$$U_1 \sim 0.$$

Le nombre P_{q-1} est donc au moins égal à 2.

A toute variété fermée ν , faisant partie de V , correspondra une variété ω faisant partie de W ; mais deux cas peuvent se présenter; nous savons qu'à chaque point de V correspondent deux points de W ; et je pourrai dire, pour

abrégé le langage, que ces deux points sont *symétriques*, puisqu'on passe de l'un à l'autre en permutant les y_i avec les z_i .

Nous construirons ω en prenant pour chaque point de ν un des deux points qui lui correspondent dans ω ; il pourra se faire alors ou bien que ω soit fermé ou bien que ω ne soit pas fermé, mais que sa frontière se compose de parties symétriques deux à deux.

Considérons d'abord le cas où ω est fermé.

Si le nombre des dimensions est différent de $q - 1$, ω (et, par conséquent, ν) pourra, par déformation continue, se réduire à un point et l'on aura

$$\nu \sim 0.$$

Si le nombre des dimensions est égal à $q - 1$, on aura, par rapport à W ,

$$\omega \sim mU_1 + nU_2,$$

m et n étant des entiers; mais par rapport à V , U_1 est homologue à U_2 .

On aura donc, par rapport à V ,

$$\nu \sim (m + n)U_1.$$

Considérons maintenant le cas où ω n'est pas fermé. Nous admettrons que le nombre des dimensions est inférieur ou égal à $q - 1$; le cas où ce nombre serait supérieur à $q - 1$ s'y ramène aisément, puisque les nombres de Betti sont égaux deux à deux. La frontière f de ω aura alors moins de $q - 1$ dimensions.

Soit H la variété à $q - 1$ dimensions, faisant partie de W , qui se compose des points qui sont leur propre symétrique, c'est-à-dire des points

$$y_i = z_i.$$

La frontière f peut se déformer d'une manière continue, sans que ses points cessent d'être symétriques deux à deux, et de telle sorte qu'à la fin de la déformation la frontière déformée fasse partie de H .

Donc ω peut se déformer d'une manière continue, sans cesser de correspondre à une variété ν fermée, et de telle sorte qu'à la fin de la déformation la variété ω déformée soit fermée.

Donc ν est toujours homologue à une variété ν correspondant à une variété ω fermée.

Donc, on a, suivant les cas,

$$\nu \sim 0, \quad \nu \sim (m + n)U_1.$$

Donc tous les nombres de Betti de V sont égaux à 1, sauf P_{q-1} qui est égal à 2.

De là deux conséquences :

1° Soit q impair, V sera bilatère; d'où il suit que, pour une variété bilatère à $4k$ dimensions, le nombre P_{2k} n'est pas forcément impair.

2° Si q est pair, V sera unilatère; d'où il suit que, pour une variété unilatère à $4k + 2$ dimensions, le nombre P_{2k+1} n'est pas forcément impair, ainsi que cela aurait eu lieu pour une variété bilatère.

J'avais annoncé ces résultats à la fin du numéro 9.

§ 16. Théorème d'Euler.

On connaît le théorème d'Euler, d'après lequel, si S , A et F sont le nombre des sommets, des arêtes et des faces d'un polyèdre convexe, on doit avoir

$$S - A + F = 2.$$

Ce théorème a été généralisé par M. l'amiral de Jonquières, pour le cas des polyèdres non convexes. Si un polyèdre forme une variété fermée à deux dimensions, dont le nombre de Betti est P_1 , on aura

$$S - A + F = 3 - P_1.$$

Le fait que les faces sont planes n'a évidemment aucune importance, le théorème s'applique également aux polyèdres curvilignes; il s'applique encore à la subdivision d'une surface fermée quelconque en régions simplement connexes; ces régions correspondent alors aux faces du polyèdre; les lignes, qui servent de frontière à deux de ces régions, correspondent aux arêtes, et les extrémités de ces lignes aux sommets.

Je me propose de généraliser ces résultats pour un espace quelconque.

Soit donc V une variété fermée à p dimensions. Subdivisons-la en un certain nombre de variétés v_p à p dimensions; ces variétés v_p ne seront pas fermées et leurs frontières seront formées par un certain nombre de variétés v_{p-1} à $p - 1$ dimensions; les frontières des v_{p-1} seront formées à leur tour par un certain nombre de variétés v_{p-2} à $p - 2$ dimensions, et ainsi de suite; j'arriverai ensuite à un certain nombre de variétés v_1 à une dimension, qui auront pour frontières un certain nombre de points isolés ou de variétés à zéro dimension que j'appellerai v_0 .

La variété V peut avoir des nombres de Betti quelconques, mais je suppose expressément que les variétés v_p, v_{p-1}, \dots, v_1 sont simplement connexes.

J'appellerai $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1$ et α_0 le nombre des ν_p , des ν_{p-1}, \dots , des ν_1 et des ν_0 .

La figure formée par toutes ces variétés pourra s'appeler un polyèdre; car l'analogie avec les polyèdres ordinaires est évidente. Un polyèdre ordinaire est, en effet, une variété fermée V à deux dimensions, qui est subdivisée en un certain nombre de variétés ν_1 , qui sont les faces. Les faces ont pour frontières un certain nombre de variétés ν_1 , qui sont les arêtes et qui admettent à leur tour pour frontières un certain nombre de variétés ν_0 appelées *sommets*.

Je me propose de calculer le nombre

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \dots \mp \alpha_1 \pm \alpha_0.$$

J'introduirai ici quelques dénominations nouvelles, peut-être mal justifiées, mais commodes.

Si deux polyèdres sont obtenus en subdivisant de deux manières différentes une variété V , je dirai qu'ils sont *congruents*.

Soit maintenant le polyèdre P formé par la variété V , par les régions ν_p et par leurs frontières successives $\nu_{p-1}, \dots, \nu_1, \nu_0$.

Subdivisons les ν_p en régions plus petites ν'_p ; les frontières complètes des ν'_p se composeront d'un certain nombre de régions nouvelles ν''_{p-2} et, en outre, des régions ν'_{p-1} obtenues en subdivisant les ν_{p-1} ; les frontières complètes des ν'_{p-1} et des ν''_{p-1} se composeront d'un certain nombre de régions nouvelles ν''_{p-2} et, en outre, de régions ν'_{p-2} obtenues en subdivisant les ν_{p-2} , et ainsi de suite; nous arriverons enfin aux ν'_1 et aux ν''_1 , dont les frontières complètes se composeront d'un certain nombre de points nouveaux ν''_0 et, en outre des points ν_0 .

Soit P' le polyèdre formé par l'ensemble des régions $\nu'_p, \nu'_{p-1}, \nu''_{p-1}, \nu'_{p-2}, \nu''_{p-2}, \dots, \nu'_1, \nu''_1, \nu_0, \nu''_0$.

Je dirai alors que le polyèdre P' est *dérivé* du polyèdre P .

J'éclaircirai cette définition par un exemple emprunté à la Géométrie ordinaire. Considérons un tétraèdre régulier T . Dans chacune des faces, je joins chaque sommet au milieu du côté opposé. Chaque face se trouvera ainsi décomposée en six triangles; en tout vingt-quatre triangles. Le polyèdre à vingt-quatre faces ainsi obtenu sera *dérivé* de T .

Soient maintenant P et P' deux polyèdres congruents, c'est-à-dire obtenus par deux modes de décomposition différents d'une même variété V ; il existera toujours un polyèdre P'' qui sera dérivé à la fois de P et de P' et qu'on obtiendra en combinant les deux modes de décomposition; de telle façon que, si

nous appelons ν_p , ν'_p et ν''_p les subdivisions de V dans les trois modes de décomposition qui correspondent aux trois polyèdres P , P' et P'' , la condition nécessaire et suffisante pour que deux points appartiennent à la fois à la même région ν''_p , c'est qu'ils appartiennent à la fois à la même région ν_p et à la même région ν'_p .

Je me propose d'établir que le nombre N est le même pour deux polyèdres congruents et, comme nous venons de voir que deux polyèdres congruents ont toujours un dérivé commun, il nous suffira de montrer que le nombre N est le même pour un polyèdre et pour tous ses dérivés.

Si, dans le polyèdre P , nous envisageons une des régions ν_{p-1} , elle appartiendra toujours à deux régions ν_p et à deux seulement qu'elle séparera l'une de l'autre. Au contraire, une région ν'_{p-2} appartiendra, en général, à plus de deux régions ν_p et à plus de deux régions ν_{p-1} . C'est ainsi que dans les polyèdres ordinaires, une arête sépare toujours deux faces l'une de l'autre, tandis qu'un sommet appartient, en général, à plus de deux faces et à plus de deux arêtes.

Nous n'excluons pas toutefois le cas où une région ν_{p-2} appartiendrait à deux régions ν_{p-1} seulement. Ainsi pour un polyèdre ordinaire, nous n'excluons pas le cas où le milieu d'une arête serait regardé comme un sommet et où cette arête serait, par conséquent, regardée comme formée de deux arêtes juxtaposées.

Les régions ν_{p-2} , qui n'appartiendraient ainsi qu'à deux régions ν_{p-1} , seront dites *singulières*. Soit donc ν_{p-2} une région singulière appartenant à deux régions ν_{p-1} que j'appelle ν'_{p-1} et ν''_{p-1} . Il est clair que ν'_{p-1} séparera l'une de l'autre *les deux mêmes régions* ν_p qui sont séparées par ν''_{p-1} ; de sorte que ν_{p-2} n'appartiendra aussi qu'à deux régions ν_p seulement.

De même, je dirai que la variété ν_q est *singulière*, si elle n'appartient qu'à deux variétés ν_{q+1} ; et dans ce cas les deux ν_{q+1} , auxquelles ν_q appartiendra, appartiendront aux mêmes ν_{q+2} , aux mêmes ν_{q+3} , ..., aux mêmes ν_p ; de telle façon que la suppression de ν_q et l'annexion mutuelle des deux ν_{q+1} ne changera rien aux ν_{q+2} , aux ν_{q+3} , ..., aux ν_p .

Soit maintenant une variété ν_h ; à cette variété appartiendront un certain nombre de variétés ν_{h-1} ; si l'une d'elles est singulière, je dirai que la variété ν_h est *irrégulière*; elle sera régulière dans le cas contraire.

Considérons donc le polyèdre P avec les régions ν_p , ν_{p-1} , ... et le polyèdre dérivé P' avec les régions ν'_p , ν'_{p-1} , Cherchons à remonter du polyèdre P' au polyèdre P . Soient deux régions ν'_p que j'appellerai α et β ; je suppose qu'elles soient séparées l'une de l'autre par une région ν'_{p-1} que j'appellerai γ ;

qu'elles soient, par conséquent, contiguës et qu'elles fassent partie d'une même région v_p . (Comme α et β font partie d'une même région v_p , la région γ n'est pas une subdivision de l'une des régions v_{p-1} qui séparent les régions v_p les unes des autres; cette région γ est donc une de celles que j'avais appelées v''_{p-1} dans la définition des polyèdres dérivés; mais ici je ne fais plus cette distinction et je désigne les variétés que j'avais appelées alors v''_{p-1} aussi bien que celles que j'avais appelées alors v'_{p-1} par la même notation v'_{p-1}).

Cela posé, supprimons la région γ , qui sert de frontière à α et à β , et *annexons* la région α à la région β . Nous aurons ainsi supprimé une région v'_p et une région v'_{p-1} . D'autre part, nous n'aurons supprimé aucune région v'_{p-2} si la région γ est régulière; si, en effet, aucune des régions v'_{p-2} n'est singulière, chacune d'elles appartiendra au moins à trois régions v'_{p-1} et, après la suppression de γ , elle appartiendra encore au moins à deux régions v'_{p-1} . De même, toute région v'_q (où $q < p - 2$) faisant partie de γ appartiendra au moins à trois régions v'_{q-1} , et, après la suppression de γ , elle appartiendra encore au moins à deux régions v'_{q-1} . La suppression de γ ne supprime donc aucune des régions v'_q ; *elle ne change donc pas la valeur du nombre N*.

Si, au contraire, la région γ est irrégulière, nous n'avons plus le droit de la supprimer, car il existera alors une région v'_{p-2} qui appartiendra seulement à γ et à une autre région v'_{p-1} ; après la suppression de γ , elle n'appartiendrait plus qu'à une seule région v'_{p-1} , ce qui est inadmissible.

Que faudra-t-il faire alors? La région γ sépare deux régions v_p que j'ai appelées α et β ; mais elle ne constitue pas à elle seule la frontière entre α et β ; en effet, comme γ est irrégulière, il existera une région v'_{p-2} singulière que j'appellerai δ et qui appartiendra à γ et à une autre région v'_{p-1} que j'appellerai γ' . Cette région γ' , d'après ce que nous avons vu plus haut, sépare les mêmes régions que γ , c'est-à-dire α et β .

Si la région δ est régulière, nous pourrons la supprimer et annexer γ à γ' . La région $\gamma + \gamma'$ séparera alors α de β . Nous aurons ainsi diminué α_{p-1} et α_{p-2} d'une unité, tandis que les autres nombres α_i n'auront pas changé. N n'aura donc pas changé non plus.

Si δ est irrégulière, il y aura une région v'_{p-2} singulière que j'appellerai ε et qui la séparera d'une autre région δ' ; nous supprimerons ε et annexerons δ à δ' , et ainsi de suite.

Nous pourrons ainsi supprimer une région v'_q , qui sépare l'une de l'autre

deux régions ν'_{q+1} , et annexer ces deux régions ν'_{q+1} l'une à l'autre, mais à deux conditions :

- 1° Si q est plus petit que $p - 1$, il faut que la région ν'_q soit singulière;
- 2° Et, dans tous les cas, il faut qu'elle soit régulière.

Cela posé, voici dans quel ordre nous ferons les opérations :

Je veux remonter du polyèdre P' au polyèdre P . Je puis sans inconvénient supposer que le polyèdre P n'admet pas de région singulière, mais le polyèdre P' et les polyèdres intermédiaires en admettront.

Par une série de suppressions et d'annexions successives, nous remonterons de P' à P en passant par une série de polyèdres intermédiaires que j'appellerai

$$P_0 = P', P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_m.$$

Comment passerons-nous du polyèdre P_i au polyèdre P_{i+1} ?

Si dans P_i il y a des ν'_0 singuliers, j'en supprimerai un. S'il n'y en a pas, tous les ν'_1 seront réguliers; s'il y a des ν'_1 singuliers, j'en supprimerai un.

S'il n'y a pas de ν'_1 singulier, tous les ν'_2 seront réguliers; s'il y a des ν'_2 singuliers, j'en supprimerai un.

Et ainsi de suite.

Si enfin il n'y a pas de ν'_{p-2} singulier, tous les ν'_{p-1} seront réguliers et l'on aura le droit de supprimer un quelconque d'entre eux; si l'une des régions ν_p est subdivisée en plusieurs régions ν'_p , je choisirai deux de ces régions ν'_p qui seront contiguës et séparées l'une de l'autre par une région ν'_{p-1} , qui sera leur frontière commune; je les annexerai l'une à l'autre en supprimant cette frontière commune.

Aucune de ces opérations ne peut altérer le nombre N .

On ne sera arrêté que quand il n'y aura plus de région singulière et que, d'autre part, aucune des régions ν_p ne sera plus subdivisée en plusieurs régions ν'_p . Mais alors on sera arrivé au polyèdre P .

Aucune de ces opérations ne peut altérer le nombre N .

Ce nombre a donc la même valeur pour P et pour P' . c. q. f. d.

Cette démonstration pourrait donner lieu à certaines objections, car on pourrait se demander si, dans cette série d'opérations, toutes les régions resteront simplement connexes; mais, avant de modifier notre démonstration de façon à me mettre à l'abri de ces objections, je veux déterminer

quelle doit être la valeur du nombre N pour un polyèdre simplement connexe.

Si notre théorème est vrai, le nombre N doit avoir la même valeur pour deux polyèdres obtenus en subdivisant deux variétés homéomorphes; il a donc même valeur pour deux polyèdres simplement connexes quelconques.

Il nous suffira donc de faire cette détermination pour un polyèdre simplement connexe arbitrairement choisi.

Je choisirai le tétraèdre généralisé.

J'appelle ainsi le polyèdre formé par la frontière complète du domaine

$$\begin{aligned} x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad \dots, \quad x_p > 0, \\ x_{p+1} > 0, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_p + x_{p+1} < 0. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_p = p + 2 \quad \alpha_{p-1} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \quad \dots, \\ \alpha_q = \frac{(p+2)!}{(q+2)!(p-q)!}, \quad \dots, \quad \alpha_1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \quad \alpha_0 = p + 2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les nombres α_q sont égaux aux coefficients du binôme.

On aura donc

$$(1-1)^{p+2} = 1 - \alpha_p + \alpha_{p-1} - \dots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 \pm 1 = 1 - N \pm 1.$$

On doit prendre devant le dernier terme le signe $+$ si p est pair, et le signe $-$ si p est impair.

On aura donc $N = 2$ si p est pair, $N = 0$ si p est impair.

Je serais arrivé au même résultat en choisissant le cube généralisé. J'appelle ainsi le polyèdre formé par la frontière complète du domaine

$$-1 < x_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p+1).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_p = 2(p+1), \quad \alpha_{p-1} = 2^2 \frac{p(p+1)}{2}, \quad \dots, \quad \alpha_q = 2^{p-p+1} \frac{(p+1)}{(q+1)!(p-q)!} \quad \dots, \\ \alpha_1 = 2^p(p+1), \quad \alpha_0 = 2^{p+1}, \end{aligned}$$

d'où

$$(1-2)^{p+1} = 1 - \alpha_p + \alpha_{p-1} - \dots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - N,$$

d'où

$$N = 1 - (-1)^{p+1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} N = 2 \quad \text{si } p \text{ est pair,} \\ N = 0 \quad \text{si } p \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Ainsi, pour un polyèdre simplement connexe, le nombre N est égal à 2 si p est pair et à 0 si p est impair.

Cela posé, pour établir notre théorème d'une façon complète et rigoureuse, je vais supposer qu'il soit vrai pour les variétés de moins de p dimensions.

Considérons donc notre polyèdre P et une région ν_q à q dimensions appartenant à ce polyèdre. Cette région ν_q fera partie d'un certain nombre de régions ν_{q-1} , d'un certain nombre de régions ν_{q-2} , ..., d'un certain nombre de régions ν_p . L'ensemble de toutes ces régions formera ce que j'appellerai l'aster de ν_q .

Je désignerai par γ_h le nombre des régions ν_h ($h > q$) qui font ainsi partie de l'aster de ν_q .

Soit $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un point de ν_q ; considérons l'hypersphère S qui a pour équation

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 = \varepsilon^2,$$

ε étant très petit.

Soit Π la variété plane définie par les q équations

$$A_i^1(x_1 - x_1^0) + A_i^2(x_2 - x_2^0) + \dots + A_i^n(x_n - x_n^0) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, q),$$

où les A_i^k sont des constantes quelconques.

L'intersection de S , Π et V sera une variété à $p - q - 1$ dimensions que j'appellerai W et qui sera simplement connexe. Les intersections de S et Π avec les diverses régions qui forment l'aster de ν_q formeront par leur ensemble un polyèdre dû à la subdivision de W et qui sera simplement connexe.

Pour ce polyèdre, le nombre α_h sera égal à γ_{h+q+1} ; comme il a moins de p dimensions, notre théorème lui sera applicable, de sorte que nous pourrons écrire

$$(A) \quad \gamma_p - \gamma_{p-1} + \dots \pm \gamma_{q+2} \mp \gamma_{q+1} = 2 \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que $p - q$ sera pair ou impair.

Définissons maintenant un polyèdre Q qui sera formé par une opération que l'on pourra appeler un *quadrillage*.

Soit V une variété à p dimensions située dans l'espace à n dimensions. Construisons une infinité de variétés planes définies par les équations

$$(B) \quad x_i = a_{k,i}, \\ (i = 1, 2, \dots, n; k = -\infty, \dots, -1, 0, +1, +2, \dots, +\infty).$$

Ces variétés planes décomposeront l'espace en une infinité de domaines D_n assimilables à des parallélépipèdes rectangles. Les frontières des D_n seront formées par un certain nombre de domaines D_{n-1} à $n - 1$ dimensions faisant partie des diverses variétés planes $x_i = a_{k,i}$ et également assimilables à des parallélépipèdes rectangles. Les frontières des D_{n-1} seront formées par un certain nombre de domaines D_{n-2} assimilables à des parallélépipèdes rectangles dans l'espace à $n - 2$ dimensions, et ainsi de suite.

Alors le polyèdre Q sera défini de la façon suivante : les régions ν_p seront formées par les intersections de V avec les domaines D_n , les régions ν_{p-1} par les intersections de V avec les domaines D_{n-1} , et ainsi de suite; enfin, les régions ν_0 par les intersections de V avec les domaines D_{n-p} .

Il résulte de cette définition que le polyèdre Q n'admet pas de région singulière.

Je considérerai, en outre, un polyèdre P quelconque congruent à Q , et un polyèdre P' dérivé à la fois de P et de Q .

Je vais remonter, d'une part, de P' à P et, d'autre part, de P' à Q , et j'établirai que, dans ces deux opérations, le nombre N n'a pas changé.

Remontons d'abord de P' à P .

Soit $x_i = a$ une des variétés planes définies par l'équation (B). Classons les régions ν'_q d'un nombre quelconque de dimensions qui composent le polyèdre P' en quatre sortes.

Celles de la première sorte sont celles qui font partie de la variété

$$x_i = a.$$

Celles de la deuxième sorte sont celles qui admettent des points tels que

$$x_i = a + \varepsilon,$$

ε étant positif et très petit.

Celles de la troisième sorte sont celles qui admettent des points tels que

$$x_i = a - \varepsilon.$$

Toutes les autres sont de la quatrième sorte.

Soient δ_q , δ'_q , δ''_q le nombre des variétés à q dimensions qui sont respectivement de la première, de la deuxième et de la troisième sorte.

Toute variété de la deuxième sorte sera contiguë à une variété de la troisième sorte et leur frontière commune sera une variété de la première sorte qui

aura une dimension de moins. Les variétés des trois premières sortes se correspondent donc chacune à chacune et l'on a

$$\delta'_q = \delta''_q = \delta_{q-1}.$$

Il est clair, d'ailleurs, que

$$\delta'_0 = \delta''_0 = \delta_p = 0.$$

Si dans l'ensemble des variétés planes (B) qui constituent le quadrillage et qui ont donné naissance aux polyèdres Q et P', on avait supprimé la variété $x_i = a$, on aurait obtenu deux polyèdres Q_1 et P'_1 , plus simples que les premiers. Comparons P'_1 à P'.

Quand on supprime la variété plane $x_i = a$, on supprime les variétés de la première sorte et l'on *annexe* chaque variété de la troisième sorte à la variété correspondante de la deuxième sorte. Donc en passant de P' à P'_1 , le nombre α_q diminue de

$$\delta''_q + \delta_q = \delta_q + \delta_{q-1}.$$

En particulier, les nombres α_p et α_0 diminuent de δ_{p-1} et δ_0 . Il résulte de là que le nombre N diminue de

$$\delta_{p-1} - (\delta_{p-1} + \delta_{p-2}) + (\delta_{p-2} + \delta_{p-3}) - \dots \pm (\delta_1 + \delta_0) \mp \delta_0 = 0.$$

Donc N ne change pas. Ainsi, en supprimant la variété $x_i = a$, on ne change pas N, mais, en supprimant de la sorte toutes les variétés planes définies par (B), on remontera au polyèdre P. Le nombre N est donc le même pour P' et pour P.

Remontons maintenant de P' à Q.

Soient $\omega_p, \omega_{p-1}, \dots, \omega_1, \omega_0$ les variétés dont l'ensemble constitue le polyèdre Q; soient, de même, $\omega'_p, \omega'_{p-1}, \dots, \omega'_1, \omega'_0$ les variétés dont l'ensemble constitue le polyèdre P'.

Nous répartirons les variétés ω'_q en $p + 1$ classes.

Celles de la première classe seront celles qui feront partie d'une des régions ω_p sans faire partie d'une des régions ω_{p-1} . Le polyèdre P' étant dérivé de Q, nous rangerons dans cette première classe toutes les variétés ω'_p (qui sont toutes des subdivisions des ω_p); celles des variétés ω'_{p-1} , qui séparent l'une de l'autre deux variétés ω'_p faisant partie d'une même région ω_p ; et leurs intersections.

Celles de la deuxième classe seront celles qui feront partie d'une des régions ω_{p-1} sans faire partie d'une des régions ω_{p-2} .

Celles de la troisième classe seront celles qui feront partie d'une des régions ω_{p-2} , sans faire partie d'une des régions ω_{p-3} , etc.

Celles de la $p^{\text{ième}}$ classe seront celles qui feront partie d'une des régions ω_1 , sans être un des points ω_0 .

Enfin, la $(p + 1)^{\text{ième}}$ classe comprendra les points ω_0 .

Pour remonter de P' à Q , voici ce que je vais faire : je commencerai par supprimer toutes les variétés de la première classe qui ont moins de p dimensions, ce qui a pour effet de réunir en une seule, par annexion, toutes les régions ν'_p , qui sont les subdivisions d'une même région ω_p .

Je dis que cette opération n'altère pas le nombre N .

En effet, je puis supposer que les mailles du quadrillage qui a donné naissance à Q sont assez serrées, pour qu'à l'intérieur d'une de ces mailles D_p , c'est-à-dire à l'intérieur d'une des régions ω_p , on ne puisse trouver des points appartenant à deux variétés différentes ν_{p-1} , sauf dans le cas où l'on y trouve des points appartenant à l'intersection de ces deux variétés. (Je désigne toujours par ν_q les variétés dont l'ensemble forme P .) Plus généralement, je puis supposer qu'on ne peut pas trouver dans une région ω_p des points appartenant à plusieurs variétés $\nu_q (q < p)$, à moins qu'on n'y puisse trouver des points appartenant à l'intersection de ces diverses variétés.

Dans une région ω_p , nous pourrions donc avoir des points d'une région ν_q et de toutes les régions $\nu_h (h > q)$, qui font partie de son aster.

Mais nous ne pouvons avoir des points de deux régions ν_q , ou des points de ν_q et d'une région $\nu_h (h > q)$ ne faisant partie de l'aster de ν_q , sans avoir, en outre, des points d'une région ν_{q-1} .

Si alors je suppose que q est la plus petite valeur que l'on puisse donner au nombre des dimensions d'une région ν_q , pour que cette région ait des points à l'intérieur de ω_p , si je suppose cela, dis-je, nous n'aurons dans ω_p que des points d'une seule région ν_q et de son aster.

Considérons alors une région ω_p , contenant des points de ν_q et des régions de l'aster de ν_q . Soient

$$\gamma_{q+1}, \gamma_{q+2}, \dots, \gamma_p,$$

les nombres que nous avons définis plus haut en définissant l'aster.

Il en résulte qu'à l'intérieur de ω_p nous aurons

1	région ν'_q	de la première classe,	
γ_{q+1}	»	ν'_{q+1}	»
γ_{q+2}	»	ν'_{q+2}	»
.....			
γ_p	»	ν'_p	»

En supprimant les régions de la première classe de moins de p dimensions et en annexant les unes aux autres les γ_p régions ν'_p , dont l'ensemble constitue ω_p , nous diminuons α_p de $\gamma_p - 1$, α_{p-1} de γ_{p-1} , ..., α_{q+1} de γ_{q+1} , α_q de 1. Donc, en vertu de l'équation (A), le nombre N ne change pas.

Cela fait, nous supprimerons toutes les variétés de la deuxième classe de moins de $p - 1$ dimensions, en annexant les unes aux autres toutes les variétés ν'_{p-1} de la deuxième classe, qui font partie d'une même région ω_{p-1} . Ensuite, nous supprimerons toutes les variétés de la troisième classe de moins de $p - 2$ dimensions, en annexant les unes aux autres toutes les variétés ν'_{p-2} qui font partie d'une même région ω_{p-2} ; et ainsi de suite.

Nous arriverons enfin au polyèdre Q .

On montrerait de la même manière que plus haut qu'aucune de ces opérations n'altère le nombre N .

Le nombre F est donc le même pour P' et Q ; il est donc aussi le même pour P et Q et, par conséquent, pour deux polyèdres congruents quelconques.

C. Q. F. D.

§ 17. Cas où p est impair.

Je vais définir à l'égard d'un polyèdre quelconque P de nouveaux nombres remarquables que j'appellerai $B_{\lambda,\mu}$.

Soit d'abord $\lambda > \mu$; je considérerai toutes les variétés ν_λ ; pour chacune d'elles, j'envisagerai le nombre des variétés ν_μ qui en font partie; je ferai la somme de tous ces nombres relativement aux diverses variétés ν_λ et ce sera cette somme que j'appellerai $\beta_{\lambda,\mu}$.

Comme les variétés ν_λ sont toutes par hypothèses simplement connexes, on aura

$$\beta_{\lambda,\lambda-1} - \beta_{\lambda,\lambda-2} + \dots \pm \beta_{\lambda,1} \mp \beta_{\lambda,0} = 2\alpha_\lambda \quad \text{ou } 0,$$

selon que λ sera impair ou pair.

Soit maintenant $\lambda < \mu$; je considérerai toutes les variétés ν_λ ; pour chacune d'elles, j'envisagerai le nombre des variétés ν_μ , dont elle fait partie (c'est-à-dire le nombre γ_μ relatif à l'aster de ν_λ); je ferai la somme de tous ces nombres relatifs aux diverses variétés ν_λ et ce sera cette somme que j'appellerai $\beta_{\lambda,\mu}$.

En vertu de l'équation (A) du paragraphe précédent, on aura

$$\beta_{\lambda,p} - \beta_{\lambda,p-1} + \dots \pm \beta_{\lambda,\lambda+2} \mp \beta_{\lambda,\lambda+1} = 2\alpha_\lambda, \quad \text{ou } 0,$$

selon que $p - \lambda$ sera impair ou pair.

Il résulte de cette définition que

$$\beta_{\lambda,\mu} = \beta_{\mu,\lambda}$$

Cela posé, formons le tableau suivant

$$\begin{array}{cccccc} +\beta_{p,p-1}, & -\beta_{p,p-2}, & +\beta_{p,p-3} & \dots, & \pm\beta_{p,1} & \mp\beta_{p,0}, \\ & +\beta_{p-1,p-2}, & -\beta_{p-1,p-3}, & \dots, & \mp\beta_{p-1,1}, & \pm\beta_{p-1,0}, \\ & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ & & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ & & & \dots & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ & & & & +\beta_{2,1}, & -\beta_{2,0}, \\ & & & & & +\beta_{1,0}. \end{array}$$

On voit que, dans chaque ligne et dans chaque colonne, chaque terme est affecté alternativement du signe + et du signe —, de telle façon que $\beta_{\lambda,\mu}$ est affecté du signe +, si $\lambda - \mu$ est impair et du signe — dans le cas contraire.

Faisons la somme des termes de ce tableau; cette somme peut s'effectuer de deux manières : en sommant d'abord les lignes et en sommant d'abord les colonnes.

La somme des termes des diverses lignes du tableau est, en commençant par le haut,

$$2\alpha_p, 0, 2\alpha_{p-2}, 0, \dots, 2\alpha_3, 0, 2\alpha_1$$

si p est impair, et

$$0, 2\alpha_{p-1}, 0, 2\alpha_{p-3}, \dots, 2\alpha_3, 0, 2\alpha_1$$

si p est pair. La somme des termes du tableau est donc

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_p$$

si p est impair. et

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \dots + 2\alpha_{p-1}$$

si p est pair.

La somme des termes des diverses colonnes du tableau est, en commençant par la gauche,

$$2\alpha_{p-1}, 0, 2\alpha_{p-3}, 0, \dots, 2\alpha_2, 0, 2\alpha_0$$

si p est impair, et

$$2\alpha_{p-1}, 0, 2\alpha_{p-3}, 0, \dots, 0, 2\alpha_1, 0$$

si p est pair.

La somme des termes du tableau est donc

$$2\alpha_0 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{p-1}$$

si p est impair, et

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + \dots + 2\alpha_{p-1}$$

si p est pair.

En égalant les deux expressions de cette somme, on obtiendra une identité, si p est pair, et l'équation

$$N = 0$$

si p est impair.

D'où cette conséquence :

Le nombre N est nul et indépendant des nombres de Betti si p est impair; il dépend, au contraire, des nombres de Betti si p est pair.

§ 18. Deuxième démonstration.

La deuxième démonstration va nous apprendre comment il en dépend.

Pour bien la faire comprendre, je vais d'abord l'exposer pour les polyèdres ordinaires avec α_0 sommets, α_1 arêtes et α_2 faces.

A chacun des α_0 sommets, je fais correspondre un nombre arbitraire; à chacune des α_1 arêtes, je fais correspondre un nombre δ égal à la différence des nombres correspondant à ses deux sommets.

Nous aurons ainsi α_1 différences δ ; mais elles ne pourront pas toutes être choisies arbitrairement; en effet, elles seront déterminées, quand on connaîtra les α_0 nombres affectés aux divers sommets et même quand on connaîtra les excès de $\alpha_0 - 1$ de ces nombres sur le dernier. Il y aura donc en tout $\alpha_0 - 1$ différences δ , qui pourront être choisies arbitrairement.

Il doit donc y avoir entre les différences δ

$$\alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

relations linéaires.

Il est clair que l'on pourra obtenir toutes ces relations linéaires de la manière suivante : Considérons une suite d'arêtes formant un contour fermé; la somme algébrique des différences δ relatives aux diverses arêtes de cette suite devra être nulle.

Cherchons donc à construire des contours fermés formés d'arêtes.

Nous avons d'abord les contours polygonaux de chaque face; ils sont au nombre de α_2 .

Si ensuite le polyèdre n'est pas simplement connexe, nous pourrons tracer à sa surface $P_1 - 1$ contours fermés linéairement indépendants au sens donné à ce mot dans le paragraphe sur les homologies. Soit C l'un de ces contours, il traversera successivement différentes faces; soient $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n, a_n a_1$ les arcs de ce contour, qui sont dans chacune de ces faces.

Prenons le premier de ces arcs $a_1 a_2$ et F la face correspondante.

Le point a_1 et le point a_2 sont sur le périmètre de cette face; nous pouvons alors aller de a_1 en a_2 en suivant ce périmètre par un chemin que j'appellerai $a_1 m_1 a_2$. Nous aurons alors

$$a_1 m_1 a_2 + a_2 a_1 \sim 0,$$

c'est-à-dire que, dans le contour C , on peut remplacer l'arc $a_1 a_2$ par l'arc $a_1 m_1 a_2$; opérons de même pour les autres arcs de C ; nous aurons finalement remplacé C par le contour homologue

$$a_1 m_1 a_2 + a_2 m_2 a_3 + \dots + a_n m_n a_1,$$

que j'appellerai C' . Ce contour C' se composera d'un certain nombre d'arêtes et de portions d'arêtes. Par exemple, l'arc $a_1 m_1 a_2$ se composera d'un segment d'arête joignant a_1 au sommet le plus voisin, puis d'un certain nombre d'arêtes complètes, puis d'un segment $S a_2$ joignant a_2 au sommet le plus voisin.

Mais ce segment $S a_2$ se retrouvera parcouru en sens contraire dans l'arc $a_2 m_2 a_3$. Les portions d'arêtes, qui font partie de C' , sont donc parcourues deux fois en sens contraires; nous pouvons donc les supprimer et nous obtenons ainsi un contour C'' exclusivement formé d'arêtes complètes et homologue à C ou à C' .

Nous aurons $P_1 - 1$ contours analogues à C'' , qui nous donneront $P_1 - 1$ relations entre les δ .

Nous obtenons ainsi $\alpha_2 + P_1 - 1$ contours fermés formés d'arêtes; je dis que tous les autres contours possibles n'en sont que des combinaisons.

Soit d'abord un contour fermé formé d'arêtes et homologue à zéro, il partagera la surface du polyèdre en deux régions. Soit R l'une d'elles; elle sera évidemment formée d'un certain nombre q de faces, puisque le contour est exclusivement formé d'arêtes; nous pourrions donc remplacer le contour donné par q contours partiels formés par les périmètres de ces q faces.

Si maintenant le contour donné n'est pas homologue à zéro, nous pourrions toujours le remplacer par une combinaison des contours C'' et par un contour homologue à zéro.

Nous avons donc

$$\alpha_2 + P_1 - 1$$

relations entre nos δ et nous n'en avons pas d'autres; mais sont-elles toutes distinctes?

Pour le reconnaître, il faut voir si l'on peut former une combinaison linéaire

de ces relations qui se réduise à une identité ou, ce qui revient au même, si l'on peut former une combinaison de nos $\alpha_2 + P_1 - 1$ contours, une combinaison telle que chaque arête soit parcourue deux fois en sens contraire (où, si elle l'est plus de deux fois, qu'elle le soit autant de fois dans un sens que dans l'autre).

Peut-on d'abord former une telle combinaison avec les α_2 périmètres Π ? Dire que chaque arête est parcourue ainsi deux fois en sens contraire, c'est dire que l'ensemble des polygones, dont on parcourt ainsi les périmètres, forme un polyèdre fermé.

Or, on ne peut évidemment construire de la sorte qu'un seul polyèdre fermé, qui est le polyèdre donné.

Avec les α_2 relations correspondant aux α_2 périmètres Π , nous pouvons donc former une combinaison linéaire identique et une seule.

Peut-on former maintenant de pareilles combinaisons avec les périmètres Π et les contours C'' ? Si cela était, l'ensemble des polygones, dont on parcourt ainsi les périmètres, formerait une surface polyédrique non fermée, dont la frontière complète serait formée par une combinaison des contours C'' . Or, cela est impossible, puisque les contours C'' sont linéairement indépendants.

On peut donc former avec nos $\alpha_2 + P_1 - 1$ relations une combinaison identique et une seule. Il y a donc entre les δ

$$(\alpha_2 + P_1 - 1) - 1$$

relations distinctes. Le nombre des δ arbitraires est donc

$$\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + 1,$$

de sorte qu'il vient

$$\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + 1$$

ou

$$N = 3 - P_1.$$

Etendons cette démonstration au cas où nous avons un polyèdre à trois dimensions, où l'on distinguera :

Les sommets ν_0	au nombre de	α_0 ,
les variétés ν_1	»	α_1 ,
» ν_2	»	α_2 ,
» ν_3	»	α_3 .

A chacun des ν_0 , faisons correspondre un nombre, et à chacun des ν_1 la

différence δ des nombres correspondant à ces deux sommets. Nous aurons ainsi α_1 différences δ , dont $\alpha_0 - 1$ seront arbitraires.

On obtiendra les relations linéaires qui ont lieu entre les δ , en construisant tous les contours fermés exclusivement formés avec des ν_1 .

Nous aurons d'abord les périmètres Π des ν_1 , qui seront au nombre de α_2 ; soit ensuite C un contour fermé quelconque non homologue à zéro, il traversera successivement différents ν_3 ; soient $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots$ les arcs de C qui se trouvent dans chacun de ces ν_3 .

Considérons l'arc $a_1 a_2$ qui se trouve dans un des ν_3 , que j'appelle Φ , et dont les extrémités a_1 et a_2 se trouvent dans deux des ν_2 , qui servent de frontière à Φ , à savoir a_1 dans φ_1 et a_2 dans φ_2 .

Soient b_1 un sommet de φ_1 , b_2 un sommet de φ_2 ; joignons a_1 à b_1 par une ligne quelconque $a_1 b_1$, puis b_1 à b_2 par une ligne $b_1 b_2$ formée exclusivement par des ν_1 appartenant à la frontière de Φ , et b_2 à a_2 par une ligne quelconque $a_2 b_2$; on aura

$$a_1 a_2 \sim a_1 b_1 + b_1 b_2 + b_2 a_2,$$

de sorte que nous pourrions remplacer l'arc $a_1 a_2$ par l'arc $a_1 b_1 b_2 a_2$; opérons de même pour les autres arcs de C . Nous aurons remplacé C par le contour homologue

$$a_1 b_1 b_2 a_2 + a_2 b_2 b_3 a_3 + \dots$$

que j'appelle C' . Le contour C' se compose d'un certain nombre de ν_1 et d'arcs analogues à $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$ parcourus chacun deux fois en sens contraire. On peut donc supprimer ces arcs, et il reste un contour C'' homologue à C et exclusivement formé de ν_1 .

Il y aura $P_1 - 1$ contours C'' .

Je dis maintenant que tout contour fermé K formé de ν_1 est une combinaison des Π et des C'' . Si $K \sim 0$, le contour K sera la frontière complète d'une certaine région R à deux dimensions. Cette région R pourra être subdivisée en un certain nombre de variétés r , chacune des régions r étant la portion de R qui se trouve à l'intérieur de l'un des ν_3 . Considérons une des variétés r , et soit φ la région ν_3 dans laquelle elle se trouve; la frontière complète de r sera une variété fermée u à une dimension, qui fera partie de la frontière complète de φ . Comme φ est simplement connexe, u partagera la frontière complète de φ en deux régions; soit r' l'une de ces régions; elle se composera d'un certain nombre de ν_2 qui en feront partie tout entières et d'un certain nombre de portions de ν_2 (puisque, parmi les ν_2 qui forment la frontière complète de φ , il

Je dis maintenant que toute variété fermée K formée de ν_2 est une combinaison des Π et des D'' . Si, en effet, elle est homologue à zéro, elle limite une région S à trois dimensions qui se composera d'un certain nombre de ν_2 , puisque K se compose d'un certain nombre de ν_2 ; on pourra donc remplacer K par les frontières complètes Φ de ces ν_2 . Si K n'est pas homologue à zéro, on pourra la remplacer par un certain nombre de D'' et par une variété homologue à zéro et exclusivement formée de ν_2 .

Nous avons donc, entre les ε ,

$$\alpha_2 + P_2 - 1$$

relations linéaires, que j'écrirai

$$\zeta = 0,$$

et nous n'en aurons pas d'autres. Sont-elles distinctes ?

Pour former une combinaison linéaire des ζ qui soit identiquement nulle, il faut former une combinaison des Φ et des D'' telle que chaque ν_2 y figure deux fois en sens contraire. Nous verrions, comme plus haut, que les D'' ne peuvent pas figurer dans cette combinaison et que l'ensemble des ν_2 , dont les frontières Φ y figurent, doit former une variété fermée à trois dimensions. Or, nous ne pouvons construire qu'une seule variété de cette sorte : c'est le polyèdre donné lui-même.

Il y a donc une combinaison linéaire des ζ qui s'annule identiquement.

Il y aura donc

$$(\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$$

relations linéaires distinctes entre les ε ,

$$(\alpha_2 + P_1 - 1) - (\alpha_3 + P_2 - 1) + 1$$

relations linéaires distinctes entre les δ .

Parmi les δ , il en restera donc

$$\alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$$

qui seront arbitraires; on trouve ainsi

$$\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - 1$$

et l'on trouverait

$$\alpha_0 - 1 = \alpha_1 - (\alpha_2 + P_1 - 1) + (\alpha_3 + P_2 - 1) - [(\alpha_4 + P_3 - 1) + 1]$$

pour les polyèdres à quatre dimensions.

On a donc

$$N = P_2 - P_1$$

pour les polyèdres à trois dimensions, et

$$N = 3 - P_1 + P_2 - P_3$$

pour les polyèdres à quatre dimensions.

En général, on aura

$$N = P_{p-1} - P_{p-2} + \dots + P_2 - P_1$$

si p est impair, et

$$N = 3 - P_1 + P_2 - \dots + P_{p-1}$$

si p est pair.

Si nous observons maintenant que les nombres de Betti, également distants des extrêmes, sont égaux, on verra que l'on doit avoir

$$N = 0$$

si p est impair, comme nous l'avions déjà vu dans le numéro précédent.



SUR LES NOMBRES DE BETTI

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 128, p. 629-630 (13 mars 1899).

Dans un Mémoire intitulé *Analysis situs* et inséré au *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai énoncé un théorème d'après lequel, dans toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

M. Heegaard est revenu sur la question dans un travail très remarquable, intitulé : *Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske Fladers Sammenhæng*. Il considère le théorème comme inexact.

Ces critiques sont en partie fondées; le théorème n'est pas vrai des nombres de Betti tels que Betti les définit; c'est ce qui résulte d'un exemple cité par M. Heegaard; c'est ce qui résultait d'ailleurs, d'un exemple que j'avais moi-même rencontré dans mon Mémoire.

Le théorème est vrai, au contraire, des nombres de Betti tels que je les définis; j'en ai trouvé une démonstration qui est fondée sur la considération des polyèdres à n dimensions et que je développerai prochainement dans un Mémoire plus étendu.

Voici la différence des deux définitions :

Le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti diminué d'une unité est le nombre des variétés à p dimensions distinctes faisant partie de la variété donnée.

Mais il reste à définir ce qu'on doit entendre par variétés distinctes.

Pour Betti, plusieurs variétés v_p sont distinctes quand il n'existe pas dans la variété donnée de variété à $p + 1$ dimensions dont la frontière complète soit formée par l'ensemble des variétés v_p . Dans la définition que j'ai adoptée, les variétés v_p ne sont dites *distinctes* que s'il n'existe pas de variété à $p + 1$ dimensions dont la frontière complète soit formée par l'ensemble des variétés v_p , répété une ou plusieurs fois.

COMPLÉMENT A L'ANALYSIS SITUS

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 13, p. 285-343 (1899).

§ I. — Introduction.

Dans le *Journal de l'École Polytechnique* (volume du centenaire de la fondation de l'École, 1894) j'ai publié un Mémoire intitulé *Analysis situs*, où j'étudie les variétés de l'espace à plus de trois dimensions et les propriétés des nombres de Betti. C'est à ce Mémoire que se rapporteront les renvois que je serai amené à faire fréquemment dans la suite, en mentionnant seulement le titre *Analysis situs*.

Dans ce Mémoire se trouve énoncé le théorème suivant : *Pour toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.*

Le même théorème a été énoncé par M. Picard dans sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*.

M. Heegaard vient de revenir sur ce même problème dans un travail très remarquable, publié en langue danoise, sous le titre « *Forstudier til en topologisk teori for de algebraiske Sammenhæng* » (Copenhague, det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, 1898). D'après lui le théorème en question est inexact et les démonstrations sont sans valeur.

Avant d'examiner les objections de M. Heegaard, il convient de faire une distinction. Il y a deux manières de définir les nombres de Betti.

Considérons une variété V que je supposerai, par exemple, fermée; soient $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$, n variétés à p dimensions, faisant partie de V . Je suppose qu'on ne puisse pas trouver de variété à $p + 1$ dimensions faisant partie de V et dont $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ constituent la frontière complète; mais que, si on leur adjoint une $(n + 1)^{\text{ème}}$ variété à p dimensions que j'appellerai ν_{n+1} et qui fera

partie de V , on puisse trouver une variété à $p + 1$ dimensions, faisant partie de V , dont $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_{n+1}$ constituent la frontière complète et *cela de quelque manière que l'on ait choisi la $(n + 1)^{\text{ième}}$ variété ν_{n+1}* . Dans ce cas, on dit que le nombre de Betti est égal à $n + 1$ pour les variétés à p dimensions.

C'est la définition adoptée par Betti.

Mais on peut donner une seconde définition.

Supposons que l'on puisse trouver dans V une variété à $p + 1$ dimensions, dont $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ constituent la frontière complète; j'exprimerai ce fait par la relation suivante :

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n \sim 0,$$

que j'appellerai une *homologie*.

Il pourra se faire que sur la frontière complète de notre variété à $p + 1$ dimensions, une même variété ν_1 se retrouve plusieurs fois; dans ce cas, elle figurera dans le premier membre de l'homologie avec un coefficient, qui devra être un nombre entier.

D'après cette définition, on peut additionner les homologies, les soustraire les unes des autres, les multiplier par un nombre entier.

Nous *conviendrons* également qu'il est permis de diviser une homologie par un nombre entier, quand tous les coefficients sont divisibles par cet entier. Par conséquent, s'il y a une variété à $p + 1$ dimensions, dont la frontière complète sera constituée par quatre fois la variété ν_1 , nous *conviendrons* qu'on peut écrire non seulement l'homologie

$$4\nu_1 \sim 0,$$

mais encore l'homologie

$$\nu_1 \sim 0;$$

de sorte que cette homologie signifie qu'il y a des variétés à $p + 1$ dimensions, qui admettent pour frontière complète la variété ν_1 ou un certain nombre de fois cette variété.

L'homologie

$$2\nu_1 + 3\nu_2 \sim 0$$

signifie qu'il y a des variétés à $p + 1$ dimensions, qui ont pour frontière complète deux fois ν_1 et trois fois ν_2 , ou quatre fois ν_1 et six fois ν_2 , ou six fois ν_1 et neuf fois ν_2 , etc.

Telles sont les conventions que j'ai adoptées dans l'*Analysis situs*, page 207.

Je dirai que plusieurs variétés sont indépendantes, si elles ne sont pas liées par aucune homologie à coefficients entiers.

Si alors il y a n variétés indépendantes à p dimensions, le nombre de Betti, d'après la seconde définition, est égal à $n + 1$.

Cette seconde définition, qui est celle que j'ai adoptée dans l'*Analysis situs*, ne concorde pas avec la première.

Le théorème énoncé plus haut et critiqué par M. Heegaard, est vrai pour les nombres de Betti, définis de la seconde manière, et faux pour les nombres de Betti définis de la première manière.

C'est ce que prouve l'exemple cité par M. Heegaard, page 86.

Si l'on adopte la première définition, on a

$$P_1 = 2, \quad P_2 = 1$$

et, par conséquent,

$$P_2 < P_1.$$

Si l'on adopte, au contraire, la seconde définition, on trouve

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 1$$

et, par conséquent,

$$P_2 = P_1,$$

conformément au théorème énoncé.

C'est ce que prouvait également un exemple que j'ai cité, moi-même, dans l'*Analysis situs*. C'est le troisième exemple, page 232.

Nous avons formé (p. 244) les équivalences fondamentales, qui s'écrivent de la façon suivante :

$$2C_1 \equiv 2C_2 \equiv 2C_3 \equiv 0, \quad 4C_1 \equiv 0;$$

nous pouvons en déduire les homologies

$$4C_1 \sim 4C_2 \sim 4C_3 \sim 0.$$

Comme, d'après notre convention, on peut diviser ces homologies par 4, nous arrivons au système suivant d'homologies fondamentales :

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0.$$

Si alors P_1 et P_2 sont les nombres de Betti, *définis de la seconde manière*, on trouve

$$P_1 = P_2 = 1.$$

Mais l'égalité entre les nombres P_1 et P_2 ne subsisterait pas si l'on avait adopté la première définition, qui est celle de Betti; nous aurions toujours $P_2 = 1$, mais nous n'aurions plus $P_1 = 1$.

En effet, il n'y a pas de variété à deux dimensions qui ait pour frontière complète la ligne fermée C_1 , sans quoi nous aurions l'équivalence $C_1 \equiv 0$.

Ce qui est vrai seulement, c'est qu'il y a une variété à deux dimensions, admettant pour frontière quatre fois la ligne C_1 . Donc P_1 n'est pas égal à 1.

Revenons au théorème d'après lequel les nombres de Betti, également distants des extrêmes, sont égaux.

La démonstration que j'en ai donnée dans l'*Analysis situs*, semble s'appliquer également bien aux deux définitions des nombres de Betti; elle doit donc avoir un point faible, puisque les exemples qui précèdent montrent suffisamment que le théorème n'est pas vrai pour la première définition.

M. Heegaard s'en est bien rendu compte; mais je ne crois pas que sa première objection soit fondée.

Après avoir cité la façon dont je définis les variétés V_1, V_2, \dots, V_p (*Analysis situs*, p. 226), par les équations $\Phi = 0, F'_i = 0$, il ajoute (p. 70) : « *Enhver af Mangfoldighederne V skulde altsaa kunne være den fulstaendige Skoering mellem p Mangfoldigheder af h — 1 Dimensioner i U* » (1). Cela n'est pas exact, car, outre mes égalités, j'ai un certain nombre d'inégalités, que j'ai introduites au début du Mémoire et que j'ai négligé d'écrire de nouveau dans la suite; mes variétés ne sont donc pas des intersections complètes.

La seconde objection est, au contraire, fondée. « *Naar omvendt, dit M. Heegaard, Homologien $\sum V_i \sim 0$ ikke finder Sted, saa i U' kan legges en lukket Kurve V' , saa at*

$$\sum N(V', V_i) \neq 0$$

men det er ikke sikker, at denne Kurve kan udskæres af nogen Mangfoldighed V » (2). C'est là, en effet, le véritable point faible de la démonstration.

Il est donc nécessaire de revenir sur la question, et c'est l'objet du présent travail.

Souvent, pour simplifier les démonstrations, j'ai envisagé seulement le cas des variétés fermées à trois dimensions, contenues dans l'espace à quatre dimensions. On pourrait facilement les étendre au cas général.

(1) Chacune des variétés V devrait donc être l'intersection complète de p variétés de U de dimension $h - 1$.

(2) Si inversement l'homologie $\sum V_i \sim 0$ n'a pas lieu, alors dans U' on peut tracer une courbe fermée V' telle que $\sum N(V', V_i) \neq 0$, mais il n'est pas certain que cette courbe soit intersection de variétés V .

J'envisage donc, dans la suite, une variété V fermée, mais pour calculer ses nombres de Betti, je la suppose divisée en variétés plus petites, de façon à former un polyèdre, au sens donné à ce mot à la page 171 de l'*Analysis situs*.

§ II. — Schéma d'un polyèdre.

Considérons donc, comme à la page 171 de l'*Analysis situs*, un polyèdre à p dimensions, c'est-à-dire une variété V à p dimensions, divisée en variétés v_p ; les frontières des v_p seront les v_{p-1} , celles des v_{p-1} seront les v_{p-2} , . . . , celles des v_1 (arêtes) seront les v_0 (sommets).

J'appellerai α_i le nombre des v_i .

Soient $\alpha_1^q, \alpha_2^q, \dots, \alpha_{\alpha_q}^q$ les différentes v_q .

Soit α_1^q une des variétés v_q et α_1^{q-1} une des variétés v_{q-1} qui lui sert de frontière. Étudions les rapports de α_1^q et de α_1^{q-1} .

Soient

$$(1) \quad F_1 = F_2 = \dots = F_{n-q} = F_{n-q+1} = 0 \quad \varphi_\gamma > 0$$

les égalités et les inégalités qui définissent α_1^{q-1} , d'après la première définition des variétés (*Analysis situs*, p. 196).

Les relations qui définissent α_1^q pourront se mettre sous la forme

$$(2) \quad F_1 = F_2 = \dots = F_{n-q} = 0, \quad F_{n-q+1} > 0, \quad \varphi_\gamma > 0.$$

Dans ce cas nous dirons que la relation de α_1^q et de α_1^{q-1} est *directe*.

Cette relation deviendrait *inverse*, si l'une de ces deux variétés était remplacée par la variété opposée; elle redeviendrait *directe*, si chacune des deux variétés était remplacée par la variété opposée.

On sait qu'une variété est remplacée par la *variété opposée* (*Analysis situs*, p. 204), quand on permute deux des fonctions F (qui, égalées à zéro, donnent les équations qui définissent la variété), ou qu'on change le signe de l'une d'elles.

Ainsi les deux variétés

$$\begin{array}{lll} F_1 = F_2 = F_3 = 0; & F_1 = F_2 = 0, & F_3 > 0; \\ F_1 = F_2 = F_3 = 0; & F_1 = F_3 = 0, & F_2 < 0; \\ F_1 = F_2 = F_3 = 0; & F_2 = F_3 = 0, & F_1 > 0 \end{array}$$

sont en relation directe; tandis que les deux variétés

$$\begin{aligned} F_1 = F_2 = F_3 = 0; & \quad F_1 = F_2 = 0, & \quad F_3 < 0; \\ F_1 = F_2 = F_3 = 0; & \quad F_1 = F_3 = 0, & \quad F_2 > 0 \end{aligned}$$

sont en relation inverses.

Cela posé, soit ε_{ij}^q un nombre qui sera égal à zéro, si α_j^{q-1} n'est pas frontière de α_i^q ; à $+1$, si α_j^{q-1} est frontière de α_i^q et en relation directe avec α_i^q ; et, enfin, à -1 , si α_j^{q-1} est frontière de α_i^q mais en relation inverse avec α_i^q .

Nous conviendrons d'écrire la congruence

$$(3) \quad \alpha_i^q \equiv \sum \varepsilon_{ij}^q \alpha_j^{q-1},$$

qui nous fait connaître les frontières de α_i^q .

L'ensemble des congruences (3), relatives aux différentes $\nu_p, \nu_{p-1}, \dots, \nu_0$ de V , constitue ce qu'on peut appeler le *schéma d'un polyèdre*.

On peut se poser deux questions :

1° Un schéma étant donné, existera-t-il toujours un polyèdre, qui y corresponde?

2° Deux polyèdres qui ont même schéma, sont-ils homéomorphes?

Sans aborder, pour le moment, ces deux questions, cherchons quelques-unes des conditions auxquelles doit satisfaire un schéma, pour qu'un polyèdre y puisse correspondre.

Considérons l'une des $\nu_{p-1}, \alpha_1^{p-1}$, par exemple; cette variété devra séparer, l'une de l'autre, deux des ν_p et deux seulement; de sorte que, parmi les nombres $\varepsilon_{i,1}^p$, il y en aura un qui sera égal à $+1$, un qui sera égal à -1 et tous les autres seront égaux à zéro.

Ce n'est pas tout; envisageons l'une quelconque des ν_q, α_i^q par exemple, et une quelconque des $\nu_{q-2}, \alpha_k^{q-2}$ par exemple.

De deux choses, l'une : ou bien α_k^{q-2} n'appartiendra pas à α_i^q , et dans ce cas tous les produits

$$(4) \quad \varepsilon_{ij}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1}$$

seront nul, car si α_j^{q-1} n'appartient pas à α_i^q , le premier facteur est nul; si, au contraire, α_j^{q-1} appartient à α_i^q , la variété α_k^{q-2} ne peut pas appartenir à α_j^{q-1} (sans quoi, elle appartiendrait à α_i^q , contrairement à l'hypothèse), et le second facteur doit être nul.

Ou bien a_k^{q-2} appartiendra à a_i^q ; mais alors nous pourrions raisonner sur la variété a_i^q , comme nous raisonnions tout à l'heure sur la variété V , et nous concluons que a_k^{q-2} doit séparer, l'une de l'autre, deux des variétés v_{q-1} , qui appartiennent à a_i^q , et deux seulement : soient a_1^{q-1} et a_2^{q-1} .

Parmi les produits (4), il n'y en aura que deux qui ne seront pas nuls, à savoir

$$\varepsilon_{i,1}^q \varepsilon_{1,k}^{q-1}, \quad \varepsilon_{i,2}^q \varepsilon_{2,k}^{q-1}.$$

Pour tous les autres, en effet, ou bien a_j^{q-1} n'appartiendra pas à a_i^q , ou bien a_k^{q-2} n'appartiendra pas à a_j^{q-1} .

Ces deux produits sont d'ailleurs égaux : l'un à $+1$, l'autre à -1 .

On aura donc dans tous les cas

$$(5) \quad \sum_j \varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1} = 0.$$

Nous avons, de même,

$$\sum_i \varepsilon_{i,1}^q = 0,$$

et, plus généralement, quel que soit k ,

$$(5 \text{ bis}) \quad \sum_i \varepsilon_{i,k}^q = 0.$$

La relation (5 bis) peut être regardée, à un certain point de vue, comme un cas particulier de la relation (5).

Soit P la portion de l'espace à $p+1$ dimensions, limitée par le polyèdre V ; alors la frontière complète de P se composera des diverses variétés v_p , qui, par leur ensemble, forment V ; nous pourrions donc écrire, au sens de la congruence (3),

$$(3 \text{ bis}) \quad P \equiv \sum_i a_i^p,$$

ou encore

$$P \equiv \sum_i \varepsilon_{0,i}^{p+1} a_i^p,$$

où les nombres $\varepsilon_{0,i}^{p+1}$ seront tous, par définition, égaux à 1.

A ce compte, la relation (5 bis), qui peut s'écrire

$$\sum_i \varepsilon_{0,i}^{p+1} \varepsilon_{i,k}^p = 0,$$

n'est plus qu'un cas particulier de la relation (5).

Nous avons, ensuite, chaque ν_1 qui a pour limites deux ν_0 , et deux seulement, ce qui nous donne des congruences (3) de la forme

$$a_i^1 \equiv a_j^0 - a_k^0,$$

et une relation analogue à (5) et (5 bis)

$$\sum_j \varepsilon_{i,j}^1 = 0,$$

qui rentrerait encore dans la forme (5), en convenant de faire tous les ε_0 égaux à + 1.

D'autre part, envisageons l'une des a_i^q ; toutes les a_j^{q-1} auxquelles elle sert de frontière; toutes les a_k^{q+2} , auxquelles ces a_j^{q+1} servent de frontières et ainsi de suite. L'ensemble de toutes ces variétés constituera ce que nous avons appelé un *aster* (*Analysis situs*, p. 276).

Nous avons vu (*loc. cit.*, p. 276) que le polyèdre qui correspond à un aster, doit être simplement connexe. Ainsi une condition pour qu'un polyèdre puisse correspondre à un schéma donné, c'est que les polyèdres qui correspondent aux différents asters, d'après la convention de la page 276 de l'*Analysis situs*, soient tous simplement connexes.

Considérons maintenant une des a_i^q , toutes les a_j^{q-1} qui lui servent de frontières, les a_k^{q-2} qui servent de frontières à ces a_j^{q-1} et ainsi de suite. Cet ensemble de variétés constituera un polyèdre à q dimensions; nous supposons que ce polyèdre soit simplement connexe.

Ce n'est plus là une condition nécessaire pour qu'un polyèdre puisse correspondre au schéma; c'est simplement une condition que, sauf avis contraire, nous supposons remplie.

Pour éclairer ces définitions par quelques exemples, voyons d'abord quel est le schéma du tétraèdre généralisé, défini à la page 275 (*Analysis situs*).

Les faces de ce tétraèdre seront définies par les $n + 1$ équations

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 0, & \dots, & x_n = 0, \\ & & & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1. \end{cases}$$

On obtiendra les a_i^q en supprimant $q + 1$ de ces équations; pour définir le sens de la variété a_i^q , nous supposons qu'on supprime ces $q + 1$ équations, mais sans changer l'ordre des $n - q$ équations restantes.

Cela posé, considérons la relation de a_i^q et de a_j^{q-1} et cherchons à déterminer le nombre $\varepsilon_{i,j}^q$.

D'abord, pour que α_i^{q-1} appartienne à α_i' , il faut que α_i^{q-1} soit définie par les $n - q$ équations qui définissent α_i' , auxquelles on devra adjoindre une $(n - q + 1)^{\text{ième}}$ équation, prise parmi les équations (6). S'il n'est pas ainsi, le nombre $\varepsilon_{i,j}^q$ sera nul.

Supposons donc que α_i^{q-1} soit obtenu en supprimant les q équations qui occupent les

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \text{ rangs.}$$

Supposons que α_i' soit obtenue en supprimant, *en outre*, la $\beta^{\text{ième}}$ équation; alors le nombre $\varepsilon_{i,j}^q$, dont la valeur absolue sera toujours égale à 1, aura même signe que le produit

$$(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \dots (\beta - \alpha_q).$$

Il est aisé de vérifier alors que la relation (5) a lieu.

Considérons, en effet, la variété α_k^{q-2} , obtenue en supprimant les équations de rang $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}$ et la variété α_i' , obtenue en supprimant, en outre, les équations de rang β et γ . (Il est clair que si α_i' ne s'obtenait pas en supprimant les mêmes équations que pour α_k^{q-2} , plus deux autres, tous les produits $\varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1}$ seraient nuls).

Dans ce cas, tous ces produits seront encore nuls, sauf deux

$$\varepsilon_{i,1}^q \varepsilon_{1,k}^{q-1} \text{ et } \varepsilon_{i,2}^q \varepsilon_{2,k}^{q-1},$$

qui correspondront aux deux variétés α_1^{q-1} et α_2^{q-2} , obtenues respectivement en supprimant les équations de rang $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}, \beta$ et celles de rang $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q-1}, \gamma$.

Alors, les quatre nombres

$$\varepsilon_{i,1}^q, \varepsilon_{1,k}^{q-1}, \varepsilon_{i,2}^q, \varepsilon_{2,k}^{q-1}$$

auront respectivement même signe que

$$\begin{aligned} &(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha_1)(\gamma - \alpha_2) \dots (\gamma - \alpha_{q-1}), \\ &(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \dots (\beta - \alpha_{q-1}), \\ &(\beta - \gamma)(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \dots (\beta - \alpha_{q-1}), \\ &(\gamma - \alpha_1)(\gamma - \alpha_2) \dots (\gamma - \alpha_{q-1}). \end{aligned}$$

On vérifie ainsi que les deux produits, qui ne sont pas nuls, sont égaux et de signe contraire ⁽¹⁾.

G. Q. F. D.

(1) Le polyèdre ainsi défini, ainsi que tout polyèdre à n dimensions, limité par $n + 1$ variétés planes, s'appellera *tétraèdre généralisé rectiligne*. J'appellerai *tétraèdre généralisé* toute variété homéomorphe à un tétraèdre généralisé rectiligne.

§ III. — Nombres de Betti réduits.

Je m'en vais chercher maintenant les nombres de Betti, relatifs à un polyèdre, mais afin d'éviter l'équivoque, dont j'ai signalé plus haut la possibilité, je conviendrai de définir ces nombres *de la seconde manière*, c'est-à-dire que $P_q - 1$ sera le nombre de variétés fermées à q dimensions, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V et qui sont *linéairement indépendantes*, je veux dire, qui ne sont liées par aucune homologie à coefficient entier, au sens de *Analysis situs*, p. 207.

Mais je me proposerai d'abord de déterminer le nombre $P'_q - 1$ des variétés à q dimensions, fermées et linéairement indépendantes, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V , mais *en nous bornant à celles qui sont des combinaisons des variété v_q* .

Le nombre P'_q sera alors ce que j'appellerai le *le nombre de Betti réduit*.

Les variétés à q dimensions, qui sont des combinaisons des v_q , pourront évidemment être représentées par $\sum_i \lambda_i a_i^q$, les λ_i étant des coefficients entiers et les lettres a_i^q continuant à désigner les différentes variétés v_q .

Quelle est d'abord la condition pour que la variété $\sum_i \lambda_i a_i^q$ soit fermée?

Pour cela cherchons quelles sont les variétés v_{q-1} qui forment les frontières de cette variété. Pour les trouver il suffit évidemment de remplacer a_i^q par sa valeur donnée par la congruence (3).

Cet ensemble de variétés frontières sera donc donné par la formule

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}.$$

Pour que la variété $\sum_i \lambda_i a_i^q$ soit fermée, il suffit donc que l'on ait identiquement

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1} = 0,$$

c'est-à-dire que, quel que soit j , on ait

$$\sum_i \lambda_i \varepsilon_{i,j}^q = 0.$$

En d'autres termes, la variété $\sum_i \lambda_i a_i^q$ sera fermée, si l'on a

$$(7, q) \quad \sum_i \lambda_i a_i^q \equiv 0,$$

en vertu des congruences (3, q); j'appelle ainsi celles des congruences (3), qui lient les a_i^q aux a_j^{q-1} .

Cherchons maintenant les homologies qui peuvent exister entre les variétés a_i^q . On obtiendra toutes ces homologies, en combinant celles que l'on peut obtenir de la façon suivante.

Considérons la congruence

$$(8) \quad a_k^{q+1} \equiv \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q$$

qui, d'après la convention que nous venons de faire, est une congruence (3, $q+1$); remplaçons le signe \equiv par \sim , et le premier membre par zéro; il viendra

$$(9, q) \quad \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \sim 0.$$

Cette homologie aura évidemment lieu, puisque, par définition, elle exprime, comme la congruence (8), que les a_i^q forment la frontière complète de a_k^{q+1} .

Nous démontrerons plus loin (§ VI), qu'il n'y en a pas d'autres.

Je désigne cette homologie par (9, q) pour marquer qu'elle a lieu entre les a_i^q .

Je dis que si l'homologie (9, q) a lieu, la congruence

$$(10, q) \quad \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \equiv 0$$

sera une conséquence des congruences (3, q).

Remplaçons, en effet, les a_i^q par leurs valeurs, données par ces congruences (3, q); il viendra

$$\sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \equiv \sum_i \sum_j \varepsilon_{k,i}^{q+1} \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}.$$

Le second membre est identiquement nul en vertu des relations (5).

Cela posé, soit α_q le nombre des variétés a_i^q ; soit α'_q le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une homologie de la forme (9, q); soit α''_q le nombre de ces variétés qui

restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liés par une congruence de la forme (7, q).

Il résulte de ces définitions :

- 1° qu'il y a $\alpha_q - \alpha'_q$ homologies distinctes de la forme (9, q);
- 2° qu'il y a $\alpha_q - \alpha''_q$ congruences distinctes de la forme (7, q);
- 3° que $\alpha'_q \geq \alpha''_q$, car si plusieurs α''_i sont liés par une homologie de la forme (9, q), elles seront liées également par la congruence (10, q) correspondante.

Enfin le nombre cherché $P'_q - 1$ est égal à $\alpha'_q - \alpha''_q$, car les variétés fermées de la forme $\sum_i \lambda_i \alpha''_i$, réellement distinctes, sont en nombre égal à celui des congruences (7, q), c'est-à-dire au nombre de $\alpha_q - \alpha''_q$.

Le nombre $P'_q - 1$ est le nombre de ces variétés qui restent distinctes en ne regardant pas comme distinctes celles qui sont liées par une homologie (9, q). Or le nombre de ces homologies est $\alpha_q - \alpha'_q$; nous avons donc

$$P'_q - 1 = (\alpha_q - \alpha''_q) - (\alpha_q - \alpha'_q) = \alpha'_q - \alpha''_q.$$

C. Q. F. D.

Soient $\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_i$ des variétés v_q , au nombre de i et

$$\begin{aligned} \alpha''_1 &\equiv \sum \varepsilon''_{1,j} \alpha''_j{}^{-1}, \\ \alpha''_2 &\equiv \sum \varepsilon''_{2,j} \alpha''_j{}^{-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha''_i &\equiv \sum \varepsilon''_{i,j} \alpha''_j{}^{-1} \end{aligned}$$

les congruences (3) correspondantes. Formons les homologies correspondantes

$$\sum \varepsilon''_{1,j} \alpha''_j{}^{-1} \sim 0, \quad \sum \varepsilon''_{2,j} \alpha''_j{}^{-1} \sim 0, \quad \dots, \quad \sum \varepsilon''_{i,j} \alpha''_j{}^{-1} \sim 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces homologies soient distinctes, c'est que l'on n'ait entre les i variétés $\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_i$ aucune congruence de la forme

$$\lambda_1 \alpha''_1 + \lambda_2 \alpha''_2 + \dots + \lambda_i \alpha''_i \equiv 0.$$

Le nombre des homologies distinctes est donc égal au nombre des α''_i distinctes, en tenant compte des congruences (7, q). Donc

$$\alpha_{q-1} - \alpha'_{q-1} = \alpha''_q \quad \text{ou} \quad \alpha_{q-1} = \alpha'_{q-1} + \alpha''_q.$$

Nous aurons, d'autre part,

$$\alpha'_0 = 1.$$

Si, en effet, on peut aller d'un sommet quelconque a_i^0 à un autre sommet quelconque a_j^0 , en suivant des arêtes (c'est-à-dire si le polyèdre est d'un seul tenant), on aura l'homologie

$$a_i^0 \sim a_j^0,$$

c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un seul sommet distinct, en tenant compte des homologies.

Envisageons maintenant la congruence (3 bis)

$$P \equiv \Sigma a_i^p;$$

l'homologie correspondante s'écrit

$$\Sigma a_i^p \sim 0$$

et il n'y a pas d'autre homologie (g, p) . Donc

$$\alpha_p = \alpha'_p + 1.$$

De plus, le polyèdre étant d'un seul tenant, une seule des combinaisons $\Sigma \lambda_i a_i^p$ pourra être fermée, c'est le polyèdre lui-même dans son entier, représenté par la formule Σa_i^p .

Nous aurons donc une seule congruence de la forme $(7, p)$

$$\Sigma a_i^p \equiv 0.$$

Donc

$$\alpha_p = \alpha''_p + 1, \quad \alpha'_p = \alpha''_p.$$

Nous avons donc la série d'équations

$$\begin{array}{ll} \alpha_0^0 = 0, & \\ \alpha_0 = \alpha'_0 + \alpha''_1, & \alpha'_1 - \alpha''_1 = P'_1 - 1, \\ \alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha''_2, & \alpha'_2 - \alpha''_2 = P'_2 - 1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \alpha_{p-1} = \alpha'_{p-1} + \alpha''_p, & \alpha'_{p-1} - \alpha''_{p-1} = P'_{p-1} - 1, \\ \alpha_p = \alpha'_p + 1, & \alpha'_p - \alpha''_p = 0, \end{array}$$

d'où l'on tire aisément

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \dots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - (P'_{p-1} - 1) + \dots \mp (P'_2 - 1) \pm (P'_1 - 1) \mp 1,$$

tout à fait analogue à la formule

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \dots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - (P_{p-1} - 1) + \dots \mp (P_2 - 1) \pm (P_1 - 1) \mp 1,$$

que nous avons trouvée dans l'*Analysis situs*, page 287.

§ IV. — Subdivision des Polyèdres.

Considérons un polyèdre V , à p dimensions, avec ses diverses variétés

$$a_i^p, a_i^{p-1}, \dots, a_i^1, a_i^0.$$

Supposons que l'on subdivise chacune des variétés a_i^p en plusieurs autres, que j'appellerai les b_i^p ; soient ensuite b_i^{p-1} les variétés à $p - 1$ dimensions, qui servent de frontières aux b_i^p ; soient b_i^{p-2} les variétés à $p - 2$ dimensions, qui servent de frontières aux b_i^{p-1} ; et, enfin, b_i^0 les variétés à zéro dimensions (sommets), qui servent de frontières aux b_i^1 (arêtes).

On aura ainsi un nouveau polyèdre V' , qui sera dérivé du polyèdre V , au sens que j'ai attaché à ce mot à la page 271 de l'*Analysis situs*.

On peut supposer, d'ailleurs, que si une variété ν_{q-1} , simplement ou multiplement connexe, sert de frontière à deux variétés b_j^q et b_k^q , elle ne forme pas forcément une seule des variétés b_i^{q-1} , mais peut être elle-même subdivisée en plusieurs variétés b_i^{q-1} . Dans ce cas, pour reprendre la terminologie de la page 272 de l'*Analysis situs*, ces variétés b_i^{q-1} seront *irrégulières* et les variétés b_i^{q-2} , qui les séparent les unes des autres, seront *singulières*.

Cela posé, recherchons une classification des variétés b_i^q .

Si une variété b_i^q ne fait pas partie d'une des variétés a_j^q , elle fera partie d'une des variétés a_j^{q+1} , ou d'une des variétés a_j^{q+2} , ..., ou, tout au moins, d'une des variétés a_j^p .

Peut-elle faire partie à la fois de deux variétés a_j^m et a_k^m ?

D'après la façon dont la subdivision a été supposée faite, en ajoutant toujours de nouvelles frontières, sans en supprimer jamais, cela ne pourra arriver que si ces deux variétés a_j^m et a_k^m sont contiguës et ont une frontière commune a_h^{m-1} , et si b_i^q fait partie de cette frontière a_h^{m-1} .

Je suppose alors que b_i^q fasse partie de a_j^h , et ne fasse partie d'aucune variété a_k^m , où $m < h$. La variété a_j^h existe toujours et l'on a $h \geq q$; de plus, la variété a_j^h est unique, c'est-à-dire que b_i^q ne peut faire partie à la fois de deux variétés différentes a_k^h et a_j^h .

Si donc je conviens de ranger dans une même classe toutes les variétés b_i^q , qui font partie de la variété a_j^h , sans faire partie d'aucune des variétés a_k^m , où $m < h$, toute variété b_i^q fera partie d'une classe et d'une seule.

Je pourrai alors représenter b_i^q par une notation à quatre indices

$$b_i^q = B(q, h, j, k);$$

l'indice q indique le nombre des dimensions de b_i^q ; les indices h et j indiquent que b_i^q fait partie de la classe α_j^h ; et l'indice k sert à distinguer les unes des autres les différentes variétés d'une même classe. On a $h \geq q$.

Nous aurons, alors, pour définir le polyèdre V et sa subdivision :

1° Les congruences $(3, q)$, relatives au polyèdre V , que j'écrirai

$$(3, q, i) \quad \alpha_i^q \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^q \alpha_j^{q-1};$$

2° Les équations qui donnent la subdivision de la variété α_i^q

$$(1, q, i) \quad \alpha_i^q = \sum_k B(q, q, i, k);$$

3° Les congruences analogues aux congruences (3), mais relatives au polyèdre V' ; je les écrirai

$$(2, q, h, j, k) \quad B(q, h, j, k) \equiv \Sigma \zeta B(q-1, h', j', k').$$

Les ζ sont des nombres égaux à ± 1 ou à 0; ils dépendent des sept indices q, h, j, k, h', j', k' , de sorte que je les écrirai, quand cela sera nécessaire, sous la forme

$$\zeta(q, k, j, k, h, j', k').$$

Sous le signe Σ , les indices h', j', k' peuvent prendre toutes les valeurs. Observons, cependant, que les $B(q-1)$, qui servent de frontière à $B(q, h, j, k)$, doivent, comme $B(q, h, j, k)$, faire partie de α_j^h ; mais pourront faire partie d'autres variétés $\alpha_{j'}^{h'}$, d'un nombre moindre de dimensions, mais faisant partie de α_j^h . On aura donc

$$h' \leq h, \quad h' \geq q-1.$$

D'ailleurs, si $h' = h$, on aura $j' = j$.

Pour que les relations (1), (2), (3) puissent définir une véritable subdivision, elles doivent satisfaire à certaines conditions.

Les relations $(1, q, i)$, $(3, q, i)$ donnent

$$(a) \quad \sum_k B(q, q, i, k) \equiv \sum \varepsilon_{i,t}^q \alpha_t^{q-1}.$$

Si, dans le premier membre, je remplace $B(q, q, i, k)$ par sa valeur, tirée de $(2, q, q, i, k)$, et α_t^{q-1} par sa valeur tirée de $(1, q-1, j)$, les deux membres devront devenir identique; voilà une première condition, qui est évidente; elle n'est d'ailleurs pas suffisante.

§ V. — Influence de la subdivision sur les nombres de Betti réduits.

Soit $\sum \alpha B(q, h, j, k)$ une combinaison des variétés b_i^q , qui représente une variété fermée à q dimensions, de telle sorte que l'on ait, avec nos notations,

$$(1) \quad \sum \alpha B(q, h, j, k) \equiv 0 \quad (h \geq q).$$

Parmi les variétés b_i^q qui figurent dans le premier membre de (1), réunissons celles qui appartiennent à une même classe. Soit

$$\mathcal{S} \alpha B(q, h, j, k)$$

l'ensemble de celles qui appartiennent à la classe α_j^h ; le signe de sommation \mathcal{S} signifie, donc, qu'on ne prend que les variétés d'une même classe, tandis que le signe \sum signifie qu'on les prend toutes.

On aura alors

$$(2) \quad \mathcal{S} \alpha B(q, h, j, k) \equiv \sum \beta B(q-1, h', j', k')$$

c'est-à-dire que la variété à $q-1$ dimensions

$$\sum \beta B(q-1, h', j', k').$$

forme la frontière complète de la variété à q dimensions

$$\mathcal{S} \alpha B(q, h, j, k).$$

Les variétés $\alpha_j^{h'}$ doivent appartenir à la frontière de α_j^h ou se confondre avec α_j^h ; en effet, $B(q-1, h', j', k')$ appartient à $\alpha_j^{h'}$ et, d'autre part, à l'une des $B(q, h, j, k)$, qui fait lui-même partie de α_j^h , si donc $\alpha_j^{h'}$ ne faisait pas partie de α_j^h , $B(q-1, h', j', k')$ ferait partie d'une variété α_k^m , partie commune à α_j^h et α_k^m , et qui aurait moins de h' dimensions. Cela est contraire à la définition que nous avons donnée des classes.

D'autre part, $\alpha_j^{h'}$ ne peut pas se confondre avec α_j^h .

Soit, en effet,

$$\sum_1 \alpha_1 B(q, h_1, j_1, k_1) = \sum \alpha B(q, h, j, k) - \mathcal{S} \alpha B(q, h, j, k)$$

l'ensemble des variétés qui figurent dans le premier membre de (1) et qui n'appartiennent pas à la classe α_j^h ; on aura évidemment

$$\sum_1 \alpha_1 B(q, h_1, j_1, k_1) \equiv - \sum \beta B(q-1, h', j', k').$$

Donc $B(q-1, h', j', k')$ doit faire partie à la fois de $\alpha_j^{h'}$ et de l'une des $B(q, h_1, j_1, k_1)$ et, par conséquent, de l'une des $\alpha_i^{h_1}$, différentes de α_j^h . Si donc $\alpha_j^{h'}$ se confondait avec α_j^h ,

$$B(q-1, h', j', k') = B(q-1, h, j, k)$$

devrait appartenir à une variété α_k^m , partie commune à α_j^h et $\alpha_i^{h_1}$. De deux choses l'une : ou bien α_j^h ne ferait pas partie de $\alpha_i^{h_1}$, et alors on aurait encore $m < h$, ce qui serait encore contraire à la définition des classes; ou bien α_j^h ferait partie de $\alpha_i^{h_1}$, et alors on aurait $h_1 > h$. Supposons que j'ai choisi la classe α_j^h , qui correspond au plus grand nombre h . Alors on ne pourra pas avoir $h_1 > h$, et $\alpha_j^{h'}$ devra appartenir à la frontière de α_j^h .

La congruence (2) entraîne l'homologie

$$(3) \quad \sum \beta B(q-1, h', j', k') \sim 0;$$

comme, d'autre part, α_j^h est simplement connexe et que toutes les variétés $B(q-1, h', j', k')$ sont situées sur la frontière de α_j^h , le premier membre de (3), représentant une variété fermée à $q-1$ dimension, située sur cette frontière, formera la frontière complète d'une variété à q dimensions

$$\Sigma \gamma B(q, h'', j'', k''),$$

également située sur la frontière de α_j^h . (Il y aurait exception si l'on avait $h = q$.) De sorte qu'on aura la congruence

$$(4) \quad \sum \beta B(q-1, h', j', k') \equiv \Sigma \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

D'ailleurs, comme $B(q, h'', j'', k'')$ est sur la frontière de α_j^h , il en sera de même de $\alpha_j^{h''}$; car si $B(q, h'', j'', k'')$ fait partie à la fois de $\alpha_j^{h''}$ et d'une variété $\alpha_j^{h'}$, faisant partie de la frontière de α_j^h ; ou bien $\alpha_j^{h''}$ ne fait pas partie de $\alpha_j^{h'}$, et alors B devrait faire partie de α_k^m , où $m < h''$, et nous avons vu que cela était impossible.

On a donc

$$h'' < h.$$

Les congruences (2) et (4) donnent

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \equiv \sum \gamma B(q, h'', j'', k''),$$

et, comme toutes les variétés qui figurent dans cette congruence font partie de α_j^h , ou de sa frontière, comme, d'autre part, α_j^h est simplement connexe, on aura l'homologie

$$\mathfrak{S}^{\alpha B}(q, h, j, k) \sim \sum \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

On peut donc remplacer, dans le premier membre de (1), l'ensemble des termes $\mathfrak{S}^{\alpha B}(q, h, j, k)$ par l'ensemble des termes

$$\sum \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

Si l'on opère de même pour toutes les classes correspondantes à une même valeur de h , la plus grande de toutes, on aura remplacé le premier membre de (1) par

$$\sum \alpha_2 B(q, h_2, j_2, k_2),$$

où la plus grande valeur de h_2 sera plus petite que la plus grande valeur de h . On aura, d'ailleurs, l'homologie

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_2 B(q, h_2, j_2, k_2).$$

En continuant de la sorte, on pourra diminuer encore la plus grande valeur de h . On ne sera arrêté que quand on aura partout $h = q$.

On peut donc, finalement, remplacer le premier membre de (1) par

$$\sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0),$$

et l'on aura, d'ailleurs

$$(5) \quad \sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0),$$

$$(6) \quad \sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv 0.$$

Cela posé, dans le premier membre de (6) prenons les congruences qui appartiennent à une classe déterminée $\alpha_{j_0}^h$; soit

$$\mathfrak{S}^{\alpha_0 B}(q, q, j_0, k_0),$$

Nous aurons

$$(7) \quad \mathfrak{S}^{\alpha_0 B}(q, q, j_0, k_0) \equiv \sum \beta_0 B(q-1, h'_0, j'_0, k'_0).$$

Nous verrions, comme plus haut, que $\alpha_{j_0}^h$ doit faire partie de la frontière de $\alpha_{j_0}^h$, d'où $h'_0 < q$ (et, comme $h'_0 \geq q-1$, on aura $h'_0 = q-1$).

Soit alors

$$(8) \quad \alpha'_0 = \sum B(q, q, j_0, k_0)$$

l'équation $(1, q, j_0)$, qui définit la subdivision de la variété α'_0 , et soient $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$ deux variétés, figurant dans le second membre de (8); je dis qu'elles devront figurer dans le premier membre de (6) avec le même coefficient α_0 .

Supposons, d'abord, que ces deux variétés soient limitrophes; parmi les variétés à $q-1$ dimensions qui leur serviront de frontière commune, il y en aura, au moins, une qui n'appartiendra pas à la frontière de α'_0 , qui fera, par conséquent, partie de la classe α'_0 .

Soit $B(q-1, q, j_0, 1)$ cette variété : elle n'appartiendra pas à aucune autre des variétés $B(q, q, j_0, k)$.

Soit alors

$$(9) \quad \begin{cases} B(q, q, j_0, 1) \equiv \varepsilon b_1^{q-1} \\ B(q, q, j_0, 2) \equiv \varepsilon b_2^{q-1} \\ B(q, q, j_0, k) \equiv \varepsilon b_k^{q-1} \quad (k > 2) \end{cases}$$

les congruences $(2, q, q, j_0, 1)$, $(2, q, q, j_0, 2)$, $(2, q, q, j_0, k)$, qui nous font connaître les frontières des variétés $B(q, q, j_0)$. Voyons avec quel coefficient ε la variété $B(q-1, q, j_0, 1)$ figurera dans ces congruences.

D'après ce que nous venons de voir, ce sera avec le coefficient $+1$ dans la première, avec le coefficient -1 dans la seconde, avec le coefficient zéro dans les autres.

Soient donc α_1 et α_2 les valeurs des coefficients α_0 , correspondantes aux deux variétés $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$.

La combinaison des congruences (9) nous fournira une congruence

$$(10) \quad \sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv \varepsilon b^{q-1},$$

qui devra être identique à (7), et le coefficient ε , avec lequel figurera $B(q-1, q, j_0, 1)$ dans le second membre de (10), sera évidemment $\alpha_1 - \alpha_2$. Mais $B(q-1, q, j_0, 1)$ ne peut pas figurer dans le second membre de (7), puisque nous avons vu que dans ce second membre on doit avoir $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Ainsi les deux variétés $B(q, q, j_0)$ et $B(q, q, j_0, 2)$ devront avoir même coefficient α_0 , si elles sont limitrophes. Cela sera encore vrai, si elles ne le sont pas, parce que α'_0 étant d'un seul tenant, on pourra passer d'une de ces variétés

à l'autre par une suite d'autres variétés analogues, chacune d'elles étant limitrophe de celle qui la précède.

Donc le coefficient α_0 est le même pour toutes nos variétés. D'où

$$\sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) = \alpha_0 \sum B(q, q, j_0, k_0) = \alpha_0 \alpha'_{j_0}.$$

La congruence (6) et l'homologie (5) peuvent donc s'écrire

$$(5 \text{ bis}) \quad \sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_0 \alpha'_{j_0}$$

$$(6 \text{ bis}) \quad \sum \alpha_0 \alpha'_{j_0} \equiv 0.$$

Si un nombre quelconque de congruences de la forme (1) sont distinctes, c'est-à-dire si aucune combinaison linéaire de leurs premiers membres n'est pas homologue à zéro, je dis que les congruences (6 bis) seront également distinctes et réciproquement.

En effet, la comparaison des relations (1); (5 bis) et (6 bis) montre que si l'on a

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim 0,$$

on aura également

$$\sum \alpha_0 \alpha'_{j_0} \sim 0,$$

et réciproquement.

Il résulte de là que si les α_i^q et les b_i^q sont simplement connexes, les nombres de Betti réduits sont les mêmes pour les deux polyèdres V et V' .

Soit maintenant W une variété quelconque, fermée, à q dimensions, située sur V . On peut toujours construire un polyèdre V' , dérivé de V , au sens de la page 271 de l'*Analysis situs*, et tel que W soit une combinaison des b_i^q .

Nous devons donc conclure que : si les α_i^q sont simplement connexes, les nombres de Betti réduits, relatifs au polyèdre V , sont identiques aux nombres de Betti proprement dits, définis de la seconde manière.

§ VI. — Retour sur les démonstrations du paragraphe III.

Nous avons à revenir ici sur un point essentiel du raisonnement qui précède. J'ai dit plus haut qu'il n'y avait d'autre homologie que les homologies (g, q) , obtenues au paragraphe III. Cela n'est pas évident, cela ne serait pas même toujours vrai, si nous ne supposions pas les α_i^q simplement connexes.

Démontrons-le d'abord pour un polyèdre P , dans l'espace à quatre dimensions.

Considérons un certain nombre de variétés ρ_2 ou α_i^2 , appartenant à ce polyèdre; je les appellerai ses faces, de même que les α_i^3 , les α_i^1 et les α_i^0 de ce polyèdre P pourront s'appeler ses cases, ses arêtes et ses sommets.

Supposons que l'on ait entre ces faces α_i^2 une homologie

$$\Sigma \alpha_i^2 \sim 0.$$

Cette homologie signifie qu'il existe une variété à trois dimensions, V , faisant partie de P , et admettant $\Sigma \alpha_i^2$ comme frontière complète.

Je dis que V se compose d'un certain nombre de cases de P .

Si, en effet, un point d'une case appartient à V , il en sera de même de tout autre point de cette case, car on peut aller du premier point au second, sans rencontrer aucune face et, par conséquent, sans rencontrer la frontière de V et sans sortir de V .

Le théorème est donc évident en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à quatre dimensions et les homologies entre les faces.

Soit maintenant une homologie entre les arêtes

$$\Sigma b_1 \sim 0,$$

les b_1 étant un certain nombre d'arêtes α_i^1 . Cela veut dire qu'il existe une variété à deux dimensions, V , dont Σb_1 est la frontière complète.

Je désignerai par $V(\alpha_i^1)$ l'ensemble des points communs à V et à α_i^1 .

Les $V(\alpha_i^1)$ seront des variétés à deux dimensions; dont la frontière sera formée, soit par quelques-unes des arêtes b_1 , soit par les $V(\alpha_j^2)$, les α_j^2 étant les faces qui servent de frontière à la case α_i^1 . On ne peut en effet, sortir de $V(\alpha_i^1)$ qu'en sortant de V par sa frontière, c'est-à-dire, en traversant une des b_1 , ou qu'en sortant de α_i^1 par sa frontière, c'est-à-dire en traversant une face α_j^2 , et, comme on reste sur V , en traversant une des lignes $V(\alpha_j^2)$.

La variété totale V est formée de l'ensemble des $V(\alpha_i^1)$.

Considérons maintenant $V(\alpha_i^1)$; nous devons distinguer deux cas :

1° Ou bien aucune des arêtes b_1 n'appartient à α_i^1 . Nous ne pourrions alors sortir de $V(\alpha_i^1)$, qu'en sortant de α_i^1 , c'est-à-dire en traversant une des arêtes α_j^1 ; la frontière de $V(\alpha_i^1)$ est donc formée par les $V(\alpha_j^1)$.

2° Ou bien une (ou plusieurs) arête b_1 fait partie de α_i^1 ; dans ce cas, elle fera également partie de $V(\alpha_i^1)$; mais il pourra se faire que $V(\alpha_i^1)$ se compose, outre

l'arête b_1 , d'autres lignes; ces lignes auront pour frontières des points $V(a_i^1)$, ou des points situés sur b_1 . Ces points situés sur b_1 , et où les autres lignes, dont se compose $V(a_i^2)$, viennent se terminer sur l'arête b_1 , seront ce que j'appellerai des *points nodaux*.

Dans tous les cas $V(a_i^2)$ sera une ligne ou un ensemble de lignes; si, en effet, $V(a_i^2)$ était une surface, c'est que a_i^2 , ou une portion de cette face, ferait partie de V . Mais j'ai le droit de déformer V , pourvu que je ne change pas sa frontière Σb_1 ; je puis toujours, par une déformation infiniment petite, éviter qu'une région de a_i^2 fasse partie de V .

Pour la même raison, je puis toujours supposer que $V(a_i^1)$ se réduit à un ou plusieurs points, sauf si a_i^1 est l'une des arêtes b_1 , auquel cas $V(a_i^1)$ sera cette arête elle-même.

Cela posé, je puis déformer V :

1° De manière que tous les $V(a_i^1)$ [autres que $V(b_1)$] soient des sommets. Soit a_j^0 un sommet de a_i^1 . Soit M l'un des points dont se compose $V(a_i^1)$; autour du point M et sur V décrivons une petite courbe fermée C . Soit K l'aire infiniment petite découpée sur V par cette courbe C . Construisons une sorte de manchon, infiniment délié, entourant l'arête a_i^1 et passant par C . Par le sommet a_j^0 je mène une surface quelconque S ; elle viendra découper sur le manchon une courbe fermée très petite C' . Soit K' la portion de la surface S limitée par C ; soit H la surface du manchon comprise entre C et C' . On figurera ainsi une sorte de tambour, dont H sera la surface latérale, K et K' les deux bases.

Considérons alors la variété

$$V' = V - K + H + K'.$$

Cette variété aura même frontière que V ; mais elle ne coupera plus a_i^1 en M , puisqu'on a supprimé la portion K de V , où se trouvait ce point M . En revanche, H ne coupera pas l'arête a_i^1 , et K' coupera cette arête en a_j^0 .

En opérant de même sur tous les points d'intersection de V et de a_i^1 , on amènerait tous ces points à coïncider avec a_j^0 .

2° De manière que tous les points nodaux soient des sommets.

Soit, en effet, a_i^2 une face passant par l'arête b_1 ; l'intersection de V et a_i^2 comprendra, outre b_1 , d'autres lignes; soit c l'une de ces lignes, venant se terminer sur b_1 en un point nodal D . Soient a_j^0 et a_k^0 les deux sommets de b_1 . Par b_1 je fais passer une surface S , faisant partie de P et ne coupant pas a_i^2 . Comme a_j^0 et a_k^0 sont sur la frontière de V , je joins ces deux points par une ligne L , située

sur V et s'écartant peu de b_1 . Cette ligne s'écartant peu de b_1 , je puis mener par L une autre surface S' , qui ne passera pas par b_1 , mais qui coupera S suivant une ligne L' , très peu différente de b_1 . Ces trois lignes L , b_1 et L' auront mêmes extrémités a_j^0 et a_k^0 .

Soit V_1 la portion de V , comprise entre L et b_1 ; soit S_1 la portion de S , comprise entre L' et b_1 , et S'_1 la portion de S' , comprise entre L et L' .

Je remplace V par

$$V' = V - V_1 + S_1 + S'_1.$$

V' a mêmes frontières que V , mais $V'(a_i^2)$ ne présente plus de points nodaux en dehors de a_j^0 et a_k^0 ; car si une ligne analogue à c venait aboutir à un point nodal, situé entre a_j^0 et a_k^0 , la portion de cette ligne c , voisine de ce point nodal, devrait se trouver sur S_1 , ce qui est impossible, puisque S ne coupe pas a_i^2 .

En résumé : nous pouvons toujours supposer que les $V(a_i^2)$ sont des lignes dont les extrémités sont des sommets de a_i^2 .

Soit alors L une des lignes, dont se compose $V(a_i^2)$, ayant pour extrémités deux sommets a_j^0 et a_k^0 de a_i^2 . On peut aller de a_j^0 à a_k^0 , en suivant le périmètre de a_i^2 ; soit Σa_m^1 l'ensemble des arêtes de a_i^2 , comprise entre a_j^0 et a_k^0 . Comme la face a_i^2 est supposée simplement connexe, la ligne L la divisera en deux parties. Soit Q l'une de ces parties, comprises entre L et Σa_m^1 .

Soient a_p^3 et a_q^3 les deux cases séparées par a_i^2 . Par les arêtes Σa_m^1 je fais passer une surface S , peu différente de la face a_i^2 et située toute entière dans la case a_p^3 ; par les mêmes arêtes, je fais passer une seconde surface S' , peu différente de a_i^2 et située dans la case a_q^3 ; ces deux surfaces S et S' couperont V , suivant deux lignes L_1 et L'_1 , peu différentes de L , et ayant pour extrémités a_j^0 et a_k^0 . Soit S_1 la portion de S comprise entre Σa_m^1 et L_1 ; soit S'_1 la portion de S' comprise entre Σa_m^1 et L'_1 ; soit V_1 la portion de V comprise entre L_1 et L'_1 ; c'est sur V_1 que se trouvera L .

Soit maintenant

$$V' = V - V_1 + S_1 + S'_1.$$

V' a mêmes frontières que V ; V' ne passe plus par L , mais en revanche passe par les arêtes Σa_m^1 .

En opérant de la même manière pour toutes les lignes telles que L , on voit qu'on peut toujours supposer que tous les $V(a_i^2)$ se réduisent à des combinaisons d'arêtes.

Comme les frontières de $V(a_i^2)$ sont ou des b_1 ou des $V(a_j^2)$, on voit que les

frontières des $V(a_i^3)$ sont des combinaisons d'arêtes de P , et, bien entendu, toutes ses arêtes doivent appartenir à a_i^3 . Ainsi donc $V(a_i^3)$ est une surface simplement ou multiplement connexe, limitée par une ou plusieurs lignes fermées qui, elles-mêmes, sont des combinaisons d'arêtes de a_i^3 .

Comme la case a_i^3 est simplement connexe, ces lignes fermées subdiviseront la surface de cette case en un certain nombre de régions, et comme ces lignes fermées sont des combinaisons d'arêtes de a_i^3 , ces régions seront des combinaisons des faces de a_i^3 .

On pourra toujours trouver une combinaison de ces régions, qui aura mêmes frontières que $V(a_i^3)$. Supposons, par exemple, que la frontière de $V(a_i^3)$ se compose de trois lignes fermées L, L_1, L_2 ; la ligne L divisera la surface de a_i^3 en deux régions R et R' ; les lignes L_1 et L_2 diviseront de même cette surface en deux régions R_1 et R'_1 , ou R_2 et R'_2 . Je suppose qu'en parcourant L dans un certain sens, on ait à sa gauche $V(a_i^3)$, et R et R' à sa droite; je suppose, de même, qu'en parcourant L_1 et L_2 dans un sens convenable, on ait à sa gauche $V(a_i^3)$ et R_1 , ou $V(a_i^3)$ et R_2 .

Alors la variété $R + R_1 + R_2$ aura même frontière que $V(a_i^3)$; on pourra donc remplacer $V(a_i^3)$ par $R + R_1 + R_2$.

En opérant de la même manière sur tous les $V(a_i^3)$, on aura remplacé V par une autre variété, qui aura même frontière Σb_1 , et qui sera une combinaison de faces de P .

Le théorème est donc démontré en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à quatre dimensions et les homologies entre les arêtes.

On le démontrerait, de même, pour un polyèdre quelconque.

§ VII. — Polyèdre réciproque.

Soit P un polyèdre dans l'espace à quatre dimensions; ce polyèdre sera subdivisé en un certain nombre de variétés v_3 , que j'appellerai ses *cases*, et que je désignerai par a_i^3 . Ces cases seront séparées les unes des autres par des variétés v_2 ou a_i^2 , que j'appellerai les *faces*; ces faces auront pour frontières des variétés v_1 ou a_i^1 , que j'appellerai les *arêtes*, et les extrémités des arêtes seront des points v_0 ou a_i^0 , que j'appellerai les *sommets*.

Je supposerai, bien entendu, que les cases et les faces sont simplement connexes.

Marquons, à l'intérieur de chaque case a_i^3 , un point $P(a_i^3)$; à l'intérieur de

chaque face α_i^2 , un point $P(\alpha_i^2)$; sur chaque arête α_i^1 , un point $P(\alpha_i^1)$; chaque arête se trouvera ainsi partagée en deux parties par le point $P(\alpha_i^1)$.

Joignons par des lignes le point $P(\alpha_i^2)$ à chacun des sommets de la face α_i^2 et à chacun des points $P(\alpha_j^1)$, correspondant aux diverses arêtes α_j^1 de la face α_i^2 . Toutes ces lignes devront être tracées sur la face α_i^2 . Cette face sera ainsi partagée en triangles, et le nombre de ces triangles sera double du nombre des arêtes de α_i^2 . Nous ferons de même pour toutes les autres faces.

Considérons maintenant une case α_i^3 ; décomposons en triangles T toutes les faces α_j^2 de cette case, ainsi que nous venons de le dire. Construisons des triangles curvilignes, ayant pour sommet commun le point $P(\alpha_i^3)$ et pour bases les différents côtés des différents triangles T. La case α_i^3 sera ainsi décomposée en tétraèdres, ayant $P(\alpha_i^3)$ pour sommet commun et pour bases les différents triangles T.

Nous distinguerons six sortes de lignes (qui seront les arêtes de nos tétraèdres) :

Celles de la première sorte joindront un sommet α_i^0 à un point $P(\alpha_j^1)$; chaque arête sera ainsi formée de deux lignes de la première sorte;

Celles de la seconde sorte joindront un point $P(\alpha_i^2)$ à un point $P(\alpha_j^2)$;

Celles de la troisième sorte joindront un point $P(\alpha_i^2)$ à un sommet α_j^0 ;

Celles de la quatrième sorte joindront un point $P(\alpha_i^1)$ à un point $P(\alpha_j^2)$;

Celles de la cinquième sorte joindront un point $P(\alpha_i^2)$ à un point $P(\alpha_j^1)$;

Celles de la sixième sorte joindront un point $P(\alpha_i^2)$ à un sommet α_j^0 .

Les lignes de la seconde sorte peuvent s'accoupler deux à deux de deux manières :

1° Ce que j'appellerai la ligne b_i^1 sera formée de deux lignes de la seconde sorte, joignant un même point $P(\alpha_i^2)$ à deux points $P(\alpha_j^2)$ et $P(\alpha_k^2)$, correspondant aux deux cases α_j^3 et α_k^3 séparées par la face α_i^2 . Il y aura donc autant de lignes b_i^1 que de faces α_i^2 .

2° Ce que j'appellerai une ligne c sera formée de deux lignes de la seconde sorte, joignant un même point $P(\alpha_i^2)$ à deux points $P(\alpha_j^2)$ et $P(\alpha_k^2)$, correspondant à deux faces α_j^3 et α_k^3 de la case α_i^3 .

Il nous faut définir des surfaces que j'appellerai les surfaces b_i^2 .

Soit une arête quelconque a_i^1 et le point $P(a_i^1)$. Supposons que les faces qui passent par a_i^1 , soient successivement

$$a_1^2, a_2^2, \dots, a_q^2,$$

et que les cases, auxquelles appartient a_i^1 , soient successivement

$$a_1^3, a_2^3, \dots, a_j^3,$$

de telle façon que a_1^2 sépare a_1^3 de a_2^3 , a_2^2 sépare a_2^3 de a_3^3 , ..., et, qu'enfin, a_j^2 sépare a_j^3 de a_1^3 . Convenons, pour plus de symétrie, de désigner indifféremment la case a_1^3 par a_1^3 ou a_{j+1}^3 .

Décomposons chaque case en tétraèdres et envisageons, en particulier, les tétraèdres qui admettent pour sommet le point $P(a_i^1)$. Considérons les $2q$ triangles curvilignes

$$P(a_i^1)P(a_k^2)P(a_k^3), \quad P(a_i^1)P(a_{k+1}^2)P(a_k^3) \quad (k = 1, 2, \dots, q).$$

L'ensemble de ces $2q$ triangles formera un certain polygone que j'appellerai b_i^2 , et qui aura pour frontière l'ensemble des lignes

$$b_1^1, b_2^1, \dots, b_q^1.$$

Définissons maintenant les volumes b_i^3 ; le volume b_i^3 sera l'ensemble des tétraèdres qui admettent pour sommet le point a_i^0 ; ce volume sera un polyèdre à trois dimensions, simplement connexe, qui aura pour frontière l'ensemble des surfaces b_k^2 , correspondant aux arêtes a_k^1 , qui aboutissent au point a_i^0 .

La juxtaposition des volumes b_i^3 constituera un nouveau polyèdre P' , que j'appellerai le *polyèdre réciproque de P*, et qui aura pour cases les b_i^3 , pour faces les b_i^2 , pour arêtes les b , pour sommets les points $b_i^0 = P(a_i^0)$.

A chaque case b_i^3 de P' correspondra un sommet a_i^0 de P ;

A chaque face b_i^2 de P' correspondra une arête a_i^1 de P ;

A chaque arête b_i^1 de P' correspondra une face a_i^2 de P ;

A chaque sommet b_i^0 de P' correspondra une case a_i^3 de P .

De plus, au sens du paragraphe II, il y aura la même relation, par exemple, entre l'arête b_i^1 et la face b_j^2 , qu'entre la face a_i^2 et l'arête a_j^1 .

Si donc les congruences caractéristiques du polyèdre P s'écrivent

$$a_i^2 = \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1, \quad a_i^3 = \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 a_j^2, \quad a_i^0 = \sum_j \varepsilon_{i,j}^0 a_j^3,$$

celles du polyèdre P' s'écriront

$$b_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^1 b_j^2, \quad b_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 b_j^1, \quad b_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 b_j^0.$$

Considérons maintenant une ligne c , formée de deux lignes de la seconde sorte, joignant un même point $P(a_i^3)$ à deux points $P(a_j^2)$ et $P(a_k^2)$.

Soient a_m^0 et a_p^0 deux sommets, appartenant respectivement tous deux à la case a_i^3 . Soient d et d' les deux lignes de la troisième sorte qui joignent respectivement $P(a_i^3)$ à a_m^0 et $P(a_k^3)$ à a_p^0 .

Comme a_m^0 et a_p^0 appartiennent à une même case a_j^1 , on pourra aller de l'un de ces sommets à l'autre, en suivant une ligne brisée formée d'arêtes a_η^1 appartenant à a_i^3 .

Soit Σa_η^1 cette ligne brisée, dont les extrémités sont a_m^0 et a_p^0 ; l'ensemble des lignes $c - d - \Sigma a_\eta^1 + d'$ sera une ligne fermée, ce que j'exprimerai par la congruence

$$c \equiv d + \Sigma a_\eta^1 - d'.$$

Comme a_i^3 est simplement connexe, cette ligne fermée sera la frontière d'une variété à deux dimensions, intérieure à a_i^3 , ce que j'exprimerai par l'homologie

$$c \sim d + \Sigma a_\eta^1 - d'.$$

Réciproquement, soit Σa_η^1 une ligne brisée, formée d'arêtes appartenant toutes à a_i^3 , et dont les extrémités sont les sommets a_m^0 et a_p^0 ; ces deux sommets appartiendront respectivement à deux faces a_j^2 et a_k^2 , faisant toutes deux partie de a_i^3 . Soient les trois lignes

$$c = P(a_j^2)P(a_i^3) + P(a_i^3)P(a_k^2), \quad d = P(a_j^2)a_m^0, \quad d' = P(a_k^2)a_p^0.$$

On aura encore

$$c \sim d + \Sigma a_\eta^1 - d'.$$

Soit maintenant a_i^0 un sommet appartenant à deux faces a_j^2 et a_k^2 . Soient les deux lignes de la troisième sorte

$$d_j = P(a_j^2)a_i^0, \quad d_k = P(a_k^2)a_i^0.$$

Nous pouvons tracer une ligne L , s'écartant infiniment peu du sommet a_i^0 , et allant d'un point a_j^2 à un point de a_k^2 .

Supposons, pour fixer les idées, que cette ligne traverse trois cases et qu'elle rencontre successivement la face a_j^2 , la case a_j^3 , la face a_m^2 , la case a_m^3 , la face a_p^2 , la case a_p^3 , et enfin la face a_k^2 .

Construisons les trois lignes c

$$\begin{aligned} c_j &= P(a_j^2) P(a_j^3) + P(a_j^3) P(a_m^2), \\ c_m &= P(a_m^2) P(a_m^3) + P(a_m^3) P(a_p^2), \\ c_p &= P(a_p^2) P(a_p^3) + P(a_p^3) P(a_k^2), \end{aligned}$$

et les deux lignes de la troisième sorte

$$d_m = P(a_m^2) a_i^0, \quad d_p = P(a_p^2) a_i^0.$$

On aura

$$c_j \equiv d_j - d_m, \quad c_m \equiv d_m - d_p, \quad c_p \equiv d_p - d_k;$$

et comme les trois cases a_j^2 , a_m^2 , a_p^2 sont simplement connexes

$$c_j \sim d_j - d_m, \quad c_m \sim d_m - d_p, \quad c_p \sim d_p - d_k,$$

et enfin

$$c_j + c_m + c_p \sim d_j - d_k.$$

On peut donc toujours trouver une ligne brisée, formée de lignes c et homologue à $d_j - d_k$, d_j et d_k étant des lignes de la troisième sorte, aboutissant à un même sommet.

Cela posé, soit

$$(1) \quad \Sigma b_i^1 \equiv 0$$

une congruence entre les arêtes b_i^1 du polyèdre P' .

La ligne brisée Σb_i^1 est évidemment formée d'un nombre pair de lignes de la deuxième sorte, et en parcourant cette ligne brisée, on rencontrera successivement q faces

$$a_1^2, \quad a_2^2, \quad \dots, \quad a_q^2,$$

pour revenir à la face a_1^2 , que je désignerai également par a_{q+1}^2 ; et l'on rencontrera q cases

$$a_1^3, \quad a_2^3, \quad \dots, \quad a_p^3,$$

pour revenir à la case a_1^3 , que je désignerai également par a_{q+1}^3 , de sorte que la face a_k^2 sépare la case a_k^3 de la case a_{k+1}^3 .

Notre congruence s'écrit alors

$$\Sigma [P(a_k^2) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_{k+1}^3)] \equiv 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Sigma [P(a_{k-1}^3) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_k^2)] = 0.$$

Soit alors a_k^0 un sommet de la face a_k^2 appartenant, par conséquent, à la fois aux cases a_k^3 et a_{k+1}^3 .

Soit d_k la ligne de la troisième sorte $P(a_k^2) a_k^0$; nous venons de voir qu'il

existe une ligne brisée A_k , formée d'arêtes appartenant à la case α_k^3 , et telle que l'on ait l'homologie

$$P(\alpha_{k-1}^2)P(\alpha_k^3) + P(\alpha_k^3)P(\alpha_k^2) \sim d_{k-1} + A_k - d_k.$$

En additionnant toutes ces homologies, le premier membre se réduit à

$$\Sigma [P(\alpha_{k-1}^2)P(\alpha_k^3) + P(\alpha_k^3)P(\alpha_k^2)] = \Sigma b'_i;$$

les lignes de la troisième sorte d_k disparaissent, et il reste

$$\Sigma b'_i \sim \Sigma A_k,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma b'_i \equiv \Sigma A_k \equiv 0.$$

Donc, à toute congruence $\Sigma b'_i \equiv 0$ entre les arêtes de P' , correspond une congruence $\Sigma A_k \equiv 0$ entre les arêtes de P , et telle que l'on ait

$$\Sigma b'_i \sim \Sigma A_k.$$

Si donc on a $\Sigma b'_i \sim 0$, on aura $\Sigma A_k \sim 0$, et réciproquement.

Soit maintenant

$$(2) \quad \Sigma A_k \equiv 0$$

une congruence entre les arêtes de P ; supposons que A_k soit une ligne brisée formée d'arêtes appartenant à la case α_k^3 .

Le premier membre de la congruence (2) se composera de q semblables lignes brisées

$$A_1, A_2, \dots, A_q,$$

et je désignerai indifféremment A_1 par A_1 ou A_{q+1} , et A_q par A_0 ou A_q .

Soient α_{k-1}^0 et α_k^0 les deux extrémités de la ligne A_k ; le sommet α_k^0 appartiendra à la fois aux cases α_k^3 et α_{k+1}^3 ; soit α_k^2 la face de α_k^3 , et α_{k+1}^2 la face de α_{k+1}^3 , auxquelles appartient α_k^0 .

Soient les lignes de la troisième sorte

$$d_k = P(\alpha_k^2)\alpha_k^0, \quad d_{k+1} = P(\alpha_{k+1}^2)\alpha_k^0,$$

et, d'autre part,

$$c_k = P(\alpha_k^2)P(\alpha_k^3) + P(\alpha_k^3)P(\alpha_k^2).$$

Nous avons vu que

$$A_k \sim -d_k + c_k + d'_k.$$

D'autre part, les lignes d_{k+1} et d'_k aboutissent à un même sommet α_k^0 ; nous avons vu également que l'on peut trouver une combinaison C_k de lignes c , telle que l'on ait

$$C_k \sim d'_k - d_{k-1}.$$

En additionnant toutes ces homologies, je trouve

$$\Sigma A_k \sim \Sigma c_k + \Sigma C_k,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma c_k + \Sigma C_k \equiv 0.$$

Le premier membre de cette dernière congruence est une combinaison de lignes c , ou, ce qui revient au même, une combinaison d'arêtes b_i^1 du polyèdre P' , de sorte que je puis poser

$$\Sigma c_k + \Sigma C_k = \Sigma b_i^1,$$

d'où

$$\Sigma A_k \sim \Sigma b_i^1.$$

En résumé : à toute congruence entre les arêtes de P , correspond une congruence entre celles de P' , et réciproquement, et la condition nécessaire et suffisante pour que le premier membre de l'une des conditions soit homologue à zéro, c'est que l'autre le soit.

En d'autres termes, le nombre des congruences distinctes entre les arêtes est le même pour P et P' , en ne considérant pas des congruences comme distinctes, quand une combinaison linéaire des premiers membres de ces congruences est homologue à zéro.

En d'autres termes encore, le nombre de Betti réduit, relatif aux arêtes de P , est égal au nombre de Betti réduit, relatif aux arêtes de P' .

On pourrait arriver au même résultat, en remarquant que l'on peut construire un polyèdre qui serait, à la fois, dérivé du polyèdre P et dérivé du polyèdre réciproque P' , et en appliquant le théorème du paragraphe V.

Nous verrons plus loin, au paragraphe X, que cette proposition peut être présentée sous une autre forme.

D'autre part, cela peut permettre, plus simplement qu'au paragraphe V, de démontrer que les nombres de Betti réduits sont égaux aux nombres de Betti proprement dits.

En effet, la définition du polyèdre P' comporte un certain arbitraire : ses sommets b_i^0 ne sont assujettis qu'à être intérieurs aux cases a_i^3 de P . Dans ces conditions, on peut évidemment choisir toujours le polyèdre P' de façon qu'une ligne fermée *quelconque* soit une combinaison des b_i^1 .

§ VIII. — Démonstration du théorème fondamental.

Soit N_1 le nombre des arêtes de notre polyèdre P , N_2 le nombre des faces, N_3 celui des cases. Formons un tableau d'après les règles suivantes :

Le tableau aura $N_2 + N_3$ colonnes, N_2 dites de la première sorte et N_3 dites de la seconde; il aura $N_2 + N_1$ lignes, N_2 de la première et N_1 de la seconde sorte. Voici quels seront les éléments du tableau :

1° Pour l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la première sorte, j'écrirai 1, si $i = j$ et 0, si $i \neq j$.

2° Les éléments appartenant à une ligne de la seconde sorte et à une colonne de la seconde sorte, seront tous nuls.

3° L'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la première sorte et de la $j^{\text{ième}}$ ligne de la seconde sorte, sera $\varepsilon_{i,j}^2$, $\varepsilon_{i,j}^2$ étant le nombre qui nous fait connaître la relation entre la face a_i^2 et l'arête a_j^1 .

4° L'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la seconde sorte, sera $\varepsilon_{i,j}^3$, c'est-à-dire le nombre qui fait connaître la relation entre la case a_j^3 et la face a_i^2 .

Notre tableau, s'il y a par exemple deux cases, quatre faces et trois arêtes, présentera un aspect tel que celui-ci :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Je n'ai pas écrit les indices des nombres ε pour simplifier.

Voici maintenant les opérations que je regarde comme permises sur ce tableau :

- 1° Ajouter une colonne à une autre *de même sorte*, ou l'en retrancher;
- 2° Ajouter une ligne à une autre *de même sorte*, ou l'en retrancher;
- 3° Permuter deux colonnes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles;
- 4° Permuter deux lignes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles.

Toutes ces transformations, pour lesquelles les éléments du tableau restent entiers, s'appelleront les *transformations arithmétiques* du tableau.

On peut s'en servir pour simplifier la partie du tableau qui appartient aux

colonnes de la première sorte et aux lignes de la seconde sorte, et celle qui appartient aux colonnes de la deuxième sorte et aux lignes de la première sorte.

Voici jusqu'où l'on peut pousser la simplification, d'après des théorèmes bien connus d'arithmétique; quand la réduction sera terminée :

L'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la première sorte et de la $j^{\text{ième}}$ ligne de la seconde sorte :

- 1° Sera nul, si $i > j$;
- 2° Sera égal à un entier H_i , qui pourra être nul, si $i = j$;
- 3° Sera encore nul, si $i < j$ et si H_i est premier avec H_j ;
- 4° Enfin sera nul, si $j > N_2$.

Il en sera de même de l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la seconde sorte.

La réduction peut être poussée encore plus loin, si l'on autorise une cinquième opération : multiplier tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre entier ou non, différent de zéro.

Les transformations correspondantes s'appelleront les *transformations algébriques* du tableau.

On peut alors supposer que l'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la première sorte et de la $j^{\text{ième}}$ ligne de la seconde sorte (de même que l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte et de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la seconde sorte) est nul, si $i \neq j$. Si $i = j$, il peut être égal à 0 ou à 1. S'il en est ainsi, je dirai que le tableau est *réduit*.

Après la cinquième opération, les éléments qui appartiennent aux lignes et aux colonnes de la première sorte pourront ne pas rester entiers; de plus, le déterminant formé par ces lignes et ces colonnes pourra ne pas rester égal à 1, mais il restera différent de zéro.

Le tableau (1) est relatif aux faces du polyèdre P et à leurs relations avec les cases et les arêtes. Nous pourrions en dresser un, tout pareil, relatif aux arêtes du polyèdre P et à leurs relations avec les faces et les sommets.

Nous pourrions également envisager le polyèdre P', défini plus haut, et construire deux tableaux relatifs l'un aux faces de P', l'autre à ses arêtes.

Comparons le tableau (1), relatif aux faces de P, avec le tableau (1 bis) relatif aux arêtes de P'.

Il résulte de ce qui précède, que ces deux tableaux peuvent se déduire l'un de l'autre en remplaçant les lignes par les colonnes et inversement.

Cela posé, envisageons le tableau (1), relatif aux faces de P, et examinons comment on peut déduire de ce tableau le nombre de Betti P_2 du polyèdre P.

Comment, d'abord, pourra-t-on en déduire les congruences entre les faces et les arêtes?

Considérons une colonne quelconque de la première sorte; par exemple la $i^{\text{ème}}$ colonne. Multiplions les éléments de cette colonne et de la $k^{\text{ème}}$ ligne de la première sorte par a_k^2 et ajoutons; puis égalons à la somme obtenue, en multipliant les éléments de cette même colonne et de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la seconde sorte par a_j^1 ; nous obtiendrons la congruence

$$a_i^2 \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1,$$

ce qui est bien une des congruences (3) du paragraphe II. Toutes les autres congruences n'en sont que des combinaisons.

Comment pourra-t-on maintenant trouver les homologies entre les faces?

Pour cela, envisageons, par exemple, la $i^{\text{ème}}$ colonne de la seconde sorte; multiplions les éléments de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de cette colonne par a_k^2 , ajoutons et égalons à zéro; nous trouverons

$$\sum \varepsilon_{i,k}^2 a_k^2 \sim 0,$$

ce qui est bien une des homologies (5) du paragraphe II, dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Qu'advient-il, maintenant, si l'on applique à notre tableau (1) une transformation algébrique quelconque?

Avant la transformation, chaque colonne de la première sorte correspond à une face, chaque colonne de la seconde sorte à une case, chaque ligne de la première sorte à une face, chaque ligne de la seconde sorte à une arête.

On obtient, comme nous l'avons vu, autant de congruences et d'homologies que de colonnes, en multipliant les éléments de chaque ligne de la première sorte par la face correspondante, ceux de chaque ligne de la seconde sorte par l'arête correspondante, et ajoutant.

Supposons maintenant qu'on fasse la deuxième opération, c'est-à-dire qu'on transforme en ajoutant la ligne de la première sorte, qui correspond à a_i^2 , à celle de la première sorte, qui correspond à a_k^2 . Nous convenons de dire qu'à la nouvelle $k^{\text{ème}}$ ligne (celle à laquelle on a ajouté la $i^{\text{ème}}$ ligne) correspond toujours la variété a_k^2 ; mais qu'à la nouvelle $i^{\text{ème}}$ (qui d'ailleurs n'a pas changé) correspond la variété $a_i^2 - a_k^2$.

Si l'on fait la cinquième opération sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte, en multipliant les éléments par une constante m , nous conviendrons de dire qu'à la nouvelle $k^{\text{ième}}$ ligne correspond la variété $\frac{1}{m} a_k^2$ (notation qui n'a qu'une valeur symbolique, à moins que $\frac{1}{m}$ ne soit entier).

Quant à la quatrième opération, ce n'est qu'une combinaison de plusieurs opérations analogues à la deuxième.

Nous avons ainsi défini la variété qui correspond à chacune des lignes de la première sorte du tableau, après qu'on a appliqué à ces lignes une combinaison quelconque des 2^o, 4^o et 5^o opérations.

Nous définirons de même les variétés qui correspondent aux différentes lignes de la seconde sorte, après qu'on aurait appliqué à ces lignes une combinaison des 2^o, 4^o et 5^o opérations.

Grâce à ces conventions, il suffira encore, pour obtenir les congruences et les homologies, d'ajouter et d'égaliser à zéro, après avoir multiplié les éléments de chaque ligne par la variété correspondante, et avoir changé le signe des produits ainsi obtenus, en ce qui concerne les lignes de la seconde sorte.

Maintenant, si l'on applique aux colonnes du tableau les 1^o, 3^o et 5^o opérations, on ne fera que combiner les congruences entre elles, et les homologies entre elles; ou multiplier une congruence et une homologie par un facteur constant.

D'où le résultat suivant :

Pour déduire les congruences du tableau transformé, voici ce qu'il faut faire : multiplier chaque ligne de la première sorte par la variété qui lui correspond en vertu de la convention que nous venons de faire, et ajouter; faire de même pour les lignes de la seconde sorte; égaliser les deux résultats ainsi obtenus; on aura ainsi autant de congruences que de colonnes de la première sorte; toutes les autres congruences possibles ne seront que des combinaisons.

Pour déduire de même les homologies, il faut : multiplier chaque ligne de la première sorte par la variété correspondante, ajouter et égaliser à zéro; on aura ainsi autant d'homologies que de colonnes de la seconde sorte; toutes les autres homologies possibles n'en seront que des combinaisons.

Il importe de remarquer que les congruences et homologies ainsi obtenues, pourront n'avoir qu'une valeur symbolique, parce que les coefficients pourront être fractionnaires.

Et, en effet, d'une part les éléments du tableau transformé peuvent ne plus être entiers; d'autre part, la variété qui correspond à une ligne peut, comme je l'ai dit plus haut, n'avoir elle-même qu'une valeur symbolique.

Mais comme les coefficients, entiers ou non, sont toujours commensurables, il suffira de multiplier notre congruence ou notre homologie par un entier convenable, pour en déduire une congruence ou une homologie à coefficients entiers, qui aura un sens pour elle-même.

Supposons, maintenant, qu'on ait réduit le tableau, comme je l'ai dit plus haut.

Combien y aura-t-il d'homologies distinctes?

Parmi nos N_3 colonnes de la seconde sorte, il y en aura $N_3 - N'_2$ dont tous les éléments seront nuls, et N_2 dont un élément sera égal à 1 et tous les autres nuls. Les $N_3 - N'_2$ premières ne nous donneront aucune homologie; chacune des N'_2 autres nous en donnera une et ces N'_2 homologies seront évidemment toutes distinctes.

Il y a donc N'_2 homologies distinctes.

Combien y a-t-il de congruences distinctes entre les faces et les arêtes?

Il y en a évidemment N_2 , correspondant aux N_2 colonnes de la première sorte, et ces congruences sont distinctes, parce que le déterminant formé avec les lignes et les colonnes de la première sorte, n'est pas nul.

Considérons maintenant dans notre tableau réduit les N_1 lignes de la seconde sorte; parmi elles il y en aura $N_1 - N''_2$ dont tous les éléments sont nuls, et N''_2 , dont un élément est égal à 1 et tous les autres nuls. Parmi nos N_2 congruences, il y en aura donc N''_2 qui contiendront une arête, et $N_2 - N''_2$ qui ne contiendront aucune arête. Il y a donc $N_2 - N''_2$ congruences *entre les faces seulement*, et ces congruences sont toutes distinctes.

Il y aura donc *entre les faces seulement* $N_2 - N'_2 - N''_2$ congruences, qui resteront distinctes, si l'on ne regarde plus comme distinctes celles que l'on peut déduire les unes des autres par le moyen des homologies.

Le nombre de Betti relatif aux faces de P est donc

$$N_2 - N'_2 - N''_2 + 1.$$

Cherchons maintenant le nombre de Betti relatif aux arêtes de P.

On le trouvera évidemment en opérant comme nous venons de faire sur le tableau (1 bis), relatif aux arêtes de P'.

Mais on passe d'un tableau à l'autre, en remplaçant les lignes par les

colonnes, et réciproquement. Les nombres qui joueront, par rapport à (1 bis), le même rôle que N_2, N'_2, N''_2 jouent par rapport à (1), seront donc respectivement N_2, N''_2, N'_2 .

Donc le nombre de Betti relatif aux arêtes de P' est encore

$$N_2 - N'_2 - N''_2 + 1.$$

Ainsi les nombres de Betti relatifs, l'un aux faces de P , l'autre aux arêtes de P' , sont égaux.

Or nous avons vu plus haut que les nombres de Betti relatifs aux arêtes de P et à celles de P' sont égaux, de même que les nombres de Betti relatifs aux faces de P et à celles de P' .

Donc le nombre de Betti relatif aux faces de P est égal au nombre de Betti relatif aux arêtes de P .

Notre théorème fondamental est donc démontré en ce qui concerne le polyèdre P , c'est-à-dire en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à quatre dimensions.

La démonstration pourrait, sans aucun doute, s'étendre à un polyèdre quelconque.

§ IX. — Remarques diverses.

Le théorème fondamental est ainsi établi par une démonstration, qui diffère essentiellement de celle de la page 226 de l'*Analysis situs*.

Mais cela ne saurait pas nous suffire. Il faut nous efforcer de retrouver les propositions intermédiaires et, en particulier, celle-ci :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver une variété V telle que $\Sigma N(V, V_i) \neq 0$, c'est que l'on n'ait pas l'homologie $\Sigma V_i \sim 0$.

Considérons deux variétés, la première V_1 , à une dimension, composée d'arêtes de P' , la seconde V_2 , à deux dimensions, composée de faces de P , de telle sorte qu'on aura

$$V_1 = \Sigma \alpha_i b_i^1, \quad V_2 = \Sigma \alpha'_i \alpha_i^2,$$

l'arête b_i^1 étant celle qui correspond à la face α_i^2 , d'après les conventions du paragraphe VII.

L'arête b_i^1 coupe la face α_i^2 , et n'en coupe aucune autre, de telle sorte que si nous reprenons la notation de l'*Analysis situs*, page 222, nous aurons

$$N(V_1, V_2) = \Sigma \alpha_i \alpha'_i.$$

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que les variétés V_1 et V_2 sont fermées, ce qui s'exprime par les congruences

$$(1) \quad \Sigma \alpha_i b_i^1 \equiv 0, \quad \Sigma \alpha'_i \alpha_i^2 \equiv 0.$$

Vérifions d'abord que l'on aura

$$\Sigma \alpha_i \alpha'_i = 0,$$

pourvu que l'on ait l'une des deux homologies (1)

$$(2) \quad \Sigma \alpha_i b_i^1 \sim 0, \quad \Sigma \alpha'_i \alpha_i^2 \sim 0.$$

Si, en effet, nous avons, par exemple, la seconde homologie (2), c'est qu'on aura

$$\alpha'_i = \sum_{j=1}^{j=N_2} \zeta_j \varepsilon_{i,j}^3$$

ζ_j étant un coefficient ne dépendant que de j .

D'un autre côté, la première des congruences (1) peut se déduire de l'une des suivantes :

$$(3) \quad b_i^1 \equiv \Sigma b_j^0 \varepsilon_{j,i}^3,$$

d'où

$$\Sigma \alpha_i b_i^1 \equiv \Sigma \Sigma \alpha_i b_j^0 \varepsilon_{j,i}^3.$$

En égalant à zéro le coefficient de b_j^0 , il vient successivement

$$\Sigma \alpha_i \varepsilon_{j,i}^3 = 0, \quad \Sigma \Sigma \alpha_i \zeta_j \varepsilon_{j,i}^3 = 0, \quad \Sigma \alpha_i \alpha'_i = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On raisonnerait de même si l'on avait la première homologie (2).

Je dis maintenant que si la seconde homologie (2) n'a pas lieu, on peut choisir les α_i de telle façon que V_1 reste fermée et cependant que $\Sigma \alpha_i \alpha'_i$ ne soit pas nul.

En effet, dire que la seconde homologie (2) n'a pas lieu, c'est dire qu'on ne peut pas trouver des nombres ζ_j tels que l'on ait

$$(4) \quad \alpha'_i = \Sigma \zeta_j \varepsilon_{j,i}^3.$$

Dire que V_1 reste fermée, c'est dire que les α_i sont assujettis aux conditions

$$(5) \quad \Sigma \alpha_i \varepsilon_{j,i}^3 = 0.$$

Or il est clair que si les α'_i ne satisfont pas à des égalités de la forme (4),

(1) Cf. *Analysis situs*, p. 225 et 226.

l'équation linéaire $\Sigma \alpha_i \alpha'_i = 0$ sera distincte des équations (5); on pourra donc toujours trouver des nombres α_i , qui satisfassent aux équations (5) sans satisfaire à $\Sigma \alpha_i \alpha'_i = 0$.

Remarquons d'ailleurs que nous n'avons pas restreint la généralité en supposant que nos variétés V_1 et V_2 étaient des combinaisons des b_i^1 et des a_i^2 , quelle que soit la variété V , dont la subdivision forme les polyèdres P et P' . Quelles que soient les variétés V_1 et V_2 , nous pouvons toujours subdiviser V , de manière à former deux polyèdres réciproques P et P' tels que V_1 soit une combinaison des arêtes du second, et V_2 une combinaison des faces du premier.

Il faudrait voir comment le tableau (1) du paragraphe VIII et les tableaux analogues, peuvent nous permettre de déterminer les nombres de Betti, tels que Betti les définit lui-même, et non plus les nombres de Betti définis de la seconde manière, c'est-à-dire ceux que nous avons considérés jusqu'à présent.

Considérons, par exemple, un tableau analogue au tableau (1), mais relatif aux arêtes du polyèdre P et à leurs relations avec les faces et les sommets. Considérons, en particulier, les colonnes de la seconde sorte et les lignes de la première sorte, où figurent les nombres $\varepsilon_{i,j}^2$. Soit T le tableau partiel ainsi obtenu. A l'aide de ce tableau, on pourra former les congruences

$$a_i^2 \equiv \Sigma \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1,$$

d'où l'on déduit les homologies

$$(6) \quad \Sigma \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1 \sim 0.$$

Alors pour reconnaître si plusieurs lignes fermées, formées de combinaisons des arêtes a_j^1 sont distinctes *au sens de la première définition*, c'est-à-dire *au sens de Betti*, il faut savoir si elles sont liées par une homologie obtenue en combinant les homologies (6) par addition, soustraction ou multiplication, mais *sans division*.

Supposons qu'on ait appliqué à notre tableau une série de ces transformations, que j'ai appelées arithmétiques au paragraphe VIII.

Soit $\zeta_{i,j}^2$ le nombre qui, dans le tableau transformé, figure dans la $j^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte et la $i^{\text{ième}}$ colonne de la seconde sorte. Soit c_j la variété qui correspond à la $j^{\text{ième}}$ ligne de la première sorte de notre tableau transformé en vertu des conventions du paragraphe VIII. D'après ce que nous avons vu dans ce paragraphe VIII, cette variété n'est qu'une combinaison des arêtes a_j^1 .

Nous aurons alors les homologies

$$(6 \text{ bis}) \quad \Sigma \zeta_{i,j}^2 c_j \sim 0.$$

Ces homologies ne sont que des combinaisons des homologies (6), que l'on peut obtenir *sans division*, et réciproquement on peut tirer des homologies (6) des homologies (6 bis) *sans division*, c'est là une conséquence du caractère arithmétique des transformations.

On peut donc, quand on veut s'assurer si deux lignes fermées sont distinctes au sens de Betti, se servir des homologies (6 bis) au lieu des homologies (6).

Nous pouvons supposer qu'on s'est servi des transformations arithmétiques pour réduire le tableau, comme je l'ai expliqué au paragraphe VIII et, par conséquent, que $\zeta_{i,j}^2$ est nul : 1° si $i > j$; 2° si $j > N_2$.

Le tableau réduit aux colonnes de la seconde sorte et aux lignes de la première sorte prendra, par exemple, la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 & 0 \\ f & g & c & 0 & 0 \\ h & k & l & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

J'ai supposé six lignes et cinq colonnes; j'ai supposé que l'un des nombres $\zeta_{i,i}^2$ est égal à zéro, de façon qu'une des colonnes du tableau transformé soit entièrement composée de zéros. J'ajoute que si d était égal à 1, les nombres h, k, l , qui figurent à la même ligne, seraient nuls.

Cela posé, si d n'est pas égal à 1, les deux définitions des nombres de Betti ne coïncident pas, parce que l'on a l'homologie $dc_4 \sim 0$, d'où l'on ne pourrait déduire l'homologie $c_4 \sim 0$ que par division. Si $d = 1$, on a $h = k = l = 0$, et si c n'est pas égal à 1, on aura l'homologie $cc_3 \sim 0$, et les deux définitions ne concorderont pas; et ainsi de suite.

En résumé, pour que les deux définitions concordent, il faut et il suffit que le produit $abcd$ soit égal à 1.

Pour interpréter ce résultat, revenons au tableau non transformé. Le produit $abcd$ sera le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant $N_2 - N_3$ lignes dans le tableau T, pourvu que ces déterminants ne soient pas tous nuls (auquel cas il n'y aurait pas dans le tableau transformé de colonne exclusivement composée de zéros). Si les déterminants

sont tous nuls, on en formera d'autres en supprimant dans le tableau T une colonne et $N_2 - N_3 + 1$ lignes; le produit $abcd$ sera le plus grand commun diviseur de tous ces déterminants, s'ils ne sont pas tous nuls; et ainsi de suite.

Nous arrivons ainsi à la règle suivante :

Soit Δ_p le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en partant du tableau T et y supprimant p lignes et $N_2 - N_3 + p$ colonnes. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux définitions des nombres de Betti coïncident, c'est que le premier des Δ_p qui ne s'annule pas, soit égal à 1 (le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres égaux à zéro étant zéro par définition).

Supposons que la variété $V_1 = \sum \alpha_i b_i^1$, considérée au début de ce paragraphe, ne peut pas être frontière d'une variété à deux dimensions, mais satisfait à l'homologie $V_1 \sim 0$. En d'autres termes, l'homologie $V_1 \sim 0$ peut se déduire des homologies (6) par division, mais non pas sans division. Dans ce cas, on aura néanmoins

$$N(V_1, V_2) = \sum \alpha_i \alpha_i' = 0.$$

§ X. — Démonstration arithmétique de l'un des théorèmes du paragraphe VII.

Voici une manière de former les homologies qui pourra être utile à connaître.

Soit b_i^0 un sommet du polyèdre P' , situé à l'intérieur d'une case α_i^2 du polyèdre P. Soit, d'autre part, α_k^0 un sommet de P, appartenant à la case α_i^2 . Joignons b_i^0 à α_k^0 par une ligne que j'appellerai simplement $b_i^0 \alpha_k^0$.

Soit maintenant b_i^1 une arête de P' , dont les deux extrémités sont b_j^0 et b_h^0 , de telle sorte que l'une des congruences (3) (cf. § II) relatives à P' , soit

$$b_i^1 \equiv b_j^0 - b_h^0.$$

Soit, d'autre part, α_i^2 la face de P qui correspond à l'arête b_i^1 de P' , et α_k^0 un des sommets de α_i^2 ; nous aurons l'homologie

$$(1) \quad b_i^1 \sim \alpha_k^0 b_j^0 - \alpha_k^0 b_h^0.$$

Soit α_i^1 une arête de P, dont les deux extrémités sont α_j^0 et α_h^0 , de sorte que l'une des congruences (3) relatives à P soit

$$\alpha_i^1 \equiv \alpha_j^0 - \alpha_h^0.$$

Soit α_k^2 l'une des cases de P auxquelles appartient α_i^1 , et b_k^0 le sommet correspondant de P'; on aura l'homologie

$$(2) \quad \alpha_i^1 \sim b_k^0 a_j^0 - b_k^0 a_h^0.$$

Je dis maintenant que toutes les homologies entre les α_i^1 peuvent se déduire des homologies (2).

En effet, soit α_i^2 une face quelconque de P, et soit

$$\alpha_i^2 \equiv \Sigma \varepsilon_{i,j}^2 \alpha_j^1$$

la congruence de la forme (3) qui lui correspond; on en déduit l'homologie

$$(3) \quad \Sigma \varepsilon_{i,j}^3 \alpha_j^1 \sim 0,$$

et nous avons vu au paragraphe VI que toutes les homologies entre les arêtes de P sont des combinaisons de celles qu'on obtient de la sorte.

Soit alors α_j^1 l'une des arêtes de P qui figurent dans l'homologie (3), et soit

$$\alpha_i^1 \equiv \alpha_h^0 - \alpha_l^0.$$

Soit d'ailleurs α_k^2 l'une des cases dont fait partie α_i^2 . Nous aurons l'homologie

$$(2 \text{ bis}) \quad \alpha_j^1 \sim b_k^0 a_h^0 - b_k^0 a_l^0.$$

Si nous additionnons les homologies (2 bis) qui sont de la forme (2), après les avoir multipliées par $\varepsilon_{i,j}^2$, tous les termes du second membre disparaîtront en vertu des relations (5) du paragraphe II; on retrouverait donc l'homologie (3).

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que toutes les homologies entre les b_i^1 peuvent se déduire des homologies (1).

Nous avons vu plus haut, au paragraphe VII, que si l'on a une congruence

$$\Sigma a_i^1 \equiv 0,$$

on peut trouver une autre congruence entre les arêtes de P'

$$\Sigma b_j^1 \equiv 0,$$

et de telle façon qu'on ait l'homologie

$$(4) \quad \Sigma a_i^1 \sim \Sigma b_j^1.$$

Je dis maintenant que cette homologie (4) peut être déduite des homologies (1) et (2).

Découpons, en effet, le premier membre de notre congruence $\Sigma a_i^1 \equiv 0$ en

un certain nombre de groupes, de telle façon que les arêtes d'un même groupe appartiennent à une même case α_k^3 . Soit Σa_j^1 l'un de ces groupes; nous aurons la congruence

$$(5) \quad \Sigma a_j^1 \equiv a_m^0 - a_p^0,$$

a_m^0 et a_p^0 étant les deux extrémités de la ligne formée par l'ensemble des arêtes de ce groupe. Je suppose que toutes ces arêtes appartiennent à la case α_k^3 . Soit

$$a_j^1 \equiv a_h^0 - a_l^0$$

l'une de ces arêtes; nous aurons l'homologie

$$(2 \text{ ter}) \quad a_j^1 \equiv b_k^0 a_h^0 - b_k^0 a_l^0,$$

et en ajoutant toutes ces homologies, on trouverait

$$(6) \quad \Sigma a_j^1 \sim b_k^0 a_m^0 - b_p^0 a_p^0.$$

Ajoutons d'une part toutes les homologies (6), d'autre part toutes les congruences (5), qui correspondent aux différents groupes. L'addition des congruences (5) doit nous donner la congruence $\Sigma a_i^1 \equiv 0$; il s'en suit que si un sommet a_m^0 figure dans une des congruences (5) avec le signe +, il devra figurer dans une autre avec le signe —. L'addition des homologies (6) nous donnera donc

$$(7) \quad \Sigma a_j^1 \sim \Sigma (b_k^0 a_m^0 - b_q^0 a_m^0).$$

En écrivant cette relation, je suppose que a_m^0 figure dans deux des congruences (5), une fois avec le signe + dans la congruence qui correspond à la case α_k^3 , et une fois avec le signe — dans la congruence qui correspond à la case α_q^3 .

Observons maintenant que b_k^0 et b_q^0 sont deux sommets de P' , et que ces deux sommets appartiennent l'un et l'autre à la case b_m^3 . On peut alors trouver une ligne formée d'arêtes de P' , appartenant à cette case b_m^3 , et allant de b_k^0 à b_q^0 . Soit Σb_s^1 cette ligne; on aura

$$(5 \text{ bis}) \quad \Sigma b_s^1 \equiv b_k^0 - b_q^0.$$

De même que de la congruence (5) des homologies (2 ter), qui sont de la forme (2), nous avons déduit l'homologie (6); de même de la congruence (5 bis) et d'homologies de la forme (1), nous pourrions déduire l'homologie

$$(6 \text{ bis}) \quad \Sigma b_s^1 \sim a_m^0 b_k^0 - a_m^0 b_q^0.$$

A chaque terme du second membre de (7) correspond une homologie (6 bis). En les additionnant, on trouvera

$$(7 \text{ bis}) \quad \Sigma \Sigma b_s^1 \sim \Sigma (\alpha_m^0 b_k^0 - \alpha_m^0 b_q^0),$$

d'où

$$(8) \quad \Sigma a_j^1 + \Sigma \Sigma b_s^1 \sim 0,$$

homologie de la forme (4), qui se déduit, comme on le voit, des homologies (1) et (2). C. Q. F. D.

On peut se demander pourquoi j'ai jugé nécessaire de revenir sur un théorème déjà démontré au paragraphe VII. On le comprendra si l'on se rend compte de la nature géométrique, pour ainsi dire, de la démonstration du paragraphe VII. La présente démonstration a, au contraire, un caractère arithmétique; elle n'invoque que des propriétés des schémas définis au paragraphe II, et des tableaux construits au paragraphe VIII; et elle conserverait sa valeur alors même qu'à ces schémas et à ces tableaux ne correspondrait aucun polyèdre.

Qu'avons-nous supposé, en effet? C'est que si $\alpha_0^p, \alpha_1^p, \alpha_2^p$ sont les nombres des sommets, des arêtes et des faces appartenant à une même case, et si $\beta_0^p, \beta_1^p, \beta_2^p$ sont les nombres des cases, des faces et des arêtes auxquelles appartient un même sommet, on a

$$\alpha_0^p - \alpha_1^p + \alpha_2^p = \beta_0^p - \beta_1^p - \beta_2^p = 2;$$

et, en outre, que deux sommets quelconques α_i^0 et α_k^0 sont liés par l'homologie

$$(9) \quad \alpha_i^0 \sim \alpha_k^0.$$

Or on peut reconnaître si un sommet appartient à une face, par exemple, en appliquant au tableau du paragraphe VIII des règles purement arithmétiques, et l'on peut de la même manière reconnaître si une homologie telle que (9) a lieu.

§ XI. — Possibilité de la subdivision.

Tout ce qui précède suppose qu'une variété quelconque peut être subdivisée en variétés simplement connexes, de manière à former un polyèdre P, à p dimensions, pour lequel les variétés $\alpha_i^p, \alpha_i^{p-1}, \dots, \alpha_i^2, \alpha_i^1, \alpha_i^0$ sont toutes simplement connexes. Par exemple, toute variété à trois dimensions pourra être subdivisée en cases simplement connexes, séparées les unes des autres par des faces simplement connexes.

C'est cela qu'il nous reste à démontrer, et c'est cette démonstration que je vais donner. Je précise davantage : je vais montrer que toute variété à p dimensions peut être subdivisée de façon à former un polyèdre P , dont toutes les variétés $\alpha_i^p, \alpha_i^{p-1}, \dots, \alpha_i^2, \alpha_i^1, \alpha_i^0$ sont des tétraèdres généralisés.

Je supposerai que le théorème a été démontré pour une variété à $p - 1$ dimensions, et je me propose de l'étendre à une variété à p dimensions.

Nous présenterons la définition de notre variété sous la forme suivante, qui comprendra les deux définitions données dans l'*Analysis situs*.

Nous aurons les équations et les inégalités :

$$(1) \quad \begin{cases} x_i = \theta_i(y_1, y_2, \dots, y_q) & (i = 1, 2, \dots, n), \\ f_k(y_1, y_2, \dots, y_q) = 0 & (k = 1, 2, \dots, q - p), \\ \varphi_h(y_1, y_2, \dots, y_q) > 0. \end{cases}$$

Ces équations et ces inégalités définiront une variété v qui sera limitée et, en général, non fermée; on aura différents systèmes analogues d'équations et d'inégalités, définissant autant de variétés partielles que j'appellerai v_1, v_2, \dots, v_m .

Deux de ces variétés seront dites contiguës, si elles ont une partie commune, et je puis supposer que l'on peut passer d'un point quelconque de l'une de ces variétés à un point quelconque d'une autre quelconque d'entre elles, sans sortir de l'ensemble de ces variétés. Cet ensemble constituera la variété que j'appellerai V , et qu'il s'agissait de définir.

Je supposerai que cette variété V est bilatère.

C'est évidemment là la façon la plus générale possible de définir une variété.

Considérons la variété partielle v_1 , définie par les équations (1).

D'après le théorème des fonctions implicites, on pourra satisfaire aux équations

$$f_k = 0,$$

en faisant

$$y_j = \psi_j(z_1, z_2, \dots, z_p),$$

les ψ étant des fonctions holomorphes des z ; mais les séries ψ pourront ne pas converger pour tous les points de la variété v_1 .

Les conditions de convergence seront certaines inégalités

$$\eta_k(z_1, z_2, \dots, z_p) > 0.$$

Quand on remplacera les y en fonctions des z , les relations

$$x_i = \theta_i, \quad \varphi_h > 0$$

deviendront

$$\begin{aligned} x_i &= \theta'_i(z_1, z_2, \dots, z_p), \\ \varphi'_h(z_1, z_2, \dots, z_p) &> 0. \end{aligned}$$

Alors l'ensemble des relations

$$(1 \text{ bis}) \quad x_i = \theta'_i, \quad \varphi'_h > 0, \quad \eta_k > 0$$

définira une certaine variété ν'_1 , de telle façon que l'ensemble des variétés analogues à ν'_1 reproduira la variété ν_1 .

Nous sommes ainsi ramenés à la seconde définition de l'*Analysis situs*.

Cela posé, soit ν''_1 une variété ν'_1 satisfaisant aux conditions suivantes : elle sera tout entière contenue dans ν'_1 ; elle comprendra tous les points de ν'_1 qui ne lui sont pas communs avec une des variétés contiguës ; par conséquent, la frontière complète de ν''_1 sera tout entière dans la partie commune à ν'_1 et aux variétés contiguës.

A chacune des variétés ν'_1, ν'_2, \dots , dont l'ensemble constitue V , correspondra ainsi une variété ν''_1, ν''_2, \dots , satisfaisant aux conditions que je viens d'énoncer ; et il est clair qu'on peut s'arranger de telle façon que tout point de V appartienne à l'une des variétés ν'' , et à une seule, à moins qu'il ne soit sur la frontière de l'une des variétés ν'' , auquel cas il devra appartenir, en outre, à la frontière au moins d'une autre variété ν'' .

La variété V , ainsi subdivisée en variétés ν'' , constitue un polyèdre P , au sens donné à ce mot au paragraphe II. Mais ce polyèdre ne convient pas encore à la question, car nous ne pouvons savoir si les variétés ν'' sont des tétraèdres généralisés, ou même sont simplement connexes.

Considérons la variété ν''_1 , et soit

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad \dots, \quad z_p = 0$$

un point *intérieur* à cette variété ; considérons la variété à une dimension

$$z_1 = \alpha_1 t, \quad z_2 = \alpha_2 t, \quad \dots, \quad z_p = \alpha_p t,$$

où les α sont des constantes, et où nous ferons varier t depuis 0 jusqu'à $+\infty$. C'est ce que j'appellerai un *rayon vecteur*.

Chaque rayon vecteur rencontrera la frontière complète de ν''_1 en un nombre impair de points ; en effet, quand on suivra ce rayon, en faisant varier t de 0 à $+\infty$, on sortira de la variété ν''_1 ; on pourra y rentrer ensuite et en sortir plusieurs fois, mais on finira toujours par en sortir pour n'y plus rentrer.

Il pourra se faire qu'un rayon vecteur rencontre la frontière de ν''_1 en deux

points confondus. Les rayons vecteurs qui satisfont à cette condition s'appelleront les *rayons remarquables*.

L'ensemble des rayons remarquables formera une ou plusieurs variétés à $p - 1$ dimensions, que j'appellerai les *cônes remarquables*.

Les intersections des cônes remarquables avec la frontière de ν_1'' formeront une ou plusieurs variétés à $p - 2$ dimensions, que j'appellerai U, et ces variétés U partageront la frontière de ν_1'' en régions que j'appellerai R.

Une région R ne peut être rencontrée par un rayon vecteur en plus d'un point, mais d'après ce que nous venons de voir, il peut se présenter deux cas : quand on suit ce rayon vecteur, en faisant croître t de 0 à ∞ , on peut, au moment où l'on rencontre R, sortir de ν_1'' ou y rentrer. Si le premier cas, par exemple, se présente pour un des vecteurs qui rencontrent R, il se présentera pour tous les vecteurs qui rencontrent R.

D'où la distinction des régions R en régions de la première sorte, que les rayons vecteurs rencontrent en sortant de ν_1'' , et en régions de la seconde sorte, que les rayons vecteurs rencontrent en rentrant dans ν_1'' .

Les régions R étant des variétés à $p - 1$ dimensions pourront, d'après l'hypothèse faite au début, être subdivisées en tétraèdres généralisés.

Supposons, pour fixer les idées, qu'un rayon vecteur rencontre trois fois la frontière de ν_1'' , qu'il rencontre successivement les régions R_1, R_2, R_3 ; R_1 et R_3 seront de la première sorte, R_2 sera de la seconde sorte.

Subdivisons R_1 et R_3 en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions.

Si T_1 est une des subdivisions de R_1 , menons tous les rayons vecteurs qui passent par les différents points de T_1 , et conservons la partie de ces rayons vecteurs qui est comprise entre le point $z_i = 0$ et le rayon R_1 (partie qui est intérieure à ν_1''); l'ensemble de ces vecteurs formera un tétraèdre généralisé à p dimensions, ayant pour sommet le point $z_i = 0$, et pour base le tétraèdre généralisé à $p - 1$ dimensions T_1 .

Soit maintenant T_3 une des subdivisions de R_3 ; menons encore tous les rayons vecteurs qui passent par les différents points de T_3 et conservons la partie de ces rayons vecteurs qui est comprise entre R_2 et R_3 (partie qui est intérieure à ν_1''). Cet ensemble forme une variété à $p - 1$ dimensions que l'on pourrait appeler un *tronc de tétraèdre généralisé*, dont les deux bases sont T_3 et un tétraèdre généralisé à $p - 1$ dimensions, que j'appellerai T_2 et qui fera partie de R_2 . C'est, en d'autres termes, la différence de deux tétraèdres

généralisés, ayant pour sommet commun le point $x_i = 0$ et pour bases, l'un T_3 , l'autre T_2 .

Ce tronc de tétraèdre généralisé pourra à son tour être partagé en p tétraèdres généralisés, de même que dans le théorème classique, le tronc de pyramide triangulaire se partage en trois pyramides triangulaires.

Finalement ν''_1 sera partagé en tétraèdres généralisés.

Une difficulté subsiste cependant; on peut subdiviser comme ν''_1 les autres variétés analogues ν''_2, ν''_3, \dots ; considérons la subdivision de ν''_1 en tétraèdres généralisés T_1 et celle de ν''_2 en tétraèdres généralisés T_2 . La frontière commune de ν''_1 et ν''_2 se trouvera subdivisée, d'une part en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions τ_1 , qui seront les faces des T_1 , et d'autre part, en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions τ_2 , qui seront les faces des T_2 ; *mais il n'est pas évident que ces deux subdivisions coïncident.*

Considérons alors la partie commune à l'un des τ_1 et à l'un des τ_2 ; je pourrai, d'après l'hypothèse faite au début, la subdiviser en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions σ . Ainsi chacun des tétraèdres τ_1 et chacun des tétraèdres τ_2 sera subdivisé en tétraèdres σ .

Soit maintenant τ'_1 une des variétés à q dimensions *appartenant* à τ_1 (j'emploie ici le mot appartenir dans le même sens que quand je dis que les faces, les arêtes, et les sommets d'un tétraèdre ordinaire appartiennent à ce tétraèdre, ou quand je disais au paragraphe II que les variétés α'_i appartaient au polyèdre P). Soit, de même, τ'_2 une des variétés à q dimensions appartenant à τ_2 . Ces deux variétés τ'_1 et τ'_2 seront des tétraèdres généralisés, puisque d'après la définition du tétraèdre généralisé, toute variété qui *appartient* à un tétraèdre généralisé, est elle-même un tétraèdre généralisé. Alors τ'_1 et τ'_2 se trouveront subdivisés en tétraèdres généralisés à q dimensions σ , qui *appartiendront* aux tétraèdres à $p - 1$ dimensions σ .

Cela à la rigueur pourrait nous suffire; nos variétés ν''_1, \dots seraient partagées en tétraèdres généralisés à p dimensions T^p , leurs frontières en tétraèdres à $p - 1$ dimensions T^{p-1}, \dots ; seulement ces tétraèdres T^{p-1} ne seraient pas ceux qui appartiennent aux tétraèdres T^p , ceux-là en seraient seulement des subdivisions.

Mais nous pouvons aller plus loin.

Considérons l'un des tétraèdres à p dimensions T^p dans lequel ν''_1 est subdivisé. Je rappelle qu'on les a obtenus en subdivisant les troncs de tétraèdres généralisés, dont il a été question plus haut. Par conséquent, T^p a tous

ses sommets sur la frontière de ν_1'' (il y aurait exception pour les tétraèdres dont un sommet est au point $z_i = 0$, mais pour ceux-là il n'y a pas de difficulté).

Supposons, par exemple, que les points communs à T^p et à la région que j'ai appelée plus haut R_3 forment un tétraèdre généralisé à q dimensions T^q appartenant à T^p , et que les points communs à T^p et à la région R_2 forment un tétraèdre à $p - q - 1$ dimensions T^{p-q-1} , appartenant à T^p .

Les tétraèdres T^q et T^{p-q-1} sont analogues aux tétraèdres τ_1' traités plus haut; ils peuvent donc être subdivisés en tétraèdres analogues à ceux que j'ai appelés σ' ; soient S_1^q, S_2^q, \dots , les tétraèdres analogues à σ' , qui sont des subdivisions de T^q ; soient $S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1}, \dots$ les tétraèdres analogues à σ' qui sont des subdivisions de T^{p-q-1} . Je dis qu'on peut subdiviser T_k^p en tétraèdres à p dimensions de telle façon que les variétés $S_1^q, S_2^q, \dots, S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1}, \dots$ appartiennent à T^p .

Pour le démontrer, je suppose d'abord que T^p soit un *tétraèdre rectiligne* (*cf.* § II in fine). On sait qu'un tétraèdre rectiligne est entièrement défini quand on connaît ses $p + 1$ sommets. Alors T^p est le tétraèdre rectiligne qui a pour sommets ceux de T^q et de T^{p-q-1} .

Supposons que T^q se décompose en g tétraèdres partiels

$$S_1^q, S_2^q, \dots, S_g^q$$

et T^{p-q-1} en h tétraèdres partiels

$$S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1}, \dots, S_h^{p-q-1}.$$

On vérifiera alors que T^p se décompose en gh tétraèdres partiels qui sont ceux dont les sommets sont ceux de

$$S_i^q \text{ et } S_k^{p-q-1} \quad (i = 1, 2, \dots, g; k = 1, 2, \dots, h).$$

Si le tétraèdre T^p n'est pas rectiligne, le résultat subsiste puisqu'un tétraèdre quelconque est homéomorphe à un tétraèdre rectiligne.

Ainsi notre variété est décomposée en tétraèdres à p dimensions de façon à former un polyèdre tel que toute variété appartenant à ce polyèdre, appartient à l'un de ces tétraèdres.

On est ainsi débarrassé des derniers doutes qui pouvaient subsister au sujet de la possibilité de subdiviser une variété V de façon à former un polyèdre P , pour lequel tous les α_i^q soient simplement connexes.

SECOND COMPLÉMENT

A

L'ANALYSIS SITUS

Proceedings of the London Mathematical Society, t. 32, p. 277-308 (14 juin 1900).

Introduction.

J'ai publié dans le *Journal de l'École Polytechnique* un travail intitulé « *Analysis situs* »; je me suis occupé une seconde fois du même problème dans un Mémoire portant pour titre « *Complément à l'Analysis situs* », et qui a été imprimé dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

Cependant la question est loin d'être épuisée, et je serai sans doute forcé d'y revenir à plusieurs reprises. Pour cette fois, je me bornerai à certaines considérations qui sont de nature à simplifier, à éclaircir et à compléter les résultats précédemment acquis.

Les renvois portant simplement une indication de paragraphe ou de page se rapporteront au premier Mémoire, celui du *Journal de l'École Polytechnique*; les renvois où ces indications seront précédées de la lettre c se rapporteront au Mémoire des *Rendiconti*.

Quant aux renvois aux paragraphes du présent Mémoire, je les ferai précéder des lettres 2c.

§ 1. Rappel des principales définitions.

Considérons une variété fermée à p dimensions. Nous supposons que cette variété a été subdivisée de manière à former un polyèdre P à p dimensions. Les éléments de ce polyèdre s'appelleront les α_i^p ; ils seront séparés les uns des autres par des variétés à $p - 1$ dimensions qui s'appelleront les α_i^{p-1} ; celles-ci seront séparées les unes des autres par des variétés à $p - 2$ dimensions qui s'appelleront les α_i^{p-2} ; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive aux sommets du polyèdre qui s'appelleront les α_i^0 .

Toutes ces variétés seront simplement connexes, c'est-à-dire homéomorphes à l'hypersphère.

Si une variété α_i^q a pour frontière complète les α_j^{q-1} , j'écrirai la congruence

$$(1) \quad \alpha_i^q \equiv \sum \varepsilon_{ij}^q \alpha_j^{q-1},$$

où les ε sont égaux à 0, + 1 ou - 1 (c, § II, p. 295).

Nous écrirons, d'autre part, l'homologie

$$(2) \quad \sum \varepsilon_{ij}^q \alpha_j^{q-1} \sim 0.$$

Nous combinerons les congruences (1) et les homologies (2) par addition, soustraction, multiplication, et quelquefois par division.

Parmi les congruences entre α_i^q et α_j^{q-1} obtenues par la combinaison des congruences (1), nous distinguerons celles qui ne contiennent que des α_j^q , et d'où les α_j^{q-1} ont disparu.

Nous désignerons quelquefois les α_i^0 sous le nom de *sommets*, les α_i^1 sous celui d'*arêtes*, les α_i^2 sous celui de *faces*, les α_i^3 sous celui de *cases*, les α_i^4 sous celui d'*hypercases*.

Au polyèdre P correspond un polyèdre réciproque P' (c, § VII), dont j'appellerai les éléments b_i^p au lieu de α_i^p , b_i^{p-1} au lieu de α_i^{p-1} , ..., et enfin b_i^0 au lieu de α_i^0 .

Entre les deux polyèdres, il y a une correspondance telle que b_i^{p-q} correspond à α_j^q . Les deux polyèdres proviennent de la subdivision d'une même variété V .

Entre les éléments de P' , nous avons les congruences

$$(1 \text{ bis}) \quad b_i^q = \sum \varepsilon_{ij}^{p-q+1} b_j^{q-1}$$

analogues aux congruences (1); nous pouvons l'écrire également

$$b_i^q = \sum \varepsilon_{ij}^q b_j^{q-1},$$

en posant

$$\varepsilon_i^{p-q+1} = \varepsilon_{ij}'.$$

Entre les éléments de P et ceux de P' , nous avons encore une autre relation.

Rappelons la notation $N(V, V')$ (§ 9, p. 222). Nous aurons alors

$$N(\alpha_k', b_i^{p-q}) = 0$$

si i n'est pas égal à k , et

$$N(\alpha_i', b_i^{p-q}) = \pm 1.$$

Il reste à voir si l'on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$.

Pour nous en rendre compte, considérons deux éléments correspondants de P et de P' que j'appellerai α_i' et b_i^{p-q} ; considérons, d'autre part, deux éléments correspondants α_j^{q-1} et b_j^{p-q+1} de telle façon que α_j^{q-1} appartienne à α_i' et b_i^{p-q} à b_j^{p-q+1} .

Je pourrai toujours choisir mes coordonnées de telle façon que les équations de α_i' soient

$$(3) \quad F_1 = F_2 = \dots = F_{p-q} = 0,$$

les F étant des fonctions de coordonnées y_1, y_2, \dots, y_p qui définiront la position d'un point sur la variété V .

Soient de même

$$(4) \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{q-1} = 0$$

les équations de b_j^{p-q+1} ; je pourrai alors supposer que les équations de α_j^{q-1} s'obtiennent en adjoignant aux équations (1) l'équation $\psi = 0$, et que celles de b_i^{p-q} s'obtiennent en adjoignant aux équations (2) l'équation $\psi = 1$. Je pourrai m'arranger pour que la même fonction ψ figure au premier membre de ces deux équations.

Alors parmi les inégalités, qui avec les égalités (1) complètent la définition de α_i' , devra figurer l'inégalité

$$\psi > 0.$$

De même, parmi les inégalités qui avec les égalités (2) complètent la définition de b_j^{p-q+1} , devra figurer l'inégalité

$$\psi < 1.$$

Si nous voulons que ε_{ij}' soit égal à $+1$, il faut d'après nos conventions que les équations de α_j^{q-1} se mettent dans l'ordre suivant :

$$F_1 = F_2 = \dots = F_{p-q} = \psi = 0$$

et si nous voulons en même temps que $\varepsilon_{ji}^{p-q+1} = +1$, il faut que les équations de b_i^{p-q} se mettent dans l'ordre suivant :

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{q-1} = 1 - \psi = 0.$$

Le nombre $N(\alpha_i^q, b_i^{p-q})$ dépend du signe du déterminant fonctionnel de

$$F_1, F_2, \dots, F_{p-q}, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{q-1}, 1 - \psi.$$

De même, le nombre $N(\alpha_j^{q-1}, b_j^{p-q+1})$ dépend du signe du déterminant fonctionnel de

$$F_1, F_2, \dots, F_{p-q}, \psi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{q-1}.$$

Nous pouvons toujours supposer que les fonctions F , Φ et ψ aient été choisies de telle sorte que ces déterminants ne s'annulent pas dans le domaine considéré.

Nous voyons alors que les deux déterminants sont de même signe si q est pair, et de signe contraire si q est impair.

Nous aurons dans le premier cas

$$N(\alpha_i^q, b_i^{p-q}) = N(\alpha_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}),$$

et dans le second cas

$$N(\alpha_i^q, b_i^{p-q}) = -N(\alpha_j^{q-1}, b_j^{p-q+1}).$$

Comme nous pourrons toujours supposer

$$N(\alpha_i^0, b_i^p) = +1,$$

nous trouverons successivement

$$\begin{aligned} N(\alpha_i^1, b_i^{p-1}) = -1, & \quad N(\alpha_i^2, b_i^{p-2}) = -1, & \quad N(\alpha_i^3, b_i^{p-3}) = +1, \\ N(\alpha_i^4, b_i^{p-4}) = +1, & \quad \dots \end{aligned}$$

La seule chose à retenir, c'est que le nombre $N(\alpha_i^q, b_i^{p-q})$ ne dépend que de q .

Cela posé, on peut former avec les nombres ε_{ij}^q un tableau que j'appellerai T_q , et où le nombre ε_{ij}^q occupera la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne. Dans ce tableau T_q , il y aura donc autant de lignes que de α_i^q et de colonnes que de α_j^{q-1} .

J'ai appelé α_q le nombre des α_i^q de sorte que le tableau T_q aura α_q lignes et α_{q-1} colonnes. En particulier, le tableau T_1 nous donnera la relation entre les arêtes et les sommets, le tableau T_2 entre les faces et les arêtes, etc.

J'appellerai T'_q le tableau qui est formé avec P' , comme T_q avec P . Nous voyons que le tableau T'_q s'obtient en partant du tableau T_{p-q+1} , permutant les lignes avec les colonnes, et réciproquement.

Nous avons désigné (a, § III, p. 301) par $\alpha_q - \alpha'_q$ le nombre des homologies distinctes entre les a'_i , et par $\alpha_q - \alpha''_q$ le nombre des congruences distinctes entre les a'_i (les a'_j^{-1} étant éliminés); par

$$P_q = \alpha'_q - \alpha''_q + 1$$

le nombre de Betti correspondant aux a'_i .

Nous avons appelé β_q , β'_q et β''_q les nombres analogues à α_q , α'_q et α''_q , et se rapportant au polyèdre P' , de telle sorte que

$$\beta_q = \alpha_{p-q}.$$

§ 2. Réduction des tableaux.

Considérons un tableau T formé de nombres entiers rangés en un certain nombre de lignes et de colonnes. Tels sont nos tableaux T_q .

Supposons que l'on puisse faire sur ce tableau les opérations suivantes :

- 1° Ajouter une colonne à une autre ou l'en retrancher;
- 2° Permuter deux colonnes et changer le signe de l'une d'elles;
- 3° Faire les mêmes opérations sur les lignes.

En combinant ces opérations, on pourra faire subir aux colonnes une substitution linéaire quelconque pourvu que les coefficients soient entiers et le déterminant égal à 1. De même pour les lignes.

Quel est, par le moyen de ces opérations, le plus grand degré de simplicité auquel on puisse réduire un tableau? C'est ce que nous allons examiner.

Supposons d'abord, pour fixer les idées, que le tableau T n'ait pas plus de lignes que de colonnes.

LEMME I. — Soit

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix}$$

un tableau T que je suppose, pour fixer les idées, de trois lignes et de cinq colonnes.

Je suppose que les quinze nombres a , b , c soient premiers entre eux; je dis qu'on pourra toujours trouver trois nombres α_1 , β_1 , γ_1 , tels que les cinq nombres

$$h_{1i} = \alpha_1 a_i + \beta_1 b_i + \gamma_1 c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

soient premiers entre eux.

Pour cela les nombres $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ doivent d'abord remplir une première condition : ils doivent être premiers entre eux. Si cette condition est remplie, on pourra trouver six autres nombres $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Posons alors

$$h_{ki} = \alpha_k a_i + \beta_k b_i + \gamma_k c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5; k = 1, 2, 3).$$

Soit

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

la règle de la multiplication des déterminants nous donnera

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Ce qui montre que le plus grand commun diviseur des trois nombres h_{11}, h_{12}, h_{13} et, par conséquent, celui des cinq nombres h_{1i} , divise Δ . Il doit diviser de même tous les déterminants obtenus en supprimant deux colonnes dans le tableau et, par conséquent, le plus grand commun diviseur, M , de tous ces déterminants.

Soit p un facteur premier quelconque de M . Comme nos quinze nombres a, b, c sont premiers entre eux, l'un d'eux au moins, par exemple c_5 , ne sera pas divisible par p .

Si nous prenons alors

$$(1) \quad \alpha_1 \equiv 0, \quad \beta_1 \equiv 0, \quad \gamma_1 \equiv c_5^{p-2} \pmod{p},$$

il viendra

$$h_{15} \equiv c_5^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

de sorte que le plus grand commun diviseur des cinq nombres h_{1i} , ne sera pas divisible par p .

Nous obtiendrons un système de congruences analogues à (1) pour chacun des facteurs premiers de M . On pourra satisfaire à la fois à toutes ces congruences puisqu'elles ont lieu par rapport à des modules premiers différents.

Alors le plus grand commun diviseur des cinq nombres h_{1i} ne sera divisible

par aucun des facteurs premiers de M ; et, comme il doit diviser M , il sera égal à 1.

1^{er} COROLLAIRE. — Si l'on fait subir aux lignes du tableau la substitution linéaire

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{array}$$

il est clair que les éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne qui étaient

$$a_i, b_i, c_i$$

deviendront

$$h_{1i}, h_{2i}, h_{3i},$$

d'où cette conséquence :

Si les éléments du tableau sont premiers entre eux, on peut réduire le tableau de telle sorte que les éléments de la première ligne soient premiers entre eux.

2^o COROLLAIRE. — *Si les éléments du tableau ont pour plus grand commun diviseur δ , on peut réduire le tableau de telle sorte que les éléments de la première ligne aient pour plus grand commun diviseur δ .*

THÉOREME. — *Soit m le nombre des colonnes et n celui des lignes ($m \geq n$); soit M_0 le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant dans le tableau $m - n$ colonnes quelconques; soit M_1 le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant dans le tableau $m - n + 1$ colonnes et une ligne; soit M_2 celui des déterminants obtenus en supprimant $m - n + 2$ colonnes et deux lignes, etc.; soit enfin M_{n-1} celui des déterminants obtenus en supprimant $m - 1$ colonnes et $n - 1$ lignes, c'est-à-dire en d'autres termes celui de tous les éléments.*

Ces nombres M_0, M_1, \dots, M_{n-1} ne seront pas altérés par les opérations faites soit sur les lignes, soit sur les colonnes.

Il va sans dire que le nombre M_k devrait être considéré comme nul si tous les déterminants correspondants étaient nuls.

Nous pourrions alors énoncer notre corollaire sous la forme suivante :

3^o COROLLAIRE. — *On peut réduire le tableau de telle sorte que le plus grand commun diviseur des éléments de la première ligne soit M_{n-1} .*

LEMME II. — *On peut, par une transformation entre les colonnes, réduire*

le tableau de telle sorte que le premier élément de la première ligne devienne M_{n-1} , et que tous les autres éléments de la première ligne deviennent nuls.

Nous allons faire subir, en effet, aux colonnes (supposées comme plus haut au nombre de $m = 5$) la substitution linéaire

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \beta_1 & \dots & \dots & \dots & \beta_5 \\ \gamma_1 & \dots & \dots & \dots & \gamma_5 \\ \delta_1 & \dots & \dots & \dots & \delta_5 \\ \zeta_1 & \dots & \dots & \dots & \zeta_5 \end{vmatrix},$$

dont le déterminant doit être égal à 1. Soient

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

les éléments de la première ligne. Après les réductions que le tableau a déjà subies, le plus grand commun diviseur de ces cinq nombres est devenu M_{n-1} . Nous pouvons alors choisir la substitution (2) de telle sorte que l'on ait

$$\Sigma \alpha_i a_i = M_{n-1}, \quad \Sigma \beta_i a_i = \Sigma \gamma_i a_i = \Sigma \delta_i a_i = \Sigma \zeta_i a_i = 0.$$

Alors, après la transformation, les éléments de la première ligne seront

$$M_{n-1}, 0, 0, 0, 0.$$

LEMME III. — *Je dis maintenant qu'on peut, par une transformation entre les lignes, réduire à zéro tous les éléments de la première colonne, sauf le premier qui reste égal à M_{n-1} .*

En effet, après les réductions déjà faites, les éléments de la première colonne (supposés au nombre de $n = 3$) sont

$$M_{n-1}, q_2 M_{n-1}, q_3 M_{n-1},$$

q_2 et q_3 étant des entiers; et en effet, d'après nos hypothèses, tous nos éléments sont divisibles par M_{n-1} .

Si alors nous retranchons de la seconde ligne la première ligne multipliée par q_2 , et de la troisième ligne la première ligne multipliée par q_3 , la première colonne devient

$$M_{n-1}, 0, 0.$$

D'ailleurs la première ligne ne change pas.

Si l'on supprimait maintenant la première ligne et la première colonne du

tableau T, il resterait un tableau T' de $m - 1$ colonnes et de $n - 1$ lignes, par rapport auquel les nombres

$$\frac{M_0}{M_{n-1}}, \quad \frac{M_1}{M_{n-1}}, \quad \dots$$

joueraient le même rôle que les nombres M_0, M_1, \dots , par rapport au tableau T.

En particulier, le plus grand commun diviseur des éléments de T' est $\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$.

Nous pouvons maintenant continuer la réduction, mais en opérant seulement sur les $m - 1$ dernières colonnes et sur les $n - 1$ dernières lignes. La première ligne ne changera plus puisque ses $m - 1$ derniers éléments sont nuls, ni la première colonne non plus puisque ses $n - 1$ derniers éléments sont nuls.

On pourra opérer sur le tableau T' comme nous avons opéré sur le tableau T. Après cette nouvelle réduction :

1° Tous les éléments de la première ligne et ceux de la première colonne sont restés nuls, sauf le premier élément de la première ligne et de la première colonne qui est resté égal à M_{n-1} .

2° Tous les éléments de la seconde ligne et ceux de la seconde colonne sont devenus nuls, sauf le second élément de la seconde ligne et de la seconde colonne qui est devenu $\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$.

3° Si l'on supprime les deux premières lignes et les deux premières colonnes, on obtient un tableau T'' de $m - 2$ colonnes et de $n - 2$ lignes, par rapport auquel les nombres

$$\frac{M_0}{M_{n-2}}, \quad \frac{M_1}{M_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}$$

jouent le même rôle que les nombres M_0, M_1, \dots, M_{n-1} par rapport au tableau T. Et ainsi de suite.

A la fin de la réduction, l'élément qui appartient à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne est nul si i n'est pas égal à j ; l'élément qui appartient à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $i^{\text{ième}}$ colonne est égal à $\frac{M_{n-i}}{M_{n-i+1}}$.

Les n nombres

$$(3) \quad M_{n-1}, \quad \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}, \quad \frac{M_{n-3}}{M_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{M_1}{M_2}, \quad \frac{M_0}{M_1}$$

peuvent s'appeler les *invariants* du tableau T.

On peut remarquer :

1° Que chacun de ces invariants divise le suivant;

2° Que quelques-uns de ces invariants peuvent être nuls, mais que, si l'un d'eux l'est, tous ceux qui le suivent le sont également.

Si le tableau T avait plus de lignes que de colonnes, la réduction se ferait de la même manière, seulement il faudrait intervertir le rôle des lignes et des colonnes.

On aurait alors $m < n$; le nombre M_0 serait le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en supprimant $n - m$ lignes; en général, M_i serait le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en supprimant $n - m + i$ lignes et i colonnes quelconques. Enfin, le plus grand commun diviseur des éléments du tableau T serait M_{m-1} .

En général, le nombre des invariants serait le plus petit des deux nombre n et m .

§ 3. Comparaison des tableaux T_q et T'_q .

Le tableau T_q nous fait connaître les relations entre les α_i^q et les α_j^{q-1} dans le polyèdre P. A chaque ligne de ce tableau correspond un α_i^q et à chaque colonne un α_j^{q-1} . A chaque ligne de ce tableau correspond également une congruence

$$(1) \quad \alpha_i^q \equiv \sum \varepsilon_{ij} \alpha_j^{q-1}$$

entre les α_i^q et les α_j^{q-1} et une homologie

$$(2) \quad \sum \varepsilon_{ij} \alpha_j^{q-1} \sim 0$$

entre les α_j^{q-1} .

Qu'arrivera-t-il maintenant si, par les opérations du paragraphe précédent, on réduit le tableau T_q ? A chaque ligne du tableau réduit correspondra une combinaison linéaire des α_i^q , à chaque colonne une combinaison linéaire des α_j^{q-1} . J'ai expliqué (c, § VIII, p. 323) d'après quelles règles ces combinaisons linéaires doivent être formées. Voici comment ces règles peuvent être résumées.

Supposons que, pour passer du tableau T_q au tableau réduit, on applique aux lignes de T_q une certaine substitution linéaire S, et aux colonnes une autre substitution linéaire σ . Soit σ' la substitution contragédiente de σ (je veux dire que, si l'on a deux séries de α_{q-1} variables x_i et y_i , et que l'on applique la substitution σ à la première série et la substitution σ' à la seconde, la forme $\sum x_i y_i$ ne devra pas être altérée).

Supposons alors que S change a_i^q en

$$c_i^q = \sum_{j=1}^{\alpha_q} \lambda_{ij} a_j^q$$

et que σ' change a_i^{q-1} en

$$d_i^{q-1} = \sum_{j=1}^{\alpha_{q-1}} \mu_{ij} a_j^{q-1}.$$

Nous ferons correspondre à la $i^{\text{ème}}$ ligne du tableau réduit la combinaison linéaire c_i^q , et à la $i^{\text{ème}}$ colonne la combinaison linéaire d_i^{q-1} .

Dans notre tableau réduit, tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne, qui sont donnés d'après le paragraphe précédent par la formule

$$\frac{M_{n-i}}{M_{n-i-1}}.$$

Je désignerai, pour abrégé, par ω_i^q cet élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne; et je conviendrai que ω_i^q doit être regardé comme nul, si i est plus grand que le plus petit des deux nombres α_q et α_{q-1} (nombre des lignes et nombre des colonnes).

A la $i^{\text{ème}}$ ligne du tableau réduit correspondra alors la congruence

$$(1 \text{ bis}) \quad c_i^q \equiv \omega_i^q d_i^{q-1}$$

et l'homologie

$$(2 \text{ bis}) \quad \omega_i^q d_i^{q-1} \sim 0.$$

Les congruences et les homologies (1 bis) et (2 bis) peuvent se déduire des congruences et homologies (1) et (2) par addition, soustraction, multiplication, *mais sans division*, et réciproquement.

Si $\alpha_{q-1} > \alpha_q$ et si $i > \alpha_q$, ω_i^q est nul, de sorte que la congruence et l'homologie (1 bis) et (2 bis) se réduisent à

$$c_i^q \equiv 0 \quad \text{et} \quad 0 \sim 0.$$

Les nombres ω_i^q sont ce que j'ai appelé dans le paragraphe précédent les *invariants* du tableau T_q . Supposons que *parmi ces invariants il y en ait* γ_q qui ne soient pas nuls; on aura, bien entendu,

$$\gamma_q \leq \alpha_q, \quad \gamma_q \leq \alpha_{q-1}.$$

Parmi les congruences (1 bis), les γ_q premières contiendront à la fois c_i^q et d_i^{q-1} puisque ω_i^q ne sera pas nul. Au contraire, les $\alpha_q - \gamma_q$ dernières s'écriront

$$c_i^q \equiv 0,$$

et ne contiendront plus les α_i^{q-1} ; il est clair que toutes ces congruences sont distinctes, et que l'on obtient ainsi toutes les congruences entre les α_i^q d'où les α_i^{q-1} sont éliminés. On a donc

$$\alpha_q - \alpha_q'' = \alpha_q - \gamma_q, \quad \alpha_q'' = \gamma_q.$$

Maintenant, parmi les homologies (2 bis), les $\alpha_q - \gamma_q$ dernières se réduisent à des identités, mais les γ_q premières sont distinctes; on a donc

$$\alpha_{q-1} - \alpha_{q-1}' = \gamma_q,$$

d'où pour le nombre de Betti

$$P_q = \alpha_q - \gamma_{q+1} - \gamma_q + 1.$$

Comparons maintenant le tableau T_q au tableau correspondant T_{p-q+1} relatif au polyèdre réciproque P' . Ce tableau, qui se déduit de T_q en permutant les lignes avec les colonnes, a $\beta_{p-q+1} = \alpha_{q-1}$ lignes et $\beta_{p-q} = \alpha_q$ colonnes. Le nombre γ_q est le même pour les deux tableaux, de sorte qu'il vient

$$\begin{aligned} \beta_{p-q+1}'' &= \gamma_q = \alpha_q'', & \beta_{p-q} - \beta_{p-q}' &= \gamma_q, \\ \beta_{p-q}' &= \beta_{p-q} - \gamma_q = \alpha_q - \alpha_q'', \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_{p-q+1}' = \alpha_{q-1} - \gamma_{q-1},$$

et pour le nombre de Betti P'_{p-q+1} relatif au polyèdre P'

$$P'_{p-q+1} = \beta_{p-q+1}' - \beta_{p-q+1}'' + 1 = \alpha_{q-1} - \gamma_{q-1} - \gamma_q + 1.$$

Nous déduisons de là

$$P'_{p-q} = P_q,$$

ce qui, si l'on se rappelle que les nombres de Betti relatifs aux deux polyèdres réciproques P et P' sont les mêmes, montre que les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

Revenons aux homologies (2 bis). Si l'on admet que l'on a le droit de diviser les homologies par un entier différent de zéro, les γ_q premières homologies nous donneront

$$d_i^{q-1} \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \gamma_q),$$

et la plus générale des homologies entre les α_i^{q-1} s'écrira

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\gamma_q} \lambda_i d_i^{q-1} \sim 0,$$

les λ_i étant des entiers quelconques. Si, au contraire, on n'admet pas que

L'on ait le droit de diviser les homologies, l'homologie la plus générale s'écrira

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\gamma_g} \lambda_i \omega_i^g d_i^{g-1} \sim 0,$$

les λ_i étant des entiers. Pour que les deux définitions des nombres de Betti (c, § I, p. 291) coïncident, il faut, et il suffit, que les deux formules (3) et (4) concordent, c'est-à-dire que tous les invariants ω_i^g qui ne sont pas nuls soient égaux à 1 (c, § IX, p. 329).

Envisageons maintenant les combinaisons linéaires des α_i^{g-1} qui seraient homologues à zéro en vertu des homologies (3), et demandons-nous quelles sont parmi ces combinaisons celles qui restent distinctes, si, abandonnant les homologies (3), on se borne aux homologies (4) sans admettre le droit de diviser les homologies.

Nous verrons tout de suite que le nombre de ces expressions qui sont ainsi distinctes est précisément le produit

$$\omega_1^g \omega_2^g \dots \omega_{\gamma_g}^g.$$

Or, en se reportant aux notations du paragraphe précédent, on voit que ce produit n'est autre chose que l'un des nombres de la suite

$$M_0, M_1, M_2, \dots,$$

et précisément le premier nombre de cette suite qui n'est pas nul (c, § IX, p. 329).

Ce qui précède montre combien il importe de distinguer deux sortes de variétés.

Celle de la première sorte que j'appellerai *variétés sans torsion*, seront celles pour lesquelles les invariants de tous les tableaux T_g sont tous égaux à 0 ou à 1; pour lesquelles, par conséquent, les deux formules (3) et (4) concordent et les deux définitions des nombres de Betti sont d'accord.

Celles de la seconde sorte, que j'appellerai *variétés à torsion*, seront celles pour lesquelles certains de ces invariants ne sont égaux ni à 0 ni à 1, et pour lesquelles, par conséquent, les deux définitions des nombres de Betti ne sont pas d'accord. Dans ce cas nous adopterons toujours, sauf avis contraire, la seconde définition (c, § I).

Cette dénomination se justifie parce que la présence d'invariants plus grand que 1 est due, comme nous le verrons plus loin, à une circonstance assimilable à une véritable torsion de la variété sur elle-même.

§ 4. Application à quelques exemples.

Désireux d'appliquer ce qui précède aux exemples signalés dans l'*Analysis situs* (p. 231 et suiv.), je dois d'abord faire une distinction entre plusieurs sortes de polyèdres.

Les polyèdres ordinaires ou de la première sorte seront ceux dont tous les α_i^q sont des polyèdres simplement connexes (homéomorphes à des hypersphères) et tels que tous les éléments de ces α_i^q soient distincts; par exemple, dans l'espace ordinaire, le tétraèdre sera un polyèdre de la première sorte parce qu'il admet quatre faces qui sont des triangles et, par conséquent, des polygones simplement connexes (homéomorphes à des cercles), et que chacun de ces triangles a ses trois côtés distincts de même que ses trois sommets.

Les polyèdres de la seconde sorte seront ceux dont tous les α_i^q seront des polyèdres simplement connexes, mais tels que tous les éléments de ces α_i^q ne soient pas distincts. Soit, par exemple, dans l'espace ordinaire un tore; par un point A de la surface de ce tore menons un méridien et un parallèle. Ces deux coupures ne diviseront pas la surface du tore en deux régions, mais elles la rendront simplement connexe. Cette surface ainsi rendue simplement connexe sera homéomorphe à un rectangle, dont deux côtés opposés correspondraient aux deux lèvres de la coupure méridienne et les deux autres côtés aux deux lèvres de la coupure parallèle. Le tore forme ainsi une espèce de polyèdre qui n'a qu'une seule face; cette face est un quadrilatère; elle est donc simplement connexe; mais les quatre côtés de ce quadrilatère ne sont pas distincts, deux se confondent avec la coupure méridienne et deux avec la coupure parallèle; de même les quatre sommets ne sont pas distincts puisqu'ils se confondent tous les quatre avec le point A. Le polyèdre ainsi défini est donc un polyèdre de la seconde sorte.

Enfin, les polyèdres de la troisième sorte seront ceux dont tous les α_i^q ne sont pas simplement connexes.

Les propriétés des polyèdres de la première sorte s'étendent pour la plupart à ceux de la seconde sorte. Observons toutefois une différence. Dans un polyèdre de la première sorte, toute α_j^{p-1} sépare l'une de l'autre deux α_i^p , et n'appartient à aucun autre α_i^p . Par conséquent, dans chaque colonne du tableau T_p il y aura un des nombres ε_{ij}^p qui sera égal à $+1$, un autre à -1 , et tous les autres à 0.

Il n'en est plus de même avec les polyèdres de la seconde sorte. Il peut arriver que deux des α_j^{p-1} d'une même α_i^p ne soient pas distinctes. Dans ce cas, après avoir franchi cette α_j^{p-1} , on se retrouvera dans cette même α_i^p où l'on était déjà avant de l'avoir passée. Ainsi pour reprendre notre tore de tout à l'heure, qui était un polyèdre à une seule face : après avoir passé la coupure méridienne, par exemple, on se retrouvera toujours dans cette même et unique face où l'on était avant le passage. Il arrive alors que cette α_j^{p-1} n'a de relation qu'avec cette α_i^p ; et de plus, elle est deux fois en relation avec cette même α_i^p , une fois en relation directe, une autre fois en relation inverse, de sorte que les deux relations se compensant, le nombre ε_{ij}^p correspondant est égal à zéro. Dans ce cas, tous les nombres ε_{ij}^p qui figurent dans la colonne correspondante du tableau T_p sont nuls.

Dans les exemples en question (p. 231 et suiv.), les variétés fermées à trois dimensions que l'on envisage peuvent être regardées comme des polyèdres de la seconde sorte. Chacun de ces polyèdres a une seule case (qui dans les premier, troisième et quatrième exemples est un cube, et dans le cinquième un octaèdre), mais les faces de cette case se confondent deux à deux.

1^{er} exemple :

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} \text{ face } ABDC = A'B'D'C', & 1^{\text{re}} \text{ arête } AB = CD = A'B' = C'D'; \\ 2^{\text{e}} \text{ » } ACC'A' = BDD'A', & 2^{\text{e}} \text{ » } AC = BD = A'C' = B'D'; \\ 3^{\text{e}} \text{ » } CDD'C' = ABB'A', & 3^{\text{e}} \text{ » } AA' = BB' = CC' = DD'; \end{array}$$

Une case unique, un sommet unique.

Les trois tableaux T_1 , T_2 , T_3 se composent uniquement de zéros. Tous leurs invariants sont donc nuls.

3^e exemple :

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} \text{ face } ABDC = B'D'C'A', & 1^{\text{re}} \text{ arête } AB = B'D' = C'C; \\ 2^{\text{e}} \text{ » } ABB'A' = C'CDD', & 2^{\text{e}} \text{ » } AC = DD' = B'A'; \\ 3^{\text{e}} \text{ » } ACC'A' = DD'B'B, & 3^{\text{e}} \text{ » } AA' = C'D' = DB; \\ & 4^{\text{e}} \text{ » } CD = BB' = A'C'; \\ 1^{\text{er}} \text{ sommet } A = B' = C' = D, & 2^{\text{e}} \text{ sommet } B = D' = A' = C. \end{array}$$

Tableau T_3 .	Tableau T_2 .	Tableau T_1 .
0 0 0	+1 -1 -1 -1	+1 -1
	+1 +1 -1 +1	+1 -1
	-1 +1 -1 -1	+1 -1
		-1 +1

Le tableau T_3 n'a qu'un invariant qui est nul; le tableau T_1 en a deux qui sont 0 et 1; le tableau T_2 en a trois qui sont 1, 2 et 2.

4^e *exemple* :

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} \text{ face } ABDC = B'D'C'A', & 1^{\text{re}} \text{ arête } AA' = CC' = BB' = DD' \\ 2^{\text{e}} \text{ » } ABB'A' = CDD'C', & 2^{\text{e}} \text{ » } AB = CD = B'D' = A'C' \\ 3^{\text{e}} \text{ » } ACC'A' = BDD'B', & 3^{\text{e}} \text{ » } AC = BD = D'C' = B'A' \end{array}$$

Une case unique, un sommet unique.

Tableau T ₂ .	Tableau T ₃ .	Tableau T ₁ .
0 0 0	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Les tableaux T₁ et T₃ n'ont qu'un invariant qui est 0; le tableau T₂ en a trois qui sont 1, 2 et 0.

5^e *exemple* :

$$\begin{array}{lll} 1^{\text{re}} \text{ face } ABC = FED, & 1^{\text{re}} \text{ arête } AB = FE, & 1^{\text{er}} \text{ sommet } A = F; \\ 2^{\text{e}} \text{ » } ACE = FDB, & 2^{\text{e}} \text{ » } AC = FD, & 2^{\text{e}} \text{ » } B = E; \\ 3^{\text{e}} \text{ » } AED = FBC, & 3^{\text{e}} \text{ » } AE = FB, & 3^{\text{e}} \text{ » } C = D; \\ 4^{\text{e}} \text{ » } ADB = FCE, & 4^{\text{e}} \text{ » } AD = FC; & \\ & 5^{\text{e}} \text{ » } BC = ED; & \\ & 6^{\text{e}} \text{ » } CE = DB. & \end{array}$$

Tableau T ₃ .	Tableau T ₂ .	Tableau T ₁ .
0 0 0 0	$\begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{vmatrix}$

Les invariants sont :

$$0 \text{ pour } T_3; \quad 2, 1, 1 \text{ et } 1 \text{ pour } T_2; \quad 0, 1 \text{ et } 1 \text{ pour } T_1.$$

Passons maintenant au sixième exemple (p. 237).

Ainsi qu'on l'a vu (§ 14, p. 248), les équivalences fondamentales s'écrivent

$$\begin{array}{l} C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1 \\ C_1 + C_3 \equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 \equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2. \end{array}$$

Pour écrire les homologies qui peuvent se déduire des homologies fondamentales par addition et multiplication, *mais sans division*, il suffit de se donner le droit d'invertir l'ordre des termes dans les deux membres de ces équivalences fondamentales; on trouve ainsi

$$0 \sim 0; \quad (\alpha - 1)C_1 + \gamma C_2 \sim 0; \quad \beta C_1 + (\delta - 1)C_2 \sim 0.$$

Le déterminant

$$(\alpha - 1)(\delta - 1) - \beta\gamma$$

est égal à

$$2 - \alpha - \delta.$$

Soit, d'autre part, μ le plus grand commun diviseur des quatre nombres

$$\alpha - 1, \quad \delta - 1, \quad \beta, \quad \gamma;$$

l'examen des homologies que nous venons d'écrire montre que les deux invariants du tableau T_2 , qui ne sont pas égaux à 0 ou à 1 sont égaux à

$$\mu \quad \text{et} \quad \frac{2 - \alpha - \delta}{\mu}.$$

(Le nombre μ peut d'ailleurs être égal à 1.)

Quant aux invariants des tableaux T_1 et T_3 , ils sont toujours tous, comme nous le verrons plus loin, égaux à 0 ou à 1.

Soit, par exemple,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1, \quad \delta = 0.$$

On a

$$\mu = 1, \quad 2 - \alpha - \delta = 3,$$

de sorte que l'un de nos invariants est égal à 3 et l'autre à 1.

Cela peut d'ailleurs se vérifier en formant le tableau T_2 . Soient

$$(x + 1, y, z), \quad (x, y + 1, z), \quad (-x + y, -x, z + 1)$$

les trois substitutions du groupe G , que j'appellerai S_1 , S_2 et S_3 , et qui correspondront aux trois contours fondamentaux C_1 , C_2 , C_3 (§ 13, p. 246).

La variété étudiée peut être regardée comme engendrée par le cube $ABCD A' B' C' D'$ (§ 10, p. 231). Seulement la face $ABCD$ devra être considérée comme décomposée en deux triangles ABD et ACD , de même que la face $A' B' C' D'$ en deux triangles $D' A' B'$ et $C' D' A'$.

Il est aisé de voir que la face $ABB' A'$ est changée en $CDD' C'$ par la substitution S_2 , la face $ACC' A'$ en $BDD' B'$ par la substitution S_1 , la face ABD en $D' A' B'$ par la substitution $S_3 S_1 S_2$, la face ACD en $C' D' A'$ par la substitution $S_3 S_2$.

Notre polyèdre a donc :

1° Une seule case ;

2° Quatre faces, à savoir :

$$\begin{aligned} 1^{\text{re}} \text{ face } & \text{ABB}'\text{A}' = \text{CDD}'\text{C}', \\ 2^{\text{o}} \text{ »} & \text{ACC}'\text{A}' = \text{BDD}'\text{B}', \\ 3^{\text{o}} \text{ »} & \text{ABD} = \text{D}'\text{A}'\text{B}', \\ 4^{\text{o}} \text{ »} & \text{ACD} = \text{C}'\text{D}'\text{A}'; \end{aligned}$$

3° Quatre arêtes, à savoir :

$$\begin{aligned} 1^{\text{re}} \text{ arête} & \text{AA}' = \text{BB}' = \text{CC}' = \text{DD}', \\ 2^{\text{o}} \text{ »} & \text{AB} = \text{CD} = \text{D}'\text{A}', \\ 3^{\text{o}} \text{ »} & \text{AC} = \text{BD} = \text{C}'\text{D}' = \text{A}'\text{B}', \\ 4^{\text{o}} \text{ »} & \text{AD} = \text{C}'\text{A}' = \text{D}'\text{B}'; \end{aligned}$$

4° Un seul sommet.

Les tableaux T_1 et T_3 sont entièrement composés de zéros.

Toici le tableau T_2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & +1 & -1 \end{vmatrix}.$$

On voit que les invariants de ce tableau sont 1, 1, 3, 0.

Passons maintenant à *l'exemple de M. Heegaard*. Soient $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ les coordonnées d'un point dans l'espace à six dimensions; soit

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \sqrt{-1} = |x| e^{\xi \sqrt{-1}}, \\ y &= y_1 + y_2 \sqrt{-1} = |y| e^{\eta \sqrt{-1}}, \\ z &= z_1 + z_2 \sqrt{-1} = |z| e^{\zeta \sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Notre variété aura pour équations

$$z^2 = xy, \quad x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1,$$

d'où

$$|z^2| = |xy|, \quad \zeta = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad |x^2| + |y^2| = 1.$$

Pour obtenir la variété tout entière, il faut que nous fassions varier :

1° $|x|$ de 0 à 1, ce qui fait varier en même temps $|y|$ de 1 à 0;

2° η de 0 à 2π ;

3° $\xi + \eta$ de 0 à 4π .

Le polyèdre ainsi obtenu a une seule case définie par les inégalités

$$0 < |x| < 1, \quad 0 < \eta < 2\pi, \quad 0 < \xi + \eta < 4\pi.$$

Il a deux faces définies par les relations suivantes :

1^{re} face :

$$\eta = 0, \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < \xi < 4\pi;$$

cette face est identique à la suivante :

$$\eta = 2\pi, \quad 0 < |x| < 1, \quad -2\pi < \xi < 2\pi$$

2^o face :

$$\xi + \eta = 0, \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < \eta < 2\pi$$

cette face est identique à la suivante :

$$\xi + \eta = 4\pi, \quad 0 < |x| < 1, \quad 0 < \eta < 2\pi$$

Il a trois arêtes définies par les relations suivantes :

1^{re} arête :

$$\xi = \eta = 0, \quad 0 < |x| < 1;$$

cette arête est identique aux trois suivantes :

$$\begin{array}{lll} \xi = 0, & \eta = 2\pi, & 0 < |x| < 1; \\ \xi = -2\pi, & \eta = 2\pi, & 0 < |x| < 1; \\ \xi = \eta = 2\pi, & & 0 < |x| < 1; \end{array}$$

2^o arête :

$$x_1 = x_2 = 0, \quad 0 < \eta < 2\pi;$$

3^o arête :

$$y_1 = y_2 = 0, \quad -2\pi < \xi < 0,$$

identique aux deux suivantes :

$$\begin{array}{ll} y_1 = y_2 = 0, & 0 < \xi < 2\pi; \\ y_1 = y_2 = 0, & 2\pi < \xi < 4\pi. \end{array}$$

Il a enfin deux sommets, à savoir :

1^{er} sommet :

$$x_1 = x_2 = 0, \quad \eta = 0,$$

identique au suivant :

$$x_1 = x_2 = 0, \quad \eta = 2\pi;$$

2^o sommet :

$$y_1 = y_2 = 0, \quad \xi = -2\pi,$$

identique aux trois suivants :

$$\begin{array}{ll} y_1 = y_2 = 0, & \xi = 0; \\ y_1 = y_2 = 0, & \xi = 2\pi; \\ y_1 = y_2 = 0, & \xi = 4\pi. \end{array}$$

Le tableau T_3 est entièrement composé de zéros; quant aux tableaux T_1 et T_2 , ils s'écrivent

$$T_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad T_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On voit que les invariants sont 0, 2 et 1 pour T_2 , 0 et 1 pour T_1 .

§ 5. Extension au cas général d'un théorème du premier complément.

Je voudrais revenir sur l'une des questions traitées dans un des mémoires antérieurs (c, § X). Je n'ai envisagé dans l'endroit cité que le cas de $p = 3$, et je voudrais faire voir comment on peut étendre les mêmes raisonnements au cas général. Voici de quoi il s'agit :

Soient deux polyèdres réciproques P et P' ; considérons d'une part les éléments a_i'' de P , et d'autre part les éléments b_i'' de P' . Je suppose que l'on ait trouvé une congruence

$$(1) \quad \Sigma \lambda_i a_i'' \equiv 0$$

entre les a_i'' ; je dis qu'on pourra faire correspondre à cette congruence une autre congruence entre les b_i''

$$(2) \quad \Sigma \mu_i b_i'' \equiv 0,$$

et cela de telle sorte que l'on ait l'homologie

$$(3) \quad \Sigma \lambda_i a_i'' \sim \Sigma \mu_i b_i''.$$

Réciproquement à toute congruence de la forme (2) on pourra faire correspondre une congruence de la forme (1), et cela de telle sorte que les premiers membres de ces deux congruences soient liés par l'homologie (3).

Tel est le théorème qu'il s'agit de démontrer. J'en ai donné une démonstration simple dans le cas de $p = 3$, et il s'agit d'étendre cette démonstration au cas général. Je ferai d'abord une première remarque.

Considérons les congruences

$$(4) \quad a_i'' \equiv \Sigma \varepsilon_{ij}'' a_j''^{-1}.$$

Nous savons qu'en les combinant linéairement, on peut en éliminer les $a_j''^{-1}$ et obtenir des congruences de la forme

$$(5) \quad \Sigma \zeta_i a_i'' \equiv 0.$$

Le nombre des congruences distinctes de la forme (5) est celui que nous avons appelé $\alpha_q - \alpha_q''$.

Supposons maintenant que nous considérons les différents éléments α_i^h du polyèdre P, où le nombre h des dimensions doit être plus grand que q , mais peut être égal à $q + 1, q + 2, \dots, p - 1$ ou p . Nous donnons une fois pour toutes à ce nombre h une valeur déterminée.

Nous répartirons alors les congruences (4) en groupes, en mettant dans le même groupe deux de ces congruences si les deux α_i^q correspondants appartiennent à un même α_i^h ; il est clair qu'il y aura autant de groupes que de α_i^h et qu'une même congruence pourra se retrouver dans plusieurs groupes, puisque un α_i^q fait partie de plusieurs α_i^h .

En combinant linéairement les congruences (4) d'un même groupe, on pourra alors éliminer les α_i^{q-1} et obtenir des congruences de la forme

$$(5 \text{ bis}) \quad \Sigma \zeta_i \alpha_i^q = 0.$$

Les congruences (5 bis) font évidemment partie du système des congruences (5), puisque ce dernier système est celui de toutes les congruences distinctes de cette forme que l'on peut obtenir par la combinaison des congruences (4). En revanche, il peut y avoir dans le système (5) des congruences qui ne font pas partie du système (5 bis); et, en effet, nous avons obtenu ce dernier système en imposant des restrictions à notre faculté de combiner les congruences (4) puisque nous ne pouvions combiner que celles d'un même groupe.

Je dis d'abord que la congruence (5 bis) entraîne l'homologie

$$(6) \quad \Sigma \zeta_i \alpha_i^q \sim 0.$$

En effet, la congruence (5 bis) est une congruence entre les éléments du polyèdre α_i^h et, comme par hypothèse ce polyèdre est simplement connexe, cette congruence doit entraîner l'homologie correspondante.

Réciproquement, si l'homologie (6) a lieu, la congruence correspondante fera partie du système (5 bis). En effet, l'homologie (6) ayant lieu entre les éléments du polyèdre α_i^h , doit entraîner la congruence correspondante, et cette congruence doit pouvoir se déduire des congruences fondamentales de la forme (4) relatives au polyèdre α_i^h , c'est-à-dire appartenant à un même groupe.

Il résulte de là que le nombre des congruences distinctes du système (5 bis) est $\alpha_q - \alpha_q''$.

Le système (5 bis) reste donc toujours le même quelle que soit la valeur attribuée au nombre h .

Nous voyons en même temps que cette considération permettrait de trouver le nombre de Betti P_q en considérant seulement le tableau T_q , pourvu que l'on sût, en outre, si deux congruences (4) appartiennent ou non à un même groupe.

Introduisons maintenant une notion qui peut être considérée comme la généralisation de la notion de pyramide. Soit a_q un domaine appartenant à un espace plan P_q à q dimensions; soit b_m un domaine appartenant à un autre espace plan P'_m à m dimensions. Je supposerai que ces deux espaces plans n'ont aucun point commun. Je pourrai alors par ces deux espaces faire passer un espace plan Π à $q + m + 1$ dimensions, et un seul.

Cela posé, joignons par des droites chacun des points du domaine a_q à chacun des points du domaine b_m . L'ensemble de ces droites engendrera un certain domaine appartenant à l'espace plan Π , ayant $q + m + 1$ dimensions que je désignerai par la notation $a_q b_m$, et que je pourrai appeler pyramide généralisée rectiligne.

Si, en effet, le domaine a_q se réduisait à un polygone plan ($q = 2$), et le domaine b_m à un point ($m = 0$), le domaine $a_q b_m$ se réduirait à une pyramide ordinaire ayant a_q pour base et b_m pour sommet.

Toute figure homéomorphe à une pyramide généralisée rectiligne pourra s'appeler pyramide généralisée.

Cela posé, envisageons un élément a_i^q du polyèdre P et un élément b_j^m du polyèdre réciproque P' ; cet élément b_j^m correspond à un élément a_j^{p-m} du polyèdre P . Je suppose que l'élément a_i^q fasse partie de l'élément a_j^{p-m} ; nous aurons donc

$$q < p - m; \quad p \geq q + m + 1.$$

Je remarque de plus que tout point de b_j^m fera partie de l'un des a_k^p dont fait partie a_j^{p-m} , et par conséquent de l'un des a_k^p dont fait partie a_i^q . Il suffit de le montrer pour les sommets de b_j^m ; or, si b_k^0 est l'un de ces sommets, il sera à l'intérieur de a_k^p , et comme b_k^0 appartient à b_j^m , en vertu de la définition même des polyèdres réciproques, a_j^{p-m} appartiendra à a_k^p .

Cela posé, nous pouvons à l'intérieur de chacun des a_k^p définir un système de lignes L , tel que par deux points quelconques intérieurs à cet a_k^p on puisse mener une ligne L , et une seule. Le système des lignes L jouit donc des mêmes

propriétés qualitatives que le système des lignes droites. Cela tient à ce que α_k^p est supposé simplement connexe.

Joignons maintenant chacun des points de b_j^m à chacun des points de α_i^q par une ligne L située dans celui des α_k^p auquel appartient à la fois α_i^q et le point considéré de b_j^m .

L'ensemble de ces lignes L engendrera une figure que j'appellerai $\alpha_i^q b_j^m$, qui sera homéomorphe à une pyramide généralisée rectiligne et qui aura $p + m + 1 \leq p$ dimensions.

Quelle sera la frontière de cette variété $\alpha_i^q b_j^m$? Supposons que l'on ait les congruences

$$\alpha_i^q \equiv \Sigma \varepsilon_{ih}^q \alpha_h^{q-1}; \quad b_j^m \equiv \Sigma \varepsilon_{jk}^m b_k^{m-1}.$$

La frontière se composera des pyramides généralisées $\alpha_h^{q-1} b_i^m$ et $\alpha_i^q b_k^{m-1}$, et l'on aura

$$(7) \quad \alpha_i^q b_j^m \equiv \Sigma \varepsilon_{ih}^q \alpha_h^{q-1} b_j^m + \Sigma \varepsilon_{jk}^m \alpha_i^q b_k^{m-1}.$$

Cela ne serait plus vrai si l'on avait $m = 0$. Dans ce cas, en effet, la variété α_i^q aurait $q = (q + m + 1) - 1$ dimensions; elle devrait donc faire partie de la frontière complète de $\alpha_i^q b_j^m$, et la congruence (7) deviendrait

$$(7 \text{ bis}) \quad \alpha_i^q b_j^0 \equiv \Sigma \varepsilon_{ih}^q \alpha_h^{q-2} b_j^0 - \alpha_i^q$$

(les termes en ε' disparaissant); de même pour $q = 0$ on aurait

$$(7 \text{ ter}) \quad \alpha_i^0 b_j^m \equiv \Sigma \varepsilon_{jk}^m \alpha_i^0 b_k^{m-1} + b_j^m.$$

Des congruences (7), (7 bis) et (7 ter) se déduisent les homologies

$$(8) \quad \Sigma \varepsilon_{ih}^q \alpha_h^{q-1} b_j^m \sim - \Sigma \varepsilon_{jk}^m \alpha_i^q b_k^{m-1}.$$

$$(8 \text{ bis}) \quad \alpha_i^q \sim \Sigma \varepsilon_{ih}^q \alpha_h^{q-1} b_j^0,$$

$$(8 \text{ ter}) \quad b_j^m \sim - \Sigma \varepsilon_{jk}^m \alpha_i^0 b_k^{m-1}.$$

La congruence (8 bis) suppose que α_i^q fasse partie de α_j^p ; c'est celle que nous avons envisagée ailleurs [c, § X, p. 330, éq. (2)].

Supposons maintenant que nous ayons trouvé une congruence de la forme

$$(9) \quad \Sigma \lambda_{ij} \alpha_i^q b_j^m \equiv 0.$$

Je dis que nous pourrons trouver une congruence de la même forme, mais où le nombre q a augmenté d'une unité et le nombre m diminué d'une unité, et cela de telle sorte que les premiers membres des deux congruences soient homologues.

En effet, nous avons identiquement en vertu de (7)

$$\Sigma \lambda_{ij} a_i^q b_j^m \equiv \Sigma \lambda_{ij} \varepsilon_{ih}^q a_h^{q-1} b_j^m + \Sigma \lambda_{ij} \varepsilon_{jk}^m a_i^q b_k^{m-1}.$$

On doit donc avoir (en annulant dans le second membre le coefficient de $a_h^{q-1} b_j^m$)

$$\Sigma_i \lambda_{ij} \varepsilon_{ih}^q = 0.$$

On en déduit la congruence

$$(10) \quad \Sigma_i \lambda_{ij} a_i^q \equiv \Sigma_i \lambda_{ij} \varepsilon_{ih}^q a_h^{q-1} \equiv 0.$$

Tous les éléments a_i^q qui figurent dans le premier membre de (10) appartiennent à a_j^{p-m} ; or a_j^{p-m} par hypothèse est simplement connexe; toute congruence entre ses éléments entraîne donc l'homologie correspondante de sorte que l'on a

$$\Sigma_i \lambda_{ij} a_i^q \sim 0,$$

d'où

$$\Sigma_i \lambda_{ij} a_i^q \equiv \Sigma_\rho \mu_{\rho j} a_\rho^{q+1},$$

les μ étant des coefficients entiers et les a_ρ^{q+1} étant des éléments appartenant à a_j^{p-m} .

Or

$$\Sigma_\rho \mu_{\rho j} a_\rho^{q+1} \equiv \Sigma_{\rho i} \mu_{\rho j} \varepsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q.$$

On a donc

$$\lambda_i = \Sigma_\rho \mu_{\rho j} \varepsilon_{\rho i}^{q+1}.$$

La congruence (9) peut alors s'écrire

$$\Sigma \mu_{\rho i} \varepsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q b_j^m \equiv 0$$

(la sommation s'étend aux trois indices ρ, i, j).

Or nous pouvons former l'homologie suivante qui n'est autre que l'une des homologies (8) :

$$(11) \quad \Sigma \varepsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q b_j^m \sim - \Sigma \varepsilon_{jk}^m a_\rho^{q+1} b_k^{m-1}.$$

On a alors

$$\Sigma \lambda_{ij} a_i^q b_j^m \sim - \Sigma \mu_{\rho j} \varepsilon_{\rho j}^m a_\rho^{q+1} b_k^{m-1},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Le cas de $m = 0$ est, bien entendu, laissé de côté et doit être traité à part. Dans ce cas, l'homologie (11) doit être remplacée par la suivante qui est l'un des homologies (8 bis) :

$$(11 \text{ bis}) \quad \Sigma \varepsilon_{\rho i}^{q+1} a_i^q b_j^0 \sim a_\rho^{q+1},$$

d'où

$$\Sigma \lambda_{ij} a_i^q b_j^0 \sim \Sigma \mu_{\rho j} a_{\rho}^{q+1}.$$

Donc à la congruence

$$(9 \text{ bis}) \quad \Sigma \lambda_{ij} a_i^q b_j^0 \equiv 0$$

correspondra la congruence

$$\Sigma \mu_{\rho j} a_{\rho}^{q+1} \equiv 0$$

qui est de la forme (1), et les premiers membres de ces deux congruences seront homologues.

Soit maintenant

$$(2) \quad \Sigma \lambda_j b_j^q \equiv 0$$

une congruence de la forme (2); on aura par une homologie analogue à (8 ter)

$$b_j^q \sim - \Sigma \varepsilon_{jk}^q a_i^0 b_k^{q-1},$$

si b_j^{q-1} est l'un des éléments de P' auquel appartient b_i^q .

Nous avons donc l'homologie

$$\Sigma \lambda_j b_j^q \sim - \Sigma \lambda_j \varepsilon_{jk}^q a_i^0 b_k^{q-1},$$

de sorte qu'à notre congruence (2) correspondra une congruence

$$(12) \quad - \Sigma \lambda_j \varepsilon_{jk}^q a_i^0 b_k^{q-1} \equiv 0$$

dont le premier membre est homologue à celui de (2).

Si donc nous avons une congruence de la forme (2), nous en déduirons la congruence (12), qui est une congruence de la forme (9), où les nombres que nous appelions plus haut q et m ont respectivement pour valeurs 0 et $q-1$. Nous en déduirons ensuite une autre congruence également de la forme (9), mais où ces deux nombres auront pour valeurs 1 et $q-2$, et ainsi de suite; on finira par arriver à une congruence de la forme (9 bis), c'est-à-dire à une congruence où ces deux nombres auront pour valeurs $q-1$ et 0; et nous en déduirons alors finalement une congruence de la forme (1).

Les premiers membres de toutes ces congruences seront homologues entre eux.

Le théorème énoncé au début de ce paragraphe se trouve ainsi démontré.

Pour en tirer toutes les conséquences qu'il comporte, nous devons remarquer ceci : nous devons distinguer plusieurs sortes d'homologies. Soit ν_q une variété quelconque à q dimensions faisant partie de notre variété ν , et ν_{q-1} sa frontière complète, ce qui s'exprime par la congruence

$$\nu_q \equiv \nu_{q-1}.$$

Nous en déduisons l'homologie

$$\varrho_{q-1} \sim 0.$$

Les homologies ainsi obtenues sont les homologies fondamentales.

En combinant les homologies fondamentales par addition, soustraction et multiplication, on en obtient d'autres qui sont les *homologies sans division*. Enfin, en les combinant par addition, multiplication et division, on en obtient encore d'autres qui sont les *homologies par division*.

Eh bien, *toutes les homologies que nous avons rencontrées dans ce paragraphe sont des homologies sans division*.

Cela posé, revenons à nos tableaux T_q et T'_q et à leurs invariants, et en particulier à ceux de ces invariants qui ne sont égaux ni à 0, ni à 1, et que nous appellerons *coefficients de torsion*.

Supposons que nous ayons l'homologie suivante :

$$(13) \quad \Sigma k \lambda_i a_i^q \sim 0,$$

où les λ_i sont des entiers premiers entre eux; que (13) soit une homologie sans division, mais que l'homologie

$$(14) \quad \Sigma \lambda_i a_i^q \sim 0$$

ne puisse être obtenue que par division. D'après ce que nous avons vu dans l'un des paragraphes précédents, cela voudra dire que k est l'un des coefficients de torsion du tableau T_q .

Nous aurons la congruence

$$(14 \text{ bis}) \quad \Sigma \lambda_i a_i^q \equiv 0.$$

De (14 bis) nous pourrons, par le procédé de ce paragraphe, déduire une congruence entre les b_i^q que j'écrirai

$$(14 \text{ ter}) \quad \Sigma \mu_i b_i^q \equiv 0.$$

On aurait d'ailleurs, d'après le théorème que nous venons d'établir,

$$\Sigma \lambda_i a_i^q \sim \Sigma \mu_i b_i^q.$$

C'est là une homologie sans division, et l'on en déduirait immédiatement, également sans division,

$$\Sigma k \lambda_i a_i^q \sim \Sigma k \mu_i b_i^q.$$

De là on déduit que l'on a, sans division,

$$\Sigma k \mu_i b_i^q \sim 0,$$

et que l'on n'a pas, sans division,

$$\Sigma \mu_i b_i^q \sim 0,$$

sans quoi l'on aurait, sans division,

$$\Sigma \lambda_i a_i^q \sim 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela veut dire que k est un coefficient de torsion du tableau T'_q .

Ainsi les coefficients de torsion des deux tableaux T_q et T'_q sont égaux (la démonstration est aisée à compléter), et, si l'on observe que les deux tableaux T'_q et T_{p-q} ont mêmes invariants, on conclura que *les tableaux également distants des extrêmes ont mêmes coefficients de torsion* (1).

On pourrait arriver au même résultat par une autre voie.

Nous avons vu dans un des Mémoires antérieurs (§ 16) définir l'opération que nous avons appelée l'annexion; je suppose que deux éléments d'un polyèdre, par exemple a'_i et a'_j , soient séparés l'un de l'autre par un élément a_k^{q-1} , que ce soit le seul élément à $q-1$ dimensions commun à a'_i et à a'_j , et enfin que a_k^{q-1} n'appartienne à aucun élément à q dimensions en dehors de a'_i et de a'_j ; on aura donc $\varepsilon'_{ik} = 1$, $\varepsilon'_{jk} = -1$; tous les autres ε'_{hk} seront nuls quel que soit l'indice h , de même que tous les produits $\varepsilon'_{ih} \varepsilon'_{jh}$.

Dans ces conditions, on peut annexer l'un à l'autre les deux éléments a'_i et a'_j en supprimant l'élément a_k^{q-1} . Quel est l'effet de cette opération sur nos tableaux T_q ? Le tableau T_q perd une ligne et une colonne; le tableau T_{q-1} perd une ligne. L'un des invariants égaux à 1 de T_q disparaît; quant au tableau T_{q-1} , il perd un invariant s'il n'a pas plus de lignes que de colonnes; dans ce cas, l'invariant qu'il perd est égal à zéro. Tous les autres invariants des deux tableaux ne changent pas; ces deux tableaux conservent donc leurs coefficients de torsion.

Or il est aisé de former un polyèdre dérivé à la fois de P et de P' ; on pourrait ensuite remonter de ce polyèdre soit à P , soit à P' , par des annexions régulières. Comme ces annexions n'altèrent pas les coefficients de torsion, les tableaux T_q et T'_q doivent avoir mêmes coefficients de torsion.

(1) Ce sont T'_q et T_{p-q+1} qui ont les mêmes invariants (2 c § 3) : voir dans les Traités classiques de topologie l'énoncé correct du Théorème de dualité de Poincaré.

§ 6. Torsion intérieure des variétés.

Considérons l'un de nos tableaux T_q . Nous dirons qu'une suite d'éléments, tous distincts, de ce tableau, rangés dans un certain ordre forme une *chaîne* si chaque élément de rang impair appartient à la même ligne que l'élément suivant et à la même colonne que l'élément précédent. La chaîne sera *fermée* si le dernier élément est identique au premier. Il est clair qu'une chaîne fermée contiendra toujours un nombre impair d'éléments et un nombre pair d'élément, *distincts*. Par exemple, les éléments

$$(1) \quad \varepsilon'_{11}, \quad \varepsilon'_{12}, \quad \varepsilon'_{22}, \quad \varepsilon'_{23}, \quad \varepsilon'_{33}, \quad \varepsilon'_{31}, \quad \varepsilon'_{11}$$

formeront une chaîne fermée.

Comme tous les éléments du tableau T_q sont égaux à 0, +1 ou -1, le produit des éléments distincts d'une chaîne fermée sera toujours 0, +1 ou -1.

Supposons que les éléments de la chaîne (1) aient les valeurs suivantes :

$$\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{23} = \varepsilon'_{31} = 1, \quad \varepsilon'_{11} = \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{33} = -1;$$

le produit des éléments de la chaîne sera -1; considérons alors les trois variétés a'_1, a'_2, a'_3 , et les trois variétés $a'^{-1}_1, a'^{-1}_2, a'^{-1}_3$; en supprimant les variétés a'^{-1}_1, a'^{-1}_2 et a'^{-1}_3 , on annexe les unes aux autres les trois variétés a'_1, a'_2 et a'_3 , et la variété ainsi obtenue

$$a'_1 + a'_2 + a'_3$$

est une variété bilatère.

Si, au contraire, nous avons

$$\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{23} = \varepsilon'_{31} = 1, \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_{33} = -1, \quad \varepsilon'_{11} = 1,$$

on pourra encore supprimer a'^{-1}_1, a'^{-1}_2 et a'^{-1}_3 et obtenir par annexion la variété $a'_1 + a'_2 + a'_3$; mais *cette variété sera unilatère.*

Plus généralement, si tous les éléments de la chaîne (1) sont égaux à +1 et à -1, nous supprimerons d'abord a'^{-1}_2 et a'^{-1}_3 ; nous obtiendrons ainsi par annexion la variété

$$(2) \quad a'_1 - \varepsilon'_{12} \varepsilon'_{22} a'_2 + \varepsilon'_{12} \varepsilon'_{22} \varepsilon'_{13} \varepsilon'_{23} a'_3.$$

Supprimant ensuite a'^{-1}_1 , nous voyons que la variété (2) est désormais formée d'une chaîne fermée de a'_1 au sens du paragraphe 8 (p. 213) de l'*Analysis situs*, et que cette chaîne est bilatère ou unilatère selon que le produit des éléments distincts de la chaîne (1) est égal à -1 ou à +1.

Nous dirons dans le premier cas que la chaîne (1) est bilatère, dans le second cas qu'elle est unilatère.

Nous sommes donc conduits à distinguer trois catégories parmi les chaînes fermées formées à l'aide d'éléments des tableaux T_q :

1° Les chaînes *nulles*, c'est-à-dire celles dont le produit des éléments est nul.

2° Les chaînes *bilatères*.

Il est aisé de voir que ce sont celles dont le produit des éléments est $+1$ si le nombre des éléments est multiple de 4, ou celles où ce produit est -1 si le nombre des éléments est multiple de 4 plus 2.

3° Les chaînes *unilatères*.

Ce sont celles où ce produit est -1 si le nombre des éléments est multiple de 4, ou $+1$ si ce nombre est multiple de 4 plus 2.

Cela posé, nous dirons que le tableau T_q (ou plus généralement tout tableau ou tout déterminant dont tous les éléments sont 0, $+1$ ou -1) est *bilatère* s'il ne contient que des chaînes nulles ou bilatères.

Il résulte de cette définition :

Qu'un tableau bilatère reste bilatère si l'on change tous les signes d'une colonne, ou tous les signes d'une ligne; ou encore si l'on permute deux colonnes ou deux lignes.

THÉOREME. — *Un déterminant bilatère ne peut être égal qu'à 0, $+1$ ou -1 .*

En effet, on peut toujours, en changeant au besoin tous les signes de certaines colonnes, s'arranger de façon que tous les éléments de la première ligne soient 0 ou $+1$.

Supposons, par exemple, que les deux premiers éléments de la première ligne soient égaux à $+1$, et que je retranche la première colonne de la seconde, la valeur du déterminant ne sera pas changée; je dis que le déterminant restera bilatère.

Considérons, en effet, dans le déterminant primitif une chaîne dont le premier et le dernier élément appartiennent à la deuxième colonne et tous les autres éléments à d'autres colonnes. Soient a et c ce premier et ce dernier élément; soit ξ le produit de tous les autres éléments de la chaîne; soient b et d les éléments de la première colonne qui sont respectivement dans la même ligne que a et c .

Le produit des éléments de notre chaîne que j'appellerai la chaîne (1) sera $ac\xi$, et nous aurons

$$\begin{aligned} ac\xi &= 0 \text{ ou } 1 && \text{si le nombre des éléments} \equiv 0 \pmod{4}, \\ ac\xi &= 0 \text{ ou } -1 && \text{si le nombre des éléments} \equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Le produit des éléments de la chaîne que j'appellerai (2) et qui est formée avec les éléments correspondants du déterminant nouveau sera

$$(a-b)(c-d)\xi,$$

et, en effet, les éléments de notre chaîne ne changent pas, excepté les éléments a et c qui deviennent $a-b$ et $c-d$.

La chaîne formée dans le déterminant primitif par les deux éléments de la première ligne et par les éléments a et b doit être bilatère ou nulle, de sorte qu'on doit avoir

$$a-b=0 \quad \text{ou} \quad a=0 \quad \text{ou} \quad b=0.$$

On doit avoir de même

$$c-d=0 \quad \text{ou} \quad c=0 \quad \text{ou} \quad d=0.$$

Si $(a-b)$ ou $(c-d)$ est nul, le théorème est démontré puisque le produit $(a-b)(c-d)\xi = 0$.

Si $b=d=0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = ac\xi,$$

et le théorème est démontré puisque les deux produits des chaînes (1) et (2) sont les mêmes, que le nombre des éléments est le même et que (1) est bilatère ou nulle.

Si $a=c=0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = b d \xi.$$

La chaîne (3) qui appartient au déterminant primitif, et qui a mêmes éléments que la chaîne (1), sauf que a et c sont remplacés par b et d , cette chaîne (3), dis-je, est bilatère ou nulle; elle a même nombre d'éléments que (2) et son produit est $bd\xi$, égal dans ce cas au produit de (2). Donc, dans ce cas encore, la chaîne (2) est bilatère ou nulle.

Si $a=d=0$, on a

$$(a-b)(c-d)\xi = -bc\xi.$$

Il faut cette fois considérer dans le déterminant primitif une chaîne (4) dont les éléments seront les deux éléments de la première ligne, les éléments b et c

et les éléments de la chaîne (1), sauf a et c . Cette chaîne (4) doit être bilatère ou nulle.

Elle contient deux éléments de plus que la chaîne (2).

Son produit est égal à $bc\xi$ et, par conséquent, égal et de signe contraire au produit de (2).

Donc (2) est bilatère ou nulle.

Si, enfin, $b = c = 0$, on a

$$(a - b)(c - d)\xi = -a d\xi,$$

et l'on démontrerait, tout à fait comme dans le cas précédent, que la chaîne (2) est bilatère ou nulle.

Nous venons de traiter le cas des chaînes dont deux éléments appartiennent à la seconde colonne. Le résultat est le même quel que soit le nombre des éléments appartenant à la seconde colonne, nombre qui d'ailleurs doit être toujours pair.

Si ce nombre est nul, le théorème est évident, car la chaîne du déterminant nouveau ne diffère pas de celle du déterminant primitif.

Supposons que ce nombre soit 4, pour fixer les idées. Soient a, c, e, g quatre éléments de la seconde colonne, et imaginons que l'on rencontre successivement l'élément a , divers éléments ξ appartenant à d'autres colonnes, les éléments c et e , divers éléments η appartenant à d'autres colonnes, et enfin g . Notre chaîne sera fermée.

$a\xi c e \eta g e$ peut se décomposer en deux chaînes fermées $a\xi c a$, $e \eta g e$, et, pour qu'elle soit bilatère, il suffit que les deux composantes le soient. On est donc ramené au cas des chaînes n'ayant que deux éléments dans la seconde colonne.

J'ajouterai que tous les éléments du déterminant nouveau sont 0, +1 ou -1. En effet, comme on a

$$a - b = 0 \quad \text{ou} \quad a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0,$$

on aura

$$a - b = 0, \quad a \quad \text{ou} \quad -b,$$

d'où

$$a - b = 0, \quad 1 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Cela posé, retranchons de cette façon la première colonne de toutes les colonnes dont le premier élément est +1. Le déterminant conservera sa valeur, il restera bilatère, mais tous les éléments de la première ligne seront nuls, sauf le premier qui sera +1.

Ce raisonnement est applicable dans tous les cas, sauf si tous les éléments de la première ligne sont nuls; mais alors le déterminant est nul et le théorème est évident.

Si maintenant on supprime la première ligne et la première colonne, on obtiendra un déterminant nouveau qui sera égal au premier et, comme lui, bilatère. Sur ce déterminant nouveau, qui a une ligne et une colonne de moins que le premier, on opérera de la même façon, et on finira par arriver à un déterminant qui n'aura plus qu'un seul élément, lequel devra être 0, + 1 ou - 1.

Notre déterminant est donc égal à 0, + 1 ou - 1.

1^{er} COROLLAIRE. — *Si un tableau T_q est bilatère, ses invariants sont tous 0 ou 1.*

2^o COROLLAIRE. — *Si un polyèdre a tous ses tableaux T_q bilatères, c'est-à-dire si l'on ne peut pas composer avec ses éléments α_i^q une variété unilatère, ce polyèdre n'a pas de coefficients de torsion.*

On voit que l'existence des coefficients de torsion (qui nécessite la distinction entre les deux définitions des nombres de Betti, ou entre les homologies par division ou sans division) est due à ce fait que les éléments du polyèdre peuvent engendrer des variétés unilatères, c'est-à-dire que le polyèdre est pour ainsi dire tordu sur lui-même.

C'est ce qui justifie l'expression de coefficients de torsion, ou celle de variétés avec ou sans torsion.

Si la variété V formée par l'ensemble des éléments α_i^p du polyèdre P n'est pas elle-même unilatère, les deux tableaux T_1 et T_p sont bilatères.

En effet, chaque ligne pour l'un, chaque colonne pour l'autre a tous ses éléments nuls, sauf deux qui sont égaux à + 1 et - 1. Si donc une chaîne n'est pas nulle, ses éléments sont deux à deux égaux et de signe contraire; elle est donc bilatère.

Il résulte de là que les tableaux extrêmes T_1 et T_p ont tous leurs invariants égaux à 0 ou à 1. C'est ce qui explique pourquoi l'on ne rencontre pas les coefficients de torsion avec les polyèdres de l'espace ordinaire; ces polyèdres ne comportent, en effet, que deux tableaux T_1 et T_2 .

Cela ne serait plus vrai si la variété V était unilatère. Ainsi la variété considérée au septième exemple (§ 15, p. 260) peut être subdivisée en polyèdre, et,

suivant la manière dont la subdivision se fait, on trouve pour le tableau T_2

$$| 2 |, \quad \begin{vmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

Pour ne pas trop allonger ce travail, je me bornerai à énoncer le théorème suivant dont la démonstration demanderait quelques développements :

Tout polyèdre qui a tous ses nombres de Betti égaux à 1 et tous ses tableaux T_q bilatères est simplement connexe, c'est-à-dire homéomorphe à l'hypersphère.



SUR L'ANALYSIS SITUS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 133, p. 707-709 (4 novembre 1901).

Dans mon *Mémoire sur l'Analysis situs*, qui a été inséré dans le Cahier I (2^e série) du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai démontré qu'à chaque variété fermée d'un nombre quelconque de dimensions correspond un groupe fondamental qui joue un rôle important dans l'étude des propriétés de cette variété envisagée au point de vue de l'*Analysis situs*.

Parmi les variétés fermées à quatre dimensions, les plus intéressantes au point de vue des applications analytiques sont celles qui sont formées par les points réels et imaginaires d'une surface algébrique. Parmi ces surfaces je me bornerai à celles qui ont pour équation

$$(1) \quad z^2 = F(x, y).$$

J'ai été conduit à envisager spécialement ces surfaces, parce que je voulais étudier les variations de diverses intégrales doubles en vue d'applications au développement de la fonction perturbatrice.

Je me suis donc proposé de déterminer le groupe fondamental de ces surfaces.

Je supposerai que la courbe algébrique

$$(2) \quad F(x, y) = 0$$

ne présente que des points ordinaires ou des points doubles ordinaires, mais ne possède ni point de rebroussement, ni tangente d'inflexion parallèle à l'un des axes, ni tangente en l'un des points doubles parallèle à l'un des axes, ni points triples ou multiples d'ordre supérieur, ni singularités d'ordre plus élevé.

Si l'on suppose d'abord que y , au lieu de pouvoir prendre toutes les valeurs complexes, est assujéti à rester sur une courbe fermée donnée, nous obten-

drons une variété qui aura trois et non plus quatre dimensions, et sur laquelle je retiendrai un instant l'attention; dans certains cas elle est identique, au point de vue de l'*Analysis situs*, à l'une de celles que j'ai définies dans le Mémoire cité du *Journal de l'École Polytechnique*, et que j'appelais le *sixième exemple*. Dans d'autres cas, elle peut être regardée comme une généralisation simple de ce sixième exemple.

Venons maintenant à la variété à quatre dimensions définie par l'équation (1). Plusieurs cas sont à distinguer : ou bien la courbe (2) ne présente pas de point double, ni, par conséquent, la surface (1) de point conique.

Alors le groupe cherché se réduit à une substitution unique, la substitution identique. On doit rapprocher ce résultat de celui qu'à obtenu M. Picard et d'après lequel tous les cycles à une dimension tracés sur la surface algébrique la plus générale de son degré peuvent être réduits à un point.

Si la courbe (2) a un point double, une distinction est encore nécessaire; on peut faire, en effet, deux conventions opposées au sujet du point conique de la variété (1). On peut le regarder comme un point ordinaire de cette variété, ou bien convenir qu'on n'a pas le droit de franchir ce point singulier.

Avec la première convention, le groupe fondamental se réduit encore à une seule substitution. Cela sera encore vrai, avec la seconde convention, si le polynome F n'est pas décomposable en plusieurs facteurs.

Examinons donc le cas où F est décomposable, et observons d'abord que nous devons supposer F de degré pair, afin d'éviter des difficultés pour les points à l'infini; il est toujours aisé, d'ailleurs, par une transformation simple, de ramener le degré de F à être pair.

Si F se décompose en deux facteurs de degré pair, le groupe contiendra deux substitutions; si F se décompose en deux facteurs de degré impair, il n'en contiendra qu'une.

Si F se décompose en trois facteurs de degré pair, il en contiendra quatre; si F se décompose en trois facteurs, dont deux de degré pair, il en contiendra deux.

Plus généralement, si F se décompose en n facteurs, le groupe contiendra 2^{n-1} substitutions si tous les facteurs sont de degré pair, et 2^{n-2} dans le cas contraire.

Dans tous les cas, le nombre des substitutions du groupe fondamental est fini.



SUR

CERTAINES SURFACES ALGÈBRIQUES;

TROISIÈME COMPLÈMENT

A L'ANALYSIS SITUS

Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 30, p. 49-70 (1902).

Proposons-nous d'étudier, au point de vue de l'*Analysis situs*, la surface

$$(1) \quad z = \sqrt{F(x, y)},$$

où $F(x, y)$ est un polynôme. Nous supposons que la courbe

$$F(x, y) = 0$$

ne présente que des points ordinaires où $\frac{dF}{dx}$ n'est pas nul, ou bien où $\frac{dF}{dx} = 0$, mais sans que $\frac{d^2F}{dx^2}$ ni $\frac{dF}{dy}$ s'annulent, ou des points doubles ordinaires où

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = 0,$$

mais sans que $\frac{d^2F}{dx^2}$ ni $\frac{d^2F}{dx^2} \frac{d^2F}{dy^2} - \left(\frac{d^2F}{dx dy}\right)^2$ s'annulent.

Considérons d'abord y comme une constante. Alors l'équation (1) représentera une courbe algébrique et les coordonnées x et z d'un point de cette courbe pourront s'exprimer, comme on le sait, comme des fonctions fuchsienues d'une même variable auxiliaire u . Considérons le groupe fuchsien correspondant et le polygone fuchsien qui l'engendre. En général, le polygone fuchsien qui correspond à une courbe de genre p est un polygone de $4p$ côtés, et l'on

peut supposer, soit que les côtés de rang $4q + 1$ et $4q + 3$ comme les côtés de rang $4q + 2$ et $4q + 4$ sont conjugués (ce qui correspond aux périodes dites *normales* des fonctions abéliennes), soit que les côtés opposés sont conjugués.

C'est cette dernière hypothèse que nous adopterons.

Je rappelle d'ailleurs que la somme des angles du polygone doit être égale à 2π . Mais, dans le cas particulier de la courbe (1), on est dans le cas dit *hyperelliptique*, c'est-à-dire que les fonctions abéliennes correspondantes se réduisent à des fonctions hyperelliptiques.

Dans ce cas, on sait que notre polygone fuchsien admet un centre de symétrie et se décompose en deux polygones de $2p + 1$ côtés symétriques l'un de l'autre par rapport à ce centre.

Avant d'aller plus loin, je précise ce que j'entends par ce mot *symétrie*. Nous nous plaçons en ce moment au point de vue de la géométrie non-euclidienne; je veux dire que nous considérons comme des droites non-euclidiennes les cercles qui coupent orthogonalement le cercle fondamental; nous disons que deux figures sont symétriques par rapport à une droite non-euclidienne quand on peut passer de l'une à l'autre par une inversion (transformation par rayons vecteurs réciproques) qui n'altère pas cette droite non-euclidienne; nous disons que deux figures sont égales quand elles sont symétriques d'une même troisième par rapport à deux droites non-euclidiennes, ou encore quand elles sont égales à une même troisième; nous disons enfin que deux figures sont symétriques par rapport à un centre quand elles sont symétriques d'une même troisième par rapport à deux droites non-euclidiennes rectangulaires passant par ce centre.

Cela posé, notre polygone R de $4p$ côtés se décompose en deux polygones R' et R'' de $2p + 1$ côtés symétriques l'un de l'autre par rapport à un centre.

Nous pouvons supposer que le polynôme $F(x, y)$ n'est divisible par aucun carré. Dans ces conditions, l'équation en x

$$F(x, y) = 0$$

n'aura pas de racine double, sauf pour certaines valeurs singulières de y . Elle aura $2p + 2$ racines simples que j'appellerai

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2p+1},$$

Alors x_0 correspondra aux $2p + 1$ sommets du polygone R', tandis que $x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}$ correspondront aux milieux (toujours au point de vue non-euclidien) des $2p + 1$ côtés.

Dans le plan des x , nous pourrons tracer $2p + 1$ coupures

$$C_1, C_2, \dots, C_{2p+1}$$

allant du point x_0 aux points $x_1, x_2, \dots, x_{2p+1}$, et de telle façon qu'aux deux lèvres de la coupure C_i correspondront sur le polygone R' les deux moitiés du $i^{\text{ème}}$ côté.

Dans le cas de $p = 1$ (c'est-à-dire si l'équation $F = 0$ est du quatrième degré en x), le polygone R se réduit à un parallélogramme, les polygones R' et R'' à deux triangles rectilignes et les fonctions fuchsiennes à des fonctions elliptiques.

Qu'arrivera-t-il maintenant si, faisant varier y d'une manière continue, cette variable revient à sa valeur initiale ?

Notre groupe fuchsien variera d'une manière continue, de même que $x_0, x_1, \dots, x_{2p+1}$ et que le polygone fuchsien R . Quand y aura fait un tour complet, le groupe fuchsien sera redevenu le même; les points x_i se seront en général permutés entre eux et le polygone R sera devenu un autre polygone R_1 , équivalent à P , je veux dire susceptible d'engendrer le même groupe fuchsien.

Prenons, par exemple, le cas de $p = 1$; le polygone R est un parallélogramme dont les côtés ω et ω' représenteront en grandeur et direction les deux périodes d'une fonction elliptique. Quand y aura décrit un tour complet, notre parallélogramme sera devenu R_1 dont les côtés représenteront encore en grandeur et direction deux périodes de la même fonction elliptique; seulement ces périodes ne seront plus, en général, ω et ω' , mais deux périodes équivalentes

$$\alpha\omega + \beta\omega', \quad \gamma\omega + \delta\omega',$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Ceci nous amène à un premier rapprochement avec l'*Analysis situs*. Supposons que $p = 1$; supposons que l'on convienne de donner à y une quelconque des valeurs situées sur un certain contour fermé K , à x une valeur complexe quelconque, et que z soit défini par l'équation (1). L'ensemble de ces points x, y, z constituera une certaine variété fermée V à trois dimensions. Quelles sont les propriétés de cette variété au point de vue de l'*Analysis situs* ?

A chaque point de cette variété je ferai correspondre trois variables réelles ξ, η, ζ définies comme il suit : ζ sera fonction de y seulement et augmentera de 1 quand y aura décrit son contour complet. Quant à ξ et à η , ce seront des fonctions linéaires des parties réelle et imaginaire de l'intégrale elliptique u définie par l'équation (1). Ces fonctions linéaires seront telles que ξ et η se changent

en $\xi + 1, \eta$ quand cette intégrale elliptique augmente de ω et en $\xi, \eta + 1$ quand elle augmente de ω' (de telle façon que $u = \xi\omega + \eta\omega'$). Dans ces conditions, on retombera sur un même point de la variété V quand ξ, η, ζ se changeront en

$$\xi + 1, \eta, \zeta$$

ou en

$$\xi, \eta + 1, \zeta$$

ou en

$$\delta\xi - \gamma\eta, \beta\xi + \alpha\eta, \zeta + 1,$$

car si ξ_1 et η_1 sont ce que deviennent ξ et η quand on change ζ en $\zeta + 1$, on aura

$$u = \xi\omega + \eta\omega'$$

et, d'autre part,

$$u = \xi_1(\alpha\omega + \beta\omega') + \eta_1(\gamma\omega + \delta\omega'),$$

ou plus généralement quand ξ, η, ζ subiront une transformation quelconque du groupe G engendré par ces trois transformations.

On reconnaît là le groupe considéré dans l'*Analysis situs*, page 237, 6^e exemple. La variété V est donc homéomorphe à la variété envisagée dans ce 6^e exemple et elle admet G comme *groupe fondamental* (cf. *Analysis situs*, p. 239).

Définissons toujours la variété V de la même manière, mais ne supposons plus $p = 1$. Alors R est un polygone fuchsien curviligne. Nous introduirons encore trois variables ξ, η, ζ ; cette dernière ζ sera définie comme plus haut. Quant à ξ et η , ce seront des fonctions bi-uniformes de ζ et des parties réelle et imaginaire de la variable u ; de telle façon qu'à toute valeur complexe de u corresponde un système de valeurs de ξ et de η , et un seul, et inversement. A chaque valeur de ζ correspondra un groupe fuchsien et le polygone fuchsien R relatif à ce groupe. Ce groupe fuchsien sera engendré par $2p$ substitutions

$$S_1, S_2, \dots, S_{2p}.$$

La substitution S_k changera ξ et η en

$$\varphi_k(\xi, \eta, \zeta), \psi_k(\xi, \eta, \zeta),$$

de sorte que nous retomberons sur un même point de la variété V quand nous changerons ξ, η, ζ en

$$\varphi_k(\xi, \eta, \zeta), \psi_k(\xi, \eta, \zeta), \zeta.$$

Nous pouvons d'ailleurs définir les fonctions ξ et η de telle façon que φ_k et ψ_k ne dépendent pas de ζ .

En effet, envisageons la figure formée par le polygone fuchsien $R = R' + R''$ et par ses transformés par les diverses substitutions du groupe fuchsien. Ce polygone et ses transformés remplissent la surface du cercle fondamental. La figure ainsi formée se déformera d'une manière continue quand on fera varier ζ d'une manière continue, mais elle restera homéomorphe à elle-même. On pourra donc faire correspondre à tout point M_0 de cette figure dans sa position initiale un point M , et un seul, de la même figure dans une quelconque de ses positions consécutives, et cela de telle sorte :

1° Que le point M se déplace d'une manière continue quand ζ variera d'une manière continue;

2° Que, si M_0 est un sommet de R , M reste un sommet de R ; que, si M_0 est sur un côté de R , M reste sur un côté de R ;

3° Que, si deux points M_0 et M'_0 sont congruents (c'est-à-dire transformés l'un de l'autre par une des substitutions du groupe fuchsien), les points M et M' soient également congruents.

Je supposerai alors que les valeurs des deux variables auxiliaires ξ et η sont les mêmes pour le point M_0 et pour le point M ; je supposerai, par exemple, que ce sont les coordonnées du point M_0 .

Dans ces conditions, φ_k et ψ_k ne dépendent pas de ζ .

Quand, γ ayant fait un tour complet, ζ aura augmenté de 1, le polygone R , en se déformant successivement, sera devenu un polygone R_1 , équivalent à R .

Le point M sera venu en un point M_1 dont les coordonnées seront

$$\theta(\xi, \eta), \quad \theta_1(\xi, \eta).$$

On voit que l'on retombe sur un même point de V quand ξ, η, ζ se changent en

$$\theta(\xi, \eta), \quad \theta_1(\xi, \eta), \quad \zeta + 1,$$

ou, plus généralement, quand ξ, η, ζ subissent une des substitutions du groupe G engendré par les $2p + 1$ substitutions qui changent ζ et η en

$$\varphi_k, \quad \psi_k, \quad \zeta \quad (k = 1, 2, \dots, 2p)$$

ou en

$$\theta, \quad \theta_1, \quad \zeta + 1.$$

Ce groupe G sera donc le groupe fondamental de la variété V .

Nous remarquerons d'abord que ce groupe n'est pas simple. Nous pouvons appeler G' le groupe engendré par les $2p$ substitutions $(\varphi_k, \psi_k, \zeta)$ et Σ la substitution $(\theta, \theta_1, \zeta + 1)$. Je dis que G' est un sous-groupe invariant de G ; il suffit

de montrer que G' est permutable à Σ . En effet, Σ changeant le polygone R en un polygone équivalent, n'altère pas le groupe fuchsien. Or, le groupe fuchsien n'est autre chose que le groupe engendré par les $2p$ substitutions $(\xi, \eta; \varphi_k, \psi_k)$; on voit que ce groupe est permutable à la substitution $(\xi, \eta; \theta, \theta_1)$ et le théorème énoncé s'en déduit immédiatement.

Considérons maintenant une variété V définie comme il suit :

Représentons la variable y sur une sphère. Distinguons sur cette sphère les points ordinaires pour lesquels l'équation $F(x, y)$ n'a pas de racines multiples et les points singuliers pour lesquels cette équation a des racines multiples.

Soient O un point ordinaire et A_1, A_2, \dots, A_q les points singuliers. Joignons O à chacun de ces points par des coupures OA_1, OA_2, \dots, OA_q ne se coupant pas mutuellement.

D'autre part, traçons autour de chacun des points singuliers un cercle de rayon très petit que nous appellerons *cercle de garde*.

Pour former la variété V , nous donnerons à y une valeur quelconque non comprise dans l'un des cercles de garde, à x une valeur complexe quelconque, à z une des deux valeurs définies par l'équation (1).

A chaque valeur de y correspondra un polygone fuchsien R , et ce polygone est parfaitement déterminé si y est assujetti à varier sans franchir les coupures OA ; car c'est seulement quand y fait un tour complet en tournant autour de l'un des points singuliers A que le polygone R peut s'échanger contre un polygone équivalent.

Le polygone R et ses transformés par le groupe fuchsien forment une figure qui, quand y varie d'une manière continue, se déforme aussi d'une manière continue, mais en restant toujours homéomorphe à elle-même. Soient alors y_0 une valeur initiale de y , R_0 le polygone R correspondant, un point M_0 du plan de R_0 ; nous pouvons faire correspondre au point M_0 un point M du plan de R , de telle façon que les coordonnées de M soient des fonctions continues et bi-uniformes de celles de M_0 ; que M soit en un sommet ou sur un côté de R , si M_0 est en un sommet ou sur un côté de R_0 ; que M et M' soient congruents si M_0 et M'_0 sont congruents.

Nous pourrons ensuite faire correspondre au point M deux variables auxiliaires ξ et η qui ne seront autre chose que les coordonnées de M_0 . Dans ces conditions, le groupe fuchsien sera dérivé de $2p$ substitutions

$$S_1, S_2, \dots, S_{2p},$$

telles que S_k change ξ et η en $\varphi_k(\xi, \eta)$, $\psi_k(\xi, \eta)$, les fonctions φ_k et ψ_k étant indépendantes de γ .

Quand γ tourne autour du point singulier A_i , R se change en un polygone équivalent R_1 ; il en résulte que ξ et η se changent en

$$\theta_i(\xi, \eta), \quad \theta'_i(\xi, \eta),$$

θ_i et θ'_i étant des fonctions bi-uniformes et continues de ξ et η , telles que, quand le point ζ, η est en un sommet ou sur un côté de R_0 , le point θ_i, θ'_i est en un sommet ou sur un côté du polygone R_1^0 analogue à R_1 et équivalent à R_0 .

Envisageons maintenant un second groupe fuchsien que j'appellerai Γ , de telle façon que γ soit une fonction fuchsienne de la variable auxiliaire $\zeta + i\zeta'$ admettant ce groupe Γ . Le polygone fuchsien P correspondant sera de la deuxième famille (c'est-à-dire qu'il aura tous ses sommets sur le cercle fondamental et tous ses angles nuls) et de genre O . Ses différents sommets correspondront aux valeurs A_1, A_2, \dots, A_q de la variable γ .

Aux q points singuliers A_1, A_2, \dots, A_q correspondront les q substitutions

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_q,$$

qui engendreront le groupe Γ ; et la substitution Σ_i changera ζ et ζ' en

$$\chi_i(\zeta, \zeta'), \quad \chi'_i(\zeta, \zeta').$$

Il résulte de là qu'on retombera sur le même point de la variété V quand les quatre variables ξ, η, ζ, ζ' subiront une des substitutions du groupe G engendré par les $2p + q$ substitutions qui changent ces variables en

$$\begin{array}{ll} \varphi_k(\xi, \eta), \quad \psi_k(\xi, \eta), \quad \zeta, \quad \zeta' & (k = 1, 2, \dots, 2p); \\ \theta_i(\xi, \eta), \quad \theta'_i(\xi, \eta), \quad \chi_i(\zeta, \zeta'), \quad \chi'_i(\zeta, \zeta') & (i = 1, 2, \dots, q). \end{array}$$

Les $2p$ premières de ces substitutions engendrent un groupe G' (qui ne sera autre que le groupe fuchsien appliqué à ξ et à η , les deux variables ζ et ζ' demeurant inaltérées). Ce groupe fuchsien étant permutable aux substitutions Σ_i , on conclurait, comme plus haut, que G' est un sous-groupe invariant de G .

Ce groupe G peut être regardé comme le groupe fondamental de la variété V , pourvu que l'on suppose, comme nous l'avons fait, que γ est assujéti à ne pas pénétrer dans les cercles de garde.

En effet, soit N le point de l'espace à quatre dimensions dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, ζ' . A chaque point N correspondra un point de V , mais à chaque

point de V correspondront une infinité de points de N ; je dirai que ces points sont congruents entre eux.

D'après les définitions données dans l'*Analysis situs* (cf. p. 241), à chaque substitution du groupe fondamental de V correspondra un contour fermé K tracé sur V , le point initial du contour étant un certain point fixe choisi une fois pour toutes sur V (c'est le point que j'appelais M_0 dans l'*Analysis situs*). Soit N_0 l'un des points N correspondant à ce point fixe de V ; à notre contour fermé K correspondra dans l'espace $(\xi, \eta, \zeta, \zeta')$ une ligne $N_0BN'_0$ allant du point N_0 à un point congruent N'_0 .

Il est clair ensuite que deux lignes $N_0BN'_0, N_0CN'_0$ ayant mêmes extrémités conduiront à une même substitution du groupe fondamental. Il suffit pour cela de faire voir que le contour fermé $N_0BN'_0CN_0$ limite une aire, car alors le contour fermé correspondant sur V limitera aussi une aire et pourra se réduire à un point par déformation continue.

Il suffit donc de montrer que la région de l'espace à quatre dimensions où peut se mouvoir le point N est simplement connexe. Quelle est cette région? D'abord le point ξ, η peut parcourir tout le cercle fondamental, qui est une aire simplement connexe. Quant au point ζ, ζ' , il peut parcourir le polygone P et ses transformés par le groupe fuchsien Γ . Il pourrait donc parcourir aussi le cercle fondamental tout entier, s'il n'y avait lieu de tenir compte de l'existence des cercles de garde. Comme γ ne peut pénétrer dans ces cercles de garde, il faut retrancher du polygone P de petites régions dans le voisinage de chaque sommet, de même pour ses transformés. Il faudra donc retrancher du cercle fondamental une infinité de petits cercles, tous extérieurs les uns aux autres et tous tangents au cercle fondamental. L'aire restante n'en étant pas moins simplement connexe, la région où peut se mouvoir le point $(\xi, \eta, \zeta, \zeta')$ c'est-à-dire le point N , est bien simplement connexe. C. Q. F. D.

Ainsi, à un point N'_0 (ou, si l'on veut, à la substitution du groupe G qui change N_0 en N'_0) correspond une substitution du groupe fondamental, et une seule. Il résulte de là que le groupe fondamental est isomorphe à G ; mais nous ne savons pas encore si l'isomorphisme n'est pas méridrique.

C'est ce qui arriverait s'il y avait des points N'_0 (autres que N_0) tels que la substitution correspondante du groupe fondamental se réduise à la substitution identique, c'est-à-dire tels que le contour fermé tracé sur V et correspondant à la ligne $N_0BN'_0$ limite une aire et puisse se réduire à un point par déformation continue.

Nous devons donc rechercher si, quand on décrit sur V un contour fermé infiniment petit, il peut arriver que le point N subisse une substitution de G ne se réduisant pas à la substitution identique. Quand on décrira sur V un contour infiniment petit, la variable y décrira aussi dans son plan un contour infiniment petit. Ce contour ne pourra entourer l'un des points singuliers A_i , puisque chacun de ces points singuliers est protégé par un cercle de garde, très petit, mais fini, où y ne peut pénétrer. Nous pourrons alors, en faisant subir à notre contour fermé une déformation infiniment petite, nous arranger pour que, y restant constant tout le long du contour, la variable x décrive dans son plan un contour fermé infiniment petit. Si ce contour n'entoure aucun des points singuliers x_k , le point N dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, ζ' revient à sa valeur primitive, et il n'a pas subi une substitution de G autre que la substitution identique. Si le contour entoure un point singulier, et un seul, la variable z change de signe et le cycle n'est pas fermé sur V . Enfin, il ne peut arriver que le contour entoure deux points singuliers, puisqu'il est infiniment petit, que deux points singuliers ne peuvent être infiniment voisins que quand y est près d'un des points A_i , et que nous ne pouvons approcher de ces points A_i à cause des cercles de garde.

En résumé, quand on décrira sur V un cycle fermé, la substitution subie par N se réduira toujours à la substitution identique. Donc l'isomorphisme de G et du groupe fondamental est holoédrique. En d'autres termes, puisque le groupe fondamental n'est défini que par sa forme, le groupe n'est autre chose que G .

On voit quel rôle jouent les cercles de garde dans le raisonnement qui précède. Supprimons maintenant ces cercles de garde et supposons que x et y puissent prendre des valeurs complexes quelconques, et que V soit, par conséquent, la variété définie par l'équation (1).

D'abord, le groupe fondamental sera toujours isomorphe à G ; je n'ai rien à changer à cette partie du raisonnement. Mais il reste à savoir si cet isomorphisme n'est pas méridrique, et, pour le reconnaître, je vais, comme plus haut, examiner ce qui se passe quand on décrit sur V un cycle fermé infiniment petit.

Si, quand on décrit ce cycle, y ne tourne pas autour d'un point singulier A_i ou ne reste pas infiniment voisin de A_i , les raisonnements précédents s'appliqueront encore et la substitution subie par N se réduira à la substitution identique. Supposons maintenant que y décrive un cercle fermé très petit autour

de A_i . Alors ζ et ζ' se changeront en χ_i et χ'_i et N subira soit la substitution $(\theta_i, \theta'_i, \chi_i, \chi'_i)$, que j'appellerai, pour abrégé, T_i , soit cette même substitution suivie d'une substitution du groupe G' .

Précisons davantage. Quand on décrit le cycle, le point x décrit dans son plan un contour fermé infiniment petit. En même temps, les points

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2p+1},$$

par suite des variations de γ , décriront des courbes très petites. Deux de ces points, que j'appellerai x_a et x_b , sont très voisins l'un de l'autre quand γ est voisin de A_i . Les autres points x_k décriront des contours fermés quand γ tournera autour de A_i . Quant à x_a et x_b , il pourra arriver qu'ils s'échangent, et alors ils décriront chacun un arc très petit, l'ensemble de ces deux arcs constituant une petite courbe fermée. Ou bien ils ne s'échangeront pas, de sorte que chacun d'eux décrira une courbe fermée.

Si x ne tourne autour d'aucun des points singuliers x_k , le point N subira la substitution T_i , à laquelle devra par conséquent correspondre, dans le groupe fondamental, la substitution identique.

Si x tourne autour d'un point x_k autre que x_a et x_b , z change de signe et le cycle n'est pas fermé; ce cas doit donc être exclu.

Si x tourne autour des points x_a et x_b , la somme des arguments de $x - x_a$ et $x - x_b$ augmente de 2π ou de 4π . Le premier cas doit être exclu parce que z changerait de signe; examinons le second.

Reprenons le polygone fuchsien R et les deux polygones partiels R' et R'' . Au point x_a correspondra sur R' un certain point u_a qui sera le milieu de l'un des côtés (au point de vue non-euclidien). Soit s_a la substitution qui change un point u du plan de R en un point symétrique de u par rapport à u_a (au point de vue non-euclidien).

Soit u'_a un point congruent de u_a , transformé de u_a par une substitution S du groupe fuchsien; et soit s'_a une substitution qui change un point en son symétrique par rapport à u'_a . On aura évidemment

$$s'_a = S^{-1} s_a S.$$

Considérons maintenant les différents points du plan de R qui correspondent à x_b ; parmi ces points, je distinguerai celui qui tend vers u_a quand γ tend vers A_i sans franchir les coupures OA ; je l'appellerai u_b . Je désignerai par u'_b le transformé de u_b par S . Je définirai s_b et s'_b par rapport à u_b et u'_b comme s_a et s'_a le sont par rapport à u_a et u'_a .

Il est clair que

$$s_a^2 = s_b^2 = s_a'^2 = s_b'^2 = 1,$$

que $s_a s_b$ et $s_b s_a$ appartiennent au groupe fuchsien, que

$$s_b' = S^{-1} s_b S.$$

D'ailleurs, $s_a s_b$ et $s_b s_a$ sont inverses l'une de l'autre.

Cela posé, quand x aura décrit son contour autour de x_a et x_b , le point ξ , η aura subi la substitution $s_a s_b$ (ou la substitution $s_b s_a$, selon le sens dans lequel le contour aura été décrit) ou, plus généralement, une des substitutions du groupe fuchsien.

Le point N aura donc subi la substitution T_i suivie d'une des substitutions S' de G' , ou, ce qui revient au même, d'une substitution S'' de G' suivie de T_i .

A la substitution $T_i S' = T'' T_i$ du groupe G correspondra encore dans le groupe fondamental la substitution identique.

Comme nous venons de voir qu'à T_i correspondait déjà la substitution identique, nous devons conclure qu'à S' et S'' correspondra également la substitution identique.

Il peut arriver encore que, quand on décrit le cycle fermé sur V , γ ne tourne pas autour de A_i , mais reste très voisin de A_i ; dans ce cas, ζ et ζ' reviendront à leurs valeurs primitives; en même temps, x décrira dans son plan un contour fermé; on pourra supposer que ce contour entoure les deux points singuliers x_a et x_b , puisque, quand γ est voisin de A_i , ces deux points x_a et x_b sont voisins l'un de l'autre. Alors le point u subit une substitution du groupe fuchsien et le point N subit une substitution S''' de G' à laquelle devra encore correspondre dans le groupe fondamental la substitution identique.

Ainsi, si nous reprenons notre groupe G qui est dérivé du sous-groupe G' et des substitutions T_i , nous voyons qu'à toutes les substitutions T_i et à certaines substitutions de G' correspond la substitution identique. Donc le groupe fondamental sera isomorphe à G' (et, par conséquent, au groupe fuchsien), puisqu'à toutes les T_i correspond la substitution identique, et cet isomorphisme sera, en général, méridrique, parce qu'à certaines substitutions de G' correspondra, en général, la substitution identique.

Avant d'aller plus loin, une distinction est nécessaire. Il peut arriver que les points singuliers x_a et x_b s'échangent quand γ tourne autour de A_i , ou bien qu'ils ne s'échangent pas. Dans le premier cas, il n'y a pas de difficulté : la

partie de la variété (1) voisine du point $y = A_i$, $x = x_a = x_b$ est assimilable à la partie de la variété

$$z^2 = y - x^2$$

voisine de l'origine, et tout cycle fermé qui reste très voisin de ce point est réductible à un point de telle façon que la substitution correspondante du groupe fondamental ne peut être que la substitution identique. Dans ce cas, à T_i , à S' , à S'' correspondra la substitution identique, ainsi que nous venons de l'expliquer.

Dans le second cas, la surface (1) présente un point conique et la portion de la variété (1) voisine de $y = A_i$, $x = x_a = x_b$ est assimilable à la partie de la variété

$$z^2 = y^2 - x^2$$

voisine de l'origine.

Alors deux conventions également légitimes peuvent être faites : supposons qu'un contour fermé tracé sur V puisse se réduire à un point, *mais en franchissant le point conique*, et ne le puisse pas autrement. On peut admettre que la substitution correspondante du groupe fondamental est encore la substitution identique, ou, en d'autres termes, on peut traiter le point conique comme un point ordinaire de la variété. Dans ce cas, encore à T_i , S' et S'' correspondra la substitution identique.

Ou bien on peut faire la convention contraire et traiter le point conique comme un point singulier qu'il est interdit de franchir. Dans ce cas, à T_i correspondra encore la substitution identique, mais il n'en sera plus de même pour S''' . On aura d'ailleurs toujours $S'' \equiv S'''$.

Voici maintenant la question qui se pose. M. Picard a démontré (cf. *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. I, p. 85 et suiv.) que, si une surface algébrique est la plus générale de son degré, les cycles linéaires peuvent être réduits à des points de telle façon que le nombre de Betti P_1 est égal à 1.

Il ne s'ensuit pas immédiatement que le groupe fondamental se réduise à la substitution identique. En effet, M. Picard a démontré que tout cycle linéaire est *homologue* à zéro, et, pour démontrer que le groupe fondamental se réduit à la substitution identique, il faudrait faire voir que tout cycle linéaire est *équivalent* à zéro. Pour la différence entre les homologies et les équivalences, voir *Analysis situs*, page 241.

Il est donc nécessaire de revenir sur la question à ce nouveau point de vue. Voyons d'abord le cas où $p = 1$, c'est-à-dire où notre polygone fuchsien R se

réduit à un parallélogramme. Alors toutes les substitutions de G' et, par conséquent, toutes celles du groupe fondamental, sont permutablees entre elles.

Le groupe G' dérive de deux substitutions que j'appelle s et s_1 , Soit alors un cycle quelconque ; à ce cycle correspondra une substitution de G' qui pourra s'écrire, par exemple,

$$s^\alpha s_1^{\alpha_1} s^\beta s_1^{\beta_1} s^\gamma s_1^{\gamma_1}.$$

Les substitutions de G' étant permutablees, elle pourra s'écrire également

$$s^{\alpha+\beta+\gamma} s_1^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}.$$

Si, comme l'a démontré M. Picard, tout cycle est homologue à zéro, cela veut dire que, parmi les cycles possibles, il y en a deux correspondant aux substitutions de G'

$$s^a s_1^b, \quad s^c s_1^d$$

(où a, b, c, d sont quatre entiers dont le déterminant n'est pas nul) et qui sont susceptibles de se réduire à un point. Il arriverait alors qu'à $s^a s_1^b$ et à $s^c s_1^d$ correspondra dans le groupe fondamental la substitution identique, ce que j'écrirai

$$s^a s_1^b \equiv 1, \quad s^c s_1^d \equiv 1.$$

Nous en concluons, en nous rappelant que s et s_1 sont permutablees,

$$s^\varepsilon \equiv 1, \quad s_1^\varepsilon \equiv 1, \quad \varepsilon = ad - bc.$$

On voit que le groupe fondamental ne pourrait, en tout cas, comprendre qu'un nombre fini de substitutions, au plus ε^2 .

Mais on peut aller plus loin, même dans le cas de $p > 1$.

Supposons, pour fixer les idées, que $p = 2$ et appelons, pour abrégier

$$a, b, c, d, e, f$$

les six points singuliers du plan des x que nous appelions jusqu'ici x_0, \dots, x_6

Soit d'abord $y = 0$; joignons le point $x = 0$ aux points a, b, c, d, e, f par des coupures rectilignes, de telle façon qu'en tournant autour du point O on rencontre ces coupures dans l'ordre

$$Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of,$$

Faisons maintenant varier y d'une manière continue, mais sans franchir aucune des coupures OA_i ; en même temps les points a, b, \dots , se déplaceront d'une manière continue, mais sans s'échanger ou sans tourner les uns autour des autres; les coupures Oa, \dots , se déplaceront et même cesseront d'être

rectilignes, mais on les rencontrera toujours dans le même ordre en tournant autour de O .

Quand on franchira la coupure Oa , la variable u (argument des fonctions fuchsienes) subira une transformation que j'appellerai a et qui sera une sorte de symétrie analogue à la substitution s_a définie plus haut, p. 382 (symétrie par rapport à u_a).

Je définirai, de même, les transformations b, c, d, e, f ; il est clair qu'on aura

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1, \\ abcdef = 1,$$

et que ce sont là les seules relations qu'il y ait entre elles. Le groupe fuchsien

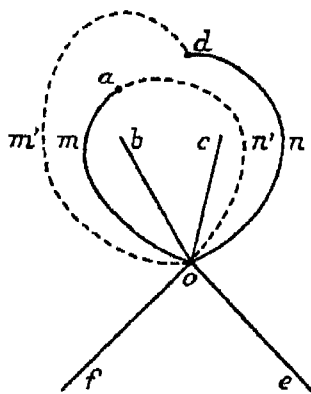


Fig. 1.

sera formé de toutes les combinaisons possibles de ces transformations *prises en nombre pair*.

Lorsque y tend vers A_i , deux des points singuliers, a et d , par exemple, se rapprochent l'un de l'autre; quand y tourne autour de A_i , ces deux points s'échangeront (dans le cas général où le point $x = a, y = A_i$ n'est pas un point double de la surface, cas général que nous examinerons d'abord).

Quand le point y est voisin de A_i (mais sans avoir franchi la coupure OA_i), les quatre coupures Oa, Ob, Oc, Od présentent la disposition représentée en trait plein sur la figure 1; après que le point y a décrit un contour autour de OA_i , les coupures Oa et Od se sont déformées et ont pris la forme représentée en trait pointillé sur la figure. Elles se sont d'ailleurs permutées de telle façon que la coupure en trait plein Oma est devenue la coupure en trait pointillé $O m' d$, tandis que la coupure Ond est devenue $On'a$.

Traçons maintenant dans le plan un contour fermé quelconque, partant d'un

point fixe M_0 quelconque du plan; si ce contour coupe successivement les coupures Oa, Oc, Oa, Ob, Of, Oe , par exemple, il équivaudra à la substitution $acabfe$.

Cela posé, considérons un contour fermé coupant l'une des coupures

$$(1) \quad Oma, Ob, Oc, Ond, Oe, Of,$$

et une seule; quand y aura tourné autour de A_i , il se transformera en un contour coupant une des coupures

$$(2) \quad Om'd, Ob, Oc, On'a, Oe, Of,$$

et une seule.

Or, il est aisé de voir sur la figure qu'un contour coupant l'une des coupures (2) coupera dans un certain ordre certaines des coupures (1) et équivaudra, par conséquent, à une certaine combinaison des substitutions a, b et c .

Si nous supposons, par exemple, M_0 extérieur au contour $Om'dna$. Le cycle qui coupe :

$Om'd$ coupera	Ond	et équivaudra à	d ,
Ob	» Ond, Oma, Ob, Oma et Ond	»	$dabad$,
Oc	» Ond, Oma, Oc, Oma et Ond	»	$dacad$,
$Om'a$	» Ond, Oma et Ond	»	dad ,
Oe	» Oe	»	e ,
Of	» Of	»	f .

Par conséquent, la transformation T_i changera les substitutions

$$(3) \quad a, b, c, d, e, f$$

respectivement en

$$(4) \quad d, dabad, dacad, dad, e, f.$$

Nous avons, plus haut, écrit la relation

$$T_i S' = S'' T_i,$$

et montré qu'aux deux substitutions S' et S'' de G' doit correspondre la même substitution du groupe fondamental, ce que nous écrirons :

$$(5) \quad S' \equiv S''.$$

Comme S' est une certaine combinaison des substitutions (3) en nombre pair et que S'' est la combinaison correspondante des substitutions (4), il suffit, pour que l'équivalence (5) ait lieu, que l'on ait

$$a \equiv d, \quad b \equiv dabad, \quad c \equiv dacad, \quad d \equiv dad.$$

Or, toutes ces équivalences se réduisent à

$$ad \equiv 1$$

ou, ce qui revient au même, à $a \equiv d$.

Nous avons vu ensuite qu'à la substitution S''' de G' doit correspondre la substitution identique du groupe fondamental, ce que j'écris

$$S''' \equiv 1.$$

On voit ici que S''' n'est autre chose que ad , de sorte que nous retombons toujours sur la même équivalence

$$ad \equiv 1$$

qui est (avec $T_i \equiv 1$) la seule que l'on puisse déduire de la considération du point singulier A_i .

Il nous reste à examiner le cas où le point

$$x = a, \quad y = A_i$$

est un point conique de la surface $s = F(x, y)$. Refaisons une figure analogue à la figure 1. Quand le point y tournera autour de A_i , les coupures en trait plein Oma et Ond se changeront dans les coupures $Om'a$ et $On'd$ en trait pointillé (fig. 2). En raisonnant comme tout à l'heure et considérant les différents cycles qui partent du point M_0 et qui coupent une des coupures, et une seule, on voit que le cycle qui coupe

$Om'a$	coupera	Ond, Oma et $Ond,$
Ob	»	$Ond, Oma, Ond, Oma, Ob, Oma, Ond, Oma, Ond,$
Oc	»	$Ond, Oma, Ond, Oma, Oc, Oma, Ond, Oma, Ond,$
$On'd$	»	$Ond, Oma, Ond, Oma, Ond,$
Oe	»	$Oe,$
Of	»	$Of.$

Ces cycles équivaudront donc respectivement aux combinaisons

$$dad, dadabadad, dadacadad, dadad, e, f,$$

c'est-à-dire que T_i transformera les substitutions

$$a, b, c, d, e, f$$

dans les substitutions

$$dad, dadabadad, dadacadad, dadad, e, f.$$

Si l'on traite le point conique comme un point ordinaire de la variété, on aura encore

$$S' \equiv S'', \quad S'' \equiv 1.$$

La première condition entraîne

$$(6) \quad a \equiv dad, \quad b \equiv dadabadad, \quad c \equiv dadacadad, \quad d \equiv dadad.$$

La seconde nous donne simplement

$$ad \equiv 1,$$

ce qui entraîne d'ailleurs les conditions (6).

Considérons maintenant le point conique comme un point qu'il est interdit de franchir. Alors nous aurons encore $S' \equiv S''$ et, par conséquent, les conditions (6), mais nous n'aurons plus $S''' \equiv 1$, c'est-à-dire $ad \equiv 1$.

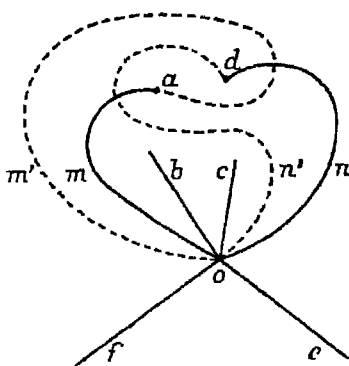


Fig. 2.

Les conditions (6) se ramènent à une seule

$$(ad)^2 \equiv 1.$$

Ainsi, si nous nous interdisons de franchir le point conique, nous n'aurons pas $ad \equiv 1$, mais nous aurons $(ad)^2 \equiv 1$.

Ainsi, le cycle qui tourne autour des deux points a et d n'est pas la frontière d'une variété à deux dimensions faisant partie de V , tandis que ce cycle pris deux fois constitue la frontière d'une variété à deux dimensions faisant partie de V , si du moins l'on suppose que toutes ces variétés à une ou à deux dimensions ne s'écartent pas beaucoup du point conique.

Il est aisé de rapprocher ceci d'un fait connu. Nous avons déjà fait remarquer que la portion de V voisine du point conique est homéomorphe à la portion de la variété $z^2 = x^2 - y^2$ ou de la variété $z^2 = xy$ voisine de l'origine.

Appelons donc W la variété à quatre dimensions $z^2 = xy$, dont on suppose que l'on a exclu l'origine qui est un point conique. Ce qui précède nous

enseigne qu'il y a sur W un cycle fermé C à une dimension tel que l'on n'ait pas l'équivalence

$$C \equiv 0,$$

mais que l'on ait l'équivalence

$$2C \equiv 0.$$

Or, considérons la variété à trois dimensions

$$z^2 = xy, \quad |x^2| + |y^2| = 1$$

que j'appelle W' . C'est la variété envisagée par M. Heegaard [*cf. Premier Supplément à l'Analysis situs (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XIII, 1899)*].

A tout point, x, y, z de W correspond un point

$$\frac{x}{\sqrt{|x^2| + |y^2|}}, \quad \frac{y}{\sqrt{|x^2| + |y^2|}}, \quad \frac{z}{\sqrt{|x^2| + |y^2|}}.$$

Si le point de W décrit un cycle C , le point correspondant de W' décrira un cycle C' . Or, il est évident que si sur W on a $C \equiv 0$, sur W' on aura $C' \equiv 0$, et réciproquement. (Je rappelle que l'équivalence $C \equiv 0$ signifie qu'il existe sur W une variété à deux dimensions dont C est la frontière complète).

Si donc sur W on a $2C \equiv 0$ sans avoir $C \equiv 0$, il y aura sur W' un cycle C tel que $2C' \equiv 0$ sans que $C' \equiv 0$.

Or, on se rappelle que l'existence d'un pareil cycle C' est une des propriétés caractéristiques de la variété de M. Heegaard.

Rien n'est plus facile maintenant que de déterminer le groupe fondamental. Ce groupe est méridriquement isomorphe au groupe fuchsien, lequel dérive de toutes les combinaisons *en nombre pair* des substitutions a, b, c, d, e, f , lesquelles sont supposées liées par les relations

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1, \quad abcdef = 1.$$

Mais si les deux points a et d peuvent s'échanger quand γ tourne autour de A_i , on aura $ad \equiv 1$, d'où

$$a \equiv d.$$

Je dis que la même relation subsistera si a se change en d quand γ décrit un cycle fermé quelconque, enveloppant, par exemple, non plus un seul point singulier, mais deux points singuliers A_i et A_k . Si, en effet, par exemple, a s'échange avec b quand γ tourne autour de A_i et b avec d quand γ tourne

autour de A_k (de telle façon que a se change en d quand γ décrit le contour qui enveloppe à la fois ces deux points singuliers), on aura

$$a \equiv b, \quad b \equiv d$$

et, par suite,

$$a \equiv d.$$

C. Q. F. D.

Si donc les points singuliers a, b, c, d sont susceptibles de s'échanger entre eux, on aura

$$a \equiv b \equiv c \equiv d.$$

Si le polynôme $F(x, y)$ est indécomposable, les racines de l'équation

$$F(x, y) = 0$$

(considérée comme équation en x) seront toutes susceptibles de s'échanger entre elles quand on fera varier y d'une façon quelconque.

Nos $2p + 2$ points singuliers (qui sont au nombre de six, a, b, c, d, e, f si $p = 2$) s'échangeront donc tous les uns avec les autres et l'on aura

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv e \equiv f.$$

Une substitution quelconque du groupe fondamental, se réduisant à une combinaison en nombre pair de a, b, c, d, e, f , se réduira à une puissance paire de a , c'est-à-dire à la substitution identique.

Ainsi, si le polynôme F est indécomposable, le groupe fondamental se réduit à une seule substitution qui est la substitution identique.

Si le polynôme F se décompose en deux facteurs $F = F_1 F_2$, nous devons distinguer deux sortes de points singuliers : ceux qui satisfont à l'équation $F_1 = 0$ et ceux qui satisfont à $F_2 = 0$; supposons, par exemple, que a, b, c, d satisfont à $F_1 = 0$, e et f à $F_2 = 0$; on aura alors

$$a \equiv b \equiv c \equiv d, \quad e \equiv f.$$

On n'aura pas $a \equiv e$ (si les points coniques ne sont pas regardés comme des points ordinaires); mais on aura $(ae)^2 \equiv 1$, de sorte que le groupe fondamental comprendra seulement deux substitutions

$$1, \quad ae.$$

Il faut voir encore si ce nombre n'est pas réduit par la considération de la relation

$$(7) \quad abcdef = 1.$$

Observons que l'on doit toujours réduire le degré de F à être pair (au besoin par une transformation homographique), puisque le nombre des points singuliers est $2p + 2$. Nous devons alors distinguer le cas où F_1 et F_2 sont tous deux de degré pair : alors la relation (7) se réduit à une identité et le groupe fondamental n'est pas réduit; et le cas où F_1 et F_2 sont tous deux de degré impair : alors la relation (7) se réduit à $ae \equiv 1$ et le groupe fondamental ne comprend plus qu'une substitution.

Si F se décompose en trois facteurs $F = F_1 F_2 F_3$, que a soit l'une des racines de $F_1 = 0$, b l'une de celles de $F_2 = 0$, c l'une de celles de $F_3 = 0$, on aura

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1, \quad (ab)^2 \equiv (bc)^2 \equiv (ac)^2 \equiv 1,$$

ce qui montre que le groupe fondamental se réduit à quatre substitutions

$$1, \quad ab, \quad bc, \quad ac,$$

ce nombre pouvant encore être réduit, à cause de la relation (7), si deux des facteurs sont de degré impair.

Si, enfin, F se décompose en n facteurs $F = F_1 F_2 \dots F_n$; si a_i est l'une des racines de $F_i = 0$; on aura

$$(8) \quad a_i^2 \equiv 1, \quad (a_i a_k)^2 \equiv 1 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Soit alors S une substitution quelconque du groupe fondamental; ce sera le produit d'un nombre pair des substitutions a_i . Mais des relations (8) on peut déduire

$$a_i a_k \equiv a_k a_i.$$

On peut donc permuter les facteurs de S et l'écrire sous la forme

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n} \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n \equiv 0, \text{ mod } 2).$$

On peut ensuite, à l'aide des relations (8), réduire les exposants ε à 0 ou à 1, de sorte que S se réduira à un produit de k facteurs a_1, a_2, \dots, a_n , les k facteurs étant différents et k étant pair, l'ordre des facteurs étant d'ailleurs regardé comme indifférent. Il y a 2^{n-1} combinaisons possibles; le groupe fondamental comprend donc 2^{n-1} substitutions; mais ce nombre peut être réduit de moitié par le moyen de la relation (7), si deux ou plusieurs des facteurs sont de degré impair.



SUR

LA CONNEXION

DES SURFACES ALGÈBRIQUES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 133, p. 969-973 (9 décembre 1901).

Une Note importante de M. Picard a récemment attiré de nouveau l'attention sur la question de la connexion des surfaces algébriques. Je crois devoir dire quelques mots de certains résultats que j'ai obtenus sur ce sujet.

Soit

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

une surface algébrique, à laquelle correspondra une variété fermée V à quatre dimensions.

M. Picard a démontré que toute surface peut être ramenée, par une transformation birationnelle, soit à une surface de l'espace à cinq dimensions dépourvue de toute singularité, soit à une surface de l'espace ordinaire ne présentant que des *singularités ordinaires*, c'est-à-dire une courbe double et des points triplanaires.

Nous sommes donc autorisés par là à nous restreindre au cas des surfaces à singularités ordinaires, ce qui est d'autant plus nécessaire que les autres surfaces pourraient présenter des singularités telles que la variété V correspondante présente elle-même un point singulier. Or les théorèmes généraux de l'*Analysis situs* n'ont guère été démontrés que pour les variétés sans point singulier et les définitions elles-mêmes deviendraient ambiguës, à moins d'être complétées par de nouvelles conventions.

Cela posé, rappelons quelques-uns des résultats obtenus par M. Picard.

Donnons à γ une valeur constante quelconque, l'équation (1) représentera une courbe algébrique $f(x, z) = 0$ de genre p ; à cette courbe correspondra une surface de Riemann S sur laquelle on pourra tracer $2p$ cycles distincts

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2p}.$$

Lorsque γ variera, la surface de Riemann S et les cycles ω varieront, et quand γ aura décrit un lacet autour de l'un des points singuliers

$$A_1, A_2, \dots, A_q$$

pour lesquels le genre de la courbe $f(x, z) = 0$ s'abaisse, les $2p$ cycles ω se seront transformés en $2p$ combinaisons linéaires (à coefficients entiers) de ces mêmes cycles ω ; ils auront subi une transformation linéaire T_i . L'ensemble de ces transformations T_i forme un groupe dont M. Picard a montré l'importance au point de vue qui nous occupe et que j'appellerai *groupe de Picard*.

Il s'agit de former tous les cycles distincts de la variété V , tant à une qu'à deux ou à trois dimensions. En ce qui concerne les cycles à une dimension, le problème a été entièrement résolu par M. Picard. Notre savant confrère a montré que tous ces cycles peuvent être ramenés aux divers cycles ω d'une des surfaces S , mais que ces cycles ω ne sont pas tous distincts; un quelconque de ces cycles est équivalent à son transformé par l'une des transformations T_i . Si donc on égale chacun des $2p$ cycles ω à son transformé par chacune des q transformations T_i , on obtiendra un système de $2pq$ équations linéaires entre les ω , que j'appellerai le *système (A)*.

Autant ce système (A) aura de solutions *distinctes*, autant la variété V admettra de cycles à une dimension distincts.

Il semble d'abord qu'il y a des cas où le nombre de ces cycles doit être abaissé; que, pour certains points singuliers A_i , le genre de la surface S s'abaissant, un des cycles de cette surface pourra se réduire à zéro, sans être pour cela la différence entre un des cycles de S et son transformé par la substitution T_i . C'est ce qui arriverait, par exemple, si nous avions deux points singuliers A_1 et A_2 , tels que les transformations T_1 et T_2 soient inverses l'une de l'autre; puis que nous fassions varier la surface (1) d'une manière continue, de telle sorte qu'à la limite les deux points A_1 et A_2 se confondent. Alors, pour la surface limite, la transformation du groupe de Picard qui correspondrait au point singulier formé par la réunion de A_1 et A_2 se réduirait à la transformation identique, et cependant certains des cycles de la surface S se réduiraient

à zéro quand y viendrait en ce point singulier. Mais cette circonstance ne se présentera jamais pour les surfaces à singularités ordinaires auxquelles nous devons et pouvons nous restreindre. Si elle se présentait pour d'autres surfaces, on pourrait se demander si ces cycles doivent être regardés comme équivalents à zéro; on se trouverait justement dans les cas où les définitions ordinaires deviennent ambiguës, à moins d'être complétées par des conventions nouvelles, et la réponse à la question posée dépendrait des conventions que l'on adopterait.

En ce qui concerne les cycles à deux dimensions, M. Picard a considéré ceux qui sont engendrés de la façon suivante : Supposons qu'un cycle ω ne soit pas altéré par l'une des transformations Θ du groupe de Picard; nous ferons alors décrire à y un contour fermé correspondant à cette transformation Θ ; le cycle ω variant avec y engendrera un cycle fermé à deux dimensions. Il reste à savoir si tous les cycles ainsi obtenus sont distincts et s'il ne peut y en avoir d'autres.

Voici les résultats auxquels je suis parvenu à cet égard : il y a des cycles de deux sortes; tous les autres n'en sont que des combinaisons.

Il y a deux cycles de la première sorte qui sont la surface de Riemann obtenue en donnant à x une valeur constante, et la surface de Riemann obtenue en donnant à y une valeur constante.

Voici le mode de génération des cycles à deux dimensions de la seconde sorte :

Soit Ω_i une combinaison linéaire des cycles ω , Ω'_i son transformé par la transformation T_i ; si ces combinaisons linéaires sont choisies de telle sorte que l'on ait

$$(2) \quad \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_n = \Omega'_1 + \Omega'_2 + \dots + \Omega'_n,$$

on engendrera un cycle de la façon suivante : si nous faisons décrire à y un lacet autour de A_i , en partant du point O et revenant au point O , le cycle Ω_i engendrera une variété W_i à deux dimensions qui ne sera pas fermée, mais qui sera limitée par la position initiale et finale du cycle, c'est-à-dire par le cycle Ω_i^0 de la surface de Riemann correspondant au point O et par son transformé $\Omega'_i{}^0$. Alors si l'on réunit toutes les variétés W_i , elles se raccorderont à cause de l'identité (2), et leur ensemble formera un cycle à deux dimensions.

Tous ces cycles ne sont pas distincts. Soit U_0 un cycle quelconque, U_1 son

transformé par T_1 , U_2 celui de U_1 par T_2 , U_3 celui de U_2 par T_3 , etc., et enfin $U_q = U_0$ le transformé de U_{q-1} par T_q . Si nous avons alors

$$\Omega_1 = U_0 + V_1, \quad \Omega_2 = U_1 + V_2, \quad \dots, \quad \Omega_q = U_{q-1} + V_q$$

(V_i étant un cycle quelconque inaltéré par la transformation T_i) et, par conséquent

$$\Omega'_1 = U_1 + V_1, \quad \Omega'_2 = U_2 + V_2, \quad \dots, \quad \Omega'_q = U_q + V_q,$$

le cycle à deux dimensions engendré par $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q$ sera équivalent à zéro. *Il n'y a pas d'autre cycle équivalent à zéro.* Donc, quand on aura réduit par ce moyen le nombre des cycles à deux dimensions, tous ceux qui resteront seront distincts.

J'ignore si tous les cycles de la seconde sorte sont des combinaisons de ceux qui correspondraient, d'après M. Picard, à une transformation Θ et à un cycle inaltéré par cette transformation.

Passons enfin aux cycles à trois dimensions. Soit Ω un cycle de la surface S qui soit *invariant* par rapport au groupe de Picard, c'est-à-dire inaltéré par toutes ses substitutions. Quand on donnera à y toutes les valeurs possibles, cet cycle engendrera un cycle fermé à trois dimensions.

Il n'y en aura d'ailleurs pas d'autre et tous les cycles ainsi obtenus seront distincts.

On vérifie que, comme il convient, le nombre des cycles invariants (et, par conséquent, celui du nombre des cycles à trois dimensions de V) est égal au nombre des solutions distinctes du système (A) (et, par conséquent, à celui des cycles à une dimension de V).

On voit que la considération du groupe de Picard suffit pour la détermination des nombres de Betti; elle suffirait également pour la détermination de ce que j'ai appelé les *coefficients de torsion*.



SUR

LES CYCLES DES SURFACES ALGÈBRIQUES;

QUATRIÈME COMPLÈMENT A L'ANALYSIS SITUS

Journal de Mathématiques, t. 8, p. 169-214 (1902).

§ 1. **Introduction.**

Les beaux travaux de M. Picard sur les *Surfaces algébriques* ont mis depuis longtemps en évidence l'importance de la notion des cycles à une, deux ou trois dimensions. J'ai pensé qu'on pourrait appliquer à cette question les principes que j'ai exposés dans l'*Analysis situs* et ses deux premiers compléments (*Journal de l'École Polytechnique*, tome du centenaire; *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XIII; *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXXII) et j'ai obtenu ainsi certains résultats partiels que j'ai déjà énoncés dans une Note aux *Comptes rendus* et qui viennent compléter, sur certains points, ceux de M. Picard.

Je rappelle qu'étant donné une variété V fermée à p dimensions, je trace sur cette variété d'autres variétés, fermées ou non, d'un moins grand nombre de dimensions; je désigne par W_q une variété à q dimensions tracée de la sorte sur V .

Si ΣW_q est un ensemble de variétés à q dimensions et ΣW_{q-1} un ensemble de variétés à $q - 1$ dimensions, la congruence

$$\Sigma W_q \equiv \Sigma W_{q-1}$$

signifie (par définition) que ΣW_{q-1} forme la frontière complète de l'ensemble

de variétés ΣW_q . J'exprime le même fait sans mettre en évidence ΣW_q en écrivant la relation

$$\Sigma W_{q-1} \sim 0$$

que j'appelle *une homologie*.

Alors la congruence

$$\Sigma W_q \equiv 0$$

signifiera que la variété ΣW_q est fermée.

Si l'on a $\Sigma W_q \equiv 0$ sans avoir $\Sigma W_q \sim 0$ (ou $n \Sigma W_q \sim 0$, n étant entier), je dirai que la variété ΣW_q constitue un cycle à q dimensions.

Soit

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique quelconque, qui définira une variété V à quatre dimensions. A chaque valeur de y correspondra une surface de Riemann qui sera en général de genre p . Je supposerai que le genre ne s'abaisse ni pour $y = 0$, ni pour $y = \infty$, mais qu'il s'abaisse pour q points singuliers

$$y = A_1, \quad y = A_2, \quad \dots, \quad y = A_q.$$

Dans le plan des y , je tracerai q coupures OA_1, OA_2, \dots, OA_q . Soit S l'une des surfaces de Riemann; quand y variera *sans franchir les coupures*, la surface S variera, mais en restant homéomorphe à elle-même de façon que les diverses surfaces de Riemann se correspondent point par point et d'une manière biunivoque et continue.

L'une quelconque S de ces surfaces pourra être subdivisée en un polyèdre P ; soient F les faces, B les arêtes, C les sommets de ce polyèdre. Une autre surface S' , correspondant point par point à la surface S , se trouvera de même subdivisée en un polyèdre P' dont les faces, les arêtes et les sommets correspondront aux faces, aux arêtes et aux sommets du polyèdre P .

Supposons maintenant que y , partant d'un point situé infiniment près de l'une des coupures, décrive un contour presque fermé et aboutisse à un autre point situé infiniment près du point initial, *mais de l'autre côté de la coupure*. La surface S se sera transformée en une surface infiniment peu différente; mais à un point de la première surface correspondra, en général, un point de la seconde surface qui en différera beaucoup.

Le polyèdre P se sera ainsi transformé en un polyèdre P' très différent.

D'un autre côté, aux différents points du plan des y découpé par nos

coupures, nous pouvons faire correspondre les points d'un polygone Q à $2g$ côtés $\alpha_i\beta_i$ et $\alpha_i\beta_{i+1}$, les côtés $\alpha_i\beta_i$ et $\alpha_i\beta_{i+1}$ correspondant aux deux lèvres de la coupure OA_i , le point α_i à A_i , les points β_i et β_{i+1} à O . Inutile d'ajouter que j'écrirai indifféremment β_1 ou β_{g+1} , β_2 ou β_{g+2} , etc., de façon à conserver la symétrie des notations.

Nous allons tirer de là une subdivision de la variété V en un polyèdre H à quatre dimensions.

A chaque face F_i de P correspondra une hypercase de R que j'appellerai aussi F_i . A chaque arête B_i de P correspondra une case B_i de H ; de même à chacun des côtés $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}$ de Q combiné avec chacune des faces F_k de P correspondra une case $\alpha_i\beta_i F_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$ de H .

A chaque sommet C_i de P correspond une face C_i de H . A chaque sommet α_i ou β_i de Q , combiné avec chacune des faces F_k de P , correspondra une face $\alpha_i F_k$ ou $\beta_i F_k$ de H . A chaque côté $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}$ de Q , combiné avec chacune des arêtes B_k de P , correspondra une face $\alpha_i\beta_i B_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1} B_k$ de H .

A chaque sommet C_k de P combiné avec chacun des côtés $\alpha_i\beta_i$ ou $\alpha_i\beta_{i+1}$ de H correspondra une arête $\alpha_i\beta_i C_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1} C_k$ de H . A chaque sommet α_i ou β_i de Q combiné avec chacune des arêtes B_k de P correspondra une arête $\alpha_i B_k$ ou $\beta_i B_k$ de H .

Enfin, à chaque sommet α_i ou β_i de Q combiné avec chacun des sommets C_k de P correspondra un sommet $\alpha_i C_k$ ou $\beta_i C_k$ de H .

Mais il convient de faire plusieurs observations. D'abord pour $\gamma = A_i$, le polyèdre P dégénère de telle façon que certaines de ses faces disparaissent; si, par exemple, la face F_k disparaît pour $\gamma = A_i$, la face correspondante $\alpha_i F_k$ du polyèdre H n'existera pas.

De même, bien que cela puisse être évité, on pourrait concevoir qu'une arête B_k disparût pour $\gamma = A_i$; dans ce cas, l'arête $\alpha_i B_k$ n'existerait pas.

D'un autre côté, donnons à i une valeur déterminée et faisons prendre à l'indice k toutes les valeurs possibles; envisageons ensuite, d'une part l'ensemble des cases $\alpha_i\beta_i F_k$ et, d'autre part, l'ensemble des cases $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$.

Ces deux ensembles seront identiques, bien qu'en général la case $\alpha_i\beta_i F_k$ considérée à part ne soit pas identique à la case $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$, ni même à une autre case $\alpha_i\beta_{i+1} F_l$.

Il pourra se faire aussi que certaines des faces $\alpha_i\beta_i B$ soient identiques à certaines des faces $\alpha_i\beta_{i+1} B$, ou certaines des arêtes $\alpha_i\beta_i C$ à certaines des arêtes $\alpha_i\beta_{i+1} C$.

D'autre part, comparons les différentes faces $\beta_i F_k$; la surface de Riemann S_0 qui correspond au point O se trouvera subdivisée en polyèdre de q manières différentes, suivant que l'on considère le point O comme correspondant au sommet β_1 , ou à β_2, \dots , ou à β_q . Ce sont ces q modes de subdivision qui engendrent les faces βF . Si donc m est le nombre des faces de P , on aura les identités

$$(2) \quad \beta_i F_1 + \beta_i F_2 + \dots + \beta_i F_m = \beta_j F_1 + \beta_j F_2 + \dots + \beta_j F_m$$

$(i, j = 1, 2, \dots, q).$

Il pourra se faire que certaines des faces βF soient identiques entre elles. Mais cela n'arrivera pas toujours. Il pourra arriver également que certaines des arêtes βB , ou certains des sommets βC soient identiques.

Enfin, par suite de la dégénérescence de P pour $\gamma = A_i$, il pourra se faire que certaines des faces $\alpha_i F$, ou des arêtes $\alpha_i B$, ou des sommets $\alpha_i C$ soient identiques.

En résumé, nos variétés partielles, hypercases, cases, arêtes ou sommets peuvent se répartir en quatre catégories conformément au tableau suivant :

Nature de la variété.	I.	Catégorie		
		$\alpha\beta.$	$\alpha.$	$\beta.$
Hypercases.....	F_k	-	-	-
Cases.....	B_k	$\alpha_i \beta_i F_k, \alpha_i \beta_{i+1} F_k$	-	-
Faces.....	C_k	$\alpha_i \beta_i B_k, \alpha_i \beta_{i+1} B_k$	$\alpha_i F_k$	$\beta_i F_k$
Arêtes.....	-	$\alpha_i \beta_i C_k, \alpha_i \beta_{i+1} C_k$	$\alpha_i B_k$	$\beta_i B_k$
Sommets.....	-	-	$\alpha_i C_k$	$\beta_i C_k$

Il ne peut y avoir identité entre deux variétés de catégorie différente. Deux variétés de la catégorie 1 sont toujours distinctes.

Entre deux variétés de catégorie $\alpha\beta$, il ne peut y avoir identité que si l'indice i de α est le même (sans quoi les valeurs correspondantes de γ seraient sur deux coupures OA_i, OA_j différentes; l'indice de β devra, au contraire, être différent; il peut y avoir identité, par exemple, entre $\alpha_i \beta_i F_k$ et $\alpha_i \beta_{i+1} F_h$, mais pas entre $\alpha_i \beta_i F_k$ et $\alpha_i \beta_i F_h$. Deux variétés de la catégorie α ne pourront être identiques que si l'indice de α est le même.

Avant d'aller plus loin, nous allons modifier un peu nos conventions, afin d'éviter les inconvénients qui pourraient résulter des identités telles que (2) qui ont lieu entre deux sommes de faces, bien que les faces prises individuellement ne soient pas identiques deux à deux.

Soit M un point quelconque de la coupure OA_i , la surface de Riemann S correspondante pourra être décomposée de deux manières en polyèdre, selon que l'on envisagera le point M comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux lèvres de la coupure. Superposons les deux modes de subdivision, en considérant à la fois les arêtes provenant de l'un et de l'autre mode. Nous obtiendrons ainsi un certain polyèdre que j'appellerai P' ; on peut s'arranger pour qu'il reste homéomorphe à lui-même quand le point M décrira toute la coupure OA_i (*vide infra*, § 5).

J'appellerai F'_k, B'_k, C'_k les faces, arêtes et sommets de P' . Chacune des faces F du premier mode de subdivision se décomposera en un certain nombre de faces F' , et il en sera de même de chacune des faces F du second mode; de sorte que chaque face F' appartiendra à l'une des faces F du premier mode, et à une seule, et à une des faces F du second mode, et à une seule.

Chacune des arêtes B de chacun des deux modes de subdivision se décomposera en un certain nombre d'arêtes B' . Chaque arête B' appartiendra au moins à l'une des arêtes B de l'un des deux modes, et peut-être à une arête de chaque mode; mais, dans aucun cas, elle n'appartiendra à deux arêtes différentes du même mode.

Enfin, les sommets C' seront les sommets C des deux modes, auxquels il faut adjoindre les points d'intersection des arêtes du premier mode avec celles du second.

De même, nous avons vu que la surface S_0 qui correspond au point O se trouve décomposée en polyèdre de q manières différentes. Superposons les q modes de subdivision; nous obtiendrons un polyèdre P'' dont les faces, les arêtes et les sommets s'appelleront F''_k, B''_k, C''_k . Chacune des faces F correspondant à l'un des q modes, de même que chacune des faces F' correspondant au polyèdre P'_i , que l'on obtient en regardant le point O comme appartenant à la coupure OA_i , se trouvera décomposée en un certain nombre de faces F'' . Chaque face F'' appartiendra à l'une des faces F' du polyèdre P'_i , et à une seule; à l'une des faces F de chacun des q modes de subdivision, et à une seule.

Chacune des arêtes B des q modes, chacune des arêtes B' des divers polyèdres P'_i se décomposera en un certain nombre d'arêtes B'' . Chaque arête B'' appartiendra à l'une des arêtes B de l'un des q modes, et à l'une des arêtes B' de l'un des polyèdres P'_i ; elle pourra appartenir à la fois à deux arêtes de deux modes différents, ou à deux arêtes B' de deux polyèdres P' différents, mais pas à deux arêtes B du même mode ou à deux arêtes B' du même polyèdre.

Les sommets C'' se composeront des sommets des q modes auxquels il faut adjoindre les points d'intersection des arêtes B appartenant à des modes différents.

Rien à changer en ce qui concerne les variétés de la catégorie 1; passons à la catégorie $\alpha\beta$. Chacune des cases $\alpha_i\beta_i F_k$ ou $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$ va se trouver décomposée en cases partielles $\alpha_i\beta_i F'_k$, $\alpha_i\beta_{i+1} F'_k$; de même, chacune des faces $\alpha\beta B$ sera décomposée en faces $\alpha\beta B'$. Aux arêtes $\alpha\beta C$ viendront s'adjoindre d'autres arêtes correspondant, comme nous l'avons vu plus haut, aux intersections de deux arêtes B appartenant à des modes différents. L'ensemble de ces arêtes constituera ce que j'appellerai les arêtes $\alpha\beta C'$.

On voit que les cases $\alpha_i\beta_i F'_k$ sont identiques aux cases $\alpha_i\beta_{i+1} F'_k$; de même pour les faces $\alpha_i\beta_i B'_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} B'_k$ et pour les arêtes $\alpha_i\beta_i C'_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} C'_k$. Mais il importe de remarquer que la case $\alpha_i\beta_i F_k$ se décompose en cases partielles $\alpha_i\beta_i F'$, qui ne sont pas les mêmes, en général, que les cases partielles dans lesquelles se décompose la case $\alpha_i\beta_{i+1} F_k$. La même observation s'applique aux faces $\alpha_i\beta_i B_k$ et $\alpha_i\beta_{i+1} B_k$.

Passons à la catégorie α . Quand le point M vient en A_i , les deux modes de décomposition de la surface S en polyèdre P se confondent; d'autre part, ce polyèdre dégénère, comme je l'ai dit, de sorte que certaines des variétés $\alpha_i F'_k$, $\alpha_i B'_k$, $\alpha_i C'_k$ pourront disparaître et que certaines pourront se confondre.

Passons à la catégorie β . Nous allons avoir des variétés partielles $\beta_i F''_k$, $\beta_i B''_k$, $\beta_i C''_k$.

Les faces $\beta_1 F''_k$, $\beta_2 F''_k$, ..., $\beta_q F''_k$ seront identiques; mais la face $\beta_1 F_k$ se décompose en faces partielles $\beta F''$, qui ne sont pas les mêmes, en général, que celles dans lesquelles se décomposent la face $\beta_2 F_k$, ou la face $\beta_3 F_k$, etc. Même observation pour les arêtes.

Cela posé, je fais d'abord la remarque suivante :

Une variété de la catégorie α sera toujours homologue à une somme de variétés appartenant à d'autres catégories.

Soit, par exemple, la face $\alpha_i F'_k$; elle appartient à la case $\alpha_i\beta_i F'_k$ qui admet, en outre, la face $\beta_i F'_k$ et celles des faces $\alpha_i\beta_i B'_k$, qui correspondent à des arêtes B'_k appartenant à la face F'_k du polyèdre P' . Si donc on a la congruence (pour ce polyèdre P')

$$F'_k \equiv \sum \varepsilon_q B'_q,$$

les ε_q étant des nombres égaux à $+1$, -1 ou 0 , on aura la congruence

$$\alpha_i \beta_i F'_k \equiv \alpha_i F'_k - \beta_i F'_k + \sum \varepsilon_q \alpha_i \beta_i B'_q$$

et, par conséquent, l'homologie

$$\alpha_i F'_k \sim \beta_i F'_k - \sum \varepsilon_q \alpha_i \beta_i B'_q.$$

Les variétés qui figurent dans le second membre de cette homologie appartenant aux catégories β et $\alpha\beta$, le théorème est démontré, et on l'établirait de même pour $\alpha_i B'_k$ et $\alpha_i C'_k$.

§ 2. Cycles à trois dimensions.

Je passe à la recherche des homologies et congruences entre ces variétés. Je commence par la remarque suivante :

Nous pouvons toujours supposer que nos congruences ne contiennent pas de variété de la catégorie α .

Soit, en effet,

$$\sum \alpha_i A + H \equiv 0$$

une congruence où les $\alpha_i A$ sont des variétés à p dimensions de la catégorie α (correspondant à une variété A du polyèdre P ou P'), et H une combinaison de variétés à p dimensions des autres catégories.

Nous aurons alors, sur notre polyèdre P ou P' , la congruence

$$A \equiv \sum \varepsilon \alpha,$$

où les ε sont des entiers et les α des variétés admettant une dimension de moins que A . On aura alors la congruence

$$\alpha_i \beta_i A \equiv \alpha_i A - \beta_i A + \sum \varepsilon \alpha_i \beta_i \alpha,$$

d'où l'homologie

$$\alpha_i A \sim \beta_i A - \sum \varepsilon \alpha_i \beta_i \alpha.$$

En combinant cette homologie avec la congruence

$$\sum \alpha_i A + H \equiv 0,$$

nous trouvons la congruence

$$\sum \beta_i A - \sum \varepsilon \alpha_i \beta_i \alpha + H \equiv 0,$$

qui ne contient plus de variété de la catégorie α .

Pour obtenir les homologies entre les cases, il suffit d'envisager celles qui se déduisent des hypercases.

Supposons que, sur le polyèdre P, on ait la congruence

$$F_k \equiv \sum \varepsilon_q B_q,$$

les ε étant égaux à $+1$, -1 ou 0 ; on aura, pour le polyèdre à quatre dimensions, la congruence

$$F_k \equiv \sum \varepsilon_q B_q + \sum \alpha_i \beta_i F_k - \sum \alpha_i \beta_{i+1} F_k,$$

et, par conséquent, l'homologie

$$(1) \quad \sum \varepsilon_q B_q \sim \sum \alpha_i \beta_{i+1} F_k - \sum \alpha_i \beta_i F_k.$$

Nous rappellerons, d'ailleurs, que $\alpha_i \beta_i F_k$, de même que $\alpha_i \beta_{i+1} F_k$, peut être remplacé par la somme de plusieurs cases partielles $\alpha_i \beta_i F'$.

D'où une première conséquence; soit $\sum \zeta_q B_q$ une combinaison quelconque des cases B_q , les ζ étant des entiers. Je suppose que, sur le polyèdre P, on ait, entre les arêtes B_q correspondantes, l'homologie

$$\sum \zeta_q B_q \sim 0,$$

c'est-à-dire que l'ensemble de ces arêtes (affectées chacune du coefficient ζ_q) forme sur la surface S un cycle fermé susceptible de se réduire à un point par déformation continue.

Alors on aura sur le polyèdre P la congruence

$$\sum \zeta_q B_q \equiv \sum \theta_k F_k,$$

les θ étant des entiers; on aura alors sur le polyèdre à quatre dimensions, la congruence

$$\sum \theta_k F_k \equiv \sum \zeta_q B_q + \sum \theta_k \alpha_i \beta_i F_k - \sum \theta_k \alpha_i \beta_{i+1} F_k,$$

d'où l'homologie

$$\sum \zeta_q B_q \sim \sum \theta_k \alpha_i \beta_{i+1} F_k - \sum \theta_k \alpha_i \beta_i F_k.$$

Si donc une combinaison d'arêtes B est homologue à zéro sur P, la combinaison correspondante de cases B sera homologue à une combinaison de cases de la catégorie $\alpha\beta$.

Cherchons maintenant les congruences entre les cases.

Ces congruences sont de la forme

$$(2) \quad \sum \zeta_q B_q + \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0,$$

les ζ et les θ' étant des entiers. Je dis d'abord que l'on aura sur le polyèdre P

$$\sum \zeta_q B_q \equiv 0,$$

c'est-à-dire que l'ensemble des arêtes (affectées des coefficients ζ) devra former un ou plusieurs cycles sur la surface S.

Soit, en effet, sur P, la congruence

$$B_q \equiv \sum \varepsilon_h C_h.$$

Nous aurons sur notre polyèdre à quatre dimensions la congruence

$$B_q \equiv \sum \varepsilon_h C_h + H,$$

H désignant une combinaison de faces n'appartenant pas à la catégorie 1. On aura, d'autre part,

$$\alpha_i \beta_i F'_k \equiv H,$$

H ayant toujours la même signification; on en déduit

$$\sum \zeta_q B_q + \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \zeta_q \varepsilon_h C_h + H,$$

H ayant toujours la même signification.

Comme le second membre doit être identiquement nul, on devra avoir identiquement

$$\sum \zeta_q \varepsilon_h C_h = 0.$$

On aura donc sur le polyèdre P

$$(3) \quad \sum \zeta_q B_q \equiv \sum \zeta_q \varepsilon_h C_h = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On doit donc avoir, en vertu de (2),

$$(4) \quad \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q.$$

Soit S(M) ce que devient la surface de Riemann S quand le point γ vient en M sur la coupure OA_i . Soit MF'_k la face F'_k du polyèdre P' correspondant à cette position du point M; soit MP la limite vers laquelle tend le polyèdre P quand le point γ se rapproche de M du côté $\alpha_i \beta_i$ de la coupure. Soit (MP) la limite vers laquelle tend ce même polyèdre quand le point γ tend vers M du côté $\alpha_i \beta_{i+1}$ de la coupure. Soit MB_q et (MB_q) les arêtes B_q des deux polyèdres MP et (MP).

Si alors nous reprenons la congruence (4) et que, dans chacune des variétés qui y figurent, nous conservions seulement les points qui appartiennent en même temps à S(M), nous aurons une congruence nouvelle

$$(5) \quad \sum \theta'_k MF'_k \equiv \sum \zeta_q (MB_q) - \sum \zeta_q MB_q.$$

Les expressions $\sum \zeta_q (MB_q)$ et $\sum \zeta_q MB_q$ représentent deux cycles tracés sur la

surface $S(M)$; soient Ω'_i et Ω_i ces deux cycles. De la congruence (5) on pourra tirer l'homologie

$$(6) \quad \Omega'_i - \Omega_i \sim 0,$$

qui doit avoir lieu sur la surface $S(M)$.

Supposons que γ , partant du point M du côté $\alpha_i\beta_i$ de la coupure, tourne autour du point singulier A_i et revienne au point M de l'autre côté de la coupure. Le cycle $\Sigma\zeta_q B_q$ se déformant d'une manière continue aura pour position initiale $\Sigma\zeta_q MB_q = \Omega_i$ et pour position finale $\Sigma\zeta_q(MB_q) = \Omega'_i$.

L'homologie exprime donc que Ω_i est homologue à son transformé Ω'_i (par la transformation que subissent les cycles de S quand γ tourne autour du point singulier A_i). Le cycle $\Sigma\zeta_q B_q$ reste donc homologue à lui-même par suite de cette transformation, et aussi par suite des transformations analogues correspondant aux autres points singuliers. Les cycles qui jouissent de cette propriété pourront s'appeler *cycles invariants*. Nous reviendrons plus loin sur cette notion. Nous voyons qu'à toute congruence de la forme (2) correspond un cycle invariant. *Je dis que, inversement, à tout cycle invariant correspond une congruence de la forme (2).*

Soit, en effet, $\Sigma\zeta_q B_q$ un cycle invariant. On aura sur $S(M)$

$$(6) \quad \Sigma\zeta_q(MB_q) \sim \Sigma\zeta_q MB_q$$

et, par conséquent, on pourra trouver des entiers θ' tels que

$$(5) \quad \Sigma\theta'_k MF'_k \equiv \Sigma\zeta_q(MB_q) - \Sigma\zeta_q MB_q$$

On en déduit la congruence

$$\Sigma\theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma\zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \Sigma\zeta_q \alpha_i \beta_i B_q + \Sigma\theta'_k \alpha_i F'_k - \Sigma\theta'_k \beta_i F'_k.$$

Le signe Σ se rapporte ici à l'indice k , l'indice i étant constant; mais de là nous pouvons déduire

$$\Sigma\zeta_q B_q + \Sigma\Sigma\theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma\Sigma\theta'_k \alpha_i F'_k - \Sigma\Sigma\theta'_k \beta_i F'_k,$$

le double signe Σ se rapportant alors aux deux indices i et k , car on a évidemment

$$\Sigma\zeta_q B_q \equiv \Sigma\Sigma\zeta_q \alpha_i \beta_i B_q - \Sigma\Sigma\zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q.$$

Il nous reste à démontrer que l'on doit avoir

$$\Sigma\theta'_k \alpha_i F'_k = 0, \quad \Sigma\Sigma\theta'_k \beta_i F'_k = 0.$$

Voyons d'abord ce qui concerne la première de ces égalités.

Reprenons la congruence (5) et faisons tendre le point M vers A_i , à la limite MF'_k se réduira à $\alpha_i F'_k$ et Ω_i se confondra avec Ω'_i et avec $\Sigma \zeta_{\eta} \alpha_i B_{\eta}$; la congruence (5) deviendra donc

$$(7) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k \equiv 0.$$

Examinons la signification de cette congruence. Supposons d'abord que, pour $\gamma = A_i$, la surface S ne se décompose pas, c'est-à-dire que la courbe

$$f(x, A_i, z) = 0$$

soit indécomposable. Alors la congruence ne peut avoir lieu que dans deux hypothèses : ou bien on a l'identité

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0,$$

je veux dire que dans le premier membre ne pourront figurer (avec un coefficient θ' différent de zéro) que les faces $\alpha_i F'_k$ qui disparaissent par suite de la dégénérescence du polyèdre P'_i , ainsi que je l'ai expliqué plus haut;

ou bien la combinaison $\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k$ représentera (une ou plusieurs fois) la surface de Riemann tout entière; de sorte que

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = n S.$$

Mais pour la surface S correspondant au point M, nous pouvons écrire

$$S = \Sigma MF'_k,$$

puisque l'ensemble des faces F'_k du polyèdre P'_i doit recouvrir la surface S tout entière.

On a d'ailleurs

$$\Sigma MP'_k \equiv 0.$$

Nous aurons donc la congruence

$$(5 \text{ bis}) \quad \Sigma (\theta'_k - n) MF'_k \equiv \Omega'_i - \Omega_i$$

et, d'autre part, quand M vient en A_i ,

$$\Sigma \alpha_i F'_k = S$$

et, par conséquent,

$$\Sigma (\theta'_k - n) \alpha_i F'_k = 0.$$

La seconde hypothèse est ainsi ramenée à la première; il suffit pour cela de changer θ'_k en $\theta'_k - n$, ce qui est permis puisque la congruence (5) se trouve ainsi remplacée par une congruence (5 bis) de même forme.

Supposons maintenant que la courbe $F(x, A_i, z)$ se décompose et, par exemple, que la surface de Riemann correspondante se décompose en deux surfaces partielles S_1 et S_2 .

Alors notre congruence (7) pourra avoir lieu pourvu que l'on ait

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = n_1 S_1 + n_2 S_2,$$

n_1 et n_2 étant des entiers. C'est du moins ce que l'on pourrait craindre, mais on peut de plusieurs manières voir qu'il n'en sera pas ainsi.

Le plus simple est de raisonner comme il suit :

Partons de la surface de Riemann S_0 qui correspond au point O ; faisons varier y d'une façon continue de O à A_i en suivant la coupure OA_i ; la surface de Riemann S se déformera d'une manière continue et en restant homéomorphe à elle-même. Soit $S(M)$ la surface S correspondant au point M . A chaque point de $S(M)$ on peut faire correspondre un point de S_0 puisqu'on peut passer de $S(M)$ à S_0 par déformation continue. Considérons sur $S(M)$ les deux cycles Ω_i et Ω'_i ; à ces deux cycles correspondront sur S_0 deux cycles fermés que j'appellerai U_i et U'_i .

Quand le point M parcourra OA_i d'un mouvement continu, les deux cycles U_i et U'_i se déplaceront d'un mouvement continu sur la surface S_0 . Quand M est très voisin de A_i , les deux cycles Ω_i et Ω'_i et, par conséquent, les deux cycles U_i et U'_i sont très voisins l'un de l'autre. Quand le point M vient en O , les deux cycles Ω_i et U_i deviennent identiques et se réduisent à

$$\Sigma \zeta_q \beta_l B_q = \Omega_i^0;$$

les deux cycles Ω'_i et U'_i deviennent identiques et se réduisent à

$$\Sigma \zeta_q \beta_{l+1} B_q = \Omega_{i+1}^0.$$

Supposons que le point M varie depuis A_i jusqu'à un certain point M_0 de la coupure OA_i ; les deux cycles U_i et U'_i , d'abord confondus, se sépareront et balayeront une certaine région R de S_0 ; à cette région correspondra sur $S(M_0)$ une certaine région qui sera formée d'un certain nombre de faces d'un polyèdre P'_i correspondant, puisqu'elle est limitée par les deux cycles Ω_i et Ω'_i qui sont formés d'arêtes de ce polyèdre. Nous pourrons écrire la congruence

$$(5) \quad \Sigma \theta'_k M F'_k \equiv \Omega'_i - \Omega_i,$$

où $\Sigma \theta'_k M_0 F'_k$ représentera précisément la région que nous venons de définir.

Cette région se réduisant à zéro quand M vient en A_i , nous aurons, dans tous les cas,

$$(8) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0.$$

Nous allons montrer maintenant que

$$\Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k = 0,$$

et pour cela nous allons étudier la somme $\Sigma \theta'_k \beta_i F'_k$.

D'après ce qui précède, ce n'est pas autre chose que la région balayée sur la surface S_0 par les deux cycles U_i et U'_i , quand le point M varie de A_i à O ; elle est limitée par les deux cycles Ω_i^0 et Ω_{i+1}^0 .

On voit que nous avons

$$\begin{aligned} \Sigma \theta'_k \beta_1 F'_k &\equiv \Omega_2^0 - \Omega_1^0, \\ \Sigma \theta'_k \beta_2 F'_k &\equiv \Omega_3^0 - \Omega_2^0, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Sigma \theta'_k \beta_q F'_k &\equiv \Omega_1^0 - \Omega_q^0, \end{aligned}$$

d'où, en additionnant,

$$\Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k \equiv 0.$$

Cette congruence nous montre que la combinaison $\Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k$ se réduit à zéro ou à un certain nombre de fois la surface S_0 .

Cherchons si cette dernière hypothèse peut se présenter. Supposons que γ décrive un contour fermé en restant infiniment près des coupures OA_i , décrivant d'abord l'une des lèvres de OA_1 , puis l'autre lèvre, puis les deux lèvres de OA_2 , et ainsi de suite, puis enfin les deux lèvres de OA_q . Considérons un cycle sur la surface de Riemann correspondante ; ce cycle se confondra d'abord avec Ω_1^0 quand γ sera en O sur la première lèvre de OA_1 ; quand γ décrira la première lèvre de OA_1 , ce cycle se déformera d'une manière continue, ce sera notre cycle Ω_1 et les points correspondants sur S_0 formeront le cycle U_1 ; quand le point γ reviendra de A_1 en O par la seconde lèvre, ce cycle ne sera autre chose que notre cycle Ω'_1 , et les points correspondants sur S_0 formeront le cycle U'_1 ; quand γ sera revenu en O, ce cycle se confondra avec Ω_2^0 ; quand γ décrira les deux lèvres de OA_2 , le cycle se fondra d'abord avec Ω_2 puis avec Ω'_2 , et les points correspondants sur S_0 formeront le cycle U_2 , puis le cycle U'_2 , et ainsi de suite. Il s'agit de savoir si ce cycle mobile, qui se confond successivement avec U_1 , avec U'_1 , U_2 , U'_2 , ..., U_q , U'_q et, dans sa position initiale, comme dans sa position finale, se confond avec Ω_1^0 , a décrit la surface S_0 tout entière.

Pour nous en rendre compte, il faut que nous voyions pourquoi ces cycles se déforment.

Considérons l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

où y sera regardé comme une constante; les points singuliers de z regardé comme fonction de x seront donnés par l'équation

$$\frac{df}{dz} = 0.$$

Considérons un cycle tracé sur la surface de Riemann. A ce cycle correspondra sur le plan des x un certain contour qui enveloppera un certain nombre de ces points singuliers. Quand y variera, ces points singuliers se déplaceront, et si nous ne voulons pas que le cycle passe par un de ces points singuliers, il faudra le déformer pour le faire fuir devant ces points singuliers mobiles. Quels que soient les déplacements de ces points singuliers, pourvu que deux d'entre eux ne viennent pas se confondre, il sera toujours possible de déformer continuellement le cycle de façon qu'il ne passe jamais par aucun de ces points; on pourra même choisir un certain nombre de points fixes et déformer le cycle de façon qu'il ne passe jamais par aucun de ces points singuliers ni par aucun des points fixes, pourvu que ces points singuliers ne se confondent jamais ni entre eux, ni avec les points fixes.

Quand y va varier, les points singuliers se déplaceront, et les points correspondants sur S_0 se déplaceront également. Ils ne pourraient se confondre que si y venait en un des points A_i , mais nous faisons tourner y autour de ces points, en en approchant très près, mais sans les atteindre. D'autre part, ces points vont décrire des lignes, et nous pourrons trouver sur S_0 une région ρ qui ne sera traversée par aucune de ces lignes. Ce seront les points de cette région ρ qui joueront le rôle des points fixes dont je parlais tout à l'heure. Alors nous pourrons déformer notre cycle de façon que, sans passer jamais par un des points singuliers, il ne pénètre jamais dans la région ρ . Il ne peut donc engendrer la surface S_0 toute entière. L'hypothèse en question doit être rejetée, de sorte que l'on aura toujours l'identité

$$(9) \quad \Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k = 0.$$

Pour terminer nous devons remarquer qu'il ne peut pas y avoir de congruences entre des cases de la catégorie $\alpha\beta$ seulement. Soit, en effet,

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0$$

une pareille congruence; nous trouverons d'abord

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma \theta'_k \varepsilon'_h \alpha_i \beta_i B'_h + \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k - \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k;$$

de sorte qu'on aura

$$\Sigma \theta'_k \varepsilon'_h \alpha_i \beta_i B'_h = 0, \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0, \quad \Sigma \theta'_k \beta_i F'_k = 0,$$

et, par conséquent, sur le polyèdre P'_i [en raisonnant comme nous avons fait pour déduire (5) de (4)],

$$\Sigma \theta'_k MF'_k \equiv 0.$$

L'ensemble des faces MF'_k (affectés des coefficients numériques θ'_k) du polyèdre P'_i doit donc être congru à zéro, c'est-à-dire former une surface fermée qui ne peut être que la surface de $S(M)$ tout entière. L'ensemble $\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k$ représentera alors la surface $S(A_i)$ tout entière; on ne pourra donc pas avoir

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0.$$

Donc notre congruence est impossible.

Nous savons que, pour obtenir tous les cycles à trois dimensions, il suffit de chercher les combinaisons de cases qui sont congrues à zéro sans être homologues à zéro.

D'abord, une pareille combinaison doit contenir des cases de la catégorie 1, nous venons de le voir; soit $\Sigma \zeta_q B_q$ l'ensemble de ces cases; l'ensemble des arêtes correspondantes doit former un cycle sur la surface S (c'est le cycle Ω_i). Ce cycle ne doit pas être homologue à zéro. Si, en effet, ce cycle était homologue à zéro, la combinaison $\Sigma \zeta_q B_q$ serait homologue à une combinaison de cases de la catégorie $\alpha\beta$; on pourrait donc remplacer $\Sigma \zeta_q B_q$ par cette combinaison dans le premier membre de notre congruence; ce premier membre ne contiendrait plus alors que des cases de la catégorie $\alpha\beta$, ce qui est impossible d'après ce que nous venons de voir.

Enfin, notre cycle Ω_i doit être *invariant*, c'est-à-dire qu'il doit se changer en un cycle homologue Ω'_i quand γ tourne autour de A_i . Mais quand γ tourne autour de l'un des points singuliers A_i , les cycles de la surface de Riemann subissent une des substitutions du *groupe de Picard*. Le cycle Ω_i doit donc être invariant pour le groupe de Picard.

Ainsi, à tout cycle à trois dimensions de V correspond un cycle de la surface S , invariant pour le groupe de Picard.

Réciproquement, considérons un cycle invariant pour le groupe de Picard.

Si Ω_i est une position de ce cycle sur le polyèdre P'_i , et si Ω'_i est ce que devient Ω_i quand γ a tourné autour de A_i , on aura

$$\Omega_i \sim \Omega'_i.$$

On pourra trouver des entiers θ' de façon à satisfaire à la congruence (5). La congruence (4) aura également lieu. Mais nous venons de voir que, dans ces conditions, les identités (8) et (9) ont lieu, de sorte que la congruence (4) peut s'écrire

$$\Sigma \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \Sigma \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q,$$

d'où

$$\Sigma \zeta_q B_q + \Sigma \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0.$$

Le premier membre de cette congruence représente un cycle à trois dimensions.

En résumé, autant le groupe de Picard admettra de cycles invariants distincts, autant la variété V admettra de cycles distincts à trois dimensions.

La meilleure manière de se représenter ces cycles à trois dimensions, c'est de supposer que l'on n'a pas seulement

$$\Omega_i \sim \Omega'_i,$$

mais identiquement

$$\Omega_i = \Omega'_i;$$

c'est une supposition que nous pouvons toujours faire, à cause de la façon arbitraire dont on peut faire correspondre point par point nos surfaces de Riemann.

Dans ces conditions, on donnera à γ toutes les valeurs possibles.

A chaque valeur correspondra une position du cycle Ω_i et, à cause de l'invariance de ce cycle, à deux points infiniment voisins situés de part et d'autre d'une des coupures correspondront deux positions infinies peu différentes du cycle Ω_i .

Les diverses positions de ce cycle engendreront donc un cycle fermé à trois dimensions.

§ 3. Cycles à deux dimensions.

Pour trouver tous les cycles à deux dimensions, il suffit de chercher toutes les combinaisons de faces qui sont congrues à zéro sans être homologues à zéro.

Nous pouvons d'abord supposer que cette combinaison ne contient pas de face de la catégorie α ; car, d'après ce que nous avons établi au début du paragraphe précédent, toute face de la catégorie α est homologue à des faces des catégories $\alpha\beta$ et β .

Il s'agit maintenant de chercher si ces combinaisons peuvent contenir des faces de la catégorie 1. J'observe d'abord ceci : soient C_1 et C_2 deux sommets quelconques du polyèdre P ; on pourra toujours passer de l'un à l'autre en suivant certaines arêtes de ce polyèdre, de sorte que nous aurons sur ce polyèdre la congruence

$$C_1 - C_2 \equiv \sum \zeta_q B_q,$$

le second membre représentant l'ensemble des arêtes par lesquelles on passe de C_1 à C_2 ; plus généralement on pourra trouver des entiers ζ tels que

$$(1) \quad \sum \varepsilon_k C_k \equiv \sum \zeta_q B_q,$$

pourvu que les ε soient des entiers tels que

$$\sum \varepsilon_k = 0,$$

car alors $\sum \varepsilon_k C_k$ pourra être regardé comme une somme de différences telles que $C_1 - C_2$.

Considérons alors sur la variété V la combinaison de faces $\sum \varepsilon_k C_k$, et supposons $\sum \varepsilon_k = 0$. Nous pourrions alors trouver des entiers ζ satisfaisant à la congruence (1); il viendra alors sur la variété V

$$\sum \zeta_q B_q \equiv \sum \varepsilon_k C_k + \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q$$

et, par conséquent,

$$\sum \varepsilon_k C_k \sim \sum \zeta_q \alpha_i \beta_{i+1} B_q - \sum \zeta_q \alpha_i \beta_i B_q,$$

ce qui montre que la combinaison $\sum \varepsilon_k C_k$ est homologue à une combinaison de faces de la catégorie $\alpha\beta$.

Supposons maintenant que l'on ait une congruence de la forme

$$\sum \varepsilon_k C_k + H = 0,$$

H représentant une combinaison de faces des catégories $\alpha\beta$ et β . Si l'on a $\sum \varepsilon_k = 0$, on peut remplacer dans le premier membre $\sum \varepsilon_k C_k$ par la combinaison de faces des catégories de β et $\alpha\beta$ qui lui est homologue; et alors ce premier membre ne contient plus de faces de la catégorie 1.

Si maintenant nous avons deux congruences de la même forme

$$\sum \varepsilon_k C_k + H \equiv 0, \quad \sum \varepsilon'_k C_k + H' \equiv 0,$$

nous pourrions trouver deux entiers n et n' tels que

$$n \Sigma \varepsilon_k + n' \Sigma \varepsilon'_k = 0,$$

et alors la congruence

$$\Sigma (n \varepsilon_k + n' \varepsilon'_k) C_k + n H + n' H' \equiv 0,$$

qui est une combinaison des deux précédentes, pourrait être ramenée à ne plus contenir de faces de la catégorie 1.

En résumé, s'il y a des congruences contenant des faces de la catégorie 1, il ne peut y en avoir deux distinctes.

Envisageons donc spécialement les congruences où ne figurent que des faces des catégories β et $\alpha\beta$. Soit

$$(2) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k \equiv 0$$

une de ces congruences.

Considérons les points communs aux variétés qui figurent dans cette congruence et à la surface $S(M)$; réduisons chacune de ces variétés à ces points communs, il viendra

$$(3) \quad \Sigma \theta'_k M B'_k \equiv 0.$$

En effet, le point M étant un point de la coupure OA_i , différent de O , la surface $S(M)$ n'a aucun point commun avec les faces de la catégorie β , pour lesquelles γ ne peut prendre que la valeur O . De même, la surface $S(M)$ n'aura aucun point commun avec les faces $\alpha_j \beta_j B'_k$, où l'indice j est différent de i , puisque pour ces faces γ devrait être sur la coupure OA_j , tandis que M est sur la coupure OA_i .

La congruence (3) signifie que, sur la surface $S(M)$, l'ensemble des arêtes B'_k du polyèdre P'_i (affectées des coefficients θ') doit former un cycle fermé; soit K_i ce cycle.

Mais observons que

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv \Sigma \theta'_k \alpha_i B'_k + H,$$

H étant un ensemble d'arêtes des catégories β et $\alpha\beta$. De même,

$$\Sigma \theta''_k \beta_i F''_k \equiv H',$$

H' étant une combinaison d'arêtes de la catégorie β .

On a donc

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k \equiv \Sigma \theta'_k \alpha_i B'_k + H + H',$$

de sorte que la congruence (2) ne peut avoir lieu que si l'on a identiquement

$$(4) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i B'_k = 0.$$

Comme il n'y a aucune relation entre les arêtes $0'_k \alpha_i B'_k$ appartenant à des indices i différents, l'identité (4) doit avoir lieu quand on donne à l'indice i une valeur déterminée et qu'on étend seulement la sommation aux différentes valeurs de l'indice k .

L'identité (4) signifie alors que, quand le point M tend vers A_i , le cycle K_i tend à se réduire à zéro.

En effet, quand M se réduit à A_i , la surface $S(M)$ dégénère et son genre diminue; certains de ces cycles disparaissent donc. Voyons comment ce fait se rattache à l'étude du groupe de Picard. Soit S_i la substitution de ce groupe qui correspond au point singulier A_i ; elle changera le cycle ω_h , par exemple, en

$$\omega'_h = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_{2p} \omega_{2p}.$$

Donc, pour $M = A_i$, on aura

$$\omega_h = \omega'_h,$$

ce qui veut dire, pour $M = A_i$, le cycle $\omega'_h - \omega_h$ disparaît.

Obtiendrons-nous ainsi tous les cycles qui disparaissent pour $M = A_i$ que j'appellerai *cycles évanouissants*?

M. Picard a montré (t. I, p. 82) que toute surface algébrique peut être ramenée par une transformation birationnelle à n'avoir que des singularités ordinaires, c'est-à-dire une courbe double avec des points triples.

Il a ensuite montré (p. 95) comment on détermine, pour une pareille surface, les points singuliers A_i et les substitutions du groupe de Picard qui correspondent à chacun d'eux.

On voit ainsi que, dans ce cas, il n'y a qu'un cycle évanouissant, lequel est justement engendré de la façon que je viens de dire.

Si l'on voulait envisager des surfaces possédant des singularités plus compliquées (par exemple des points coniques), il pourrait se faire qu'il y en eût d'autres.

Supposons, par exemple, une surface ordinaire admettant deux points singuliers correspondant à la même substitution du groupe de Picard; si l'on fait varier cette surface et qu'à la limite ces deux points singuliers se confondent, la surface limite admettra alors un cycle évanouissant n'admettant pas ce mode de génération.

Si alors nous considérons un cycle évanouissant quelconque $\Sigma \theta'_k MB'_k$, nous aurons la congruence

$$(5) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv - \Sigma \theta'_k \beta_i B'_k.$$

A chaque point singulier A_i faisons correspondre de la sorte un cycle évanouissant K_i et, par conséquent, une congruence de la forme (5). Additionnons toutes ces congruences; il viendra

$$\Sigma \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv - \Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i B'_k.$$

Supposons que l'ensemble des cycles K_i soit homologue à zéro, de façon que l'on ait sur la surface S

$$\Sigma K_i \sim 0,$$

on aura sur S_0

$$\Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i B'_k \sim 0,$$

c'est-à-dire qu'on pourra trouver des coefficients θ'' tels que

$$\Sigma \Sigma \theta'_k \beta_i B'_k \equiv \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k;$$

on aura alors

$$(2) \quad \Sigma \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k \equiv 0.$$

Ainsi, à chaque combinaison de cycles évanouissants K_i , telle que $\Sigma K_i \sim 0$, correspondra une congruence de la forme (2).

Aux congruences ainsi obtenues il convient d'adjoindre la suivante :

$$\Sigma \beta F''_k \equiv 0,$$

qui représente un cycle à deux dimensions formé de la surface S_0 tout entière. Toutes les congruences de la forme (2) seront manifestement des combinaisons de celles que nous venons d'obtenir.

Quelle est maintenant la condition pour que deux congruences de la forme (2) soient distinctes? ou, en d'autres termes, quelles sont les congruences de cette forme dont le premier membre est homologue à zéro?

Pour avoir toutes les homologues de la forme

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k \sim 0,$$

il faut chercher toutes les congruences entre cases et faces de la forme

$$(6) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k \equiv \Sigma \varepsilon_k B_k + \Sigma \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k.$$

Si nous réduisons toutes les variétés qui figurent dans la congruence (6) à leurs points communs avec une surface S correspondant à une valeur de γ non située sur une des coupures, il vient

$$\Sigma \varepsilon_k B_k \equiv 0,$$

ce qui signifie que l'ensemble d'arêtes $\Sigma \varepsilon_k B_k$ constitue un cycle fermé sur le polyèdre P . Soit $K(\gamma)$ ce cycle.

Soit $K(M_i)$ [ou $K'(M_i)$] la limite vers laquelle tend ce cycle quand le point y se rapproche d'un point M_i appartenant à la coupure OA_i par la première lèvre de cette coupure (ou par la seconde lèvre), de sorte que $K(M_i)$ [ou $K'(M_i)$] représentent l'ensemble des points communs à la surface $S(M)$ et à $\sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k$ (ou à $\sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k$).

On aura alors (puisque $\sum \varepsilon_k B_k$ représente un cycle fermé sur le polyèdre P)

$$(7) \quad \sum \varepsilon_k B_k \equiv \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k - \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k,$$

d'où

$$(8) \quad \sum \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k - \sum \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k + \sum \theta'_k \beta_i F'_k$$

ou, en réduisant toutes les variétés à leurs points communs avec la surface $S(M_i)$,

$$(9) \quad \sum \zeta'_k M_i F'_k \equiv \sum \theta'_k M_i B'_k + K'(M_i) - K(M_i);$$

c'est-à-dire qu'on doit avoir, sur le polyèdre P'_i ,

$$(10) \quad K_i \sim K(M_i) - K'(M_i),$$

car $\sum \theta'_k M_i B'_k$ n'est autre chose que le cycle que nous avons appelé plus haut K_i .

Si, d'ailleurs, la condition (10) est remplie, on pourra trouver des nombres ζ^i de façon à satisfaire à la congruence (9); on aura alors, en faisant tendre M_i vers A_i ,

$$\sum \zeta'_k \alpha_i F'_k \equiv \sum \theta'_k \alpha_i B'_k + K'(A_i) - K(A_i).$$

Or, par hypothèse, K_i est un cycle évanouissant pour le point singulier A_i ; de sorte que

$$\sum \theta'_k \alpha_i B'_k = 0.$$

D'ailleurs,

$$K'(A_i) = K(A_i) = \sum \varepsilon_k \alpha_i B_k.$$

Donc

$$\sum \zeta'_k \alpha_i F'_k \equiv 0;$$

ce qui signifie que l'ensemble des faces $\sum \zeta'_k \alpha_i F'_k$ forme une surface fermée; cela ne peut arriver que si

$$(11) \quad \sum \zeta'_k \alpha_i F'_k = 0$$

ou si $\sum \zeta'_k \alpha_i F'_k$ représente la surface $S(K_i)$ tout entière ou une des composantes de cette surface, dans le cas où cette surface est décomposable (voir *supra*, p. 408).

Si nous laissons de côté ce dernier cas, qui ne se présentera pas avec les surfaces n'admettant que des singularités ordinaires auxquelles M. Picard

ramène toutes les autres, et qui, d'ailleurs, pourrait être traité comme plus haut (p. 408), on voit que l'on peut toujours supposer

$$\Sigma \zeta'_k \alpha_i F'_k = n S(A_i),$$

n étant un entier; ou

$$\Sigma (\zeta'_k - n) \alpha_i F'_k = 0.$$

Or, dans la congruence (9), on peut remplacer ζ'_k par $\zeta'_k - n$ sans que la congruence cesse d'avoir lieu, car, la surface $S(M_i)$ étant fermée, on a

$$\Sigma M_i F'_k \equiv 0.$$

Nous pourrions donc toujours supposer que l'identité (11) a lieu. Il vient alors

$$\Sigma \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv \Sigma \zeta'_k \alpha_i F'_k + \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i B'_k + \Sigma \varepsilon_k \alpha_i \beta_{i+1} B_k - \Sigma \varepsilon_k \alpha_i \beta_i B_k - \Sigma \zeta'_k \beta_i F'_k.$$

Or, si nous tenons compte de l'identité (11) et si nous décomposons les faces F' en faces F'' , nous posons

$$- \Sigma \zeta'_k \beta_i F'_k = \Sigma \theta''_k \beta_i F''_k;$$

nous retrouverons la congruence (8) et, en ajoutant la congruence (7), nous aurons enfin la congruence (6).

Ainsi, à chaque système d'homologies telles que (10) correspond une homologie entre les faces, et il n'y en a pas d'autres.

Nous vérifions également que la combinaison $\Sigma \beta_i F''_k$, qui représente la surface de Riemann S_0 tout entière et qui, par conséquent, est congrue à zéro, n'est pas homologue à zéro.

Si, en effet, on avait une congruence de la forme (6), tous les θ' étant nuls, on devrait avoir une homologie de la forme (10), les cycles K_i étant nuls; ce qui veut dire que le cycle $K(\gamma)$ serait invariant pour toutes les substitutions du groupe de Picard.

Les cycles $K'(M_i)$ et $K(M_i)$ ne seront alors pas autre chose que ce que nous avons appelé Ω'_i et Ω_i dans le paragraphe précédent; nous retrouverons alors l'homologie (5) du paragraphe précédent, laquelle ne différera que par les notations de l'homologie (9) du présent paragraphe; il suffit, en effet, pour passer de l'une à l'autre, d'annuler les θ' , de changer $K'(M_i)$ en Ω'_i , $K(M_i)$ en Ω_i , et d'écrire θ'_k au lieu de ζ'_k . Pour adopter les notations du paragraphe précédent, il faut écrire enfin $\zeta_q B_q$ au lieu de $\varepsilon_k B_k$.

Dans ce cas, nous aurons entre nos cases la congruence (2) du paragraphe précédent qui s'écrit

$$\Sigma \zeta_q B_q + \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0,$$

ou, en revenant aux notations du présent paragraphe,

$$\Sigma \varepsilon_k B_k + \Sigma \zeta'_k \alpha_i \beta_i F'_k \equiv 0.$$

Cela montre que le premier membre de (6) doit être identiquement nul, c'est-à-dire que non seulement les θ' , mais les θ'' doivent être nuls.

Ainsi, toute homologie entre les faces $\beta F''$ se réduit à une identité, et, en particulier, on n'a pas

$$\Sigma \beta_i F''_k \sim 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Avant de conclure, je dois encore examiner les congruences où entrent des cases de la catégorie 1. Nous venons de voir qu'il ne peut y avoir plus d'une pareille congruence, ou plutôt que, s'il y avait deux pareilles congruences, elles ne seraient pas distinctes et qu'on pourrait passer de l'une à l'autre en ajoutant une homologie.

Voyons s'il existe une pareille congruence,

$$(12) \quad \Sigma \varepsilon_k C_k + H \equiv 0,$$

où H est une combinaison de faces des catégories $\alpha\beta$ et β . D'abord nous devons supposer que $\Sigma \varepsilon_k$ n'est pas nul, sans quoi l'on pourrait ramener à une des congruences étudiées plus haut.

J'ajoute que, s'il existe une congruence de cette forme (12) où $\Sigma \varepsilon_k$ ne soit pas nul, cette congruence est certainement distincte des précédentes, car il ne peut pas y avoir d'homologie de la forme

$$(13) \quad \Sigma \varepsilon_k C_k + H \sim 0$$

sans que $\Sigma \varepsilon_k$ soit nul.

Existe-t-il donc une congruence de la forme (12)? Pour le démontrer sans m'exposer à une discussion qui serait assez longue sans être difficile, je supposerai que, parmi les sommets du polyèdre P , en figurent m (que j'appellerai C_1, C_2, \dots, C_m), si m est le degré en z de l'équation $f(x, y, z) = 0$ et qui correspondent à une valeur donnée de x , par exemple $x = x_0$ (voir *infra*, § 5).

Alors la combinaison $C_1 + C_2 + \dots + C_m$, que j'écrirai pour abrégé, ΣC_k , n'est autre chose que la surface de Riemann représentée par l'équation entre y et z

$$f(x_0, y, z) = 0.$$

On a alors

$$\Sigma C_k \equiv \Sigma C_k \alpha_i \beta_i - \Sigma C_k \alpha_i \beta_{i+1} :$$

les m sommets C_1, C_2, \dots, C_m ne faisant que s'échanger quand on passe d'une des lèvres de OA_i à l'autre en tournant autour de A_i , nous aurons

$$\sum C_k \alpha_i \beta_i = \sum C_k \alpha_i \beta_{i+1}$$

et, par conséquent,

$$\sum C_k \equiv 0.$$

Cette congruence est bien de la forme (12) et

$$\sum \varepsilon_k = m \neq 0.$$

Nous avons donc d'abord deux cycles à deux dimensions singuliers qui sont les deux surfaces de Riemann correspondant, l'une à $y = 0$ et l'autre à $x = x_0$.

Pour former les autres cycles à deux dimensions, il suffit de considérer q cycles

$$K_1, K_2, \dots, K_q,$$

correspondant aux q points singuliers

$$A_1, A_2, \dots, A_q,$$

chacun d'eux étant évanouissant par rapport au point singulier qui lui correspond; ces cycles doivent d'ailleurs satisfaire, sur le polyèdre P , à la condition

$$\sum K_i \sim 0.$$

Deux systèmes de cycles

$$\begin{array}{c} K_1, K_2, \dots, K_q, \\ K'_1, K'_2, \dots, K'_q \end{array}$$

nous donneront deux cycles à deux dimensions distincts, à moins que l'on n'ait (sur P)

$$K'_i - K_i \sim K'(M_i) - K(M_i),$$

$K(y)$ étant un cycle quelconque du polyèdre P .

Si nous désignons par U_i et U'_i ce que deviennent les cycles K_i et K'_i quand le point M_i vient en O ; par Ω_i ce que devient le cycle $K(y)$ quand le point y tend vers O dans l'angle $A_{i-1}OA_i$, alors cela signifie que nous devons avoir sur S_0

$$\sum U_i \sim 0, \quad \sum U'_i \sim 0,$$

et que nous ne devons pas avoir, si nous voulons deux cycles distincts,

$$U'_i - U_i \sim \Omega_{i+1} - \Omega_i.$$

Voyons combien nous obtiendrons ainsi de cycles distincts, et pour cela

Le nombre des cycles à deux dimensions distincts (γ compris les deux cycles singuliers) sera donc

$$2 + (\mu + 2p + 1) - (n - 2p).$$

Voyons comment peuvent être engendrés ces cycles à deux dimensions non singuliers, en nous restreignant au cas le plus général, c'est-à-dire à celui où il n'y a pas de cycle évanouissant de la seconde sorte. Dans ce cas, on a

$$K_i = \Gamma'_i - \Gamma_i,$$

Γ_i étant un cycle et Γ'_i son transformé par la substitution qui correspond à A_i .

Décrivons donc dans le plan des γ des lacets L_1, L_2, \dots, L_q , partant du point O et γ aboutissant, et entourant respectivement les points singuliers A_1, A_2, \dots, A_q .

Soit Γ_i un cycle de la surface S_0 ; quand γ partant du point O décrira le lacet L_i , la surface S et le cycle se déformeront; quand γ reviendra au point O , ce cycle sera devenu le cycle Γ'_i de S_0 ; dans son mouvement, il aura engendré une surface σ_i limitée par les deux courbes fermées Γ_i et Γ'_i .

Si alors on a

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_q = \Gamma'_1 + \Gamma'_2 + \dots + \Gamma'_q,$$

l'ensemble des surfaces $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_q$ formera une surface fermée. Ce sera notre cycle à deux dimensions.

§ 4. Cycles à une dimension.

Le problème des cycles à une dimension a été entièrement résolu par M. Picard; je n'aurai donc qu'à traduire avec nos notations le raisonnement de M. Picard.

Cherchons quelles sont les congruences entre les arêtes. Ainsi que nous l'avons vu au début du paragraphe 2, nous pouvons toujours supposer qu'une pareille congruence ne contient pas d'arêtes de la catégorie α . Notre congruence devra donc être de la forme

$$(1) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k + \Sigma \theta''_k \beta_i B''_k \equiv 0.$$

Observons que

$$\begin{aligned} \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k &\equiv \Sigma \theta'_k \alpha_i C'_k + H, \\ \Sigma \theta''_k \beta_i B''_k &\equiv H', \end{aligned}$$

H et H' étant un ensemble de sommets de la catégorie β . Il vient donc

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i C'_k + H + H' = 0,$$

et, comme les sommets $\alpha_i C'_k$ ne peuvent se réduire ni avec les sommets de la catégorie β , ni avec ceux de la catégorie α où l'indice de α serait différent de i , on doit avoir

$$(2) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i C'_k = 0,$$

la sommation étant étendue à tous les sommets $\alpha_i C'_k$ appartenant à un même indice i , mais aux divers indices k .

Que signifie cette identité (2) ? quand, γ venant en A_i , le polyèdre P'_i dégénère, plusieurs sommets peuvent se confondre, mais aucun ne peut disparaître (tandis qu'il peut y avoir disparition d'arêtes ou de faces). La somme algébrique de tous les coefficients θ'_k relatifs aux divers sommets $\alpha_i C'_k$, qui se confondent en un seul, doit donc être nulle; donc la somme de tous les θ'_k est nulle.

$$(3) \quad \Sigma \theta'_k = 0.$$

A cause de la relation (3), nous pouvons trouver sur le polyèdre P'_i une combinaison d'arêtes $\Sigma \zeta'_k B'_k$ telle que

$$(4) \quad \Sigma \zeta'_k B'_k \equiv \Sigma \theta'_k C'_k.$$

On aura alors

$$(5) \quad \Sigma \zeta'_k \alpha_i \beta_i B'_k \equiv \Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k - \Sigma \zeta'_k \beta_i B'_k + \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k.$$

D'ailleurs, lorsque γ vient en A_i , les arêtes et les sommets B'_k et C'_k du polyèdre P'_i deviennent les arêtes et les sommets $\alpha_i B'_k$ et $\alpha_i C'_k$; nous avons donc la congruence

$$\Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k \equiv \Sigma \theta'_k \alpha_i C'_k$$

ou, à cause de (2),

$$\Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k \equiv 0.$$

Cette congruence signifie que la combinaison $\Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k$ forme un cycle fermé sur la surface de Riemann $S(A_i)$. Mais, quand, γ venant en A_i , la surface de Riemann dégénère, des cycles peuvent disparaître, mais il n'arrive jamais que des cycles nouveaux apparaissent. Donc, au cycle $\Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k$ correspondra sur la surface $S(M_i)$ au moins un cycle fermé $\Sigma \varepsilon'_k M_i B'_k$, se réduisant à $\Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k$ pour $M_i = \alpha_i$, de sorte que l'on ait

$$(6) \quad \begin{aligned} \Sigma \varepsilon'_k M_i B'_k &\equiv 0, \\ \Sigma \varepsilon'_k \alpha_i B'_k &= \Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k. \end{aligned}$$

Si alors nous remplaçons ζ'_k par $\zeta'_k - \varepsilon'_k$, la congruence (4) subsistera encore à cause de (6); la congruence (5) sera encore également vraie, et l'on aura

$$\Sigma (\zeta'_k - \varepsilon'_k) \alpha_i B'_k = 0.$$

Nous pouvons donc toujours supposer que les ζ'_k aient été choisis de telle façon que

$$(7) \quad \Sigma \zeta'_k \alpha_i B'_k = 0.$$

Si nous rapprochons la congruence (5) de l'identité (7), nous aurons l'homologie

$$(8) \quad \Sigma \theta'_k \alpha_i \beta_i C'_k \sim \Sigma \zeta'_k \beta_i B'_k$$

et, en ajoutant cette homologie à (1), il vient

$$\Sigma \zeta'_k \beta_i B'_k + \Sigma \theta'_k \beta_i B'_k \equiv 0,$$

où ne figurent plus que des arêtes de la catégorie β .

Nous pouvons donc toujours supposer que notre congruence (1) ne contient que des arêtes de la catégorie β . C'est le théorème de Picard, d'après lequel un cycle à une dimension peut toujours être ramené dans une position telle que y soit constant tout le long de ce cycle.

A chacun des cycles fermés de la surface S_0 correspond donc une congruence de la forme (1), mais toutes ces congruences ne sont pas distinctes. C'est ce qu'a montré M. Picard. Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2p}$ les $2p$ cycles de S_0 , et supposons qu'une substitution S_h du groupe de Picard change ω_i en

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_{2p} \omega_{2p},$$

on aura l'homologie

$$(9) \quad \omega_i \sim m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_{2p} \omega_{2p}.$$

Ces homologies réduisent le nombre des cycles à une dimension, et M. Picard a montré même que, pour la surface algébrique la plus générale, ce nombre se réduit à zéro.

Appelons *cycles subsistants* ceux qui ne sont pas une combinaison linéaire de divers cycles évanouissants par rapport à divers points singuliers A_i . Ce sont ceux qui restent distincts quand on tient compte des homologies (9). Et, en effet, l'homologie (9) exprime que le cycle

$$\omega_i - \Sigma m_k \omega_k$$

est évanouissant par rapport au point singulier qui correspond à la substitution S_h du groupe de Picard.

Il y a donc autant de cycles à une dimension que de cycles subsistants. Nous avons vu, d'autre part, qu'il y a autant de cycles à trois dimensions que de cycles invariants.

Or, d'après le théorème fondamental sur les nombres de Betti, il doit y avoir autant de cycles à une dimension que de cycles à trois dimensions.

Il doit donc y avoir autant de cycles subsistants que de cycles invariants.

C'est ce que nous allons vérifier.

Cette vérification est aisée s'il n'y a pas de cycles évanouissants de la seconde sorte.

Rappelons, en effet, que le groupe de Picard est d'une forme particulière.

Soient $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2p}$ les cycles fondamentaux et envisageons la forme bilinéaire.

$$\Phi = \omega'_2 \omega_1 - \omega'_1 \omega_2 + \omega'_4 \omega_3 - \omega'_3 \omega_4 + \dots + \omega'_{2p} \omega_{2p-1} - \omega'_{2p-1} \omega_{2p}.$$

Pourvu que les cycles fondamentaux aient été convenablement choisis, si l'on fait subir aux ω l'une des substitutions linéaires du groupe de Picard, et qu'on fasse subir en même temps aux ω' cette même substitution linéaire, la forme Φ demeure inaltérée, D'autre part, le nombre des cycles subsistants sera le même que celui des solutions distinctes du système (A) d'équations linéaires obtenues en égalant chaque cycle fondamental à son transformé par chacune des substitutions de Picard.

Soit alors $\Sigma m_i \omega_i$ un cycle invariant; comme l'expression $\Sigma m_i \omega_i$ peut être assimilée à la forme linéaire Φ , en faisant

$$\omega'_2 = m_1, \quad \omega'_1 = -m_2, \quad \omega'_4 = m_3, \quad \omega'_3 = -m_4, \quad \dots;$$

comme, d'autre part, $\Sigma m_i \omega_i$ se change en $\Sigma m_i \omega_i$ quand les ω subissent une des substitutions linéaires du groupe de Picard, nous devons conclure que le système de valeurs

$$-m_2, \quad m_1, \quad -m_4, \quad m_3, \quad \dots$$

est son propre transformé par cette substitution linéaire. C'est donc une solution du système (A) dont nous venons de parler.

On voit, d'ailleurs, qu'à deux ou plusieurs cycles invariants linéairement indépendants correspondront ainsi deux ou plusieurs solutions du système (A) linéairement indépendantes, et inversement.

Il y aura donc autant de cycles subsistants que de cycles invariants.

C. Q. F. D.

Qu'arrivera-t-il, maintenant, s'il y a des cycles évanouissants de la seconde sorte?

J'ai déjà dit que ce cas ne peut se présenter pour ces surfaces à singularités

ordinaires auxquelles M. Picard a ramené toutes les autres (t. I, p. 85). Il est vrai qu'il pourrait avoir lieu pour d'autres surfaces si l'on voulait les étudier sans leur faire subir préalablement la transformation de M. Picard; mais ces surfaces présenteraient un point singulier d'une nature spéciale, et la variété V à quatre dimensions engendrée par cette surface présenterait elle-même un point singulier.

Or, les théorèmes généraux qui nous occupent et que nous avons démontrés dans l'*Analysis situs* et ses compléments ne sont pas applicables aux variétés V présentant des points singuliers; ils cesseraient, en général, d'être vrais pour ces variétés, à moins que l'on ne fasse des conventions spéciales.

La question même de savoir si un cycle évanouissant de la seconde sorte doit être regardé comme homologue à zéro dépend encore des conventions également légitimes que l'on peut faire. Il est vrai qu'un pareil cycle sert de frontière complète à une variété à deux dimensions faisant partie de V ; mais sur cette variété se trouve un point singulier de V .

Pour faire comprendre la difficulté qui en résulte, prenons un exemple beaucoup plus simple; imaginons dans l'espace ordinaire une surface présentant un point conique, ou plus simplement encore un cône de révolution avec son prolongement. Soit S le sommet du cône, C une circonférence de ce cône. Dans un sens, la circonférence C est la frontière complète d'une région de ce cône, celle qui est comprise entre la circonférence C et le sommet S . Mais, d'un autre côté, une ligne tracée sur le cône pourra sortir de cette région sans traverser C si, en passant par le sommet S , elle passe d'une nappe du cône à l'autre.

Dans ces conditions, il semblera préférable de laisser de côté ces cas singuliers et de se borner à ces surfaces à singularités ordinaires auxquelles toutes les autres peuvent être ramenées.

§ 5. Remarques diverses.

Dans la suite des démonstrations, nous avons été amené à faire diverses hypothèses au sujet de nos polyèdres. Rappelons-les sommairement :

1° Nous avons supposé que (voir p. 401) le polyèdre que nous avons appelé P' restait homéomorphe à lui-même quand γ suivait la coupure OA_i depuis A_i jusqu'en O .

2° Nous avons comparé (voir p. 408) la surface de Riemann S_0 , qui corres-

pond au point O , à la surface de Riemann $S(M)$ qui correspond au point M , et nous avons dit qu'on pouvait faire correspondre ces deux surfaces point par point. Nous nous sommes servi de cette correspondance pour définir les cycles U_i et U'_i qui correspondent sur S_0 à Ω_i et Ω'_i .

3° Nous avons admis ensuite (p. 408) que, quand le point M varie depuis A_i jusqu'à M_0 , les deux cycles U_i et U'_i , d'abord confondus, balayent une certaine région R de S_0 à laquelle correspond, sur $S(M_0)$, la région $\Sigma\theta'_k M_0 F'_k$.

4° Nous avons admis que, quand le point M décrit successivement les deux lèvres de la coupure OA_1 , puis les deux lèvres de OA_2 , . . . , et, enfin, les deux lèvres de la coupure OA_q , le cycle mobile U_i (qui revient à sa situation initiale Ω_i^0 après avoir occupé une série continue de situations successives) ne balaye pas la surface S_0 tout entière.

5° Nous avons dit (p. 415) que, si la surface $f(x, y, z) = 0$ a été ramenée, par les procédés de M. Picard, à ne posséder que des singularités ordinaires, à chaque point singulier A_i correspond un seul cycle évanouissant.

6° Nous avons supposé (p. 419) que parmi les sommets de P en figurent m qui correspondent à une valeur constante de x , par exemple $x = 0$.

La légitimité de ces hypothèses étant à peu près évidente, je n'ai pas voulu interrompre les raisonnements des paragraphes précédents, pour en donner une démonstration explicite. Je n'aurais, d'ailleurs, pu le faire qu'en particularisant le polyèdre P , c'est-à-dire en faisant des hypothèses particulières sur la manière dont la surface de Riemann S est subdivisée en polyèdre.

Je crois utile maintenant de revenir sur ces différents points et de faire la démonstration, en adoptant une quelconque de ces hypothèses particulières sur P .

On pourrait, par exemple, construire le polyèdre P de la façon suivante :

Commençons par réduire la surface $f = 0$ à n'avoir que des singularités ordinaires.

Donnons à y une valeur quelconque, et considérons la surface de Riemann S correspondante. Cette surface se composera de m feuillets appliqués sur le plan des x (si l'équation $f = 0$ est de degré m en z).

Marquons sur le plan des x l'origine O et les points singuliers correspondant aux équations

$$f = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0.$$

Soit n le nombre de ces points singuliers; soient B_1, B_2, \dots, B_n ces points

singuliers. Joignons le point O aux n points singuliers B_1, B_2, \dots, B_n par n coupures OB_1, OB_2, \dots, OB_n ne se coupant pas mutuellement et se succédant autour du point O dans l'ordre sus-indiqué.

On obtiendra la surface de Riemann de la façon ordinaire en raccordant la première lèvre de l'une des coupures sur un des feuillets avec la seconde lèvre de cette même coupure sur un autre feuillet. Par le tracé de ces coupures, la surface de Riemann sera ainsi subdivisée en un polyèdre qui sera notre polyèdre P .

On voit que ce polyèdre a m faces (qui sont les F_k) et que chacune de ces faces est un polygone de $2n$ côtés.

Qu'arrive-t-il maintenant quand on fait varier γ ? Les points singuliers B vont se déplacer; les coupures OB se déformeront, et nous supposons qu'elles se déforment de façon à ne jamais se couper et à se succéder toujours dans le même ordre autour de O . Quand γ décrira un petit contour fermé, cette déformation pourra se faire de telle façon que les coupures reviennent à leurs positions primitives, à moins qu'il n'y ait à l'intérieur du contour un point singulier.

Les points singuliers possibles sont de deux sortes :

1° D'abord ceux qui correspondent au cas où deux des points singuliers B s'échangent entre eux (un raisonnement de M. Picard montre que si la surface $f = 0$ n'a que des singularités ordinaires, cela ne peut arriver que si le plan $\gamma = \text{const.}$ est tangent à la surface $f = 0$);

2° Puis ceux qui correspondent aux cas où l'un des points singuliers B vient en O .

Les points singuliers de la seconde sorte ne sont pas essentiels, et j'aurais pu les faire disparaître si je n'avais cru plus avantageux de les conserver,

Je désigne tous ces points singuliers par A_1, A_2, \dots, A_q et je trace dans le plan des γ les coupures OA_1, OA_2, \dots, OA_q .

Tant que γ ne franchit pas ces coupures OA , les coupures OB peuvent se déformer de façon à ne jamais se couper mutuellement, et, par conséquent, de façon que P reste homéomorphe à lui-même, et en même temps de façon que, si γ décrit un contour fermé, ces coupures OB reviennent à leurs positions initiales.

Comparons maintenant les configurations des coupures OB quand γ se trouve en deux points infiniment voisins sur les deux lèvres d'une coupure OA_i .

Supposons d'abord que A_i soit un point singulier de la première sorte. Si l'on suppose que la surface $f = 0$ n'a que des singularités ordinaires et que, par conséquent, le plan $y = A_i$ est tangent à $f = 0$ en un point ordinaire, on voit que, quand y tourne autour de A_i , deux des points singuliers, par exemple B_1 et B_3 , s'échangent. De plus, si le point B_1 permute deux des feuilletts de la surface de Riemann, le point B_3 qui s'échange avec lui permutera les deux mêmes feuilletts de cette surface. J'appellerai ces deux feuilletts *le premier et le second feuillet de la surface*.

Quand y ayant tourné autour de A_i reviendra infiniment près de sa position primitive, mais sur l'autre lèvre de la coupure, on pourra supposer que les

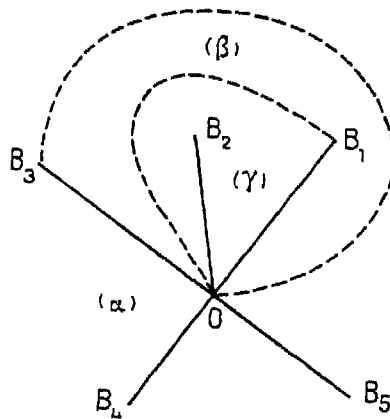


Fig. 1.

coupures OB sont revenues à leur situation primitive, à l'exception des coupures OB_1 et OB_3 . Ces deux dernières coupures, qui occupaient primitivement les lignes OB_1 et OB_3 marquées en trait plein sur la figure, occuperont finalement les lignes OB_3 et OB_1 marquées en trait pointillé sur la figure.

On voit que la surface de Riemann peut être subdivisée de deux manières en un polyèdre P , les deux modes de subdivision diffèrent l'un de l'autre parce que les lignes pleines OB_1 et OB_3 sont remplacées par les lignes pointillées OB_3 et OB_1 .

Si l'on superpose les deux modes de subdivision, on aura le polyèdre que j'ai appelé P' . On voit que deux des m faces de P , celles qui correspondent aux deux premiers feuilletts, ont été subdivisées en trois faces partielles désignées sur la figure par les lettres (α) , (β) , (γ) .

Lorsque y décrira la coupure OA_i , les points B se déplaceront d'une manière continue, sans jamais se confondre ni entre eux, ni avec le point O (sauf, bien

entendu, quand y vient en A_i). Il en résulte que l'on peut déformer toutes nos coupures OB (tant en trait plein qu'en trait pointillé) en évitant qu'elles ne se coupent jamais mutuellement. Cela veut dire que le polyèdre P' restera constamment homéomorphe à lui-même. Dire que P' restera homéomorphe à lui-même, c'est dire que l'on peut faire correspondre point par point la surface $S(M)$ à une autre surface $S(M')$ correspondant à une autre position M' de y sur OA_i , et en particulier à S_0 . On remarquera que la correspondance peut se faire de façon qu'à un point à l'infini sur $S(M)$ corresponde un point à l'infini sur $S(M')$.

Lorsque y vient en A_i , le polyèdre P dégénère : les deux points B_1 et B_3 se confondent. Il en est de même de la coupure OB_1 trait plein avec OB_3 pointillé, ainsi que de OB_1 pointillé avec OB_3 trait plein. Le polygone partiel marqué (β) sur la figure disparaît alors.

Pour aller plus loin, remarquons qu'il y a deux coupures qui se projettent suivant la ligne OB_1 en trait plein ; quand on suit la première (que nous appellerons B_1G) de O en B_1 , on a le premier feuillet à gauche et le second à droite ; quand on suit la seconde (que nous appellerons B_1D), on a le premier feuillet à droite et le second à gauche. Nous définirons de même B_3G et B_3D . Si, au lieu de la ligne OB_1 en trait plein, nous envisageons la ligne OB_1 en trait pointillé, nous obtiendrons de même deux coupures que j'appellerai B'_1G et B'_1D ; et je définirai encore de même B'_3G et B'_3D .

Nous voyons tout de suite que, quand y tourne autour de A_i , les coupures B_1G et B'_3G , B_1D et B'_3D , B_3G et B'_1G , B_3D et B'_1D se permutent ; que, pour $y = A_i$, B_1G et B'_3G , . . . se confondent.

Je désignerai par β_1 celui des polygones partiels β qui appartient au premier feuillet si l'on adopte la première subdivision, celle qui correspond au trait plein ; l'autre polygone β s'appellera β_2 .

On a alors les congruences

$$\beta_1 \equiv B'_1D - B_1D + B'_3D - B_3D,$$

$$\beta_2 \equiv B'_1G - B_1G + B'_3G - B_3G,$$

qui nous apprennent quelles sont celles de nos coupures qui servent de frontières à β_1 et à β_2 .

Considérons la combinaison

$$\omega = B_3D - B'_1D - B_3G + B'_1G.$$

C'est un cycle de notre surface de Riemann; quand γ tourne autour de A_i , elle se change en

$$B'_1 D - B_3 D - B'_1 G + B_3 G,$$

c'est-à-dire en $-\omega$. C'est donc un cycle évanouissant. Il est aisé de voir qu'il n'y en a pas d'autre.

Reprenons maintenant les cycles que nous avons appelés Ω_i et Ω'_i au paragraphe 2. Soit

$$\Omega_i = \zeta_1 B_1 D + \zeta_2 B_1 G + \zeta_3 B_3 D + \zeta_4 B_3 G + H,$$

les ζ étant des coefficients entiers et H une combinaison d'autres arêtes de P_1 . Comme le cycle Ω_i doit être fermé, on devra avoir

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta_3 + \zeta_4 = 0.$$

puisque le sommet B_1 , par exemple, n'appartient qu'aux deux arêtes $B_1 D$ et $B_1 G$. Nous aurons ensuite

$$\Omega'_i = \zeta_1 B'_3 D + \zeta_2 B'_3 G + \zeta_3 B'_1 D + \zeta_4 B'_1 G + H.$$

Car les arêtes de P , autres que $B_1 D$, $B_1 G$, $B_3 D$, $B_3 G$, ne sont pas altérées quand γ tourne autour de A_i , c'est-à-dire que H n'est pas altéré.

On aura donc

$$\begin{aligned} \Omega_i - \Omega'_i = & \zeta_1 (B_1 D - B_1 G - B'_3 D + B'_3 G) \\ & + \zeta_3 (B_3 D - B_3 G - B'_1 D + B'_1 G). \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} (B_1 D - B_1 G - B'_3 D + B'_3 G) = & (B'_1 G - B_1 G + B'_3 G - B_3 G) \\ & - (B'_1 D - B_1 D + B'_3 D - B_3 D) \\ & - (B_3 D - B'_1 D - B_3 G + B'_1 G) \end{aligned}$$

ou

$$(B_1 D - B_1 G - B'_3 D + B'_3 G) + \omega \equiv \beta_2 - \beta_1;$$

d'où

$$\begin{aligned} \Omega_i - \Omega'_i + (\zeta_1 - \zeta_3)\omega & \equiv \zeta_1(\beta_2 - \beta_1), \\ \Omega_i - \Omega'_i & \sim (\zeta_3 - \zeta_1)\omega. \end{aligned}$$

Or, nous avons supposé que le cycle Ω_i est invariant, c'est-à-dire que

$$\Omega_i \sim \Omega'_i,$$

ce qui exige $\zeta_1 = \zeta_3$. Dans ces conditions, reprenons la congruence (5) du paragraphe 2, qui peut s'écrire

$$\Omega_i = \Omega'_i \equiv \Sigma \theta'_k M F'_k.$$

En la rapprochant de la congruence précédente, nous trouvons

$$\Sigma \theta'_k MF'_k = \zeta_1(\beta_2 - \beta_1).$$

Quand γ (ou M) vient en A_i , les polygones partiels β_1 et β_2 disparaissent, de sorte que le second membre de cette égalité disparaît; le premier se réduit à $\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k$, d'où l'on tire

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0.$$

Ainsi se trouve justifié ce que nous avons dit aux pages 407 et suivantes.

Supposons maintenant que A_i soit un point singulier de la seconde sorte, et que pour $\gamma = A_i$ le point singulier B_1 vienne en O .

Nous pouvons faire alors une figure analogue à la figure 1; pour simplifier, je représenterai trois points singuliers seulement, B_1 , B_2 et B_3 .

Quand γ tourne autour de A_i , la coupure OB_1 reprend sa situation primi-

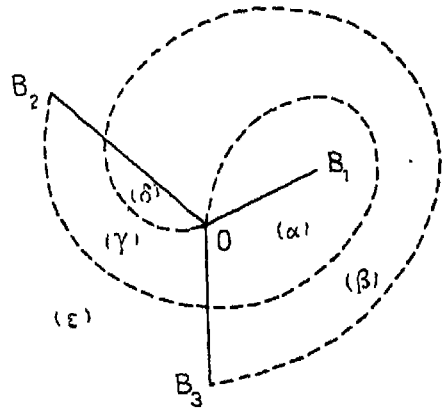


Fig. 2.

tive, mais les coupures OB_2 et OB_3 (trait plein) se transforment dans les coupures OB_2 et OB_3 (trait pointillé).

Nous avons deux modes de subdivision et, en les superposant, on a le polyèdre P' .

Chaque face de P (c'est-à-dire chaque feuillet de S) se trouve subdivisée en un certain nombre de faces partielles. Dans le cas de la figure 2, il y en a cinq désignées sur la figure par (α) , (β) , (γ) , (δ) , (ϵ) .

Il est clair que, quand γ décrira la coupure OA_i , on peut s'arranger pour que la figure précédente (et, par conséquent, le polyèdre P') reste constamment homéomorphe à elle-même.

Je désignerai par OB_2 et OB_3 les coupures en trait plein, par OB'_2 et OB'_3 les

coupures correspondantes en trait pointillé. Je vois que, ces coupures se coupant mutuellement, chacun des tronçons de ces coupures formera l'une des arêtes de P' . Je distinguerai, sur chacune de ces coupures, le *tronçon terminal*, c'est-à-dire celui qui aboutit au point B_2 ou B_3 .

Quand γ vient en A_i , le polyèdre P' dégénère; plusieurs de ses arêtes se réduisent à zéro, à savoir l'arête OB_1 et tous les tronçons de OB_2 , OB_3 , OB'_2 , OB'_3 , *les tronçons terminaux exceptés*. D'ailleurs, le tronçon terminal de OB_2 se confond avec celui de OB'_2 et celui de OB_3 avec celui de OB'_3 . Il en résulte que les quatre faces partielles (α) , (β) , (γ) , (δ) disparaissent.

Il n'y a pas ici de cycle évanouissant, le point singulier A_i n'étant pas essentiel.

Nous avons sur la figure

$$OB_2 - OB'_2 \equiv (\alpha) + (\gamma) + (\delta),$$

$$OB_3 - OB'_3 \equiv (\alpha) + (\beta) + (\delta).$$

Revenons à notre cycle Ω_i ; nous aurons

$$\Omega_i = \Sigma \zeta_1 OB_1 + \Sigma \zeta_2 OB_2 + \Sigma \zeta_3 OB_3.$$

Je mets le signe Σ parce qu'il y a plusieurs coupures (appartenant à différents feuilletts de la surface de Riemann) qui se projettent suivant OB_1 . On aura ensuite

$$\Omega'_i = \Sigma \zeta_1 OB_1 + \Sigma \zeta_2 OB'_2 + \Sigma \zeta_3 OB'_3;$$

d'où

$$\Omega_i - \Omega'_i = \Sigma \zeta_2 (OB_2 - OB'_2) + \Sigma \zeta_3 (OB_3 - OB'_3),$$

$$\Omega_i - \Omega'_i \equiv \Sigma \zeta_2 [(\alpha) + (\gamma) + (\delta)] + \Sigma \zeta_3 [(\alpha) + (\beta) + (\delta)],$$

et, en comparant à la congruence (5) du paragraphe 2,

$$\Sigma \theta'_k MF'_k = \Sigma \zeta_2 [(\alpha) + (\gamma) + (\delta)] + \Sigma \zeta_3 [(\alpha) + (\beta) + (\delta)].$$

Quand γ vient en A_i , (α) , (γ) , (δ) disparaissent, de sorte qu'il reste

$$\Sigma \theta'_k \alpha_i F'_k = 0,$$

ce qui justifie encore ici ce que nous avons dit page 407.

Supposons que le point γ décrive les différentes coupures OA_1, OA_2, \dots, OA_q , les points singuliers B décriront certaines lignes; nous pouvons supposer qu'aucune de ces lignes ne s'éloigne indéfiniment. En effet, si cela n'était pas, nous trouverions toujours dans le plan des x un petit cercle qui ne serait coupé par aucune de ces lignes, et alors, par un simple changement linéaire de variables, nous pourrions rejeter le centre de ce cercle à l'infini.

Donc, quand le point γ décrira successivement les deux lèvres de OA_1 , les deux lèvres de OA_2 , etc., et, enfin, celles de OA_q , les points singuliers B resteront à distance finie. Nous pourrons donc diriger la déformation des coupures OB de façon que ces coupures restent à distance finie. Le cycle Ω_i , qui est formé par une combinaison de ces coupures, restera donc toujours à distance finie; et il en sera de même du cycle U_i , qui lui correspond sur S_0 [car nous pouvons choisir la correspondance de $S(M)$ avec S_0 de façon qu'à un point à l'infini sur $S(M)$ corresponde un point à l'infini sur S_0]. Ce cycle ne pourra donc balayer la surface S_0 tout entière, ce qui justifie ce que nous avons dit page 410.

On remarquera enfin que, parmi les sommets de P , nous en avons m qui correspondent à $x = 0$.

Toutes nos hypothèses se trouvent donc justifiées.



CINQUIÈME COMPLÉMENT

A

L'ANALYSIS SITUS

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 18, p. 45-110 (1904).

1. J'ai déjà eu souvent l'occasion de m'occuper d'*Analysis situs*; j'ai d'abord publié un Mémoire sur ce sujet dans le tome du *Centenaire du Journal de l'École Polytechnique*; ce Mémoire a été suivi de quatre compléments qui ont paru dans le tome XIII des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, dans le tome XXXVII des *Proceedings of the London Mathematical Society*, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* en 1901, et enfin dans le *Journal de Liouville* en 1901.

Je reviens encore aujourd'hui sur cette même question, persuadé qu'on n'en pourra venir à bout que par des efforts répétés et qu'elle est assez importante pour les mériter.

Cette fois je me suis borné à l'étude de certaines variétés à trois dimensions, mais les méthodes que j'ai employées pourront être sans doute d'un usage plus général. En passant je me suis étendu assez longuement sur certaines propriétés des courbes fermées que l'on peut tracer sur les surfaces fermées de l'espace ordinaire.

Le résultat final que j'avais en vue est le suivant. Dans le second complément j'ai montré que pour caractériser une variété il ne suffit pas de connaître ses nombres de Betti, mais que certains coefficients que j'ai appelés coefficients de torsion (second complément, § 5, p. 363) jouaient un rôle important.

On pourrait alors se demander si la considération de ces coefficients suffit;

si une variété dont tous les nombres de Betti et les coefficients de torsion sont égaux à 1 est pour cela simplement connexe au sens propre du mot, c'est-à-dire homéomorphe à l'hypersphère; ou si, au contraire, il est nécessaire, avant d'affirmer qu'une variété est simplement connexe, d'étudier son *groupe fondamental*, tel que je l'ai défini dans le *Journal de l'École Polytechnique*, paragraphe 12, page 239.

Nous pouvons maintenant répondre à ces questions; j'ai formé, en effet, un exemple d'une variété dont tous les nombres de Betti et les coefficients de torsion sont égaux à 1, et qui pourtant n'est pas simplement connexe.

2. Je considère une variété V à m dimensions située dans l'espace à k dimensions. Soit ensuite

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) = t$$

l'équation d'une surface à $k - 1$ dimension située dans ce même espace et que j'appellerai la surface $\varphi(t)$; dans cette équation x_1, x_2, \dots, x_k sont les coordonnées d'un point dans l'espace à k dimensions et t un paramètre arbitraire tel que la surface $\varphi(t)$ se déforme d'une manière continue quand t varie d'une manière continue. Je supposerai que la fonction φ est uniforme de telle façon que par un point quelconque passe une surface $\varphi(t)$ et une seule.

La surface $\varphi(t)$ coupera V suivant un certain nombre de variétés à $m - 1$ dimensions

$$\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_p(t)$$

dont l'ensemble formera le système $W(t)$.

Quand t variera d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le système $W(t)$ variera d'une manière continue et *engendrera* la variété V . Si la variété V est fermée, les variétés $\omega(t)$ le seront également.

Cela posé, je vais définir ce que j'appellerai le *squelette* de la variété V . A chacune des variétés partielles $\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_p(t)$ je ferai correspondre un point dans l'espace ordinaire. L'une des coordonnées de ce point, x par exemple, sera égale au paramètre t , les deux autres seront choisies arbitrairement, en s'assujettissant seulement aux conditions suivantes :

1° Si deux variétés $\omega_i(t), \omega_i(t + \varepsilon)$ sont très peu différentes l'une de l'autre, les deux points correspondants devront être très voisins l'un de l'autre.

2° Il peut arriver que pour certaines valeurs de t , pour $t = t_0$ par exemple, une des variétés $\omega(t)$ se décompose en deux autres; dans ce cas, par exemple, la variété $\omega_1(t_0 - \varepsilon)$ différera très peu de l'ensemble des deux variétés

$\omega_1(t_0 + \varepsilon) + \omega_2(t_0 + \varepsilon)$. Dans ce cas, on doit s'arranger de façon que les deux points qui représentent les deux variétés $\omega_1(t_0 + \varepsilon)$ et $\omega_2(t_0 + \varepsilon)$ qui résultent du dédoublement de $\omega_1(t_0 - \varepsilon)$, que ces deux points, dis-je diffèrent très peu l'un de l'autre et très peu du point représentatif de $\omega_1(t_0 - \varepsilon)$.

Dans ces conditions, quand t variera d'une manière continue, les points représentatifs des p variétés

$$\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_p(t)$$

engendreront p lignes continues

$$L_1, L_2, \dots, L_p,$$

du moins tant que le nombre p ne varie pas. Mais ce nombre peut varier pour $t = t_0$, si l'une des variétés se décompose en deux, ou si, au contraire, deux variétés se réunissent en une seule. Dans le premier cas, l'une des lignes L se bifurque, dans le second deux des lignes L se réunissent en une seule.

On obtient ainsi une sorte de réseau de lignes, et c'est ce réseau que j'appelle le *squelette* de V . J'ai tracé ce réseau dans l'espace à trois dimensions et non dans le plan, parce qu'on peut ainsi toujours éviter que deux lignes se coupent en d'autres points que les points de bifurcation.

Si nous suivons l'une de ces lignes, L_1 par exemple, décrite par le point représentatif de $\omega_1(t)$, nous voyons que cette variété $\omega_1(t)$ reste constamment homéomorphe à elle-même [et cela de telle façon que sur les deux variétés très voisines $\omega_1(t)$ et $\omega_1(t + \varepsilon)$, deux points correspondants diffèrent très peu l'un de l'autre] *tant que l'on ne passe pas par une valeur de t telle que $\omega_1(t)$ ait un point singulier.*

Nous devons donc marquer sur les lignes de notre réseau les points qui correspondent aux variétés $\omega(t)$ qui ont des points singuliers. Ce seront des points de division qui partageront nos lignes en tronçons, mais tant qu'on suivra l'un de ces tronçons, la variété $\omega(t)$ correspondante restera homéomorphe à elle-même.

Remarquons que si l'on considère une des valeurs t_0 qui correspondent aux points de bifurcation, et pour lesquelles une des variétés ω_i se dédouble, la variété $\omega_i(t_0)$ admet également un point singulier. Cela va donc nous obliger à étudier ces points singuliers.

Mais avant de procéder à cette étude, je dois faire encore quelques remarques. Si je veux que la variété V soit fermée, il faut d'abord que les variété $\omega(t)$

soient fermées elles-mêmes. La seconde condition c'est que, si l'une de mes lignes L aboutit à un cul-de-sac, de telle façon qu'elle s'arrête pour $t = t_1$ par exemple, la variété correspondante tende à se réduire à un point quand t tend vers t_1 , c'est-à-dire quand on se rapproche du cul-de-sac.

En second lieu, j'ai dit que je choisissais la fonction φ uniforme, de telle façon que par un point de l'espace passe une surface $\varphi = t$ et une seule. Dans ces conditions, le système $W(t)$ n'est pas quelconque. Cette restriction ne m'a pas empêché de montrer que toute variété V est susceptible de ce mode de génération, mais on peut s'en affranchir et considérer un système quelconque $W(t)$ de variétés fermées

$$\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_p(t)$$

pourvu que ces variétés varient d'une manière continue avec t , en supposant bien entendu que pour certaines valeurs de t , une de ces variétés puisse se réduire à un point, ou se décomposer en deux autres.

Dans ces conditions, le système $W(t)$ engendrera encore une variété V et l'on pourra en définir le squelette d'après les mêmes principes auxquels il n'y aura rien à changer.

Il y a cependant un cas où l'on pourra avec avantage y faire un léger changement. J'imagine que pour deux valeurs de t , par exemple pour $t = 0$ et pour $t = 2\pi$, le système $W(t)$ soit le même, ou mieux, j'imagine que les deux systèmes $W(t)$ et $W(t + 2\pi)$ soient identiques. Il suffit alors de faire varier t de 0 à 2π , et il convient, par conséquent, de choisir le point représentatif de la variété $\omega(t)$, non plus de telle façon que l'on ait $x = t$, mais de telle façon que $\text{arc tg } \frac{y}{x} = t$, c'est-à-dire que les points représentatifs de $\omega(t)$ et $\omega(t + 2\pi)$ puissent être identiques.

Si nous supposons, par exemple, que $W(t)$ se réduise à une seule variété $\omega(t)$, le squelette de V se réduira dans ces conditions à une courbe fermée.

Pour prendre un exemple tout à fait simple, considérons un tore qui sera notre variété V et regardons-le comme engendré par son cercle méridien qui sera notre variété $\omega(t)$, identique à $\omega(t + 2\pi)$. Avec nos nouvelles conventions, le squelette de ce tore se réduit à une courbe fermée.

Abordons maintenant l'étude des points singuliers des variétés $\omega(t)$. La portion d'une de ces variétés voisine du point singulier pourra être représentée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_i &= \psi_i(y_1, y_2, \dots, y_q) & (i = 1, 2, \dots, k), \\ \varphi_h(y_1, y_2, \dots, y_q) &= 0 & (h = 1, 2, \dots, q - m) \end{aligned}$$

auxquelles il conviendrait d'adjoindre certaines inégalités dont nous n'avons pas à nous occuper.

Dans la région envisagée, les fonctions φ et ψ sont holomorphes. Nous pouvons toujours supposer que le point singulier correspond à

$$y_1 = y_2 = \dots = y_q = 0$$

et que pour cette valeur les dérivées partielles du premier ordre des fonctions φ ne sont pas toutes nulles, *sauf pour l'une d'entre elles* φ_1 .

Alors, des équations

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_{q-m} = 0$$

nous pourrons tirer tous les y en fonction de $m + 1$ d'entre eux, lesquelles fonctions resteront holomorphes dans le voisinage du point singulier. Je remplacerai donc les y par les expressions ainsi trouvées, de sorte que tout se trouvera exprimé en fonction de $m + 1$ des quantités y , par exemple de y_1, y_2, \dots, y_{m+1} et que nos équations prendront la forme

$$\begin{aligned} x_i &= \psi_i(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}), \\ \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) &= 0. \end{aligned}$$

La fonction φ_1 est développable suivant les puissances des y et ce développement commence par des termes du second degré dont l'ensemble constitue une forme quadratique $f(y_1, y_2, \dots, y_{m+1})$.

Il est inutile d'envisager les points singuliers des autres types, car s'il y en avait, il suffirait pour les faire disparaître de changer très peu la fonction $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ qui définit les surfaces $\varphi(t)$, du moins si l'on suppose que la variété V est elle-même dépourvue de point singulier. Nous sommes ainsi amené à étudier le cône du second degré

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) = 0$$

dans l'espace à $m + 1$ dimensions des y , et son intersection avec l'hypersphère

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{m+1}^2 = 1.$$

Soit C cette intersection. Tout dépendra du nombre des dimensions et du nombre des carrés positifs et négatifs dans la décomposition de la forme f en une somme de carrés.

Nous pouvons toujours par un changement de coordonnées ramener f à la forme

$$f = \Sigma A_i y_i^2 - \Sigma B_k y_k^2,$$

les coefficients A et B étant positifs, de façon qu'il y ait q carrés positifs

et $m + 1 - q$ carrés négatifs et que l'indice i varie de 1 à q et l'indice k de $q + 1$ à $m + 1$.

Je puis écrire alors

$$\Sigma A_i y_i^2 = \Sigma B_k y_k^2 = \lambda^2;$$

d'où

$$y_i = \eta_i \lambda, \quad y_k = \eta_k \lambda,$$

les η étant des solutions quelconques des équations

$$(1) \quad \Sigma A_i \eta_i^2 = 1, \quad \Sigma B_k \eta_k^2 = 1.$$

On en déduit

$$\lambda^2 (\Sigma \eta_i^2 + \Sigma \eta_k^2) = 1.$$

En tenant compte des équations (1), on verra que les limites supérieure et inférieure de $\Sigma \eta_i^2$ sont les inverses du plus petit et du plus grand des coefficients A. On trouvera, de même, une limite supérieure et inférieure de $\Sigma \eta_k^2$. On en conclura que λ est une fonction continue des η [supposés liés par les équations (1)] et que cette fonction ne peut ni s'annuler ni devenir infinie. Nous pouvons donc supposer que λ reste toujours positif; et alors λ sera une fonction continue et parfaitement déterminée des η ; il en sera donc de même des y .

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1° Si q est nul ou égal à $m + 1$ de façon que tous les carrés soient de même signe, il est clair que le cône se réduit à un point et que C n'existe pas.

2° Si q n'est pas égal à 1, on pourra passer d'une façon continue d'une solution quelconque de l'équation $\Sigma A_i \eta_i^2 = 1$ à une autre solution quelconque; si, au contraire, $q = 1$, cette équation ne comportera que deux solutions : $\eta_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{A_1}}$ et l'on ne pourra passer de l'une à l'autre d'une manière continue.

De même si q n'est pas égal à m , on pourra passer d'une façon continue d'une solution quelconque de l'équation $\Sigma B_k \eta_k^2 = 1$ à une autre solution quelconque; si, au contraire, $q = m$, l'équation n'aura que deux solutions et le passage sera impossible.

Outre le cas examiné plus haut, il y en a donc trois.

Si $1 < q < m$, C est d'un seul tenant.

Si $1 = q < m$, ou si $1 < q = m$, C se compose de deux morceaux.

Si $1 = q = m$, C se compose de quatre morceaux, ou mieux se réduit à quatre points discrets.

Dans ce dernier cas, on a $m = 1$, et la variété V n'a que deux dimensions; cela nous avertit que nous allons rencontrer une différence entre les variétés de deux ou de plus de deux dimensions.

Supposons d'abord que V ait deux dimensions ($m = 1$); nous pouvons avoir alors :

1° $q = 0$ ou $q = 2$. Dans ce cas C n'existe pas; quand t passe par la valeur qui correspond à un pareil point singulier, nous voyons une nouvelle variété $\omega(t)$ apparaître (ou disparaître) : elle se réduit d'abord à un point, puis à une petite courbe fermée. Ce point singulier correspond donc à un cul-de-sac du squelette.

2° $q = 1$. Dans ce cas, C se réduit à quatre points que je puis numéroter 1, 2, 3, 4. La variété $\omega(t)$ se réduit à une courbe qui admet, comme point singulier, un point double ordinaire où se croisent deux branches de courbe qui sont les branches 1.3 et 2.4. Je suppose que le point singulier se présente pour $t = 0$; j'appellerai 1', 2', 3', 4' les points de la variété $\omega(t)$ qui, pour des valeurs de t très petites, sont respectivement très voisins des points 1, 2, 3, 4 de la variété $\omega(0)$.

Je commence par observer que la branche de courbe qui, partie du point double va au point 1, doit revenir au point double, puisque toutes nos courbes sont fermées; il peut y revenir par un des trois autres points 2, 3, 4. Il en résulte que nos points 1, 2, 3, 4 sont associés à deux, par exemple 1 avec 2, et 3 avec 4, de telle façon que l'on puisse aller de 1 à 2 et de 3 à 4 en suivant la courbe $\omega(0)$ et sans passer dans le voisinage du point double. De même, on pourra aller de 1' à 2' et de 3' à 4' en suivant la courbe $\omega(t)$ et sans passer dans le voisinage du point double, et cela pour toutes les petites valeurs de t , qu'elles soient positives ou négatives.

Maintenant, si nous considérons le voisinage du point double, nous voyons que pour $t < 0$, par exemple, on peut passer de 1' à 2' et de 3' à 4' en suivant $\omega(t)$ et en passant près du point double, tandis qu'on ne peut pas passer de la sorte de 1' à 4' et de 2' à 3'. Au contraire, pour $t > 0$, on peut passer de 1' à 4' et de 2' à 3', mais pas de 1' à 2' et de 3' à 4'.

Il en résulte que pour $t < 0$, les branches envisagées de $\omega(t)$ forment deux courbes fermées distinctes tandis que pour $t > 0$, elles n'en forment plus qu'une.

Notre point singulier correspond donc à une bifurcation du squelette.

Il en est de même si 1 est associé avec 4, et 2 avec 3.

Mais supposons maintenant que 1 soit associé avec 3, et 2 avec 4. Nous voyons alors que pour $t < 0$, comme pour $t > 0$, notre variété $\omega(t)$ se réduit à une seule courbe fermée; seulement pour $t < 0$ cette courbe passe successivement par les points $1'3'4'2'1'$, et pour $t > 0$ par les points $1'3'2'4'1'$. Notre point singulier ne correspond plus alors à une bifurcation.

Mais je dis que, dans ce cas, la variété V est unilatère.

Pour nous en rendre compte, prenons une surface fermée quelconque à deux dimensions (bilatère ou unilatère), décomposons-la (en la laissant d'un seul morceau) de façon à pouvoir la développer sur un plan; nous obtiendrons ainsi un polygone, analogue aux polygones fuchsien, dont les côtés seront conjugués deux à deux, deux côtés conjugués correspondant aux deux lèvres d'une même coupure.

Soient AB et $A'B'$ deux côtés conjugués, de telle façon que le sommet A soit conjugué de A' et le sommet B de B' . Si en allant de A en B on a l'intérieur du polygone, à sa gauche par exemple, et si en allant de A' en B' on a l'intérieur à sa droite, nous dirons que la conjugaison est *directe*.

Si, au contraire, en allant de A en B on a l'intérieur à sa gauche, et si en allant de A' en B' on a l'intérieur également à sa gauche, nous dirons que la conjugaison est *inverse*. (Cette convention surprendra d'abord mais elle se justifie avec un peu de réflexion). Cela posé, si toutes les paires de côtés sont conjugués *directement* (ainsi qu'il arrive pour les polygones fuchsien), c'est que la surface d'où l'on était parti était bilatère. Si pour une paire de côtés, la conjugaison est inverse, c'est que cette surface était unilatère.

Supposons, par exemple que notre polygone soit un rectangle dont les sommets se succèdent dans l'ordre circulaire $ABCD$ et dont les côtés opposés soient conjugués. Si AB est conjugué de DC , et AD de BC , la conjugaison est directe, et le polygone peut être regardé comme provenant du développement d'un tore, surface bilatère. Si AB est conjugué de CD , et AD de BC , la conjugaison est inverse pour l'une des paires et directe pour l'autre, et le polygone provient du développement d'une surface unilatère analogue à celle de Möbius. Si AB est conjugué de CD , et AD de CB , la conjugaison est inverse pour les deux paires et le polygone provient du développement du « plan projectif » qui est une surface unilatère.

Cela posé, appliquons ces règles à notre variété V , découpons-la et appliquons-la sur un plan de façon à obtenir notre polygone. Je ne représente sur la figure que la partie du polygone qui nous intéresse.

Nous avons en O le point singulier; les lignes CHD , $\dot{A}EB$, $C'H'D'$, $A'E'B'$ représentent une portion du contour du polygone. Les deux lignes E_1O3E' et H_2O4H' qui se croisent en O sont le développement de la courbe $\omega(o)$. Les lignes $B_1'2'C$, $B'3'4'C'$ sont le développement de la courbe $\omega(t)$ pour $t < 0$. Les lignes $D_2'3'A'$ et $D'4'1'A$ sont le développement de la courbe $\omega(t)$ pour $t > 0$. Par hypothèse, cette courbe $\omega(t)$ se ferme sur elle-même de façon que la branche $1'$ se raccorde à la branche $3'$ et la branche $2'$ à la branche $4'$.

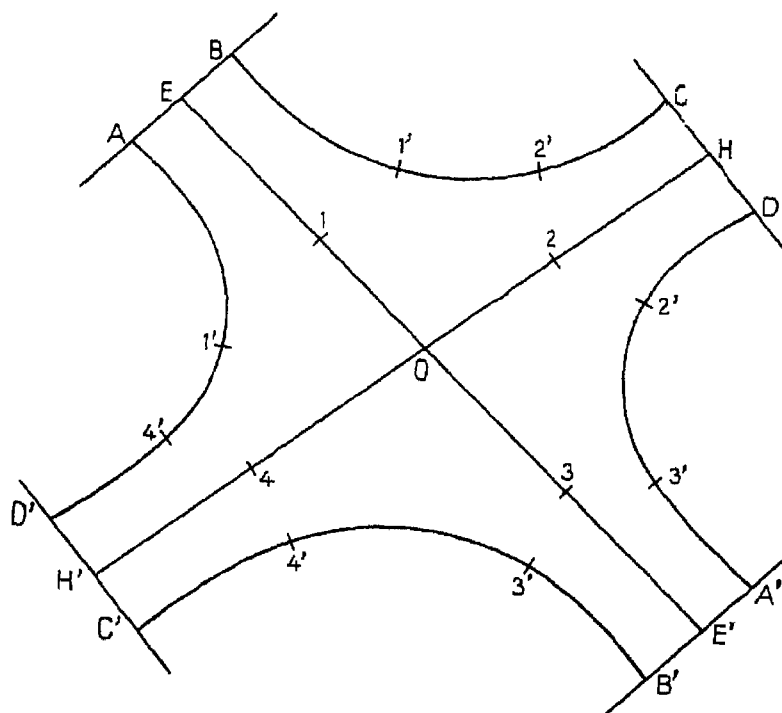


Fig. 1.

Donc A doit venir se recoller à A' , c'est-à-dire que A est conjugué de A' et, de même, B de B' , C de C' , D de D' . Ainsi, sur notre polygone, AB est conjugué de $A'B'$, et CD de $C'D'$; la conjugaison est inverse. Donc notre surface est unilatère.

C. Q. F. D.

Si donc V a deux dimensions et est bilatère, son squelette n'aura d'autre point singulier que les culs-de-sac et les bifurcations. C'est là le secret de la simplicité relative de l'*Analysis situs* des surfaces ordinaires.

J'arrive aux variétés V à trois dimensions ($m = 3$) auxquelles je me bornerai pour le moment. Nous avons encore à distinguer deux cas :

1° $q = 0$ ou $q = 3$; alors C n'existe pas, et le point singulier correspond à un cul-de-sac du squelette.

2° $q = 1$ ou $q = 2$; alors C se compose de deux morceaux; la variété $\omega(0)$ présente un point conique ordinaire (si le point singulier correspond à $t = 0$); les parties de cette variété voisines du point singulier sont assimilables à un cône du second degré ordinaire. Donnons maintenant à t des valeurs très petites. Les parties de $\omega(t)$ voisines du point singulier seront assimilables, par exemple, à un hyperboloïde à une nappe pour $t < 0$ et à un hyperboloïde à deux nappes pour $t > 0$.

Considérons l'ellipse de gorge E de l'hyperboloïde à une nappe; cette ellipse pour $t = -\varepsilon$ (ou ε est positif et très petit) est un cycle fermé très petit tracé sur $\omega(t)$; pour $t = 0$, elle se réduit à un point et, pour $t = +\varepsilon$, elle disparaît.

Ce que nous avons appelé C (intersection du cône et de l'hypersphère) se compose ici de deux courbes fermées (on est dans le cas de $q = 1$, ou $q = m$), et nous devons distinguer deux cas: ou bien on ne peut pas passer d'une de ces deux courbes fermées à l'autre en restant sur $\omega(t)$ et sans passer dans le voisinage du point singulier, ou bien ce passage est possible.

Dans le premier cas, l'ellipse E partage la variété $\omega(-\varepsilon)$ en deux parties, car on ne peut pas passer du voisinage de l'une des courbes C au voisinage de l'autre courbe C sans passer dans le voisinage du point singulier, c'est-à-dire sans couper l'ellipse de gorge E . On aura donc sur $\omega(-\varepsilon)$

$$E \sim 0.$$

Dans le second cas, au contraire, E ne divisera pas $\omega(-\varepsilon)$.

Dans le premier cas, les nappes de $\omega(t)$ qui vont passer dans le voisinage du point singulier forment une seule surface fermée pour $t = -\varepsilon$ puisqu'on peut toujours passer d'un point à l'autre d'une de ces nappes et, en particulier, du voisinage de l'une des courbes C à celui de l'autre en traversant l'ellipse E . Au contraire, pour $t = +\varepsilon$, elles formeront deux surfaces fermées, puisqu'on ne peut plus passer d'une des courbes C à l'autre.

Dans ce premier cas, notre point singulier correspond donc à une bifurcation du squelette.

Dans le second cas, au contraire, ces nappes de $\omega(t)$ forment toujours une seule surface fermée, aussi bien pour $t = -\varepsilon$ que pour $t = +\varepsilon$, puisqu'on peut toujours passer d'une courbe C à l'autre sans passer près du point singulier.

Dans ce second cas, notre point singulier ne correspond pas à une bifurcation.

Ce second cas se subdivise lui-même. Considérons un chemin permettant de passer d'une courbe C à l'autre sans passer près du point singulier. Quand on suivra ce chemin, si l'on veut conserver la forme des équations, il faudra de temps en temps changer de variables et remplacer les variables y par d'autres variables y' , puis les y' par de nouvelles variables y'' , etc. Nous supposerons toujours que ces changements de variables aient été faits de telle sorte que le déterminant fonctionnel des nouvelles variables par rapport aux anciennes soit positif. Soient x_1, x_2, \dots, x_{m+1} les variables finales quand on reviendra dans le voisinage du point singulier. Nous aurons donc les x en fonction des z mais comme dans le voisinage du point singulier, nos équations qui donnent les x en fonction des y redeviennent valables, les séries redevenant convergentes, nous aurons les z en fonction des y ; deux cas peuvent donc se présenter selon que le déterminant fonctionnel des z par rapport aux y est positif ou négatif. Dans le premier cas le chemin est bilatère, dans le second cas unilatère. C'est ce que j'ai expliqué dans l'*Analysis situs*, en définissant les variétés unilatères.

Alors s'il existe des chemins qui permettent de passer d'une courbe C à l'autre sans passer dans le voisinage du point singulier : ou bien tous ces chemins seront bilatères, ou bien les uns seront bilatères et les autres unilatères, ou bien enfin ils seront tous unilatères.

Pour le moment nous nous bornerons au cas où toutes les surfaces $\omega(t)$ seront bilatères. Tous nos chemins, s'ils existent, seront donc bilatères.

Nous savons que pour une surface bilatère, le nombre de Betti est toujours impair. Si donc une surface bilatère est $2p + 1$ fois connexe, elle admettra $2p$ cycles distincts, c'est-à-dire dont aucune combinaison linéaire n'est holomogue à zéro. Envisageons donc les $2p$ cycles de la surface $\omega(-\epsilon)$, nous ferons d'abord entre eux une distinction, ceux qui rencontrent l'ellipse de gorge E et ceux qui ne la rencontrent pas. Si un cycle K rencontre E , nous devons distinguer les points de rencontre en deux catégories suivant le signe d'un certain déterminant, ainsi que je l'ai expliqué dans l'*Analysis situs*, page 219. Nous définirons ainsi le nombre $N(K, E)$ (cf. *Analysis situs* p. 220), qui sera la différence des nombres des points d'intersection des deux catégories. Si le nombre N relatif au cycle K est nul, le cycle K sera homologue à un cycle qui ne rencontre E pas. Si, au contraire, ce nombre N n'est pas nul, tous les cycles homologues à K rencontreront E .

Qu'arrive-t-il alors, quand t variant d'une façon continue passe de la valeur

— ε à la valeur $+\varepsilon$? On pourra trouver sur $\varpi(+\varepsilon)$ une ligne K' infiniment peu différente du cycle K tracé sur $\varpi(-\varepsilon)$; seulement si K ne rencontre pas E , la ligne K' est fermée et constitue un nouveau cycle sur $\varpi(\varepsilon)$; si, au contraire, K rencontre E , la ligne K' ne peut être fermée. Donc, pour qu'il y ait sur $\varpi(\varepsilon)$ des cycles infiniment peu différents d'un cycle homologue à K , il faut et il suffit que le nombre $N(K, E)$ soit nul.

En d'autres termes tous les cycles pour lesquels ce nombre n'est pas nul, disparaîtront quand t passera de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, tous les autres subsisteront.

Soit K un cycle de $\varpi(-\varepsilon)$ qui subsiste et K' le cycle correspondant de $\varpi(\varepsilon)$.

Dans quels cas aura-t-on $K' \sim 0$?

Si l'on a $K' \sim 0$, il existera sur $\varpi(\varepsilon)$ une aire A' limitée par K' ; on pourra trouver sur $\varpi(-\varepsilon)$ une aire A infiniment peu différente de A' , et cette aire sera limitée par K seulement ou par K et par l'ellipse de gorge E , de sorte qu'on aura

$$K \sim 0 \quad \text{ou} \quad K \sim E.$$

J'ajoute que si nous traçons sur $\varpi(\varepsilon)$ un cycle quelconque K' nous pourrions toujours trouver sur $\varpi(-\varepsilon)$ un cycle K qui en diffère très peu, et que l'on ne peut avoir $K \sim 0$ sans avoir $K' \sim 0$; car s'il existe sur $\varpi(-\varepsilon)$ une aire A limitée par K , il existera sur $\varpi(\varepsilon)$ une aire A' limitée par K' et très peu différente de A .

Donc, quand t passe de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, certains cycles peuvent disparaître, mais des cycles nouveaux ne peuvent pas apparaître; certains cycles peuvent devenir homologues à zéro, mais aucun cycle ne peut cesser de l'être de sorte que le nombre de Betti $2p + 1$ peut décroître, mais ne peut pas croître.

Il résulte de là que deux cas seulement peuvent se présenter :

1° Ou bien $E \sim 0$ sur $\varpi(-\varepsilon)$; dans ce cas, nous avons vu que quand t passe de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, la variété $\varpi(t)$ se décompose en deux autres.

Les cycles de $\varpi(-\varepsilon)$ ne peuvent pas disparaître; en effet comme on a $E \sim 0$, on aura $N(K, E) = 0$ pour tous les cycles K . De plus, aucun de ces cycles K ne peut devenir homologue à zéro. Nous avons vu, en effet, quelles étaient les nouvelles homologies qui pouvaient s'introduire entre les cycles K , par suite du passage de t de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$; on peut toutes les déduire de l'homologie nouvelle $E \sim 0$; et, en effet, nous avons dit que pour que l'on ait $K' \sim 0$ sans avoir $K \sim 0$, il faut que l'on ait $K \sim E$. Or, dans le cas qui nous occupe, nous avons $E \sim 0$, aussi bien sur $\varpi(-\varepsilon)$ que sur $\varpi(\varepsilon)$. Il ne s'introduit donc pas d'homologie nouvelle.

Le nombre total des cycles distincts demeure donc le même; si $\omega(-\varepsilon)$ est $2p+1$ fois connexe, $\omega(\varepsilon)$ se décomposera en deux surfaces qui seront respectivement $2p'+1$ fois et $2p''+1$ fois connexes, où $p'+p''=p$.

2° Dans le second cas, on n'a pas $E \sim 0$ sur $\omega(-\varepsilon)$, nous avons vu que, dans ce cas, $\omega(t)$ ne se décompose pas; nous supposons que $\omega(-\varepsilon)$ est $2p+1$ fois connexe et possède $2p$ cycles distincts. Au moment où t devient positif, certains cycles K disparaissent; ce sont ceux qui sont tels que $N(K, E)$ ne soit pas nul. Mais si l'on a deux cycles K_1 et K_2 tels que

$$N(K_1, E) = m_1, \quad N(K_2, E) = m_2,$$

alors on aura

$$N(m_2 K_1 - m_1 K_2, E) = 0,$$

de sorte que le cycle $m_2 K_1 - m_1 K_2$ ne disparaît pas. Il résulte de là que tous les cycles qui disparaissent sont toujours une combinaison linéaire de l'un d'entre eux et des cycles qui ne disparaissent pas. Le nombre des cycles distincts diminue donc *de ce fait* d'une unité, et d'une seule.

D'autre part, entre les cycles subsistants, s'introduit une homologie nouvelle, et une seule,

$$E \sim 0,$$

de sorte que le nombre des cycles diminue encore d'une unité.

En résumé, le nombre total des cycles distincts diminue en tout de deux unités, de sorte que $\omega(\varepsilon)$ est $2p-1$ fois connexe.

3. Avant d'aller plus loin, nous devons rappeler brièvement ce que l'on sait sur les surfaces à deux dimensions, ou plutôt celles des propriétés de ces surfaces qui nous seront utiles dans la suite; je commencerai par les surfaces bilatères.

On sait qu'une surface fermée bilatère $2p+1$ fois connexes admet $2p$ cycles distincts. Soient C_1, C_2, \dots, C_{2p} $2p$ cycles fondamentaux de la surface, choisis de telle façon que tout cycle de la surface soit homologue à une combinaison linéaire de ces $2p$ cycles.

Soient maintenant

$$X = \sum x_i C_i, \quad Y = \sum y_i C_i$$

deux de ces combinaisons linéaires où les coefficients x et y sont des entiers

quelconques. Envisageons le nombre $N(X, Y)$ relatif aux intersections de ces deux cycles X et Y ; ce nombre est égal à

$$N(X, Y) = F(x, y),$$

$F(x, y)$ étant une forme bilinéaire par rapport aux variables x et y .

Cette forme a tous ses coefficients entiers, elle change de signe quand on permute x et y de sorte que

$$F(x, y) = -F(y, x),$$

enfin son discriminant est égal à 1.

On peut choisir les cycles fondamentaux C (et cela d'une infinité de manières) de telle façon que la forme $F(x, y)$ soit *réduite*, c'est-à-dire qu'elle se réduise à

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_5y_6 - x_6y_5 + \dots$$

On voit que si la forme F est réduite, $N(C_i, C_k)$ sera nul si les indices i et k sont de même parité; c'est-à-dire que, si i et k sont de même parité, les cycles C_i et C_k ne se couperont pas, ou seront homologues à des cycles qui ne se coupent pas.

Il nous sera souvent utile dans la suite de remplacer notre surface par un polygone fuchsien; cela peut se faire de deux manières. Supposons que la forme F étant réduite, on considère les p cycles de rang impair

$$C_1, C_3, \dots, C_{2p-1},$$

qui, nous pouvons le supposer, ne se coupent pas.

Voici d'ailleurs comment on peut se rendre compte de la génération de ces cycles. Formons le *squelette* de notre surface; ce squelette sera un réseau où l'on pourra décrire p chemins fermés distincts; en choisissant convenablement p points sur ce réseau, les p chemins fermés seront coupés, le réseau restant néanmoins d'un seul tenant. Chacun de ces points représentera une courbe fermée [qui sera la variété $\omega(t)$ du paragraphe précédent]. Nous aurons donc p courbes fermées qui n'auront aucun point commun et seront nos p cycles

$$C_1, C_3, \dots, C_{2p-1}.$$

Découpons notre surface suivant ces p courbes; elle reste d'un seul tenant, mais elle peut maintenant être développée sur un plan et, après le développement elle se réduira à une aire plane limitée par $2p$ courbes fermées. Une de ces $2p$ courbes la limite extérieurement et les autres intérieurement. Ces $2p$ courbes sont conjuguées deux à deux, deux courbes conjuguées corres-

pendant aux deux lèvres d'une même coupure. Cette aire sera ainsi assimilable à un polygone fuchsien de la troisième famille; et l'on pourra avoir avantage à envisager le groupe fuchsien qu'il engendre, et la décomposition du plan en une infinité de polygones congruents au polygone générateur.

Supposons maintenant que nous découpons notre surface suivant les $2p$ cycles. Les $2p$ cycles auront pu être tracés de façon à passer tous par un même point et à n'avoir pas d'autre point commun. Si, après ce découpage, on développe la surface sur un plan, on obtiendra un polygone de $4p$ côtés conjugués deux à deux, et assimilable à un polygone fuchsien (qui n'aura qu'un seul cycle de sommets), de telle façon que la somme de ces angles soit égale à 2π . Si la forme F est réduite, la loi de conjugaison des côtés sera la suivante : 1 avec 3, 2 avec 4, 5 avec 7, 6 avec 8, 9 avec 11, 10 avec 12, etc. Ici aussi il y aura lieu d'envisager le groupe fuchsien et la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents.

Mais ici se pose une question qui va nous arrêter quelque temps. Le groupe fuchsien en question n'est autre chose que ce que j'ai appelé à la page 239 de l'*Analysis situs* le groupe fondamental de la surface. La notion de ce groupe est fondée sur la notion d'équivalence des cycles et sur la distinction entre cette notion et celle d'homologie (cf. 207 et 241 de l'*Analysis situs*).

Considérons deux cycles K et K' ; partant d'un même point M et y aboutissant, j'écrirai « l'équivalence »

$$K \equiv K'$$

si l'on peut passer de l'un à l'autre par déformation continue et sans quitter la variété envisagée. Il pourra se faire alors que le cycle K' venant repasser plusieurs fois par le point initial M se décompose en plusieurs autres et équivalle ainsi à plusieurs cycles consécutifs K_1, K_2, K_3 se succédant dans l'ordre indiqué; nous pourrions alors écrire

$$K \equiv K_1 + K_2 + K_3,$$

mais nous n'avons pas le droit d'intervertir l'ordre des termes et d'écrire, par exemple,

$$K \equiv K_1 + K_3 + K_2.$$

C'est précisément ce qui distingue les équivalences des homologies; dans ces dernières, on a le droit d'intervertir cet ordre, de sorte que de l'équivalence

$$K \equiv K_1 + K_2 + K_3,$$

nous avons le droit de déduire non seulement l'homologie

$$K \sim K_1 + K_2 + K_3,$$

mais encore l'homologie

$$K \sim K_1 + K_3 + K_2.$$

De même, supposons que K' au lieu de partir du point M , parte d'un autre point M' et y aboutisse. Soit L un chemin quelconque allant de M en M' . Alors le cycle $L + K' - L$ ira comme K de M en M . Supposons qu'on ait l'équivalence

$$K \equiv L + K' - L,$$

comme nous n'avons pas le droit d'intervertir l'ordre des termes, nous ne pouvons en conclure l'équivalence $K \equiv K'$, mais seulement l'homologie $K \sim K'$.

Ainsi dans les homologies, les termes se composent d'après les règles de l'addition ordinaire; dans les équivalences, les termes se composent d'après les mêmes règles que les substitutions d'un groupe; c'est pour cela que l'ensemble des équivalences peut pour ainsi dire être symbolisé par un groupe qui est le groupe fondamental de la variété.

Dans le cas qui nous occupe, envisageons le cercle fondamental décomposé comme nous l'avons dit en polygones fuchsien congruents. Chacun de ces polygones a $4p$ côtés. Un cycle quelconque sera représenté soit par une ligne fermée, soit par une ligne allant d'un point du plan à un autre point « congruent » (c'est-à-dire transformé du premier par une des substitutions du groupe fuchsien).

Dans le premier cas, le cycle est équivalent à zéro; dans le second, il ne l'est pas.

Le groupe fondamental est alors le groupe fuchsien lui-même, groupe dérivé des $2p$ substitutions correspondant aux $2p$ cycles fondamentaux C_i ; dans le cas où la forme F étant réduite, la loi de conjugaison des côtés du polygone fuchsien est celle que j'ai dite plus haut, on a entre les $2p$ cycles une seule équivalence qui s'écrit

$$0 \equiv C_1 + C_2 - C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_3 - C_4 + C_5 + C_6 - C_5 - C_6 + \dots$$

Cette équivalence suffit pour définir le groupe fondamental.

On peut chercher à former un cycle qui soit homologue à zéro sans être équivalent à zéro. On voit d'abord qu'il ne peut y en avoir si $p = 1$, car alors l'équivalence que je viens d'écrire devient

$$C_1 + C_2 \equiv C_2 + C_1$$

et signifie que deux cycles quelconques sont permutable (au point de vue de l'équivalence). On sait d'ailleurs que, dans ce cas, les fonctions fuchsienues se réduisent aux fonctions elliptiques, le groupe fuchsien a toutes ses substitutions permutable.

Si $p > 1$, supposons que la loi de conjugaison des côtés soit celle que nous avons dite plus haut, c'est-à-dire 1 avec 3, 2 avec 4, etc. Soient 0 et 1 les deux sommets du côté 1; soient 1 et 2 ceux du côté 2, etc.; soient enfin $4p - 1$ et $4p = 0$, ceux du côté $4p$. Joignons les sommets 0 et 4 par une ligne restant à l'intérieur du polygone. Cette ligne représentera un cycle qui sera équivalent à

$$C_1 + C_2 - C_1 - C_2.$$

Il sera donc homologue à zéro; mais il ne sera pas équivalent à zéro.

Ayons recours maintenant à l'autre mode de représentation; représentons donc notre surface par un polygone fuchsien de la troisième famille limité par $2p$ courbes fermées conjuguées deux à deux, l'une d'elles limitant le polygone extérieurement, les autres intérieurement.

Soit k l'une de ces courbes fermées, correspondant au cycle C_2 , soit k' sa conjuguée. Soit M un point de k , M' le point correspondant de k' ; joignons M à M' par un trait MPM' qui correspondra au cycle C_1 . Traçons maintenant à l'intérieur du polygone une courbe fermée K enveloppant k et k' , mais n'enveloppant aucune des autres courbes qui forment le contour du polygone.

Soit Q un point sur k d'où part et où aboutit ce cycle. Soit L une ligne allant de Q en M . Il est clair qu'on aura l'équivalence

$$K \equiv L + k + MPM' + k' - MPM' - L,$$

c'est-à-dire

$$K \equiv L + C_2 + C_1 - C_2 - C_1 - L;$$

de cette équivalence on peut conclure $K \sim 0$, c'est-à-dire que K est homologue à zéro sans être équivalent à zéro.

Voyons enfin ce qui se passe sur la surface elle-même, et bornons-nous aux cycles *non bouclés*, c'est-à-dire *aux cycles qui ne se recoupent pas eux-mêmes*.

Soit C un pareil cycle homologue à zéro; il décomposera la surface $2p + 1$ fois connexe en deux parties, de sorte que si l'on étranglerait la surface de façon à réduire ce cycle C à un point, cette surface se décomposerait en deux autres. Si l'une des deux surfaces ainsi obtenues est simplement connexe, c'est alors

que le cycle C était équivalent à zéro. Si ces deux surfaces sont $2p' + 1$ fois et $2p'' + 1$ fois connexes, où $p' > 0$, $p'' > 0$, $p' + p'' = p$, c'est au contraire que le cycle C était homologue à zéro, sans être équivalent à zéro.

Il est aisé de voir, et l'on sait d'ailleurs depuis longtemps, que deux surfaces bilatères, à deux dimensions, ayant même nombre de Betti, sont toujours homéomorphes. Il suffit de remarquer que chacune d'elles peut être remplacée par un polygone fuchsien de la troisième famille, limité par $2p$ courbes fermées et que deux pareils polygones, c'est-à-dire deux aires limitées extérieurement par une courbe fermée et intérieurement par $2p - 1$ courbes fermées sont évidemment toujours homéomorphes l'une à l'autre.

Mais on peut aller plus loin. Soit S une surface $2p + 1$ fois connexe; traçons sur cette surface deux systèmes de $2p$ cycles

$$C_1, C_2, \dots, C_{2p}; \quad C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p}.$$

La surface S peut toujours être regardée comme homéomorphe à elle-même; c'est-à-dire qu'à un point M de la surface nous pouvons faire correspondre un autre point M' de la surface, de telle façon que la loi de correspondance soit continue et doublement univoque. Dans quels cas cette correspondance peut-elle être choisie de telle sorte que, quand le point M décrit les cycles

$$C_1, C_2, \dots, C_{2p},$$

le point M' décrive :

1° ou bien les cycles

$$C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p};$$

2° ou bien des cycles équivalents à

$$C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p};$$

3° ou bien des cycles homologues à

$$C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p}.$$

Je ne traiterai que la troisième question qui est la plus facile. Je considère la forme $F(x, y)$ qui représente le nombre N relatif à l'intersection des cycles ΣxC et ΣyC . Je considère, de même, la forme $F'(x', y')$ relative à l'intersection des cycles $\Sigma x'C'$ et $\Sigma y'C'$.

Il est clair d'abord que si la correspondance est possible de telle façon que M' décrive un cycle homologue à C'_i quand M décrit un cycle homologue à C_i , les deux formes devront être identiques, c'est-à-dire ne différer que par la substi-

tution des variables x', y' aux variables x et y . Si, par exemple, nous supposons que F est réduite et que

$$F = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \dots,$$

on devra avoir

$$F' = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \dots$$

Les cycles C' sont des combinaisons linéaires des cycles C et, si nous supposons

$$\Sigma x C = \Sigma x' C', \quad \Sigma y C = \Sigma y' C',$$

les nouvelles variables x' et y' seront également des combinaisons linéaires à coefficients entiers des x et des y . Il faut donc que la forme F ne soit pas altérée par la substitution linéaire qui fait passer des x aux x' et des y aux y' .

Je dis que cette condition nécessaire est également suffisante.

Pour le démontrer, voyons quelles sont les substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme F que nous supposerons réduite.

1° Si nous supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2, & x'_i &= x_i & (i > 1), \\ y'_1 &= y_1 + y_2, & y'_i &= y_i & (i > 1), \end{aligned}$$

il est clair que l'on aura

$$x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + \dots = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \dots$$

Il est clair qu'il en sera encore de même, si nous posons

$$x'_2 = x_1 + x_2,$$

ou bien

$$x'_3 = x_3 + x_4,$$

ou bien

$$x'_4 = x_4 + x_3,$$

ou, plus généralement,

$$x'_{2k-1} = x_{2k-1} + x_{2k}.$$

ou bien enfin

$$x'_{2k} = x_{2k-1} + x_{2k},$$

tous les autres x'_i étant égaux à l' x_i correspondant.

Il en sera encore de même si les x subissent des substitutions inverses des précédentes, c'est-à-dire si l'on pose

$$x'_{2k-1} = x_{2k-1} - x_{2k},$$

ou bien

$$x'_{2k} = x_{2k} - x_{2k-1},$$

tous les autres x'_i étant égaux à l' x_i correspondant.

Il va sans dire que la substitution linéaire qui fait passer des y aux y' est identique à celle qui fait passer des x aux x' .

Voilà donc un premier type de substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme réduite F.

2° En voici maintenant un second type.

Supposons que l'on pose

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_3, & x'_4 &= x_4 - x_2, \\ x'_i &= x_i & (\text{sauf pour } i = 1 \text{ et pour } i = 4), \end{aligned}$$

ou plus généralement

$$\begin{aligned} x'_{2K-1} &= x_{2K-1} + x_{2j-1}, & x'_{2j} &= x_{2j} - x_{2K}, \\ x'_i &= x_i & (\text{sauf pour } i = 2K - 1 \text{ et pour } i = 2j); \end{aligned}$$

il est clair que la forme réduite F n'est pas altérée,

Elle n'est pas altérée non plus par la substitution inverse

$$\begin{aligned} x'_{2K-1} &= x_{2K-1} - x_{2j-1}, & x'_{2j} &= x_{2j} + x_{2K} \\ x'_i &= x_i & (\text{sauf pour } i = 2K - 1 \text{ pour } i = 2j). \end{aligned}$$

Voilà notre second type.

Or il est aisé de voir que toute substitution qui n'altère pas la forme réduite F peut être considérée comme une combinaison de substitutions rentrant dans ces deux types.

Il suffit donc de démontrer le théorème pour les substitutions de ces deux types.

En ce qui concerne d'abord le second type, nous pourrions représenter notre surface par un polygone fuchsien de la troisième famille, limité tant extérieurement qu'intérieurement par $2p$ courbes fermées

$$A_1, A'_1; A_3, A'_3; \dots; A_{2p-1}, A'_{2p-1}$$

conjuguées deux à deux et correspondant aux p cycles d'indice impair

$$C_1, C_3, \dots, C_{2p-1}.$$

Pour construire les p cycles d'indice pair, il suffit d'opérer de la façon suivante.

Soient

$$P_1, P_3, \dots, P_{2p-1}$$

p points pris arbitrairement sur les courbes $A_1, A_3, \dots, A_{2p-1}$; soient $P'_1, P'_3, \dots, P'_{2p-1}$ les points correspondants sur les courbes conjuguées $A'_1,$

A'_3, \dots, A'_{2p-1} . Joignons P_1 à P'_1 , P_3 à P'_3 , \dots , P_{2p-1} à P'_{2p-1} par p lignes

$$L_1, L_3, \dots, L_{2p-1}$$

tracées de manière à ne pas se couper mutuellement. Ces p lignes seront homologues aux p cycles d'indice pair

$$C_2, C_4, \dots, C_{2p}.$$

Pour simplifier, nous supposons que ce soit la courbe A_3 (qui ne jouera aucun rôle dans ce qui va suivre), qui limite extérieurement notre polygone fuchsien. Construisons une courbe B qui enveloppe les deux courbes A_1 et A_3 , et n'en enveloppant pas d'autres; cette courbe B représentera un cycle homologue à

$$C_1 + C_3.$$

Soit R la région limitée extérieurement par cette courbe B et intérieurement par A_1 et A_3 . Envisageons la substitution du groupe fuchsien qui change A_1 en A'_1 (et qui correspond d'ailleurs au cycle C_2). Soit R' la transformée de la région R par cette substitution; elle sera limitée extérieurement par A'_1 et intérieurement par deux courbes fermées B' et A''_3 transformées de B et A_3 .

Modifions le polygone fuchsien en retranchant la région R et en y ajoutant la région R' . Notre nouveau polygone fuchsien sera limité extérieurement par A_3 et intérieurement par

$$A''_3; B; B'; A'_3, A''_3; A_7, A'_7; \dots; A_{2p-1}, A'_{2p-1}.$$

Deux points du plan, transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe fuchsien, correspondent évidemment à un même point de la surface S . Notre nouveau polygone fuchsien correspondra donc comme l'ancien à la surface S tout entière, puisque la région R supprimée a été remplacée par sa transformée R' . D'ailleurs ces deux polygones qui sont tous deux des aires planes limitées par $2p$ courbes fermées sont homéomorphes l'une à l'autre et de telle façon que

$$A_1, A'_1; A_3, A'_3; A_5, A'_5; \dots; A_{2p-1}, A'_{2p-1}$$

correspondent à

$$B, B'; A''_3, A'_3; A_5, A'_5; \dots; A_{2p-1}, A'_{2p-1}.$$

Il en résulte que dans cet homéomorphisme, les cycles impairs

$$C_1, C_3, C_5, \dots, C_{2p-1}$$

correspondront à des cycles homologues à

$$C_1 + C_3, C_3, C_3, \dots, C_{2p-1}.$$

A quoi correspondront les cycles d'ordre pair ? Chacun de ces cycles correspond à une substitution du groupe fuchsien, par exemple C_2 à la substitution T_1 qui change A_1 en A'_1 , C_4 à la substitution T_3 qui change A_3 en A'_3 , etc. Il est évident d'ailleurs que dans l'homéomorphisme en question la substitution T_1 est remplacée par celle qui change B en B' (cycles qui correspondent à A_1 et A'_1) et qui est encore T_1 , la substitution T_3 par celle qui change A''_3 en A'_3 et qui est $T_1^{-1} T_3$, et que les autres substitutions ne changent pas. Cela nous fait déjà prévoir que les cycles

$$C_2, C_4, C_6, \dots$$

correspondront à

$$C_2, C_4 - C_2, C_6, \dots$$

Mais un doute pourrait subsister, car la substitution T_1 ne correspond pas seulement au cycle C_2 , mais à tous les cycles $C_2 + K$, K étant une combinaison linéaire quelconque des cycles d'ordre impair.

Il nous faut donc revenir aux lignes L que nous venons de définir; nous pouvons toujours supposer qu'aucune de ces lignes ne coupe B , à l'exception des lignes L_1 et L_3 qui couperont B en N_1 et N_3 ; je désignerai par M_1 et M'_1 , M_3 et M'_3 les points d'intersection de A_1 et A'_1 avec L_1 , de A_3 et A'_3 avec L_3 ; par N'_1 et N'_3 les transformés de N_1 et N_3 par T_1 qui sont sur B' , et j'envisagerai les tronçons $N'_1 M'_1$, $N'_3 M'_3$ qui sont les transformés par T_1 des tronçons de $N_1 M_1$ et $N_3 M_3$ des lignes L_1 et L_3 . Le point M''_3 est sur A''_3 . Les lignes L et les nouveaux tronçons $N'_1 M'_1$, $N'_3 M'_3$ ne se coupent en aucun point.

Nous considérerons encore les tronçons $N_3 N_1$ sur B et $N'_3 N'_1$ sur B' , ou mieux des tronçons $N_3 N_1^0$ et $N'_3 N'_1^0$ aboutissant à des points N_1^0 et N'_1^0 situés sur B et B' infiniment près de N_1 et N'_1 , et de telle façon que N_1 et N'_1 ne soient pas sur les arcs $N_3 N_1^0$ et $N'_3 N'_1^0$; j'envisagerai, en outre, une ligne $N_1^0 M_1^0 N_1^0$ infiniment voisine de $N_1 M_1 N_1$ et ne la coupant pas; à l'aide de ces divers tronçons je pourrai construire les lignes

$$L'_1, L'_3, \dots$$

correspondant dans notre homéomorphisme aux lignes

$$L_1, L_3, \dots$$

La première sera la ligne $N_1 M'_1 N'_1$; la seconde qui doit aller de M''_3 en M'_3 sera

$$M''_3 N'_3 + N'_3 N_1^0 + N_1^0 M_1^0 N_1^0 + N_1^0 N_3 + N_3 M_3;$$

d'ailleurs L'_3 sera identique à L_3 , à L'_7 à L_7 , etc. Il suffit pour s'en rendre compte de vérifier que ces diverses lignes ne se coupent pas.

On voit alors que ces lignes sont homologues à

$$L_1, \quad L_3 - L_1, \quad L_5, \quad \dots,$$

ce qui veut dire qu'aux cycles C_2, C_4, \dots correspondent

$$C_2, \quad C_4 - C_2, \quad C_6, \quad \dots$$

Nous avons donc, en résumé, $C'_i \sim C_i$, sauf pour $i = 1$ ou 4 , et

$$C'_1 \sim C_1 + C_3, \quad C'_4 \sim C_4 - C_2.$$

Si donc nous supposons $\sum x C = \sum x' C'$, on aura $x_i = x'_i$, sauf pour $i = 2$ et 3 et

$$x'_3 = x_3 - x_1, \quad x'_2 = x_2 + x_4.$$

Si l'on avait voulu avoir

$$x'_3 = x_3 + x_1, \quad x'_2 = x_2 - x_4,$$

il aurait fallu tracer B autour de A_1 et A'_3 et non autour de A_1 et A_3 . Si l'on avait voulu avoir

$$x'_1 = x_1 - x_3, \quad x'_4 = x_2 + x_4,$$

il aurait fallu tracer B autour de A_1 et A_3 et transformer la région R, non plus par T_1 , mais par T_3 .

Ce procédé est donc applicable à toutes les substitutions du second type.

On opérera d'une façon analogue pour les substitutions du premier type; je suppose, par exemple,

$$x'_1 = x_1 + x_2, \quad x'_i = x_i \quad (i > 1)$$

c'est-à-dire

$$C_1 \sim C'_1, \quad C'_1 \sim C_2 - C_1.$$

Je ne représenterai notre surface ni par un polygone fuchsien de la troisième famille, ni par un polygone fuchsien de la première famille comme je l'ai fait plus haut, mais j'emploierai un mode de représentation analogue et pour ainsi dire intermédiaire.

Remarquons, en effet, que rien ne nous oblige à nous restreindre à des polygones fuchiens proprement dits, c'est-à-dire à des polygones limités par des arcs de cercle coupant orthogonalement un même cercle fondamental. Dans une question comme celle qui nous occupe, rien n'empêche de remplacer, par

exemple, un polygone fuchsien de la première famille par un autre polygone curviligne qui lui soit homéomorphe, mais qui soit d'ailleurs quelconque.

Nous pouvons profiter de cette élasticité pour adopter le mode de représentation suivant.

Notre polygone sera limité extérieurement par un quadrilatère curviligne et intérieurement par $2p - 2$ courbes fermées. Les côtés opposés du quadrilatère seront conjugués et, d'autre part, les $2p - 2$ courbes fermées seront conjuguées deux à deux d'une manière quelconque.

Soient a, b, c, d les quatre sommets du quadrilatère,

$$A_3, A'_3; A_5, A'_5; \dots; A_{2p-1}, A'_{2p-1}$$

les $2p - 2$ courbes fermées conjuguées deux à deux; ces courbes fermées correspondront à $p - 1$ des cycles d'ordre impair

$$C_3, C_5, \dots, C_{2p-1}.$$

Les côtés ab et dc du quadrilatère correspondront au cycle C_1 ; les côtés ad et bc au cycle C_2 .

Nous prendrons sur les courbes fermées A_i des points quelconques P_i ; nous joindrons chacun des points P_i au point correspondant P'_i de la courbe A'_i . La ligne L_i qui joint P_i à P'_i correspondra au cycle C_{i+1} , à la condition que ces lignes L aient été tracées de façon à ne pas couper les côtés du quadrilatère et à ne pas se couper mutuellement.

Joignons les sommets opposés a et c du quadrilatère par une diagonale curviligne ac , qui divisera ce quadrilatère en deux triangles acb et acd et qui devra être tracée de telle façon que toutes les courbes fermées A et A' soient à l'intérieur du premier triangle acb .

Le groupe qui jouera le rôle de nos groupes fuchsien de tout à l'heure, sera dérivé des substitutions suivantes; T_1 qui change ad en bc ; T_2 qui change ab en dc ; $T_i (i = 3, 5, \dots, 2p - 1)$ qui change A_i en A'_i .

Soit bcf le transformé du triangle adc par T_1 .

On peut remplacer le triangle adc par le triangle bcf et, par conséquent, on peut remplacer notre polygone générateur par un nouveau polygone limité extérieurement par le quadrilatère $abfc$ et intérieurement par les $2p - 2$ courbes fermées A et A' ; ces courbes fermées sont encore conjuguées deux à deux et les côtés opposés du quadrilatère sont conjugués.

Ces deux polygones (qui tous deux correspondent à la surface S tout entière) sont homéomorphes l'un à l'autre et de telle façon que

$$ab, bc, cd, da, \quad A_i, A'_i, L_i$$

correspondent respectivement à

$$ab, bf, fc, ca, \quad A_i, A'_i, L_i.$$

Les cycles

$$C_1, C_2, C_i, C_{i+1}$$

correspondront donc dans cet homéomorphisme à

$$C_1, C_2 + C_1, C_i, C_{i+1}.$$

Donc la surface S est homéomorphe à elle-même de telle façon qu'au cycle C_k corresponde le cycle C'_k , en supposant

$$C'_k = C_k \quad (k = 1, 3, 4, 5, \dots, 2p),$$

$$C'_2 = C_2 + C_1.$$

Dans ce cas, on a

$$x'_1 = x_1 - x_2, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad \dots, \quad x'_{2p} = x_{2p}.$$

C'est donc une substitution du premier type pour lequel le théorème se trouve démontré, et il est clair qu'on le démontrerait de même pour toutes les autres substitutions du premier type.

Nous pouvons donc dire en résumé :

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface S soit homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_i correspondent des cycles homologues aux cycles C'_i , c'est que la forme $F(x, y)$ relative aux cycles C soit identique à la forme $F(x', y')$ relative aux cycles C' .

Il est aisé de conclure de là qu'un cycle $\sum a_i C_i$ est toujours homologue à un cycle *non bouclé*, c'est-à-dire ne se coupant pas lui-même, si les entiers a_i sont premiers entre eux. Si, au contraire, ces entiers a_i ne sont pas premiers entre eux, il ne peut être homologue à un cycle non bouclé.

Établissons d'abord le premier point.

Il suffira de démontrer que l'on peut trouver $2p$ cycles

$$C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p}$$

tels que

$$C_1 = \sum a_i C_i$$

et que la forme $F(x', y')$ relative aux cycles C' soit identique à la forme $F(x, y)$ relative aux cycles C ; de telle façon que l'on ait

$$F(x', y') = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \dots$$

si nous supposons, comme nous le faisons d'ordinaire, que les cycles C aient été choisis de telle sorte que la forme $F(x, y)$ soit réduite.

En effet, si les cycles C' satisfont à cette condition, la surface S sera homéomorphe à elle-même de telle sorte qu'au cycle C_i corresponde un cycle homologue à C'_i . Donc on pourra trouver un cycle homologue à C'_1 qui dans cet homéomorphisme correspondra à C_1 et qui par conséquent ne sera pas bouclé, puisque C_1 n'est pas bouclé.

Remarquons d'abord que si les entiers a_i sont premiers entre eux, on pourra trouver $2p$ cycles

$$C''_1, C''_2, \dots, C''_{2p}$$

tels que

$$C''_1 = C'_1 = \sum a_i C_i, \quad C''_k = \sum b_{ik} C_i,$$

les a_i et les b_{ik} étant des entiers dont le déterminant soit égal à 1.

Soit $F(x'', y'')$ la forme relative aux cycles C'' .

Quelle relation doit-il y avoir entre les variables x' et x'' ? Le cycle C'_1 devant être identique à C''_2 , il est clair que

$$x'_2, x'_3, \dots, x'_{2p}$$

devront être les combinaisons linéaires de

$$x''_2, x''_3, \dots, x''_{2p}$$

et qu'il en devra être de même de la différence $x'_1 - x''_1$.

Il reste à démontrer qu'il existe un changement linéaire de variables qui satisfasse à cette condition et qui, en même temps, soit tel que la forme $F(x', y')$ soit réduite.

Or, nous pouvons écrire

$$F(x'', y'') = x''_1 Y_2 - y''_2 X_2 + \Phi(x'', y''),$$

où X_2 est une combinaison linéaire de $x''_2, x''_3, \dots, x''_{2p}$ dont les coefficients sont des entiers premiers entre eux; où Y_2 est la même combinaison de $y''_2, y''_3, \dots, y''_{2p}$; où enfin Φ est une forme bilinéaire de

$$x''_2, x''_3, \dots, x''_{2p}; \quad y''_2, y''_3, \dots, y''_{2p}.$$

J'ai dit que les coefficients de X_2 sont des entiers premiers entre eux, et en

effet, si le plus grand commun diviseur était $a > 1$, le déterminant de la forme $F(x'', y'')$ serait divisible par a^2 , ce qui est impossible puisque ce déterminant est égal à 1.

Ces coefficients étant premiers entre eux, nous pouvons trouver $2p - 1$ combinaisons linéaires

$$X_2, X_3, \dots, X_{2p}$$

de $x''_2, x''_3, \dots, x''_{2p}$, dont la première soit précisément X_2 et dont les coefficients soient des entiers dont le déterminant soit égal à 1.

Dans ces conditions, Φ sera une forme bilinéaire de

$$X_2, X_3, \dots, X_{2p}$$

et des combinaisons correspondantes

$$Y_2, Y_3, \dots, Y_{2p}$$

formées avec les y'' . Nous pourrions alors écrire

$$\Phi = X_2 Y' - Y_2 X' + \psi(X, Y),$$

où X' est une combinaison linéaire de X_3, X_4, \dots, X_{2p} ; où Y' est la même combinaison des Y ; où ψ est une forme bilinéaire des $4p - 4$ variables

$$X_3, X_4, \dots, X_{2p}; \quad Y_3, Y_4, \dots, Y_{2p}.$$

Le déterminant de cette forme ψ devra diviser celui de F ; il sera donc égal à 1. La forme ψ ayant pour déterminant 1, on peut trouver $2p - 2$ combinaisons linéaires

$$x'_3, x'_4, \dots, x'_{2p}$$

des variables X_3, X_4, \dots, X_{2p} , telles que la forme ψ soit réduite quand on prend les x' pour variables nouvelles, avec les combinaisons correspondantes y' des Y .

Si alors nous posons

$$\begin{aligned} x'_1 &= x''_1 - X', & y'_1 &= y''_1 - Y', \\ x'_2 &= X_2, & y'_2 &= Y_2, \end{aligned}$$

il viendra

$$F = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + \psi.$$

La forme ψ étant réduite, il en sera de même de F , de sorte que nos nouvelles variables x' répondent bien à la question.

Le premier point est donc établi.

Supposons maintenant que les a_i ne soient pas premiers entre eux; je dis que tout cycle homologue à $\Sigma a_i C_i$ est bouclé. Soit, en effet,

$$a_i = b_i d,$$

d étant le plus grand commun diviseur des a_i , et les b_i étant premiers entre eux. Soit alors

$$\Sigma b_i C_i = C'_1, \quad \Sigma a_i C_i = dC'_1.$$

D'après ce qui précède, la surface S sera homéomorphe à elle-même, de telle façon que C_1 corresponde à C'_1 . Il nous suffit donc de montrer que tout cycle homologue à dC_1 est bouclé; puisque dans notre homéomorphisme tout cycle homologue à $\Sigma a_i C_i$ correspondra à un cycle homologue à dC_1 .

Pour cela, reprenons la représentation de notre surface S par un polygone fuchsien R_0 de $4p$ côtés et de la première famille, polygone qui avec ses différents transformés remplira la surface du cercle fondamental.

Soit K notre cycle que nous supposons homologue à dC_1 . Ce cycle sera représenté par une certaine ligne amb , allant d'un certain point a intérieur au cercle fondamental à un point b transformé de a par une substitution du groupe fuchsien. Outre cette ligne, nous devons envisager toutes ses transformées par les différentes substitutions du groupe fuchsien; car une quelconque de ces transformées représente comme la ligne elle-même le cycle K .

Nous envisagerons, en particulier, les arcs de la ligne amb ou de ses transformées qui seront à l'intérieur du polygone R_0 . L'ensemble de ces arcs sera ce que j'appellerai l'*image* du cycle K .

Cette image se composera d'un certain nombre d'arcs

$$A_1 B_1, \quad A_2 B_2, \quad \dots, \quad A_n B_n$$

allant de certains points A_1, A_2, \dots, A_n situés sur le périmètre de R_0 à d'autres points B_1, B_2, \dots, B_n , situés également sur le périmètre de R_0 . Pour que le cycle soit continu et fermé, il faut que les points B_1 et A_2 , B_2 et A_3, \dots ; B_{n-1} et A_n , B_n et A_1 correspondent à un même point de S et, par conséquent, que ce soient des points *conjugués* du périmètre de R_0 , c'est-à-dire des points correspondants sur deux côtés conjugués.

Faisons correspondre un nombre à chaque point du périmètre de R_0 et cela de la façon suivante: 1° les nombres correspondant aux points A_i et B_i seront des entiers; 2° les nombres correspondant aux autres points du périmètre seront égaux à des entiers $+\frac{1}{2}$; 3° en suivant le périmètre dans le sens direct,

notre nombre ne variera que quand on passera par un point A_i ou par un point B_i ; 4° il augmentera brusquement d'une unité quand on franchira l'un des points A_i , et il diminuera brusquement d'une unité quand on franchira l'un des points B_i ; 5° la valeur du nombre en un des points A_i ou en un des points B_i sera la moyenne arithmétique entre les deux valeurs constantes de ce nombre le long des deux arcs qui aboutiront à ce point. Si, par exemple, en suivant le périmètre dans le sens direct on rencontre successivement les points

$$A_3, A_2, B_1, B_2, A_1, B_3,$$

le nombre sera égal à 0 en A_3 , à $\frac{1}{2}$ sur l'arc A_3A_2 , à 1 en A_2 , à $1 + \frac{1}{2}$ sur l'arc A_2B_1 , à 1 en B_1 , à $\frac{1}{2}$ sur l'arc B_1B_2 , à 0 en B_2 , à $-\frac{1}{2}$ sur l'arc B_2A_1 , à 0 en A_1 , à $\frac{1}{2}$ sur l'arc A_1B_3 , à 0 en B_3 et enfin à $-\frac{1}{2}$ sur l'arc B_3A_3 .

Comme il y a autant de points A que de points B, on retombera sur la valeur initiale après avoir parcouru le périmètre tout entier.

Cela posé, je dis d'abord que si le cycle n'est pas bouclé ou, ce qui revient au même, si les arcs A_iB_i ne se coupent pas mutuellement, les deux points A_i et B_i correspondent à un même nombre. Soit, en effet, α l'un des deux arcs, qui sur le périmètre de R_0 vont de A_i en B_i . Si le point A_k se trouve sur cet arc α , le point B_k devra s'y trouver également; car si les deux couples de points A_iB_i , A_kB_k étaient *croisés*, c'est-à-dire s'ils étaient placés sur le périmètre de façon à se séparer mutuellement, les deux arcs A_iB_i et A_kB_k devraient se couper. Il résulte de là qu'il y a sur l'arc α autant de points A que de points B, ce qui revient à dire que les deux extrémités A_i et B_i de l'arc α correspondent à un même nombre.

C. Q. F. D.

Comparons maintenant les nombres correspondants aux points B_i et A_{i+1} (pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment le point A_1 par les notations A_1 et A_{n+1}).

Ces points A_i et B_{i+1} . nous l'avons dit, sont *conjugués* sur le périmètre de R_0 .

Comment exprimerons-nous que notre cycle K est homologue à dC_1 ; cela veut dire que si l'on considère les intersections du cycle K avec les différents cycles fondamentaux C_i , et que l'on convienne de regarder ces intersections comme positives ou négatives suivant le sens dans lequel les deux cycles se couperont (cf. *Analysis situs, Journal de l'École Polytechnique*) le nombre des intersections positives sera le même que celui des intersections négatives

pour tous les cycles C_i , sauf pour C_2 , et que pour C_2 le premier nombre surpasse le second de d unités. (Je dis C_2 , parce que C_1 coupe C_2 en un point, et ne coupe pas les autres cycles C_i , si nous choisissons les cycles fondamentaux de façon que la forme F soit réduite.)

En d'autres termes, soient

$$P_1, P_2, P'_1, P'_2, P_3, P_4, P'_3, P'_4$$

les côtés successifs de R_0 ; je suppose $p = 2$ pour fixer les idées; dans ce cas, les côtés P_1, P_2, P_3, P_4 sont respectivement conjugués de P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 . Le côté P_i correspond au cycle C_i et le côté P'_i au cycle C_i parcouru en sens inverse. Telle est bien la loi de conjugaison des côtés quand la forme F est réduite.

Soit alors N_i le nombre des points A qui se trouvent sur P_i moins le nombre des points B qui se trouvent sur ce même côté P_i ; soit N'_i la différence correspondante pour le côté P'_i .

On aura alors

$$N_2 = d, \quad N'_2 = -d, \quad N_1 = N_3 = N_4 = N'_1 = N'_3 = N'_4 = 0.$$

Voilà les conditions qui expriment que le cycle K est homologue à dC_1 .

Nous représenterons par Q_i, S_i les deux sommets du côté P_i de telle façon qu'en parcourant ce côté dans le sens direct on aille de Q_i en S_i ; de même Q'_i, S'_i seront les deux sommets de P'_i . Il est clair, d'après cette définition, que le sommet S_1 sera identique au sommet Q_2 , le sommet S_2 au sommet Q'_1 , etc.

Le nombre correspondant à S_i sera égal à celui qui correspond à Q_i augmenté de N_i ; et comme tous les N et les N' sont des multiples de d , nous devons conclure que les nombres correspondant aux divers sommets de R_0 diffèrent entre eux de multiples de d .

Considérons maintenant deux côtés conjugués P_i et P'_i et imaginons deux points parcourant le premier le côté P_i dans le sens direct en allant de Q_i en S_i et le second le côté P'_i dans le sens inverse en allant de S'_i en Q'_i et de façon à rester constamment conjugués. Quand le premier passera par un point A , le second passera par le point conjugué qui sera un point B ; le nombre relatif au premier augmentera d'une unité, et il en sera de même du nombre relatif au second puisqu'on est passé par un point B en marchant dans le sens inverse. De même quand le premier point passera par un point B , le second passera par un point A et les deux nombres diminueront d'une unité.

La différence des deux nombres demeure donc constante et comme elle était originairement un multiple de d , elle sera toujours un multiple de d .

Ainsi, les deux nombres relatifs aux deux points conjugués A_i et B_{i+1} diffèrent d'un multiple de d ; et comme le nombre relatif à B_i est égal au nombre relatif à A_i , nous concluons finalement que les nombres relatifs aux $2n$ points

$$A_1, A_2, \dots, A_n; \quad B_1, B_2, \dots, B_n$$

diffèrent entre eux de multiples de d .

Or suivons le périmètre de R_0 dans le sens positif et envisageons deux points consécutifs $A_i A_k$, ou $A_i B_k$, ou $B_i B_k$; d'après notre définition, les nombres relatifs à ces deux points seront égaux ou différeront d'une unité. Si les différences ne peuvent être que des multiples de d , il faudra conclure que tous les nombres relatifs aux points A et B sont égaux entre eux et, par exemple tous égaux à zéro.

Alors pour les autres points du périmètre, notre nombre sera $\pm \frac{1}{2}$. Si donc nous considérons, en particulier, deux sommets de R_0 la différence des deux nombres sera 0 ou ± 1 . Or pour les deux sommets P_2 et Q_2 cette différence est $N_2 = d$.

Nous sommes donc conduit à une contradiction, ce qui veut dire que l'hypothèse faite au début était absurde et que *le cycle K doit être bouclé*.

C. Q. F. D.

4. Nous avons vu au paragraphe précédent qu'il est relativement aisé de reconnaître si un cycle donné est homologue à un cycle non bouclé, ou si deux cycles donnés sont respectivement homologues à deux cycles qui ne se coupent pas. Nous allons dans le présent paragraphe examiner une question analogue :

Comment reconnaître si un cycle donné est *équivalent* à un cycle non bouclé, ou si deux cycles donnés sont équivalents à deux cycles qui ne se coupent pas ?

Mais avant d'aborder cette question, revenons sur la définition de l'équivalence.

Jusqu'ici nous avons toujours entendu cette équivalence de la façon suivante :

Quand nous écrivons

$$C \equiv C',$$

nous entendons que le point initial et final du cycle fermé C est le même que le point initial et final de C' , et qu'il existe entre C et C' une aire simplement connexe dont la frontière complète est formée par C et C' . Ou, en d'autres termes, que l'on peut passer de C à C' en faisant varier C d'une manière continue et de façon que le cycle reste constamment formé d'une seule courbe fermée et que le point initial et final demeure invariable. C'est ce qu'on peut appeler l'*équivalence propre*.

Nous pouvons avoir avantage à écrire

$$C \equiv C' \quad (\text{impr.})$$

quand on peut passer de C à C' en faisant varier C d'une manière continue de façon que le cycle reste constamment formé d'une seule courbe fermée, *mais en faisant varier le point initial et final*. C'est ce qu'on peut appeler l'*équivalence impropre*. En d'autres termes, on aura l'équivalence impropre

$$C \equiv C' \quad (\text{impr.})$$

quand on aura l'équivalence propre

$$C \equiv -\alpha + C' + \alpha,$$

α étant un arc quelconque, allant du point initial et final de C' au point initial et final de C .

Nous aurons donc quatre sortes de relations : les équivalences propres, où l'on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des termes ; les équivalences impropres, où l'on peut changer l'ordre des termes, mais à la condition d'en respecter l'*ordre circulaire* ; les homologies sans division où l'on peut intervertir cet ordre d'une manière quelconque et qu'on peut additionner, soustraire et multiplier ; enfin les homologies par division qu'on peut, en outre, diviser.

Quand il n'y aura pas d'avis contraire, et que nous parlerons d'une équivalence, il s'agira toujours d'une équivalence propre.

On peut se placer, dans l'étude de la question qui nous occupe, à plusieurs points de vue différents. Représentons d'abord notre surface par un polygone fuchsien R_0 de la première famille, construisons les différents transformés de ce polygone par les transformations du groupe fuchsien correspondant G ; ces transformés rempliront le cercle fondamental. Un cycle quelconque C sera alors représenté par un arc de courbe MM' , allant d'un point M à un de ses transformés M' . Deux cycles proprement équivalents seront représentés par deux arcs de courbe MPM' et MQM' ayant mêmes extrémités et réciproque-

ment deux arcs ayant mêmes extrémités représenteront deux cycles équivalents. Un arc $M_1QM'_1$ représentera un cycle improprement équivalent au cycle représenté par l'arc MM' , si la même substitution du groupe G qui change M en M' change également M_1 en M'_1 .

Soit un arc MPM' représentant un cycle C ; considérons les divers transformés de cet arc par les substitutions du groupe G ; tous ces transformés représenteront également le cycle C . La condition pour que le cycle C ne soit pas bouclé, c'est que l'arc MPM' ne coupe aucun de ses transformés.

De même, soient MPM' , $M_1QM'_1$ deux arcs représentant deux cycles C et C' ; la condition pour que les deux cycles C et C' ne se coupent pas, c'est que l'arc MPM' ne coupe ni l'arc $M_1QM'_1$ ni aucun de ses transformés.

Cela posé, cherchons si parmi les cycles improprement équivalents à C il y en a qui ne soient pas bouclés; reprenons l'arc MPM' et la substitution S du groupe G qui change M en M' . Cette substitution est hyperbolique; en effet, dans le cas qui nous occupe, qui est celui d'un polygone R_0 de la première famille dont les sommets forment un cycle unique et dont la somme des angles est 4π , toutes les substitutions de G sont hyperboliques.

La substitution S a donc deux points doubles α et β sur le cercle fondamental.

Joignons ces deux points par une droite non euclidienne, c'est-à-dire, d'après la terminologie adoptée dans la théorie des fonctions fuchsiennes, par un cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental. Soit M_1 un point quelconque de cette droite non euclidienne $\alpha\beta$, son transformé M'_1 par la substitution S sera également sur cette droite $\alpha\beta$. Soit $M_1QM'_1$ l'arc de la droite non-euclidienne compris entre M_1 et M'_1 . Il représentera un cycle improprement équivalent au cycle MPM' .

Considérons maintenant les transformés de $M_1QM'_1$ par les diverses transformations de G , ce seront aussi des arcs de droite non euclidienne. Les transformés par la substitution S et ses multiples nous donneront la droite $\alpha\beta$ tout entière; les autres transformés nous donneront d'autres droites non-euclidiennes, à savoir les droites $\alpha'\beta'$ qui joignent les deux points doubles α' et β' des diverses substitutions transformées de S par les substitutions de G , c'est-à-dire des diverses substitutions hyperboliques $T^{-1}ST$, T étant une transformation de G .

Le cycle $M_1QM'_1$ ne sera donc pas bouclé si ces diverses droites non euclidiennes ne se coupent pas; et pour qu'elles ne se coupent pas, il faut et il suffit que pour aucune des substitutions $T^{-1}ST$, les deux points doubles α'

et β' ne se *croisent* sur le cercle fondamental avec les deux points doubles α et β , c'est-à-dire ne se présentent dans l'ordre circulaire $\alpha\alpha'\beta\beta'$ ou dans l'ordre inverse.

Réciproquement, je suppose que deux de nos droites non euclidiennes se coupent; je dis que tous les cycles improprement équivalents à MPM' seront bouclés. Si elles se coupent, en effet, c'est que les points doubles α , β et α' , β' de S et de $T^{-1}ST$ se *croisent*. Considérons un arc quelconque $M_2M'_2$ improprement équivalent à MPM' ; alors M'_2 est le transformé de M_2 par S ; considérons d'abord les transformés de l'arc $M_2M'_2$ par la substitution S et ses multiples; ils joindront entre eux les transformés successifs de M_2 par les multiples de S ; ils formeront donc un trait continu qui ira de α en β .

Pour la même raison, les transformés de l'arc $M_2M'_2$ par les substitutions S^mT (où m est un entier positif ou négatif) formeront un trait continu qui ira de α' en β' ; comme les points α , β , α' , β' sont croisés, il faut que ces deux traits continus se coupent; c'est-à-dire que deux des transformés de l'arc $M_2M'_2$ se coupent, c'est-à-dire que le cycle $M_2M'_2$ soit bouclé. C. Q. F. D.

De même, soient MPM' et NQN' deux arcs représentant deux cycles fermés.

Parmi les cycles improprement équivalents à MPM' et NQN' , y en a-t-il qui ne se coupent pas? Soient S et S_1 les substitutions qui changent M en M' , et N en N' . Soient α et β les points doubles de S ; α_1 et β_1 les points doubles de S_1 . Traçons les deux droites non euclidiennes $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$, prenons sur ces deux droites deux points quelconques M_1 et N_1 ; soit M'_1 le transformé de M_1 par S , et N'_1 celui de N_1 par S_1 ; le point M'_1 sera sur la droite $\alpha\beta$ et le point N'_1 sur la droite $\alpha_1\beta_1$.

Considérons les arcs de droite non euclidienne, $M_1M'_1$ et $N_1N'_1$; ils représenteront deux cycles improprement équivalents à MPM' et à NQN' .

Par un raisonnement tout pareil à celui qui précède, on verrait que si les points doubles α et β de S ne se croisent pas avec les points doubles α_1 et β_1 de S_1 , ni avec les points doubles des diverses transformées $T^{-1}S_1T$ de S_1 , les cycles $M_1M'_1$ et $N_1N'_1$ ne se coupent pas; et que si, au contraire, α et β se croisent, soit avec α_1 et β_1 , soit avec les points doubles de l'une des transformées $T^{-1}S_1T$, non seulement les cycles $M_1M'_1$ et $N_1N'_1$ se coupent, mais qu'il en est de même de deux cycles quelconques improprement équivalents à MPM' et NQN' .

On peut encore présenter la chose sous une autre forme. Supposons que le cycle $M_1M'_1$ ne soit pas bouclé; alors la droite non euclidienne $\alpha\beta$ et ses

diverses transformées ne se coupent pas; ces droites non euclidiennes partageront alors la surface du cercle fondamental en une infinité de régions. Si le point N appartient à l'une de ces régions et si le point N' transformé de N par S_1 appartient à une autre région, les cycles $M_1M'_1$ et NN' se couperont, ainsi que les cycles improprement équivalents; si les deux points N et N' appartiennent à la même région, ces cycles ne se couperont pas.

Plaçons-nous maintenant à un autre point de vue. Envisageons un cycle C représenté par un arc MPM' et tous les transformés de cet arc. Le cycle sera bouclé si deux de ces transformés se coupent; mais s'il existe une intersection de deux transformés, il y en aura une infinité qui se déduiront les unes des autres par les substitutions de G et, en particulier, il y en aura une à l'intérieur de R_0 .

Il suffira donc d'envisager les portions de l'arc MPM' et de ses transformés qui sont à l'intérieur de R_0 . Notre cycle sera alors représenté par un certain nombre d'arcs A_iB_i qui iront d'un point du périmètre de R_0 à un autre point de ce périmètre.

Quand un point décrira sur la surface fermée S le cycle fermé C tout entier, le point correspondant sur R_0 décrira successivement les arcs

$$A_1B_1, \quad A_2B_2, \quad \dots, \quad A_nB_n.$$

Les points A et B appartiendront au périmètre de R_0 , on sait que ce périmètre se compose d'un certain nombre de côtés conjugués deux à deux; il est clair que les points B_1 et A_2 , B_2 et A_3 , \dots , B_{n-1} et A_n , B_n et A_1 doivent être conjugués.

Si les arcs A_iB_i ne se coupent pas entre eux, le cycle n'est pas bouclé.

De même, si au lieu d'un cycle, nous en considérons deux ou plusieurs, et si les arcs représentatifs de ces divers cycles ne se coupent pas entre eux, ces divers cycles ne se couperont pas entre eux.

Supposons, pour fixer les idées, $p = 2$. Alors le polygone R_0 est un octogone dont les côtés consécutifs représentent respectivement les cycles

$$+ C_1, \quad + C_2, \quad - C_1, \quad - C_2, \quad + C_3, \quad + C_4, \quad - C_3, \quad - C_4,$$

ce qui montre d'abord que l'on a entre les quatre cycles fondamentaux l'équivalence

$$(26) \quad C_1 + C_2 - C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_3 - C_4 \equiv 0,$$

puisque le polygone R_0 est une aire simplement connexe.

Soit M un point intérieur à R_0 , N un point situé sur un des côtés de R_0 , et N' le point correspondant sur le côté conjugué. Nous voyons tout de suite que le cycle $MN' + NM$ est improprement équivalent

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{à } + C_2 & \text{si le point } N \text{ est sur le côté } + C_1; \\ - C_1 & \text{»} & \text{»} & + C_2; \\ - C_2 & \text{»} & \text{»} & - C_1; \\ + C_1 & \text{»} & \text{»} & - C_2; \\ + C_1 & \text{»} & \text{»} & + C_3; \\ - C_3 & \text{»} & \text{»} & + C_4; \\ - C_4 & \text{»} & \text{»} & - C_3; \\ + C_3 & \text{»} & \text{»} & - C_4. \end{array} \right.$$

Cela posé, nous verrons que l'arc $A_i B_i$ est équivalent à l'arc $A_i M B_i$; par conséquent, notre cycle

$$C = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n$$

est équivalent à

$$A_1 M B_1 + A_2 M B_2 + \dots + A_n M B_n$$

et, par conséquent, improprement équivalent à

$$(M B_n + A_1 M) + (M B_1 + A_2 M) + \dots + (M B_{n-1} + A_n M).$$

Or l'une quelconque des expressions entre parenthèses, par exemple $M B_1 + A_2 M$, est analogue au cycle $MN' + NM$ dont nous venons de parler. Elle sera donc équivalente à l'un des cycles fondamentaux $\pm C_1, \pm C_2, \pm C_3, \pm C_n$ et pour savoir auquel de ces cycles, il suffira d'examiner sur quel côté de R_0 se trouve le point A_i et de se reporter au tableau (27).

Nous voyons ainsi que notre cycle C est improprement équivalent à une combinaison des cycles fondamentaux et nous avons le moyen de déterminer cette combinaison. La combinaison ainsi trouvée n'est pas la seule à laquelle C soit équivalent, car nous pouvons transformer l'équivalence ainsi obtenue en nous servant de l'équivalence (26) qui est la seule qui ait lieu entre les cycles fondamentaux.

Inversement, étant donnée une combinaison K quelconque des cycles fondamentaux, nous avons le moyen de former un cycle équivalent représenté par une série d'arcs $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$.

Écrivons notre combinaison K , par exemple, sous la forme

$$K = + C_1 + C_1 + C_2 - C_3 + C_4 + C_4 - C_1 - C_2 - C_2$$

ou sous une forme analogue; chacun des termes de la combinaison sera un des

cycles fondamentaux C_i affecté du coefficient $+ 1$ ou $- 1$. L'ensemble de deux termes consécutifs s'appellera une *séquence* et j'appellerai aussi séquence l'ensemble du dernier et du premier terme, de sorte qu'il y aura dans notre combinaison autant de séquences que de termes.

A chaque séquence correspondra un arc $A_i B_i$; le point A_i se trouvera sur le côté

$$+ C_1, + C_2, - C_1, - C_2, + C_3, + C_4, - C_3, - C_4$$

si le premier terme de la séquence est respectivement

$$+ C_2, - C_1, - C_2, + C_1, + C_4, - C_3, - C_4, + C_3,$$

et le point B_i se trouvera sur le côté

$$- C_1, - C_2, + C_1, + C_2, - C_3, - C_4, + C_3, + C_4$$

si le second terme de la séquence est respectivement

$$+ C_2, - C_1, - C_2, + C_1, + C_4, - C_3, - C_4, + C_3.$$

Deux arcs $A_i B_i$ et $A_k B_k$ se couperont forcément si les points $A_i B_i$ se croisent avec les points $A_k B_k$ sur le périmètre de R_0 . Nous dirons alors que les deux séquences correspondantes sont *incompatibles*. Si, au contraire, ces quatre points ne se croisent pas, nous pourrons tracer les deux arcs de façon qu'ils ne se rencontrent pas.

Comment reconnaitrons-nous si deux séquences sont incompatibles; cela ne présentera aucune difficulté si les quatre points $A_i B_i A_k B_k$ sont sur quatre côtés différents; l'ordre circulaire de ces quatre points sera celui des quatre côtés qui est connu.

Mais si, par exemple, A_i et A_k sont sur un même côté, il faut envisager deux séquences consécutives $A_{i-1} B_{i-1} + A_i B_i$ et $A_{k-1} B_{k-1} + A_k B_k$. Nous voulons que les points $A_{i-1} B_{i-1}$ et $A_{k-1} B_{k-1}$, d'une part ne se croissent pas et que les points $A_i B_i$ et $A_k B_k$ d'autre part ne se croissent pas non plus. Pour désigner un côté sur lequel se trouve un des points A_i, \dots , nous emploierons cette même lettre A_i .

Par hypothèse, les points A_i et A_k se trouveront sur un même côté $A_i A_k$, et il en résulte que les points B_{i-1} et B_{k-1} se trouvent également sur un même côté $B_{i-1} B_{k-1}$ conjugué de $A_i A_k$.

Cela posé, parcourons le périmètre de R_0 de façon à rencontrer successivement les côtés $A_{i-1}, B_{i-1} B_{k-1}, A_{k-1}$; les points $A_{i-1} B_{i-1}$ et $A_{k-1} B_{k-1}$ ne devant pas être croisés, nous rencontrerons B_{i-1} avant B_{k-1} .

Parcourons maintenant le périmètre de R_0 *en sens contraire*, quand nous parcourrons le côté conjugué $A_i A_k$, nous devons rencontrer A_i avant A_k , puisque A_i est conjugué de B_{i-1} , et A_k de B_{k-1} ; et comme les points $A_i B_i$ et $A_k B_k$ ne doivent pas être croisés, nous rencontrerons les côtés B_i , $A_i A_k$ et B_k dans l'ordre que je viens d'indiquer.

Donc pour que les séquences soient compatibles, il faut que pour rencontrer successivement les côtés A_{i-1} , $B_{i-1} B_{k-1}$, A_{k-1} ou bien pour rencontrer successivement les côtés B_i , $A_i A_k$, B_k on doive parcourir R_0 dans deux sens opposés.

Les autres cas douteux se ramèneraient au précédent en renversant l'un des deux arcs $A_i B_i$ ou $A_k B_k$.

Cela posé, un cycle dont toutes les séquences sont compatibles sera équivalent à un cycle non bouclé; un cycle qui aura des séquences incompatibles ne sera pas équivalent à un cycle non bouclé, à moins qu'on ne puisse faire disparaître ces séquences par le moyen de l'équivalence (26). On reconnaîtrait de la même manière si deux ou plusieurs cycles sont équivalents à des cycles qui ne se coupent pas.

L'application de ces règles nous apprend, par exemple, que de toutes les combinaisons des cycles impairs C_1 et C_3 , les seules qui soient équivalentes à des cycles non bouclés sont les suivantes :

$$C_1, \quad C_3, \quad C_1 + C_3, \quad C_3 + C_1.$$

Mais pour ce qui va suivre, j'ai besoin de me placer encore à un autre point de vue.

Représentons notre surface par un polygone fuchsien R'_0 de la troisième famille qui, pour $p = 2$, sera limité extérieurement par un cercle et intérieurement par trois autres cercles. Construisons les divers transformés de R'_0 par les substitutions du groupe correspondant G' ; ils rempliront cette fois le plan tout entier, sauf une infinité de points singuliers répartis sur la circonférence du cercle fondamental.

Un cycle sera encore représenté par un arc MM' allant d'un point M à l'un de ses transformés M' .

Mais deux arcs ayant mêmes extrémités ne représenteront pas toujours deux cycles équivalents; il faut, en outre, que dans l'aire comprise entre ces deux arcs, il n'y ait pas de point singulier. A part cela, ce que nous avons dit pour les polygones fuchiens de la première famille subsiste.

Construisons les divers transformés de l'arc MM' par les substitutions de G' ;

conservons ensuite les portions de ces transformés qui sont à l'intérieur de R'_0 ; notre cycle se trouvera alors représenté par une série d'arcs

$$A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$$

allant d'un point du périmètre de R'_0 à un autre point de ce périmètre, et tels que les points B_{i-1} et A_i , B_n et A_1 soient conjugués.

Pour qu'un cycle ne soit pas bouclé, ou pour que les deux cycles ne se coupent pas, la condition c'est que les arcs $A_i B_i$ qui représentent ce ou ces cycles ne se coupent pas; et on le reconnaîtra par des moyens analogues à ceux que nous venons d'exposer.

Mais il nous reste une question à traiter. Étant donné un cycle représenté

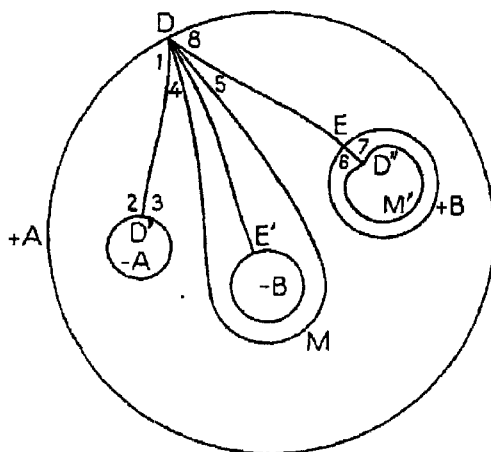


Fig. 2.

par un certain nombre d'arcs $A_i B_i$, à quelle combinaison des cycles fondamentaux est-il équivalent?

Pour résoudre cette question, cherchons à revenir au cas du polygone de la première famille R_0 .

Notre polygone R'_0 est limité extérieurement par le cercle $+A$ et intérieurement par le cercle $-A$ conjugué de $+A$ et par les cercles $+B$ et $-B$ conjugués l'un de l'autre. Je vais chercher à modifier R'_0 de façon à le transformer en un polygone R''_0 homéomorphe de R_0 .

Soient D et D' deux points conjugués sur $+A$ et $-A$; soient E et E' deux points conjugués sur $+B$ et $-B$. Joignons DD' , DE , DE' par des arcs de courbe qui seront regardés comme des coupures. Enveloppons la coupure DE et le cercle $-B$ par une courbe fermée DMD qui en reste très peu distante. Considérons la figure $DE'M$ comprise entre cette courbe fermée et $-B$ et sa

transformée $D''EM'$ par la substitution de G' qui change $-B$ en $+B$. Retrançons du polygone R'_0 la figure $DE'M$ et annexons-lui, en revanche, la figure $D''EM'$, nous obtiendrons un nouveau polygone R''_0 qui représentera la surface fermée au même titre que R'_0 ; ce polygone sera limité extérieurement par le cercle $+A$ et intérieurement par le cercle $-A$ et les courbes fermées DMD et $D''M'D''$; mais ce polygone R''_0 , grâce aux coupures DD' , DE , DE' , $D''E$ sera devenu simplement connexe; les numéros 1, 2, . . . , à 8 marqués sur la figure indiquent l'ordre dans lequel on rencontrera les sommets de ce polygone simplement connexe quand on en parcourra le périmètre. On voit, par l'ordre de conjugaison des côtés, que ce polygone est homéomorphe à R_0 et de telle façon qu'aux côtés de R''_0 .

$$8\ 1, \ 1\ 2, \ 2\ 3, \ 3\ 4, \ 4\ 5, \ 5\ 6, \ 6\ 7, \ 7\ 8$$

correspondent les côtés de R_0

$$+ C_1, \ + C_2, \ - C_1, \ - C_2, \ + C_3, \ + C_4, \ - C_3, \ - C_4.$$

Étant ainsi ramené au cas de R_0 il nous est aisé d'énoncer la règle.

A chacun des arcs A_iB_i qui traversent R'_0 pourront correspondre plusieurs arcs analogues traversant R''_0 , parce que l'arc primitif peut être partagé en plusieurs tronçons par les coupures. A chacun des arcs partiels traversant R''_0 correspondra, d'après la règle démontrée dans le cas de R_0 , un terme et un seul dans la combinaison de cycles fondamentaux cherchée. A chacun de nos arcs primitifs A_iB_i correspondra donc un ou plusieurs termes de cette combinaison.

Le premier de ces termes dépend de la position du point initial A_i ; si ce point est sur les cercles

$$+ A, \ - A, \ + B, \ - B,$$

ce premier terme sera respectivement

$$+ C_2, \ - C_2, \ - C_4, \ + C_4.$$

Les termes suivants dépendent des coupures DD' , DE , DE' successivement rencontrées par l'arc A_iB_i ; si cet arc rencontre en allant de gauche à droite

$$DD' \text{ ou } DE \text{ ou } DE',$$

les termes correspondants seront respectivement

$$+ C_1, \ + C_3, \ - C_4 - C_3 + C_4$$

et si ces coupures sont rencontrées de droite à gauche, ils seront

$$- C_1, \ - C_3, \ - C_4 + C_3 + C_4.$$

Il est donc aisé, d'après cette règle, de former la combinaison cherchée.

Dans tout ce chapitre, je me suis placé au point de vue de l'équivalence impropre; si l'on voulait déduire de là des théorèmes analogues pour l'équivalence propre, il suffirait d'observer que toute surface fermée est homéomorphe à elle-même de telle façon qu'un point quelconque A de cette surface corresponde à un autre point quelconque A' de cette même surface.

§. Envisageons, en particulier, une variété V à trois dimensions définie comme au paragraphe 2; son *squelette* se réduira à un simple segment de droite le long duquel la variable que nous avons appelée t variera de 0 à 1. Le système $W(t)$ se composera d'une variété unique; cette variété sera une surface fermée ordinaire que nous supposerons bilatère, qui se réduira à un point pour $t = 0$ et dont l'ordre de connexion ira sans cesse en croissant quand t croîtra de 0 à 1 et sera égal à $2p + 1$ pour $t = 1$.

Il résulte de cette définition que *la variété V n'est pas fermée*.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 2, la droite qui forme le squelette de V sera subdivisée en tronçons par certaines valeurs remarquables de t .

Soient

$$t_1, t_2, \dots, t_p$$

ces valeurs remarquables; ce seront celles pour lesquelles la surface $W(t)$ a un point singulier et, d'après nos hypothèses, celles pour lesquelles l'ordre de connexion de cette surface augmente de deux unités.

Ainsi W sera 1 fois connexe pour t compris entre 0 et t_1 , 3 fois pour t compris entre t_1 et t_2 , ..., $2q + 1$ fois entre t_q et t_{q+1} , ..., et enfin $2p + 1$ fois entre t_p et 1.

La surface W reste homéomorphe à elle-même tant que la variable t reste sur un même tronçon.

Supposons que nous fassions décroître t et que t passe par une des valeurs remarquables; il arrive alors comme nous l'avons vu au paragraphe 2 qu'un des cycles C de la surface S se réduit à un point; que tous les cycles équivalents à C deviennent équivalents à zéro et, d'autre part que tous les cycles qui rencontraient C cessent d'exister.

C'est ainsi que le nombre des cycles réellement distincts, et par conséquent, l'ordre de connexion se trouve diminué de deux unités.

Nous allons maintenant définir le cycle K_q . Pour $t = t_q + \varepsilon$, il existe sur $W(t_q + \varepsilon)$ un cycle infiniment petit qui se réduit à un point pour $t = t_q$.

C'est ce cycle que j'appelle K_q . La surface $W(t)$ reste homéomorphe à elle-même quand t varie de t_q à t_{q+1} ; [et l'on peut supposer que l'homéomorphisme est tel que pour deux valeurs infiniment voisines t et t' , les deux points correspondants sur $W(t)$ et $W(t')$ soient infiniment peu différents l'un de l'autre]. La surface $W(t)$ reste donc homéomorphe à $W(t_q + \varepsilon)$ et au cycle K_q correspondra sur $W(t)$ un cycle que j'appellerai encore K_q . Pour définir K_q sur la surface $W(t_{q+1} + \varepsilon)$, il suffit de dire que ce cycle doit différer très peu du même cycle sur la surface $W(t_{q+1} - \varepsilon)$; comme $W(t)$ reste homéomorphe à elle-même pour toutes les valeurs de t comprises entre t_{q+1} et t_{q+2} , on peut définir comme plus haut le cycle K_q pour ces valeurs de t , et ainsi de suite.

Le cycle K_q étant ainsi défini, j'arrive à la propriété essentielle, à savoir que deux cycles K_α et K_β ne se coupent pas. Soient $\beta > \alpha$, et soit d'abord $t = t_\beta + \varepsilon$; alors K_β est très petit et je dis que K_α ne coupe pas K_β . En effet, d'après sa définition, le cycle K_α existe encore pour $t < t_\beta$, or j'ai dit que les cycles qui coupent le cycle très petit K_β disparaissent quand t devient $< t_\beta$. Faisons varier t de t_β à $t_{\beta+1}$. Entre ces limites, toutes les surfaces $W(t)$ sont homéomorphes entre elles et comme sur l'une d'elles les cycles K_α et K_β ne se coupent pas, les cycles correspondants K_α et K_β ne se couperont sur aucune d'elles. Comme K_α et K_β ne se coupent pas sur $W(t_{\beta+1} - \varepsilon)$, on conclura que sur la surface infiniment voisine $W(t_{\beta+1} + \varepsilon)$, les deux cycles K_α et K_β ne se couperont pas non plus; pour $t_{\beta+1} < t < t_{\beta+2}$, toutes les surfaces $W(t)$ sont homéomorphes et comme sur l'une d'elles les cycles K_α et K_β ne se coupent pas, ils ne se couperont sur aucune d'elles; et ainsi de suite.

Donc les cycles K_α et K_β ne se coupent pas.

C. Q. F. D.

J'ajoute que le cycle K_q n'est pas bouclé; il ne l'est pas pour $t = t_q + \varepsilon$ puisqu'il se réduit à une courbe fermée très petite; donc à cause de l'homéomorphisme il ne l'est pas pour $t_q < t < t_{q+1}$; il ne l'est pas pour $t = t_{q+1} + \varepsilon$, parce qu'alors il diffère très peu de ce qu'il est pour $t = t_{q+1} - \varepsilon$; et ainsi de suite.

Faisons varier t depuis t_q jusqu'à 1, le cycle K_q variera d'une façon continue; pour $t = t_q$ il se réduit à un point et pour $t > t_q$ à une courbe fermée unique. Il engendrera donc une aire simplement connexe que j'appelle A_q .

Deux aires A_α et A_β n'ont aucun point commun; et, en effet, s'ils en avaient un, ce point appartiendrait à une surface $W(t)$ et sur cette surface aux deux cycles K_α et K_β ; or nous venons de voir que ces deux cycles ne se coupent pas.

Désignons encore par B_q l'aire partielle engendrée par K_q quand t varie depuis t_q jusqu'à $t (t < 1)$ et qui, comme A_q , est simplement connexe. Nous

allons traiter K_q , A_q et B_q comme des *coupures*; à cet effet, considérons deux cycles K'_q et K''_q infiniment peu différents de K_q ; nous pouvons supposer que ces deux cycles ne se coupent pas. La portion très petite de la surface $W(t)$ comprise entre ces deux cycles s'appellera $S_q(t)$. Les deux cycles K'_q et K''_q engendreront deux aires A'_q et A''_q quand t variera de t_q à 1 et deux aires B'_q et B''_q quand t variera de t_q à t .

Cela posé, retranchons de la surface fermée $W(t)$ les aires très petites

$$S_1(t), S_2(t), \dots, S_p(t).$$

Après cette opération, la surface restante $W - \Sigma S_q$ ne sera plus une surface fermée, elle admettra pour frontières les $2p$ courbes fermées K'_q et K''_q .

Ajoutons ensuite à cette surface les aires B'_q et B''_q ; le résultat de cette addition sera une surface

$$W_1(t) = W - \Sigma S_q + \Sigma B'_q + \Sigma B''_q$$

qui sera fermée puisque B'_q admet K'_q comme frontière complète et que B''_q admet K''_q .

Je dis que la surface $W_1(t)$ ainsi obtenue est *simplement connexe* et sans singularité. Elle n'a pas de singularité, parce que ses différentes parties ne se coupent pas et n'ont d'autres points communs que ceux des courbes K'_q et K''_q qui leur servent de frontières. Et, en effet, $W(t)$ ne peut avoir aucun point commun avec B'_q ou B''_q , en dehors de K'_q et K''_q ; et, d'autre part, comme les aires B_α et B_β ne se coupent pas, les aires $B'_q, B''_q, B'_\alpha, B''_\alpha, \dots$, n'auront non plus aucun point commun.

D'autre part, la surface non fermée $W - \Sigma S_q$ est homéomorphe à une aire plane limitée extérieurement par une courbe fermée et intérieurement par $2p - 1$ autres courbes fermées (cela n'est pas autre chose que la représentation de la surface W par un polygone fuchsien de la troisième famille dont il a été question plus haut au paragraphe 3) ou, ce qui revient au même, à une aire sphérique, comprenant, ce qui reste d'une sphère quand on en a retranché $2p$ petites aires α simplement connexes et extérieures les unes aux autres.

D'un autre côté, les $2p$ aires B' et B'' peuvent être considérées comme homéomorphes aux $2p$ aires α ; on verra ainsi, en faisant attention à la façon dont se fait le raccordement, que la surface totale

$$W_1 = W - \Sigma S + \Sigma B' + \Sigma B''$$

est homéomorphe à la sphère entière, c'est-à-dire simplement connexe.

Faisons varier maintenant t depuis 0 jusqu'à 1, et en même temps imaginons que les cycles K'_q et K''_q se rapprochent de K_q de façon à se confondre avec K_q pour $t = 1$.

Je suppose que les positions successives de K'_q et de K''_q n'aient aucun point commun, pas plus par conséquent que les positions successives des aires A'_q et A''_q , B'_q ou B''_q . Dans ces conditions, tout point intérieur à V (les points des aires A_q exceptés) appartiendra à l'une des surfaces W_1 et à une seule. Les points de la surface limite $W(1)$ appartiendront à $W_1(1)$. Pour $t = 1$, les aires B'_q et B''_q se réduiront à A'_q et A''_q , et celles-ci elles-mêmes se réduiront aux aires A_q puisque pour $t = 1$ les cycles K'_q et K''_q se réduisent à K_q .

Si nous considérons donc un point de A_q , ce point se trouvera encore sur $W_1(1)$ mais à ce point de A_q correspondront deux points de $W_1(1)$, l'un de ces points devant être considéré comme appartenant à $B'_q = A'_q$ et l'autre à $B''_q = A''_q$.

Les surfaces simplement connexes $W_1(t)$ s'emboîtant mutuellement engendreront (*cf.* § 1) une variété simplement connexe.

On peut donc dire qu'en pratiquant dans V les p coupures A_q on rend cette variété simplement connexe. Pratiquons ces p coupures, et déformons notre variété de façon à écarter les deux lèvres de ces coupures; la variété nouvelle U ainsi obtenue sera simplement connexe, limitée par une surface simplement connexe H homéomorphe à une sphère. Sur cette surface simplement connexe nous distinguerons $2p$ aires simplement connexes qui seront les deux lèvres des p coupures, et que j'appellerai les *cicatrices*; ces cicatrices seront conjuguées deux à deux.

A chaque point de U correspondra un point de V et un seul; de même à chaque point de V correspondra un point de U et un seul, sauf pour les points des aires A_q à chacun desquels correspondront deux points de U situés sur deux cicatrices conjuguées.

Considérons deux variétés analogues à U ; chacune d'elles sera simplement connexe, chacune d'elles sera limitée par une surface simplement connexe portant $2p$ cicatrices simplement connexes conjuguées deux à deux et extérieures les unes aux autres. Il est clair que les deux figures ainsi formées seront homéomorphes entre elles et homéomorphes à la figure formée par une sphère dont la surface porte $2p$ cicatrices constituées par des petits cercles extérieurs les uns aux autres.

D'où cette conséquence importante; toutes les variétés engendrées comme V

et pour lesquelles le nombre entier appelé plus haut p est le même sont homéomorphes entre elles.

Supposons que dans l'espace ordinaire on construise une surface fermée $2p + 1$ fois connexe et sans singularité. Cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure et l'autre extérieure. Soit R la région intérieure. C'est une variété non fermée à trois dimensions susceptible de la même génération que V . Donc V est homéomorphe à R pourvu que le nombre p soit le même.

Donc, si j'appelle *développables* les variétés non fermées qui sont homéomorphes à une portion de l'espace plan, *toutes les variétés engendrées comme V sont développables.*

On peut en tirer en passant une conséquence; considérons dans l'espace ordinaire deux surfaces fermées S et S' , l'une et l'autre $2p + 1$ fois connexes.

Soit R le volume intérieur à S , et R' le volume intérieur à S' . On sait que les deux surfaces S et S' sont homéomorphes; mais l'on pourrait se demander s'il en est de même des deux volumes R et R' et au premier abord on pourrait être tenté de répondre négativement à cette question. On pourrait se représenter les diverses nappes de la surface S' s'enchevêtrant les unes dans les autres d'une façon compliquée et formant des nœuds qu'il serait impossible de dénouer sans sortir de l'espace à trois dimensions. Loin de là, nous sommes maintenant en état de conclure que les deux volumes R et R' sont toujours homéomorphes, puisque ces deux volumes peuvent être engendrés comme V , et que deux variétés engendrées comme V sont toujours homéomorphes.

J'arrive maintenant à une question importante pour ce qui va suivre. Je reprends la variété V limitée par la surface $W(1)$, et engendrée par la surface $W(t)$.

La même variété pourrait-elle être engendrée par une autre surface $W(t)$, qui comme $W(t)$ se réduirait à un point pour $t = 0$, aurait un ordre de connexion constamment croissant et finalement se réduirait à $W(1)$ pour $t = 1$? Il est évident que V est susceptible d'une infinité de manières d'une pareille génération. Il s'agit de comparer ces divers modes de génération.

Je désignerai par K'_1, \dots, K'_p les p cycles qui jouent dans la nouvelle génération le même rôle que les cycles K_1, \dots, K_p dans l'ancienne.

Quelle relation y a-t-il entre les cycles K et K' ? Peut-on choisir arbitrairement les cycles K' , et quelles conditions doivent remplir p cycles de la surface $W(t)$ pour pouvoir être choisis pour jouer le rôle des cycles K' ?

1° Ces cycles ne doivent pas être bouclés; 2° Ils ne doivent pas se couper.

Mais ce n'est pas tout. Le cycle K_q , par rapport à la variété V , est équivalent à zéro, puisqu'il forme la frontière complète de l'aire A_q qui fait partie de V . Nous aurons donc les équivalences

$$(1) \quad K_1 \equiv K_2 \equiv \dots \equiv K_q \equiv 0 \quad (\text{mod } V)$$

et toutes celles qui s'en déduisent. Je dis que nous n'en aurons pas d'autres.

Je veux dire par là que si nous avons par rapport à V une équivalence de la forme suivante :

$$(2) \quad C \equiv 0 \quad (\text{mod } V),$$

C étant un cycle de la surface frontière $W(1)$, que j'appellerai pour abréger W , nous aurons, par rapport à cette surface frontière W une équivalence de la forme

$$(3) \quad C \equiv -\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_2 - \dots - \alpha_n + \beta_n + \alpha_n \quad (\text{mod } W),$$

où les α_i sont des cycles quelconques de W et où les β_i sont des cycles de cette surface tels que

$$\beta_i \equiv mK \quad (\text{mod } W),$$

m étant un entier positif ou négatif et K l'un des cycles K_1, K_2, \dots, K_q ; et, en effet, si l'équivalence (3) a lieu, on aura *a fortiori*

$$C \equiv \Sigma(-\alpha + \beta + \alpha) \quad (\text{mod } V)$$

ou, à cause des équivalences (1) qui entraînent $\beta \equiv 0$

$$C \equiv \Sigma(-\alpha + \alpha) \equiv 0 \quad (\text{mod } V).$$

L'équivalence (2) est donc une conséquence des équivalences (1).

Pour établir la proposition énoncée, je suppose que l'équivalence (2) ait lieu; elle signifie que le cycle C est la frontière complète d'une certaine aire simplement connexe D située dans V .

Cette aire pourra couper l'aire A_q suivant une ligne L_q qui ira d'un point de C à un autre point de C , puisque les extrémités de L_q ne peuvent se trouver que sur la frontière de A_q c'est-à-dire sur W , ou puisqu'elles sont sur D , sur l'intersection de W et de D , c'est-à-dire sur C . L'aire D pourra aussi ne pas couper A_q , ou la couper suivant plusieurs lignes distinctes L_q . Dans tous les cas les différentes lignes L ne se couperont pas puisque les diverses aires A ne se coupent pas et puisqu'on peut toujours supposer que les aires A et D n'ont pas de singularité et déformer au besoin un peu D de façon que les surfaces D et A ne se touchent pas.

Chacune des lignes L partage l'aire D en deux parties puisque cette aire est simplement connexe. Cette aire D sera donc divisée par les diverses lignes L en un certain nombre d'aires partielles $\Delta_1, \Delta_2, \dots$. On peut parcourir successivement les contours des diverses aires partielles Δ de la façon suivante que je ferai mieux comprendre par un exemple que par des explications.

Sur la figure le cycle ABCDEFGHNIKLMPA est le cycle C; les lignes CE, BF, GK, HI, LP sont les lignes L.

Il est clair que le cycle total peut être remplacé par la somme des arcs suivants :

$$(4) \quad \Sigma = \left\{ \begin{array}{l} (ABCDE + ECBA) + (ABCE + EF + FBA) \\ + (ABF + FGH + HNI + IHGFBA) \\ + (ABFGHI + IK + KGFBA) \\ + (ABFGK + KL + LPA) + (APL + LMP + PA). \end{array} \right.$$

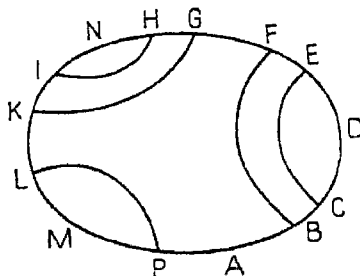


Fig. 3.

On voit, en effet, que le dernier terme de chaque parenthèse est détruit par le premier terme de la parenthèse suivante et qu'en supprimant les termes ainsi détruits on retrouve le cycle total C.

Prenons maintenant l'une de ces parenthèses, la troisième par exemple; elle peut s'écrire

$$ABFGH + HNIH + HGFBA.$$

On voit que le premier et le dernier terme représentent un même arc ABFGH parcouru une fois dans le sens direct, une fois dans le sens inverse, et que le second terme représente le contour de l'une des aires partielles Δ , à savoir de l'aire HIN; il en est de même pour les autres parenthèses de l'expression Σ qui peut s'écrire

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ABC + CDEC - CBA) + (AB + BCEFB + BA) \\ + (ABFGH + HNIH + HGFBA) \\ + (ABFG + GHIK + GFBA) + (ABFGKLPA) + (AP + PLMP + PA). \end{array} \right.$$

Je vais encore modifier le chemin Σ . Ce chemin se compose d'arcs faisant partie du contour primitif C et d'arcs formés par les lignes L_q . Ces derniers arcs se détruisent comme on l'a vu parce que dans l'expression (4) le dernier terme de chaque parenthèse est détruit par le premier de la suivante. Nous pouvons transformer ces derniers arcs; nous remplacerons la ligne L_q par un arc appartenant au cycle K_q et ayant mêmes extrémités. Cela est possible parce que les deux extrémités de la ligne L_q sont sur le cycle K_q ; cela est permis d'ailleurs parce que ces nouveaux arcs, mis à la place des anciens, se détruiraient comme se détruisaient les anciens. Et si j'appelle Σ' ce que devient le chemin Σ après cette transformation, le cycle primitif C peut donc aussi bien être considéré comme identique au chemin Σ' qu'au chemin Σ .

Ce chemin Σ' pourra être mis comme Σ sous la forme (5); il suffit simplement d'admettre que, dans le second membre de (5), CE par exemple représente, non la ligne L_q qui a pour extrémités C et E , mais l'arc du cycle K_q qui va de C en E .

L'avantage de cette transformation c'est que tous les points du chemin Σ' sont sur la surface limite W , tandis qu'il n'en aurait pas été de même de tous les points du chemin Σ .

Revenons à la variété simplement connexe U définie plus haut.

Cette variété a pour frontière une surface simplement connexe que nous avons appelée H et qui porte $2p$ cicatrices. Les parties de H extérieures aux cicatrices correspondent alors à la surface W et les cicatrices, comme nous l'avons vu, aux aires A_q .

Un contour fermé quelconque Q tracé sur cette surface K et restant en dehors des cicatrices sera équivalent à zéro par rapport à la variété V , *en vertu des équivalences* (1). En effet, ce contour enveloppera un certain nombre de cicatrices; supposons pour fixer les idées qu'elle enveloppe deux cicatrices A_1 et A_2 . Soit M le point initial et final du contour fermé Q ; soient, de même M_1 et M_2 les points initiaux et finaux des deux contours fermés K_1 et K_2 qui servent respectivement de périmètre aux deux cicatrices A_1 et A_2 .

Joignons M à M_1 et à M_2 par deux arcs MM_1 et MM_2 ; on aura

$$Q \equiv MM_1 + K_1 + M_1M + MM_2 + K_2 + M_2M \quad (\text{mod } W)$$

puisque la partie de la surface H comprise entre les contours Q , K_1 et K_2 appartient à cette région de H qui correspond à W .

Mais en vertu des équivalences (1)

$$K_1 \equiv K_2 \equiv 0 \pmod{V}:$$

donc

$$Q \equiv MM_1 + M_1M + MM_2 + M_2M \equiv 0 \pmod{V}$$

et cela a lieu comme je l'avais annoncé *en vertu des équivalences* (1).

Or, si nous envisageons le second terme de chaque parenthèse dans l'expression (5) du chemin Σ' , ce second terme représente sur W un contour fermé; il représentera également sur H un contour fermé; cela n'est pas évident et cela ne serait pas vrai pour un contour fermé de W qui rencontrerait l'un des cycles K_q ; à chaque point de K_q correspond sur U deux points distincts, de telle façon que quand un chemin continu sur W rencontre K_q , le chemin correspondant sur U saute brusquement d'un de ces deux points à l'autre et devient discontinu. Mais ici cette circonstance ne peut se présenter puisque le contour fermé que nous envisageons ne franchit jamais K_q et se borne à le longer.

Le second terme de chaque parenthèse est donc équivalent à zéro *en vertu des équivalences* (1). Donc il en est de même de la parenthèse entière, puisque le premier et le dernier termes se détruisent. Donc, il en est de même du chemin Σ' tout entier et, par conséquent de C .

Donc, il n'y a pas d'autre équivalence entre les cycles de W que celles qui sont des conséquences des équivalences (1). C. Q. F. D.

Nous pouvons donc ajouter une troisième condition à celles qui, nous l'avons vu, sont nécessaires pour que p cycles de W puissent être choisis pour jouer le rôle des cycles K' .

Le système des équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv \dots \equiv K'_p \equiv 0$$

ne doit pas différer du système des équivalences

$$K_1 \equiv K_2 \equiv \dots \equiv K_p \equiv 0,$$

de sorte que chacun de ces systèmes doit être une conséquence de l'autre.

Ces trois conditions sont-elles suffisantes ?

Soient $K'_1, K'_2, \dots, K'_p, p$ cycles non bouclés, ne se coupant pas mutuellement et tels que l'on ait

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv \dots \equiv K'_p \equiv 0 \pmod{V}.$$

L'équivalence $K'_q \equiv 0$ nous montre qu'il existe une aire A'_q simplement

connexe et dont la frontière complète est K'_q . Je dis que l'on peut toujours supposer que les diverses aires A'_q n'ont aucun point commun.

Imaginons, en effet, que $A'_1, A'_2, \dots, A'_{q-1}$ ne se coupent pas, mais qu'une ou plusieurs de ces $q-1$ aires soit coupée par A'_q . Soit E_i l'intersection de l'aire A'_q et de l'aire A'_i ; cette intersection n'aura aucun point sur K'_q , puisque K'_q ne pourrait rencontrer A'_i que sur W et, par conséquent, sur K'_i et que K'_i ne rencontre pas K'_q par hypothèse. Cette intersection est donc tout entière à l'intérieur de A'_q ; nous pouvons supposer que la surface A'_i n'a pas de singularité et n'est pas tangente à la surface A'_q , sans quoi il suffirait de la déformer légèrement; il en résulte que notre intersection est une courbe sans point double, elle doit donc se composer de plusieurs courbes fermées ne se coupant pas mutuellement.

De plus, l'intersection de A'_i avec A'_q ne coupera pas celle de A'_k avec A'_q (si i et k sont $< q$) puisque A'_i ne coupe pas A'_k par l'hypothèse.

Les diverses intersections E_i et E_k se composeront donc d'un certain nombre de courbes fermées n'ayant aucun point commun. Si nous envisageons deux de ces courbes, ou bien elles seront extérieures l'une à l'autre, ou bien l'une d'elles sera intérieure à l'autre; ces mots extérieur ou intérieur doivent s'entendre par rapport à l'aire simplement connexe A'_q . Parmi nos courbes fermées nous ne conserverons que celles qui ne sont intérieures à aucune autre; elles seront alors toutes extérieures les unes aux autres. Soit h_i l'une des courbes fermées conservées, appartenant à E_i . Cette courbe h_i limitera une portion de l'aire simplement connexe A'_q que j'appellerai G_i et qui sera elle-même simplement connexe; de même elle limitera une portion de l'aire simplement connexe A'_i que j'appellerai M_i et qui sera elle-même simplement connexe.

Nous pourrions tracer sur A'_q une courbe fermée h'_i à laquelle h_i sera intérieure et qui en différera très peu. Alors h'_i limitera une portion de l'aire A'_q que j'appellerai G'_i et qui sera simplement connexe; de même h'_i limitera une aire simplement connexe M'_i qui différera infiniment peu de M_i et qui ne coupera pas l'aire A'_i .

Formons alors une aire A''_q en enlevant de A'_q toutes les aires G'_i et en y ajoutant toutes les aires M'_i

$$A''_q = A'_q + \Sigma M'_i - \Sigma G'_i.$$

On voit que A''_q sera comme A'_q une aire simplement connexe limitée par K'_q puisqu'on remplace l'aire G'_i par une autre aire simplement connexe limitée également par h'_i . Mais l'aire A''_q ne coupera ni A'_1 , ni $A'_2, \dots, ni A'_{q-1}$.

Nous pouvons donc supposer que les q premières aires A'_i ne se coupent pas, et en continuant de la sorte on verrait qu'on peut supposer que deux quelconques des p aires A'_i ne se coupent pas. C'est ce que nous ferons.

Un raisonnement analogue montrerait que les cycles K' n'étant pas bouclés on peut toujours supposer que les aires A'_i sont des surfaces sans courbe double.

Je me propose maintenant d'établir que les cycles K' qui satisfont aux trois conditions énoncées peuvent jouer le rôle des cycles K , c'est-à-dire : 1° que V peut être engendré par une surface $W'(t)$ qui se réduit à un point pour $t = 0$ et à W pour $t = 1$, et qui pour $t_q < t < t_{q+1}$ est $2q + 1$ fois connexe; 2° que pour $t_q < t < t_{q+1}$, $W(t)$ coupe les aires A'_1, A'_2, \dots, A'_q suivant une seule courbe fermée et ne coupe pas les aires $A'_{q+1}, A'_{q+2}, \dots, A'_p$.

Je suppose que cela ait été démontré pour une variété V_1 développable, c'est-à-dire homéomorphe à une portion de l'espace plan ordinaire et limitée par une surface $2p - 1$ fois connexe et je me propose de le démontrer pour une variété V développable et limitée par une surface W de connexion $2p + 1$.

Pratiquons dans V la coupure A'_p et déformons légèrement cette variété après avoir séparé les deux lèvres de la coupure; nous obtiendrons une nouvelle variété développable V_1 limitée par une surface $2p - 1$ fois connexe; cette surface W_1 se composera de deux parties, dont l'une correspond à la surface W dans laquelle a été pratiquée la coupure K'_p , et l'autre est formée des deux cicatrices correspondant aux deux lèvres de la coupure.

Nous pouvons particulariser cette variété développable V_1 et cette surface W_1 de la façon suivante. Considérons un point intérieur à V et soit δ la plus courte distance de ce point à la surface limite W ou à la coupure A'_p . Les points tels que $\delta > \varepsilon$ (ε petit) formeront le domaine V_1 ; les points tels que $\delta = \varepsilon$ formeront la surface W_1 ; les points tels que $\delta < \varepsilon$ formeront le domaine $V - V_1$. On voit aisément que la surface W_1 est $2p - 1$ fois connexe, et qu'elle est homéomorphe à la frontière du domaine obtenu en pratiquant dans V la coupure A'_p .

La surface W_1 ne coupera pas l'aire A'_p , et coupera chacune des autres aires A'_q suivant un cycle K''_q peu différent de K'_q . Ces cycles K''_q ne seront pas bouclés, ils ne se couperont pas mutuellement. De plus, le cycle K''_q découpera dans l'aire simplement connexe A'_q un domaine A''_q simplement connexe dont il sera la frontière complète. Ce domaine A''_q est la portion commune de A'_q et de V_1 ; cela montre que $K''_q \equiv 0$ par rapport à V_1 . Cela montre que les cycles K'' satisfont par rapport à V_1 aux conditions du théorème; or le théorème est supposé démontré pour V_1 .

Donc V_1 peut être engendré par une surface $W'(t)$ qui pour $t = 0$ se réduit à un point, pour $t = u$ (où $t_{p-1} < u < t_p$) se réduit à W_1 , qui pour $t_q < t < t_{q+1}$ coupe $A''_1, A''_2, \dots, A''_q$ et, par conséquent, A'_1, A'_2, \dots, A'_q suivant une seule courbe fermée et ne coupe pas $A''_{q+1}, A''_{q+2}, \dots, A''_{p-1}$, ni par conséquent $A'_{q+1}, A'_{q+2}, \dots, A'_{p-1}$, ni d'ailleurs A'_p , puisque cette aire n'a aucun point commun avec V_1 et que les A'_i n'ont d'autres points communs avec V_1 que ceux de A''_i .

Envisageons maintenant le domaine $V - V_1$ limité extérieurement par la surface W qui est $2p + 1$ fois connexe et intérieurement par la surface W_1 qui est $2p - 1$ fois connexe et qui ne coupe pas l'aire A'_p , laquelle se trouve tout entière à l'intérieur de $V - V_1$. Il est clair que nous pourrions prendre sur A'_p un point M et construire une surface W_2 tout entière intérieure à $V - V_1$, admettant ce point M comme point conique et n'ayant aucun autre point commun avec A'_p , puis engendrer le domaine $V - V_1$ par une surface $W'(t)$ qui pour $t = u$ se réduit à W_1 ; qui pour $u < t < t_p$ est $2p - 1$ fois connexe, ne coupe pas A'_p et coupe les autres A'_q suivant une seule courbe fermée; qui pour $t = t_p$ se réduit à W_2 ; qui pour $t_p < t < 1$ est $2p + 1$ fois connexe et coupe tous les A'_q , y compris A'_p suivant une seule courbe fermée; qui, enfin, pour $t = 1$ se réduit à W_1 .

Nous voyons que la variété V pourra être engendrée par une surface $W'(t)$ satisfaisant à l'énoncé du théorème; le théorème est donc démontré et les trois conditions énoncées sont non seulement nécessaires, mais suffisantes.

Il y a plus; pour démontrer le dernier théorème, je me suis appuyé seulement sur ce fait que les équivalences $K' \equiv 0$ sont une conséquence des équivalences $K \equiv 0$ et je n'ai pas eu à m'appuyer sur le fait inverse, que les équivalences $K \equiv 0$ sont une conséquence des équivalences $K' \equiv 0$. Donc si les cycles K' ne sont pas bouclés et ne se coupent pas mutuellement et si les équivalences $K \equiv 0$ entraînent les équivalences $K' \equiv 0$, inversement les équivalences $K' \equiv 0$ entraîneront les équivalences $K \equiv 0$. C'est ce qu'on pourrait vérifier directement.

6. Considérons maintenant une variété V à trois dimensions dont le squelette se réduira à un segment de droite le long duquel la variable t variera de 0 à 1. Le système $W(t)$ se composera d'une variété unique; cette variété sera une surface fermée bilatère, qui se réduira à un point pour $t = 0$ et pour $t = 1$, et dont l'ordre de connexion ira en croissant de $t = 0$ à $t = \frac{1}{2}$ et en décroissant de $t = \frac{1}{2}$ à $t = 1$. *Notre variété V est donc fermée.*

Nous aurons $2p$ valeurs remarquables de t , satisfaisant aux inégalités

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < \frac{1}{2} < t'_p < \dots < t'_2 < t'_1 < 1,$$

de telle façon que, quand t passera de la valeur $t_q - \varepsilon$ à la valeur $t_q + \varepsilon$, la surface $W(t)$ passera de la connexion $2q - 1$ à la connexion $2q + 1$, et que quand t passera de la valeur $t'_q - \varepsilon$ à la valeur $t'_q + \varepsilon$, la surface $W(t)$ passera de la connexion $2q + 1$ à la connexion $2q - 1$.

La variété V pourra se décomposer en deux autres V' et V'' correspondant, la première aux valeurs de t comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$, la seconde aux valeurs de t comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1. Chacune de ces deux variétés partielles répond aux conditions du paragraphe précédent; elle est donc développable et c'est la variété V formée par leur réunion qu'il s'agit maintenant d'étudier.

Ces deux variétés V' et V'' ont pour frontière commune la surface $W\left(\frac{1}{2}\right)$ que j'appellerai W et qui est $2p + 1$ fois connexe.

Sur cette surface, je puis tracer d'une part les p cycles

$$K'_1, K'_2, \dots, K'_p$$

définis par rapport à la variété V' comme l'ont été dans le paragraphe précédent les cycles K_1, K_2, \dots, K_p par rapport à la variété V du paragraphe précédent.

Ces p cycles ne sont pas bouclés et ne se coupent pas. De plus, on a les équivalences

$$(1) \quad K'_1 \equiv K'_2 \equiv \dots \equiv K'_p \equiv 0 \pmod{V'}.$$

D'autre part, sur cette même surface W , je puis tracer les p cycles

$$K''_1, K''_2, \dots, K''_p$$

définis par rapport à V'' comme l'ont été au paragraphe précédent les cycles K_q par rapport à la variété V du paragraphe précédent.

Les p cycles K'' ne sont pas bouclés et ne se coupent pas; et l'on a les équivalences

$$(2) \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv \dots \equiv K''_p \pmod{V''}.$$

Les cycles K' seront alors les cycles *principaux* de V' et les cycles K'' ceux de V'' .

Considérons maintenant un cycle C quelconque intérieur à V ; si M est un point quelconque de ce cycle, nous pouvons envisager le point correspondant N du squelette. Quand le point M décrira le cycle tout entier, le point N restera

sur la droite o_1 qui constitue le squelette et exécutera sur cette droite une série de mouvements oscillatoires à la suite desquels il reviendra à son point de départ.

Soient A et B les deux positions extrêmes du point N dans cette oscillation. Supposons que le point A soit compris entre t_q et t_{q+1} et que le point N partant de la valeur $t_{q+1} - \varepsilon$ décroisse jusqu'à A pour revenir à la valeur $t_{q+1} - \varepsilon$. Soit H l'arc correspondant du cycle C; soit M un point de cet arc H, il appartiendra à la surface $W(t)$, t étant compris entre A et $t_{q+1} - \varepsilon$. Nous savons que la surface $W(t)$ reste homéomorphe à elle-même quand t varie de $t_{q+1} - \varepsilon$ à $t_q + \varepsilon$ et, par conséquent, quand t varie de $t_{q+1} - \varepsilon$ à A, puisque A est plus grand que t_q . Donc $W(t)$ est homéomorphe à $W(t_{q+1} - \varepsilon)$. Soit donc M' le point de $W(t_{q+1} - \varepsilon)$ qui correspond à M. Quand le point M décrira l'arc H, le point M' décrira l'arc H' situé tout entier sur $W(t_{q+1} - \varepsilon)$. Je dis qu'on a l'équivalence

$$H \equiv H' \quad (\text{mod } V).$$

En effet, considérons les différentes surfaces $W(t)$, où t a une valeur intermédiaire entre celle qui correspond au point M et la valeur $t_{q+1} - \varepsilon$ qui correspond à M'. Considérons sur chacune de ces différentes surfaces qui sont toutes homéomorphes entre elles, le point qui correspond à M. Ce point engendrera une ligne L dont les extrémités seront M et M'; quand le point M décrira l'arc H, cette ligne L engendrera une aire simplement connexe qui aura pour frontière complète les deux arcs H et H'; ce qui démontre l'équivalence annoncée.

Considérons maintenant les deux surfaces $W(t_{q+1} - \varepsilon)$ et $W(t_{q+1} + \varepsilon)$; sur la première nous avons l'arc H' dont les deux extrémités D et E appartiennent à l'arc H et, par conséquent, au cycle C; sur la seconde nous avons les deux points D' et E', infiniment voisins de D et de E et qui appartiennent aussi à C, de telle façon que DD' et EE' soient deux arcs infiniment petits de ce cycle C. Nous pouvons tracer sur la surface $W(t_{q+1} + \varepsilon)$ un arc H'' allant de D' en E' et infiniment peu différent de H'. Ce dernier point mérite quelque attention. Les deux surfaces $W(t_{q+1} - \varepsilon)$ et $W(t_{q+1} + \varepsilon)$ n'ont pas le même ordre de connexion; il pourrait donc se faire, bien que ces deux surfaces diffèrent très peu l'une de l'autre, qu'on ne puisse pas tracer sur l'une un trait continu très peu différent d'un trait continu tracé sur l'autre. Si sur celle dont la connexion est la plus élevée, on avait un trait continu L passant près du point singulier et coupant le cycle qui se réduit à un point pour $t = t_{q+1}$, on ne

pourrait tracer sur l'autre un trait continu très peu différent de L. Par exemple, considérons trois surfaces très peu différentes l'une de l'autre; la première sera un hyperboloïde à une nappe, la seconde un cône, la troisième un hyperboloïde à deux nappes, le cycle qui se réduit à un point est l'ellipse de gorge de l'hyperboloïde à une nappe. Une génératrice rectiligne de l'hyperboloïde à une nappe coupera cette ellipse et il sera impossible de tracer sur la troisième surface un trait continu très peu différent de cette génératrice. Mais ici cette difficulté n'est pas à craindre puisque c'est $W(t_{q+1} + \varepsilon)$ qui a la connexion la plus élevée. Notre arc H'' existera donc toujours et l'on aura

$$H'' \equiv D'D + H + EE' \pmod{V};$$

alors posons

$$C = C_1 + D'D + H + EE'$$

de telle façon que notre cycle C se décompose en deux arcs, le premier C_1 et le second $D'D + H + EE'$, ayant tous deux pour extrémités D' et E' . Nous aurons

$$C \equiv C_1 + H'' \pmod{V}.$$

Nous avons ainsi remplacé le cycle C par un autre cycle équivalent $C_1 + H''$ qui jouit des mêmes propriétés, mais qui en diffère parce que le point représentatif N au lieu d'aller jusqu'en A dans ses oscillations ne dépasse plus $t_{q+1} + \varepsilon$.

Supposons d'abord que la valeur $t = \frac{1}{2}$ soit comprise entre les points A et B entre lesquels oscille le point N, et que le point A soit compris entre t_q et t_{q+1} , et le point B entre t'_h et t'_{h+1} . Nous pouvons, par le procédé que je viens d'exposer, remplacer le cycle C par un autre où le point N oscillera entre B et le point $t_{q+1} + \varepsilon$, ce dernier point n'étant plus compris comme le point A entre t_q et t_{q+1} , mais bien entre t_{q+1} et t_{q+2} . Nous pouvons, en d'autres termes, ramener le point A entre t_{q+1} et t_{q+2} ; en continuant nous le ramènerons entre t_{q+2} et t_{q+3} , etc., puis enfin entre t_p et $\frac{1}{2}$. En opérant sur B et V'' comme nous l'avons fait sur A et V' , nous ramènerons de même le point B entre $\frac{1}{2}$ et t'_p .

En résumé, nous aurons remplacé le cycle C par un autre cycle équivalent C' , tel que le point N reste toujours compris entre t_p et t'_p . Mais quand t est compris entre t_p et t'_p , la surface $W(t)$ reste homéomorphe à elle-même et à $W\left(\frac{1}{2}\right)$ ou W. Soit donc M un point quelconque du cycle C' appartenant à $W(t)$ et M' le point correspondant de W. Quand le point M décrira le cycle C' , le point M' décrira un cycle C'' situé sur W et l'on aura

$$C' \equiv C''$$

par un raisonnement tout pareil à celui qui nous a montré que $H \equiv H'$. On aura donc

$$C \equiv C'' \pmod{V}.$$

Si les points A et B n'étaient pas situés de part et d'autre de $\frac{1}{2}$, si par exemple t restait $< \frac{1}{2}$ pour le cycle C tout entier, on remplacerait le cycle C par le cycle équivalent

$$C + \alpha - \alpha,$$

où l'arc α , qui est parcouru successivement dans le sens direct, puis dans le sens inverse, s'étendrait depuis le point final du cycle C, jusqu'à un point quelconque de V tel que $t > \frac{1}{2}$. On serait ainsi ramené au cas précédent. Nous sommes donc conduits à la conclusion générale suivante :

Tout cycle de V est équivalent à un cycle de W.

Maintenant entre les cycles de W nous avons les équivalences (1) et (2)

$$K'_i \equiv 0 \pmod{V'}, \quad K''_i \equiv 0 \pmod{V''}$$

et nous aurons a fortiori

$$(3) \quad K'_i \equiv K''_i \equiv 0 \pmod{V}.$$

Je dis maintenant qu'il n'y en aura pas d'autres.

Si, en effet, il y a une équivalence

$$K \equiv 0 \pmod{V},$$

K étant un cycle de W, cela veut dire qu'il existe dans V une aire simplement connexe A dont la frontière est formée par le cycle K. Cela posé, nous distinguerons dans A les points qui appartiennent à V' et qui formeront l'aire A' , laquelle pourra ne pas être d'un seul tenant, et les points qui appartiennent à V'' et qui formeront l'aire A'' . Si l'aire A' n'est pas d'un seul tenant, elle sera formée de plusieurs aires séparées A'_1, A'_2, \dots , dont chacune sera d'un seul tenant. De même pour A'' . Si nous considérons l'une de ces aires partielles, A'_1 par exemple, il pourra se faire qu'elle ne soit pas simplement connexe. Supposons, par exemple, qu'elle soit triplement connexe et limitée, par conséquent, extérieurement par une ceurbe fermée L, et intérieurement par deux courbes fermées L' et L'' (les mots extérieurement et intérieurement doivent s'entendre par rapport à l'aire totale A). Joignons un point de L à un point de L' par une coupure P' et, de même, un point de L à un point de L'' par une coupure P'' ; ces deux cou-

pures P' et P'' seront des arcs de courbe situés sur A'_1 et elles rendront A'_1 simplement connexe. Soit B'_1 l'aire simplement connexe ainsi obtenue; et soit D'_1 son contour qui sera formé des courbes fermées L , L' et L'' et des deux coupures parcourues une fois dans le sens direct et une fois dans le sens inverse. L'aire B'_1 fera toute entière partie de V' et l'on aura

$$D'_1 \equiv 0 \pmod{V'}.$$

On opérera de même pour les aires A'_2, \dots et l'on obtiendra une série d'équivalences

$$D'_2 \equiv \dots \equiv 0 \pmod{V'}.$$

On opérera de même pour les aires A''_1, A''_2, \dots , dont l'ensemble forme A'' , ce qui donnera les équivalences

$$D''_1 \equiv D''_2 \equiv \dots \equiv 0 \pmod{V''}.$$

Comme l'aire A est formée par la réunion des aires $B'_1, B'_2, \dots; B''_1, B''_2, \dots$; l'équivalence $K \equiv 0$ où K est le contour de l'aire totale A sera une conséquence des équivalences

$$\begin{aligned} D'_1 \equiv D'_2 \equiv \dots \equiv 0 & \pmod{V'}, \\ D''_1 \equiv D''_2 \equiv \dots \equiv 0 & \pmod{V''}, \end{aligned}$$

où $D'_1, D'_2, \dots; D''_1, D''_2, \dots$ sont les contours des aires partielles $B'_1, B'_2, \dots; B''_1, B''_2, \dots$.

Notre équivalence est donc une conséquence de diverses équivalences prises les unes par rapport à V' , les autres par rapport à V'' . Or toutes les équivalences par rapport à V' sont des conséquences des équivalences (1) d'après le paragraphe précédent. Toutes les équivalences par rapport à V'' sont des conséquences des équivalences (2). Donc notre équivalence est une conséquence des équivalences (1) et (2) ou, ce qui revient au même des équivalences (3).

C. Q. F. D.

Possédant ainsi toutes les équivalences possibles, il est aisé d'en déduire toutes les homologies sans division possibles; il suffit d'intervertir l'ordre des termes dans les premiers membres de ces équivalences. Soient

$$C_1, C_2, \dots, C_{2p}$$

les $2p$ cycles fondamentaux de la surface W .

Nous aurons des homologies de la forme

$$K'_i \sim m'_{i,1} C_1 + m'_{i,2} C_2 + \dots + m'_{i,2p} C_{2p} \pmod{W}$$

et de la forme

$$K_i'' \sim m_{i,1}'' C_1 + m_{i,2}'' C_2 + \dots + m_{i,2p}'' C_{2p} \quad (\text{mod } W)$$

(les m' et les m'' étant des entiers), de sorte que nous aurons les homologies suivantes déduites des équivalences (3) :

$$(4) \quad \begin{cases} m_{i,1}' C_1 + m_{i,2}' C_2 + \dots + m_{i,2p}' C_{2p} \sim 0 \\ m_{i,1}'' C_1 + m_{i,2}'' C_2 + \dots + m_{i,2p}'' C_{2p} \sim 0 \end{cases} \quad (\text{mod } V)$$

et nous n'en aurons pas d'autres.

Discutons ces homologies; formons le déterminant Δ des entiers m' et m'' .

Trois cas sont à distinguer :

1° On a

$$|\Delta| > 1.$$

Donc Δ est un entier qui n'est égal ni à 0, ni à +1, ni à -1; nous pouvons alors déduire des homologies (4) *sans faire de division*

$$\Delta C_i \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 2p)$$

et en faisant une division

$$C_i \sim 0,$$

Le nombre de Betti relatif aux homologies PAR DIVISION est donc égal à 1.

Mais on ne pourrait obtenir $C_i \sim 0$ sans faire de division, de sorte que les « coefficients de torsion » (cf. p. 363) *ne sont pas égaux à 1.*

2° On a

$$|\Delta| = 1;$$

on en déduit alors *sans division*

$$C_i \sim 0.$$

Donc dans ce cas, *non seulement le nombre de Betti, mais les coefficients de torsion sont égaux à 1.*

Le nombre de Betti et les coefficients de torsion sont donc les mêmes que pour une variété simplement connexe. Cela ne veut pas dire comme nous le verrons bientôt, que la variété V soit simplement connexe.

3° On a

$$\Delta = 0.$$

Des homologies (4) nous ne pouvons plus alors déduire

$$C_i \sim 0,$$

même en faisant une division.

Le nombre de Betti est donc plus grand que 1.

Il est égal à 2, si le déterminant Δ s'annule, mais si tous ses mineurs du premier ordre ne s'annulent pas.

Il est égal à k , si le déterminant s'annule ainsi que tous ses mineurs des $k - 2$ premiers ordres, mais si tous les mineurs du $k - 1^{\text{e}}$ ordre ne s'annulent pas.

Revenons au cas où Δ est égal à ± 1 . Dans ce cas, on peut se demander si la variété est simplement connexe, puisqu'elle a même nombre de Betti et mêmes coefficients de torsion que les variétés simplement connexes. Nous allons voir, et c'est là le but principal de ce travail, qu'il n'en est pas toujours ainsi, et pour cela nous nous bornerons à donner un exemple.

Supposons que $p = 2$, c'est-à-dire que la surface W soit cinq fois connexe. Je supposerai de plus que les cycles K'_1 et K'_2 sont deux des cycles fondamentaux de W , à savoir :

$$K'_1 = C_1, \quad K'_2 = C_3.$$

Je représenterai la surface W par un polygone fuchsien R_0 de la troisième famille limité par quatre circonférences ne se coupant pas. Pour cela, nous n'avons qu'à tracer sur la surface W les deux cycles C_1 et C_3 qui ne se coupent pas, à découper la surface le long de ces deux cycles regardés comme des coupures et à la développer ensuite sur un plan.

Les cycles K''_1 et K''_2 seront représentés alors sur ce plan par un certain nombre d'arcs de courbe allant d'un point du périmètre du polygone fuchsien R_0 à un autre point de ce périmètre.

Voici à quelles conditions sont assujettis ces arcs de courbe :

1^o Ils ne doivent pas se couper mutuellement; c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que les cycles K''_1 et K''_2 ne soient pas bouclés et ne se coupent pas.

2^o Considérons alors la série d'arcs dont l'ensemble représente le cycle K''_1 . Ces arcs doivent être parcourus dans un certain ordre et chacun d'eux va d'un certain point initial situé sur le périmètre de R_0 à un certain point final situé également sur le périmètre de R_0 . Observons que le périmètre de R_0 se compose de quatre cercles conjugués deux à deux; à chaque point de l'un des cercles correspond sur le cercle conjugué un point que j'appelle le conjugué du premier.

Cela posé, le point final de chacun des arcs qui représentent K''_1 doit être

conjugué du point initial de l'arc suivant, et le point final du dernier arc doit être le conjugué du point initial du premier arc.

De même pour les arcs qui représentent K_2'' .

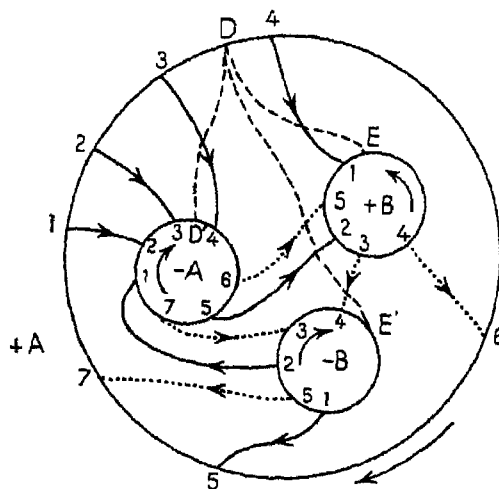


Fig. 1.

Voici l'explication de la figure : le périmètre de R_0 est représenté par les quatre cercles $+A$, $-A$, $+B$, $-B$ représentés en trait plein ; les cercles $+A$ et $-A$ sont conjugués et correspondent à $K_1' = C_1$; les cercles $+B$ et $-B$ sont conjugués et correspondent à $K_2' = C_2$; les cycles K_1'' et K_2'' sont représentés par des arcs de courbe allant d'un point à l'autre du périmètre de R_0 .

Les arcs qui représentent K_1'' sont en trait plein ; ceux qui représentent K_2'' sont en trait pointillé. Une pointe de flèche placée sur le trait lui-même indique dans quel sens ce trait doit être parcouru.

Les points où ces arcs coupent les cercles $\pm A$ et $\pm B$ sont désignés par des numéros ; ces numéros nous font connaître en même temps quels sont ceux de ces points qui sont conjugués ; ainsi le point $+B 5$ est conjugué de $-B 5$, le point $+A 5$ de $-A 5$.

Près de chacun des quatre cercles $\pm A$, $\pm B$ est placée une flèche dont voici la signification ; quand un point décrit l'un des cercles dans le sens de la flèche, le point conjugué doit décrire le cercle conjugué dans le sens de la flèche.

On vérifie aisément qu'en suivant soit $+A$, soit $-A$, dans le sens de la flèche on rencontre successivement

$$1, 2, 3, 4, 6, 5, 7$$

et qu'en suivant soit $+B$, soit $-B$ dans le sens de la flèche on rencontre successivement

$$1, 5, 2, 3, 4.$$

L'ordre de conjugaison de nos points a donc été convenablement choisi.

Le cycle K_1'' est alors représenté par sept arcs qui se succèdent dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned} &+ A_1 \text{ à } - A_2; \quad + A_2 \text{ à } - A_3; \\ &+ A_3 \text{ à } - A_4; \quad + A_4 \text{ à } + B_1; \quad - B_1 \text{ à } + A_5; \\ &- A_5 \text{ à } + B_2; \quad - B_2 \text{ à } - A_1. \end{aligned}$$

Le cycle K_2'' est représenté par les cinq arcs :

$$\begin{aligned} &+ B_3 \text{ à } - B_4; \quad + B_4 \text{ à } + A_6; \quad - A_6 \text{ à } + B_5; \\ &- B_5 \text{ à } + A_7; \quad - A_7 \text{ à } - B_3. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir sur la figure que ces 12 arcs ne se coupent pas; nos deux cycles ne sont donc pas bouclés et ne se coupent pas.

Nous pouvons donc construire une variété V' , admettant les cycles $K_1' = C_1$ et $K_2' = C_3$ pour cycles principaux et une variété V'' admettant les cycles K_1'' et K_2'' comme cycles principaux. La réunion des deux variétés V' et V'' nous donnera V .

On s'en rendra mieux compte encore de la façon suivante.

Reprenons notre figure et découpons le polygone R_0 suivant les 12 arcs qui représentent K_1'' et K_2'' ; nous aurons ainsi décomposé R_0 en 10 polygones partiels; recollons ensuite ces polygones les uns aux autres en collant chacun des arcs des divers cercles $\pm A$, $\pm B$ aux arcs correspondants du cercle conjugué; par exemple l'arc $+ A_3$, $+ A_4$ à l'arc $- A_3$, $- A_4$; nous obtiendrons ainsi un nouveau polygone qui au même titre que R_0 représentera la surface W avec cette différence que les coupures au lieu d'être faites suivant les cycles K_1' et K_2' seront faites suivant les cycles K_1'' et K_2'' .

La figure ainsi obtenue est tout à fait pareille à la figure 1, mais la signification en est différente. Les cercles $+ A$ et $- A$ représentent K_1'' et non plus K_1' , les cercles $+ B$ et $- B$ représentent K_2'' ; les arcs en trait plein à l'intérieur de la figure représentent K_1' et non plus K_1'' ; les arcs en trait pointillé représentent K_2' .

Les points

$$\pm A_1, \quad \pm A_2, \quad \pm A_3, \quad \pm A_4, \quad \pm A_6, \quad \pm A_5, \quad \pm A_7$$

représentent respectivement les points

$$\pm A_1, \quad \pm A_2, \quad \pm A_3, \quad \pm A_4, \quad \pm B_1, \quad \pm A_5, \quad \pm B_2.$$

Les points

$$\pm B_1, \pm B_5, \pm B_2, \pm B_3, \pm B_4$$

représentent respectivement

$$\pm A_6, \pm B_5, \pm A_7, \pm B_3, \pm B_4.$$

On ne doit pas s'étonner de ce signe \pm ; les deux points $+A_1$ et $-A_1$ correspondent, en effet, à un même point de la surface W .

L'identité des deux figures nous montre que la surface W est homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles

$$K'_1, K'_2, K''_1, K''_2$$

correspondent les cycles

$$K''_1, K''_2, K'_1, K'_2.$$

Cherchons à exprimer K''_1 et K''_2 en fonction des quatre cycles fondamentaux C_1, C_2, C_3, C_4 . Pour cela nous n'avons qu'à appliquer la règle de la fin du paragraphe 4, et pour faciliter l'application de cette règle nous avons tracé en tirets — — — les trois coupures DD', DE, DE' qui figurent dans son énoncé.

L'arc $+A_1 - A_2$ part de $+A$, ce qui donne $+C_2$.

L'arc $+A_2 - A_3$ part de $+A$, ce qui donne $+C_2$.

L'arc $+A_3 - A_4$ part de $+A$, ce qui donne $+C_2$ et rencontre DD' de gauche à droite, ce qui donne $+C_1$.

L'arc $+A_4 + B_1$ part de $+A$, ce qui donne $+C_2$ et rencontre DE de droite à gauche, ce qui donne $-C_3$.

L'arc $-B_1 + A_5$ part de $-B$, ce qui donne $+C_1$.

L'arc $-A_5 + B_2$ part de $-A$, ce qui donne $-C_2$ et rencontre DE' de gauche à droite, ce qui donne $-C_1 - C_3 + C_4$.

L'arc $-B_2 - A_1$ part de $-B$, ce qui donne $+C_1$.

Donc

$$K''_1 \equiv 3C_2 + C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_2 - C_1 - C_3 + 2C_4.$$

Passons à K''_2 .

L'arc $+B_3 - B_4$ part de $+B$, ce qui donne $-C_4$ et rencontre DE' de droite à gauche, ce qui donne $-C_4 + C_3 + C_4$.

L'arc $+B_4 + A_6$ part de $+B$, ce qui donne $-C_4$.

L'arc $-A_6 + B_5$ part de $-A$, ce qui donne $-C_2$ et rencontre DE' de gauche à droite, ce qui donne $-C_4 - C_3 + C_4$.

L'arc $-B_5 + A_7$ part de $-B$, ce qui donne $+C_4$.

L'arc $-A_7 - B_3$ part de $-A$, ce qui donne $-C_2$.

Donc

$$K_2'' \equiv -2C_4 + C_3 - C_2 - C_4 - C_3 + 2C_4 - C_2.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} K_1' &\equiv C_1, & K_2' &\equiv C_3, \\ K_1'' &\equiv 3C_2 + C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_2 - C_4 - C_3 + 2C_4, \\ K_2'' &\equiv -2C_4 + C_3 - C_2 - C_4 - C_3 + 2C_4 - C_2. \end{aligned}$$

Par rapport à V nous avons les équivalences

$$(1) \quad \begin{cases} C_1 + C_2 - C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_3 - C_4 \equiv 0, \\ K_1' \equiv K_2' \equiv 0, & K_1'' \equiv 0, & K_2'' \equiv 0. \end{cases}$$

Les équivalences $K_1' \equiv K_2' \equiv 0$ ou $C_4 \equiv C_3 \equiv 0$ permettent de simplifier les autres; l'équivalence (1) se réduit à

$$C_2 - C_2 + C_4 - C_4 \equiv 0,$$

c'est-à-dire à une identité; l'équivalence $K_1'' \equiv 0$ se réduit à

$$(2) \quad 4C_2 + C_4 - C_2 + C_4 \equiv 0$$

et l'équivalence $K_2'' \equiv 0$ se réduit à

$$(3) \quad -2C_4 - C_2 + C_4 - C_2 \equiv 0.$$

En résumé, il nous reste deux cycles distincts C_2 et C_4 entre lesquels nous n'avons pas d'autre équivalence que (2) et (3).

Si nous transformons ces équivalences en homologies, il vient

$$3C_2 + 2C_4 \sim 0, \quad -C_4 - 2C_2 \sim 0.$$

Le déterminant est égal à -1 ; nous sommes donc dans le cas où $\Delta = \pm 1$, où le nombre de Betti et les coefficients de torsion sont égaux à 1. Et cependant V n'est pas simplement connexe; car son groupe fondamental ne se réduit pas à la substitution identique; en d'autres termes, des équivalences (2) et (3) on ne peut déduire

$$C_2 \equiv 0, \quad C_4 \equiv 0.$$

Pour le montrer, j'ajoute à (2) et à (3) l'équivalence

$$(4) \quad -C_2 + C_4 - C_2 + C_4 \equiv 0,$$

d'où

$$C_4 - C_2 + C_4 - C_2 \equiv 0.$$

De (2), (3) et (4) on déduira

$$(5) \quad \begin{cases} -C_2 + C_4 - C_2 + C_4 \equiv 0, \\ 5C_2 \equiv 0, \quad 3C_4 \equiv 0. \end{cases}$$

Or les relations (5) sont les relations de structure qui ont lieu entre les deux substitutions C_2 et C_4 qui engendrent le *groupe icosaédrique*. On ne saurait donc en déduire $C_2 \equiv 0$, $C_4 \equiv 0$, ni *a fortiori* déduire ces deux équivalences de (2) et de (3) seulement.

Il y a donc deux cycles de V qui ne sont pas équivalents à zéro; donc V n'est pas simplement connexe.

En d'autres termes, le groupe fondamental de V ne saurait se réduire à la substitution identique; puisqu'il contient comme sous-groupe le groupe icosaédrique.

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K'_1 et K''_2 de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent les équivalences .

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface W ne puisse être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 ; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_1 \equiv C'_3 \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

$$K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_2 \equiv C'_4 \equiv 0$ et réciproquement? .

Mais cette question nous entraînerait trop loin.