Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze.

Von

L. Pontrjagin in Moskau.

Zusammenfassung.

U und V seien zwei Abelsche Gruppen mit endlich-vielen Erzeugenden, M eine (endliche oder unendliche) zyklische Gruppe. Die Gruppen U und V bilden ein *Gruppenpaar* in bezug auf M, wenn je zwei Elementen u und v von U bzw. V ein Element m von M, das *Produkt* der beiden Elemente u und v, zugeordnet ist und dabei die Distributivgesetze in bezug auf die Addition (als Gruppenverknüpfung in U und V), d. h. die Relationen $(u_1+u_2)\cdot v = u_1\cdot v + u_2\cdot v$ und $u\cdot(v_1+v_2) = u\cdot v_1 + u\cdot v_2$ gelten. Das Gruppenpaar U, V heißt *primitiv*, wenn zu jedem von Null verschiedenen Element der einen Gruppe ein solches Element der zweiten gefunden werden kann, daß das Produkt der beiden Elemente von Null verschieden ist.

Sodann gilt folgender *algebraischer Dualitatssatz*: zwei Gruppen, die ein primitives Gruppenpaar bilden, sind isomorph.

Wenn U und V die r- und $(n-r)$-dimensionale Bettische Gruppe einer n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit sind und man als $u\cdot v$ die Schnittzahl (bzw. die Schnittzahl nach einem festen Modul μ) der zugehörigen Zyklen versteht, so bilden U und V ein primitives Gruppenpaar (wobei M entweder die Gruppe aller ganzen Zahlen oder der Restklassen mod μ ist), sind also isomorph (Dualitätssatz von Poincaré).

Wenn man für U und V die r- bzw. $(n-r-1)$-dimensionale Bettische Gruppe eines Komplexes $K \subset R^n$ bzw. seiner Komplementärmenge $R^n - K$ wählt und anstatt der Schnittzahlen die Verschlingungszahlen ins Auge faßt, bilden die Gruppen U und V wiederum ein primitives Gruppenpaar, sind also ebenfalls isomorph (Dualitätssatz von Alexander).

In analoger Weise erhält man alle bis jetzt bekannten topologischen Dualitätssätze (die als Verallgemeinerungen der obigen beiden anzusprechen sind).

Einleitung.

Poincaré hat 1895 in seiner berühmten Arbeit „Analysis Situs“[1]) das heute seinen Namen tragende Dualitätsgesetz entdeckt, nämlich die Tatsache, daß bei jedem r die r-te und $n-r$-te Bettische Zahl einer orientierbaren n-dimensionalen Mannigfaltigkeit einander gleich sind. Ungefähr um die-

[1]) Journ. Ec. Pol. 1895.

selbe Zeit hat Jordan zum erstenmal seinen Kurvensatz ausgesprochen. Damals aber ahnte kein Mensch, daß diese beiden so total verschiedenen Sätze in einen und denselben Ideenkreis gehören und daß insbesondere der zweite zu ganz weiten und äußerst bedeutungsvollen Verallgemeinerungen führen wird. Der Weg dieser Verallgemeinerungen ist in aller Kürze der folgende.

1912 hat Brouwer[2]) den Satz von der Invarianz der geschlossenen Kurve bewiesen, der den Jordanschen Satz als einen sehr speziellen Fall enthält und allgemein besagt, daß die Anzahl der Gebiete, die eine abgeschlossene Menge in der Ebene bestimmt, nur von den topologischen Eigenschaften dieser Menge selbst abhängt. Auf diese Weise wurde zum erstenmal die prinzipielle Möglichkeit gegeben, den Begriff der geschlossenen Kurve von der Ebene loszulösen und invariant zu definieren. Damit wurde schon der Weg der Übertragung der Invarianten der sogenannten kombinatorischen Topologie auf allgemeinste abgeschlossene Mengen angedeutet, ein Weg, der in den letzten fünf Jahren zu einer Fülle neuer Erkenntnisse geführt hat, die man in erster Linie Alexandroff, Lefschetz und Vietoris verdankt[3]). *Alle diese Ergebnisse lassen sich in das allgemeine Dualitätsgesetz für abgeschlossene Mengen einordnen, welchem das dritte Kapitel der vorliegenden Arbeit gewidmet ist.*

Aber es handelt sich bei diesen Untersuchungen nicht nur um Übertragung von für elementare Gebilde bewiesenen Sätzen auf Gebilde allgemeinster Art, sondern auch um eine Verallgemeinerung in bezug auf die dimensionellen Verhältnisse: das, was der Jordansche Satz in bezug auf die Dimensionen 2 (die Ebene) und 1 (die Kurve) behauptet, wird mutatis mutandis für n und r formuliert und bewiesen. Den ersten Schritt in dieser Richtung verdankt man Lebesgue, der 1911 als erster erkannt hat[4]), daß die Eigenschaft einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit (also für $n=1$ einer Jordanschen Kurve), den $n+1$-dimensionalen Raum zu zerlegen, ein Spezialfall der Eigenschaft einer r-dimensionalen Mannigfaltigkeit im n-dimensionalen Raum, eine $n-r-1$-dimensionale Verschlingung zuzulassen, ist. Auf diese Weise hat Lebesgue einen Teil des n-dimensionalen Jordanschen Satzes bewiesen; den Beweis der übrigbleibenden Teile sowie eine vollständige und invariant begründete Theorie der Verschlingung hat um dieselbe Zeit Brouwer erbracht[5]).

---

[2]) Math. Annalen 72 (1912), S. 422—425.

[3]) Alexandroff, Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen, Ann. of Math. (2) **30** (1928), S. 101—187. Dort befinden sich auch Hinweise auf die einschlägigen Arbeiten von Lefschetz, Viétoris u. a.

[4]) Comptes Rendus Acad. Sciences Paris **154**, séance du 27 mars 1911.

[5]) Brouwer, Beweis des Jordanschen Satzes für n-Dimensionen, Math. Annalen **71** (1911), S. 314—319 und On looping coefficients, Proc. Akad. Amsterdam **15** (1912), S. 113—122.

Einen wesentlich neuen und die weitesten Perspektiven eröffnenden Schritt verdankt man Alexander[6]), der in einer ungewöhnlich einfachen und eleganten Weise bewiesen hat, daß die $(n-r-1)$-te Bettische Zahl des Komplementärraumes zu einem beliebigen Komplexe (im R^n)[7]) gleich der r-ten Bettischen Zahl des Komplexes selbst ist (*Alexanderscher Dualitätssatz*). Das war eine gewaltige Verallgemeinerung aller bis damals bekannten Sätze aus dem Ideenkreise des Jordanschen Satzes, insofern sie sich auf topologische Bilder von Polyedern (und nicht auf allgemeinere abgeschlossene Mengen) bezogen. Die Übertragung des Alexanderschen Dualitätssatzes auf beliebige abgeschlossene Mengen wurde dann von Alexandroff[8]) 1927 und ungefähr um dieselbe Zeit von Lefschetz und Frankl geliefert[9]). Lefschetz hat dabei Resultate erhalten, die sich auf den Fall der abgeschlossenen Teilmengen beliebiger Mannigfaltigkeiten beziehen; das wesentliche Hilfsmittel, das er gebraucht, ist eine weitere Ausbildung der Verschlingungstheorie, d. h. letzten Endes der Theorie der sogenannten Kroneckerschen Schnittzahlen, die er in einer solchen Allgemeinheit entwickelt, wie für die neueren Probleme der Topologie nur irgend erwünscht werden könnte.

Andererseits hat Veblen[10]) bereits 1923 die Theorie der Schnittzahlen zum Beweise und zur Verallgemeinerung des Poincaréschen Dualitätssatzes angewandt: er zeigt nämlich, daß man die r-te und $n-r$-te Bettische Basis einer n-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit stets so wählen kann, daß die Matrix der Schnittzahlen der Elemente der beiden Basen die Einheitsmatrix ist, eine Tatsache, die den Satz von Poincaré offenbar enthält und wesentlich verallgemeinert. Wenn man den so formulierten Poincaré-Veblenschen Dualitätssatz mit einer Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes vergleicht, welche behauptet, daß man die r-dimensionale Bettische Basis eines Komplexes im R^n und die $n-r-1$-dimensionale Bettische Basis des Komplementärraumes $R^n - K$ stets so wählen kann, daß die Matrix der Verschlingungszahlen der Elemente der beiden Basen die Einheitsmatrix ist[11]), springt eine gewisse Analogie zwischen diesen beiden Sätzen ohne weiteres in die Augen.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Analogie vollständig geklärt, indem die beiden Dualitätssätze — der Alexandersche sowie der Poincaré-

[6]) A Proof and Generalisation of the Jordan-Brouwer Theorem, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), S. 333—349.

[7]) Mit R^n wird in dieser Arbeit durchweg der durch den unendlich fernen Punkt ergänzte n-dimensionale Euklidische Raum bezeichnet.

[8]) Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl., 25. Nov. 1927.

[9]) Lefschetz, Ann. of Math. (2) **29** (1928), S. 232; Frankl, Wien. Ber., Dez. 1927, S. 689.

[10]) Trans. Amer. Math. Soc. **25** (1923), S. 540.

[11]) Pontrjagin, Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl. 25. Nov. 1927 und Frankl a. a. O.[9]).

Veblensche — auf die Anwendung eines und desselben rein algebraischen Prinzips auf die Bettischen Gruppen der entsprechenden Dimensionen zurückgeführt werden. Dieses algebraische Prinzip besteht darin, daß man für zwei Abelsche Gruppen U und V (die man sich als additive Gruppen denkt, d. h. die Gruppenoperation als Addition deutet) eine neue Operation, die Multiplikation eines beliebigen Elementes u von U mit einem beliebigen Element v von V einführt, wobei das Produkt $u \cdot v$ stets ein Element einer dritten Gruppe, des Moduls M ist; M ist dabei eine endliche oder unendliche zyklische Gruppe[12]).

Die Einführung der soeben geschilderten Multiplikation verwandelt das System der beiden Gruppen U und V in ein *Gruppenpaar* nach dem Modul M; dabei heißt ein Gruppenpaar primitiv, wenn es zu jedem von Null verschiedenen Element u bzw. v der einen Gruppe ein Element w der anderen Gruppe gibt, derart, daß $u \cdot w$ bzw. $w \cdot v$ von Null verschieden ist.

Der Hauptsatz von den primitiven Gruppenpaaren besteht darin, daß die beiden Gruppen eines solchen Paares untereinander isomorph sind. Nun ist ja in den letzteren Jahren ziemlich allgemein erkannt worden, daß nicht die Bettischen Zahlen, sondern darüber hinaus die Bettischen Gruppen den Hauptgegenstand algebraisch topologischer Untersuchungen bilden[13]) und daß man dabei auch die sogenannten Bettischen Gruppen modulo μ zu berücksichtigen hat. Um terminologischen Verwirrungen aus dem Wege zu gehen, stelle ich hier kurz diese Grundbegriffe zusammen. Die r-dimensionalen orientierten Teilkomplexe eines gegebenen Komplexes sind Linearformen mit ganzzahligen Koeffizienten in den r-dimensionalen Elementen des Komplexes; sie bilden (in bezug auf die Addition) eine Abelsche Gruppe mit endlichvielen Erzeugenden, welche L^r heißen möge. Wenn man die Koeffizienten in den obigen Linearformen modulo einer ganzen Zahl $\mu > 1$ reduziert, entsteht die Gruppe L^r_μ, die Gruppe aller Teilkomplexe mod μ. Für jeden Teilkomplex ist sein Rand als algebraische Summe der Ränder seiner Elemente definiert[14]), ebenso ist für einen Teilkomplex mod μ der Rand mod μ definiert. Teilkomplexe, die den Rand Null haben, heißen *Zyklen*; dergleichen für Teilkomplexe mod μ. Die Zyklen bzw. die Zyklen mod μ bilden eine Untergruppe Z^r bzw. Z^r_μ von L^r bzw. L^r_μ. Die Gruppe Z^r bzw. Z^r_μ enthält eine Untergruppe $\hat{H}^r$ bzw. $\hat{H}^r_\mu$ derjenigen Zyklen, die als Ränder (bzw. als Ränder mod μ) von ($r+1$-dimensionalen) Teil-

[12]) Die unendliche zyklische Gruppe (also die Gruppe aller ganzen Zahlen) wird gelegentlich auch als die zyklische Gruppe von der Ordnung Null bezeichnet. Diese Redeweise wird sich im Laufe dieser Arbeit wiederholt als sehr bequem erweisen.

[13]) Vgl. hierzu z B. H. Hopf, Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel, Gött. Nachr., Math.-Phys. Kl., 1928.

[14]) Siehe die Literaturangaben unter [25]).

komplexen (bzw. Teilkomplexen mod μ) auftreten. Die Gruppe $\hat{H}^r$ bzw. $\hat{H}^r_\mu$ soll schlechtweg die Gruppe der berandenden r-dimensionalen Zyklen (bzw. der berandenden Zyklen mod μ) heißen. Die Faktorgruppe $Z^r \mid \hat{H}^r$ heißt die *volle r-dimensionale Bettische Gruppe* des gegebenen Komplexes, während die Gruppe $Z^r_\mu \mid \hat{H}^r_\mu$ die *Bettische Gruppe mod* μ heißt. Die volle Bettische Gruppe ist direkte Summe zweier Untergruppen: der *Torsionsgruppe*, die von allen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird, und der *reduzierten* Bettischen Gruppe, die von den Elementen unendlicher Ordnung der vollen Bettischen Gruppe erzeugt wird. Einfachheitshalber bezeichnen wir die reduzierte Bettische Gruppe als *die Bettische Gruppe modulo Null*, so daß jetzt die Zahlen $0, 2, 3, \ldots$ als Werte von μ auftreten[15]).

Nach diesen Vorbereitungen können wir die von uns erzielte Verallgemeinerung des Poincaréschen Dualitätssatzes einfach so aussprechen: *die r-te und n — r-te Bettische Gruppe mod* μ *bilden in bezug auf die zyklische Gruppe von der Ordnung* μ *als Modul*[12]) *ein primitives Gruppenpaar. Als Produkt zweier Elemente ist die Schnittzahl der in Frage kommenden Zyklen zu betrachten, wobei im Falle* $\mu \neq 0$ *diese Schnittzahl modulo* μ *zu reduzieren ist.* In einer ganz analogen Weise erhält man auch den Alexanderschen Dualitätssatz in folgender Form: wenn K ein im R^n liegender Komplex ist, bilden die r-te Bettische Gruppe von K und die $n - r - 1$-te Bettische Gruppe von $R^n - K$ ein primitives Gruppenpaar, wenn man als Produkt die Verschlingungszahl der in Frage kommenden Zyklen betrachtet. Dabei gelten in bezug auf die verschiedenen Moduln dieselben Verabredungen wie im Falle des Poincaréschen Dualitätssatzes[16]).

---

[15]) Offenbar können dabei die Gruppen L^n, Z^n, $\hat{H}^n$ als die Gruppen L^r_μ, Z^r_μ, $\hat{H}^r_\mu$ mit $\mu = 0$ betrachtet werden (Teilkomplexe, Zyklen, Berandungen modulo Null). Es empfiehlt sich ferner im Falle $\mu = 0$ noch die Gruppe $H^r = H^r_0$ aller derjenigen Zyklen Γ^r einzuführen, für die es positive ganze Zahlen $k \neq 0$ derart gibt, daß $k\,\Gamma^r$ berandet (also in $\hat{H}^r = \hat{H}^r_0$ enthalten ist). Wenn man ganz allgemein eine Untergruppe U einer Abelschen Gruppe G *Untergruppe mit Division* nennt, falls aus der Inklusion $kx \subset U$ (x ein Element von G, k eine positiv ganze Zahl) die Inklusion $x \subset U$ folgt, kann man H^r_0 als die kleinste Untergruppe mit Division über $\hat{H}^r_0$ definieren. Man sieht leicht ein, daß die reduzierte Bettische Gruppe (also die Bettische Gruppe modulo Null) nichts anderes als die Faktorgruppe $Z^r_0 \mid H^r_0$ ist. Wir setzen jetzt definitionsgemäß für $\mu \neq 0$ $H^r_\mu = \hat{H}^r_\mu$ und führen im Falle eines *beliebigen* $\mu = 0, 2, 3, \ldots$ für sämtliche Elemente von H^r_μ die Bezeichnung *homolog Null* (in Zeichen ~ 0) ein. Im Falle $\mu \neq 0$ ist also ein Zyklus dann und nur dann homolog Null, wenn er (mod μ) berandet, während wir im Falle $\mu = 0$ sagen werden, daß Γ^r homolog Null ist, wenn es eine von Null verschiedene ganze Zahl k gibt, so daß $k\,\Gamma^r$ berandet. *Bei jedem* μ *kann also die r-te Bettische Gruppe modulo* μ *(den Fall* $\mu = 0$ *nicht ausgeschlossen) als die Faktorgruppe* $Z^r_\mu \mid H^r_\mu$ *definiert werden.*

[16]) Im Falle $\mu = 0$ wird sogar ein schärferes Ergebnis bewiesen, nämlich die sogenannte Orthogonalität der beiden Gruppen, eine stärkere Eigenschaft als die Primitivität, auf die es uns aber im Augenblick nicht weiter ankommt. Es sei

(Fortsetzung der Fußnote [16]) auf nächster Seite.)

Den soeben ausgesprochenen Satz nenne ich *den Alexanderschen Satz im engeren Sinne*: er bezieht sich auf Komplexe, die im R^n liegen. Wir untersuchen aber auch den viel allgemeineren Fall eines Komplexes, welcher in eine beliebige M^n eingebettet ist. Auch hier ergibt sich eine vollständige Lösung des Problems; den entsprechenden Satz nenne ich den *Alexanderschen Dualitätssatz im weiteren Sinne*; er ist als eine Verallgemeinerung der von mir für den Fall „modulo 2" schon früher bewiesenen Formel zu betrachten[17]). Nebenbei sei bemerkt, daß in der ganzen vorliegenden Arbeit der Mannigfaltigkeitsbegriff im viel allgemeineren Sinne verstanden wird, als bis jetzt üblich: es werden nämlich durchweg die sogenannten h-Mannigfaltigkeiten betrachtet, deren Definition ungefähr gleichzeitig von verschiedenen Autoren, darunter Alexander, van Kampen, Vietoris und dem Verfasser, als eine allein auf dem Homologiebegriff beruhende und deshalb leicht als invariant erkennbare Verallgemeinerung des klassischen Mannigfaltigkeitsbegriffes gefunden und im § 1 des zweiten Kapitels wiedergegeben ist.

Nachdem der sozusagen klassische Fall der in Mannigfaltigkeiten eingebetteten Komplexe erledigt ist, wende ich mich zu dem Fall einer beliebigen abgeschlossenen Menge. Man könnte auch hier sofort den allgemeinsten Fall einer abgeschlossenen Menge in einer beliebigen Mannigfaltigkeit behandeln („Fall F in M^n"). Da aber alle prinzipiellen Schwierigkeiten algebraischer Natur bereits im Falle „K in M^n" und alle mengentheoretischen Schwierigkeiten im Falle „F in R^n" auftreten, habe ich mich, um technische Komplikationen zu vermeiden, auf den letzteren Fall beschränkt. Der Fall der abgeschlossenen Mengen wird den algebraischen Methoden dieser Arbeit dadurch zugänglich gemacht, daß man sich konsequent der Darstellung einer abgeschlossenen Menge mittels der Alexandroffschen Projektionsspektren bedient[18]). Man hat auf diese Weise für jede Dimension r anstatt einer einzigen Abelschen Gruppe eine Folge solcher Gruppen, von denen jede endlichviele Erzeugenden besitzt; diese Gruppen sind die r-ten Bettischen Gruppen der im Projektionsspektrum vorkommenden

---

hier noch bemerkt, daß man in der Formulierung der beiden Dualitätssätze notwendig auf die hier gegebene Definition der Bettischen Gruppen modulo 0 als der reduzierten Gruppen angewiesen ist: es läßt sich nämlich mit denselben Methoden zeigen, daß die r-te Torsionsgruppe von M^n nicht zu der $n-r$-ten, sondern zu der $n-r-1$-ten Torsionsgruppe isomorph ist; ebenso ist die r-te Torsionsgruppe von K zu der $n-r-2$-ten Torsionsgruppe von R^n-K isomorph (wenn K ein in R^n liegender Komplex ist). Infolgedessen ist im allgemeinen weder die $n-r$-te volle Bettische Gruppe einer M^n zu der r-ten vollen Bettischen Gruppe derselben Mannigfaltigkeit, noch die $n-r-1$-te volle Bettische Gruppe von R^n-K zu der r-ten Bettischen Gruppe von K isomorph.

[17]) Gött. Nachr. 1927, S. 323.

[18]) Alexandroff, a. a. O. [3]), S. 107.

approximierenden Komplexe; die Gruppen sind miteinander durch homomorphe Abbildungen verbunden, die den simplizialen Abbildungen im Projektionsspektrum entsprechen. Auf diese Weise entstehen die sogenannten „inversen Homomorphismenfolgen", die für die Zusammenhangseigenschaften der abgeschlossenen Menge maßgebend sind. Diese Homomorphismenfolgen sind zwar mit Hilfe eines willkürlich gewählten Projektionsspektrums definiert, es erweist sich aber, daß Projektionsspektra, die homöomorphe Mengen definieren, in einem gewissen Sinne *äquivalente* Homomorphismenfolgen besitzen, so daß man berechtigt ist, den Inbegriff aller untereinander äquivalenten Homomorphismenfolgen als eine neue topologische Invariante die *r-dimensionale Zyklosis* der Menge einzuführen. Es ergibt sich ferner, daß die r-dimensionale Zyklosis, die ja selbst keine Gruppe ist, in eindeutiger Weise eine Gruppe definiert: *die zu der Zyklosis duale Gruppe.* Und *diese Gruppe ist mit der* $n - r - 1$*-dimensionalen Bettischen Gruppe des Komplementärraums* $R^n - F$ isomorph. Die ganze Untersuchung läßt sich wieder nach einem beliebigen Modul μ führen, wobei, wie immer, man im Fall $\mu = 0$ unter der Bettischen Gruppe modulo Null des $R^n - F$ die reduzierte Bettische Gruppe zu verstehen hat. Die wichtigste Folge aus dieser Theorie ist zweifellos der in ihr enthaltene Beweis der Tatsache, daß *die reduzierte Bettische Gruppe des Komplementärraumes zu einer abgeschlossenen Menge eine topologische Invariante dieser Menge ist.* Man könnte übrigens mit Hilfe derselben Methoden auch die Invarianz der Torsionsgruppe von $R^n - F$ beweisen; *dagegen bleibt die Frage über die Invarianz der vollen Bettischen Gruppe von* $R^n - F$ gegenüber topologischen Transformationen von F unentschieden: im allgemeinen hat ja eine Bettische Gruppe von $R^n - F$ keine endlichviele Erzeugenden, und sie braucht auch nicht als direkte Summe ihrer reduzierten Gruppe und der Torsionsgruppe darstellbar zu sein.

Die Invarianz der Bettischen Gruppen modulo 2 des $R^n - F$ wurde schon von Alexandroff bewiesen[19]). Der Beweis gilt wörtlich auch für eine beliebige Primzahl als Modul. Für den Fall modulo Null ist ein Invarianzbeweis in den Sätzen von Lefschetz[20]) enthalten, *der aber nur dann gilt, wenn die Gruppen endlichviele Erzeugenden haben:* in den erwähnten Fällen folgt nämlich die Invarianz der Gruppen aus der Invarianz ihrer Ränge (es werden ja im Falle mod 0 nur die reduzierten, also in diesem Fall die freien Gruppen betrachtet). *Dagegen folgt im allgemeinen Falle der unendlichvielen Erzeugenden die Isomorphie der Gruppen keineswegs aus der Gleichheit der Ränge,* selbst im Falle, wo es keine Elemente endlicher Ordnung gibt: schon die (additive) Gruppe aller rationalen Zahlen,

[19]) a. a. O. [8]).

[20]) Lefschetz, a. a. O. [9]).

ebenso wie die Gruppe aller dyadischen Brüche, liefern uns Beispiele von zwei nicht-isomorphen Gruppen, deren Rang Eins ist, die aber kein Element endlicher Ordnung enthalten. Es wird überdies im Anhang III bewiesen, daß *jede* aus abzählbar vielen Elementen bestehende Abelsche Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung als Bettische Gruppe eines $R^n - F$ (sogar für $n = 3$) auftreten kann. Die Invarianz dieser Gruppen könnte mit Methoden, die nur die Bettischen Zahlen, also die Ränge berücksichtigt, prinzipiell nicht bewiesen werden, so daß unser Satz durchaus keine selbstverständliche Erweiterung der bekannten Invarianzsätze für Bettische Zahlen ist, sondern grundsätzlich tiefer liegt. Um so mehr dürfte es von Interesse sein, auch die Invarianz der vollen Bettischen Gruppen der $R^n - F$ zu beweisen.

Ich möchte noch zum Schluß erwähnen, daß diese Arbeit im hohen Maße durch eine Vorlesung von Herrn Alexandroff über kombinatorische Topologie und eine Vorlesung von Fräulein Emmy Noether über abstrakte Algebra angeregt worden ist (beide Vorlesungen wurden im Winter 1928/29 an der Universität Moskau gehalten). Ich verdanke auch Herrn Alexandroff mehrere Ratschläge bei der endgültigen Redaktion der vorliegenden Abhandlung.

Inhaltsübersicht.

Kapitel I.

Die algebraischen Grundlagen.

1. U und V seien zwei Abelsche Gruppen mit endlich-vielen Erzeugenden und M eine zyklische Gruppe von der Ordnung μ; falls $\mu = 0$ ist, so soll

[21]) Die Ausführungen des Kap. II beziehen sich auf Polyederkomplexe; der Fall stetiger Komplexe (d. h. topologischer Bilder von Polyederkomplexen) wird im Anhang I behandelt.

das heißen, daß M die unendliche zyklische Gruppe, d. h. die freie Gruppe mit einer Erzeugenden ist. Wir denken uns die Gruppen U, V, M additiv geschrieben; da in dieser Untersuchung M durch eine beliebige isomorphe Gruppe ersetzt werden kann, treffen wir ein für allemal die Verabredung, M sei im Falle $\mu = 0$ die (additive) Gruppe aller ganzen Zahlen, während für $\mu > 0$ die Gruppe M durch das System der kleinsten nichtnegativen Reste modulo μ repräsentiert werden soll. In diesem Sinne ist ein Element von M stets eine ganze Zahl.

2. Definition I. Zwei Gruppen U und V bilden ein *Gruppenpaar* in bezug auf (*den Modul*) M, wenn jedem geordneten Elementenpaar x, y — wobei x ein Element von U und y ein Element von V ist — ein Element k von M, das *Produkt* der beiden Elemente x und y:

$$k = x \cdot y$$

zugeordnet ist, wobei stets

$$(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y \qquad \text{(1. Distributivgesetz)}$$

und

$$x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y' \qquad \text{(2. Distributivgesetz)}$$

gilt (daraus folgt insbesondere, daß

$$x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot y \tag{1}$$

bei jeder Wahl von x bzw. y ist).

3. Definition II. *Es sei A eine beliebige Untergruppe von U; die Gesamtheit aller Elemente y von V von der Eigenschaft, daß für jedes x aus A*

$$x \cdot y = 0$$

ist, heißt der Annullator von A in V und wird mit (V, A) bezeichnet. In analoger Weise definiert man den Annullator (U, B) für eine beliebige Untergruppe B von V.

Es folgt zunächst aus dem 1. bzw. 2. Distributivgesetz, daß bei jeder Wahl von x und y

$$x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot y,$$

$$(-x) \cdot y = -x \cdot y \quad \text{bzw.} \quad x \cdot (-y) = -xy$$

ist, so daß gleichzeitig mit $x \cdot y = 0$ auch $(-x) \cdot y$ und $x \cdot (-y)$ Null ist; m. a. W.: ein Annullator enthält mit x auch $-x$, mit y auch $-y$, und es gehört zu ihm auch das Nullelement; es gilt somit der Satz:

I. *Der Annullator ist eine Untergruppe von U bzw. von V.*

Definition III. *Ein Gruppenpaar U, V heißt primitiv, wenn der Annullator jeder der beiden Gruppen in der anderen nur aus dem Nullelement besteht:*

$$(U, V) = 0, \quad (V, U) = 0.$$

Wir sagen auch öfters, daß U und V *zueinander primitiv* (in bezug auf M) *sind.* Es gilt sodann folgender Satz:

II. *Falls U und V ein primitives Gruppenpaar bilden, so lassen sich diese Gruppen derart in direkte Summen von zyklischen Untergruppen*

$$U = A_1 + A_2 + \ldots + A_n, \tag{2}$$

$$V = B_1 + B_2 + \ldots + B_n \tag{3}$$

zerlegen, daß für die Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ der Gruppen A_i und B_i die Relationen

$$\begin{aligned} a_i \cdot b_j &= 0 \qquad (\text{für } i \neq j), \\ a_i \cdot b_i &= k_i > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

mit $k_{i+1} \equiv 0 \pmod{k_i}$ gelten; dabei sind die k_i Teiler von μ, und $\frac{\mu}{k_i}$ ist die Ordnung von A_i und B_i.

Bevor wir zum Beweis des Satzes II übergehen, bemerken wir, daß ihm zufolge die Gruppen U und V sich als direkte Summen von einer und derselben Anzahl zyklischer Gruppen bzw. gleicher Ordnung darstellen lassen, so daß man folgenden Zusatz formulieren kann:

Zueinander primitive Gruppen sind isomorph.

4. Beweis des Satzes II. Man bezeichne mit a_1 bzw. b_1 solche Elemente von U bzw. V (solche „Werte" von x und y), daß die Zahl $x \cdot y$ einen möglichst kleinen positiven Wert k_1 enthält.

Zunächst ist bei jeder Wahl von y bzw. von x k_1 ein Teiler von $a_1 \cdot y$ und von $x \cdot b_1$; wenn nämlich z. B.

$$a_1 \cdot y = q\, k_1 + r = q\,(a_1 \cdot b_1) + r$$

mit $r > 0$ wäre, wäre

$$a_1 \cdot (y - q\, b_1) = r, \qquad r < k_1,$$

also wäre b_1 falsch gewählt.

Man bezeichne mit A_1 bzw. B_1 die von a_1 bzw. von b_1 erzeugte zyklische Gruppe und betrachte ein beliebiges $x \subset U$. Aus dem soeben bewiesenen folgt die Existenz eines solchen q, daß $x \cdot b_1 = q\, k_1 = q\,(a_1 \cdot b_1)$, also $(x - q\, a_1)\, b_1 = 0$ ist; somit ist $x - q\, a_1$ ein Element x'' von (U, B_1), und es ist

$$x = x' + x'', \tag{5}$$

mit $x' \subset A_1$, $x'' \subset (U, B_1)$. Ebenso läßt sich jedes Element y von V in der Form $y = y' + y''$ mit $y' \subset B_1$, $y'' \subset (V, A_1)$ darstellen. Es sei a ein gemeinsames Element von A_1 und $(U, B_1) = U_1$; wir wählen irgendein $y \subset V$, $y = y' + y''$. Sodann ist $a \cdot y = a \cdot y' + a \cdot y''$. Nun ist aber $a \cdot y' = 0$, denn a ist in (U, B_1) und y' in B_1 enthalten. Andererseits ist wegen $a \subset A_1$, $y'' \subset (V, A_1)$ auch $a \cdot y'' = 0$; somit ist bei jedem $y \subset V$ $a \cdot y = 0$, woraus vermöge der Primitivität des Gruppenpaares U, V die Identität $a = 0$ folgt.

Hiermit ist bewiesen, daß U direkte Summe von A_1 und U_1 ist. In derselben Weise beweist man, daß V direkte Summe von B_1 und $(V, A_1) = V_1$ ist.

Wir beweisen jetzt, daß die Ordnung von A_1 bzw. von B_1 gleich $\frac{\mu}{k_1}$ ist. Für $\mu = 0$ ist dies klar: wenn in der Tat die Ordnung von A_1 gleich $s \neq 0$ wäre, wäre

$$s k_1 = s(a_1 \cdot b_1) = s a_1 \cdot b_1 = 0,$$

was unmöglich ist, denn k_1 ist ja von Null verschieden.

Man betrachte jetzt den Fall $\mu \neq 0$. Es sei s die kleinste positive Zahl von der Eigenschaft, daß $s k_1 \equiv 0 \pmod{\mu}$, d. h. $s a_1 \cdot b_1 = 0$ ist; da dann das Produkt von $s a_1$ mit einem beliebigen Element von B_1 Null ist; ist $s a_1 < (U, B_1)$, folglich ist, da A_1 und (U, B_1) nur die Null im Durchschnitt haben, $s a_1 = 0$. Somit ist die Ordnung von A die kleinste Zahl s von der Eigenschaft, daß μ in $s k_1$ aufgeht; da aber $\mu \equiv 0 \pmod{k_1}$ ist[22]), ist diese Zahl gleich $\frac{\mu}{k_1}$.

Die Gruppen U_1 und V_1 bilden, wie leicht ersichtlich, wieder ein primitives Gruppenpaar, und das obige Verfahren ergibt die Zerlegungen

$$U_1 = A_2 + (U_1, B_2), \qquad V_1 = B_2 + (V_1, A_2).$$

Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir die direkten Summenzerlegungen

$$U = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + U_n,$$
$$V = B_1 + B_2 + \ldots + B_n + V_n$$

mit

$$U_{i+1} = (U_i, B_{i+1}),\ V_{i+1} = (V_i, A_{i+1});\ U_i = A_{i+1} + U_{i+1},\ V_i = B_{i+1} + V_{i+1},$$

wobei bei jedem i U_i und V_i zueinander primitiv sind. Das Verfahren bricht nach endlich-vielen Schritten ab (denn U und V hatten ja endlich-viele Erzeugende), d. h. für ein bestimmtes n ist etwa V_n die Nullgruppe; da aber U_n und V_n ein primitives Gruppenpaar bilden, muß auch U_n die Nullgruppe sein. Somit bricht das Verfahren in den U_i und in den V_i *gleichzeitig* ab, und man erhält schließlich $U = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $V = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$.

Bleibt nur noch übrig zu zeigen, daß $k_{i+1} \equiv 0 \pmod{k_i}$ ist; nun würde aber aus $k_{i+1} = a_{i+1} \cdot b_{i+1} = d \cdot k_i + r$, mit $0 < r < k_i$, folgen, daß

$$(-d a_i + a_{i+1}) \cdot (b_i + b_{i+1}) = -d(a_i \cdot b_i) + a_{i+1} \cdot b_{i+1} = -d k_i + k_{i+1} = r,$$

was der Definition von a_i und b_i widerspricht.

Der Satz II ist somit in allen seinen Teilen bewiesen.

---

[22]) Wenn $\mu \not\equiv 0 \mod k_1$, also etwa $\mu = q k_1 - r$ (mit positivem $r < k_1$) wäre, hätte man $q k_1 = q(a_1 \cdot b_1) = \mu + r$, d. h. $q a_1 \cdot b_1 = r < k_1$, die Elemente a_1, b_1 wären also falsch gewählt.

5. Definition IV. Die Summenzerlegungen (2), (3) bilden — falls sie die Bedingungen des Satzes II erfüllen — eine *charakteristische Darstellung des Gruppenpaares U, V.* Die dabei auftretenden Konstanten k_i heißen die *invarianten Faktoren des Gruppenpaares.*

Der Terminus „invariante Faktoren" wird durch folgende Bemerkung gerechtfertigt. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zwei linear unabhängige Erzeugendensysteme der Gruppen U und V. Der Satz II besagt, daß man von den x_i und y_i zu neuen Erzeugenden a_i und b_i übergehen kann, so daß dabei $a_i \cdot b_j = 0$ (bei $i \neq j$), $a_i \cdot b_i = k_i$ und $k_{i+1} \equiv 0 \pmod{k_i}$ ist. Da aber der Übergang von einem Erzeugendensystem zu einem anderen durch unimodulare Substitution erfolgt, bedeutet das nichts anderes, als den folgenden

Zusatz II zum Satz II. *Die Zahlen k_i sind die Elementarteiler der Matrix $(x_i \cdot y_j)$, wobei die x_i bzw. y_i ein beliebiges linear unabhängiges Erzeugendensystem von U bzw. V bilden.*

Die invarianten Faktoren des Gruppenpaares sind also durch dieses Gruppenpaar eindeutig bestimmt.

6. Man betrachte jetzt: ein Gruppenpaar U, V, eine Untergruppe A von U und eine Untergruppe B von V. Wenn $A \subset (U, V)$ und $B \subset (V, U)$ ist, und die Elemente x und x' von U, sowie die Elemente y, y' von V zu derselben Restklasse nach A bzw. nach B gehören, so ist (wenn $\alpha = x' - x \subset A$ und $\beta = y' - y \subset B$ gesetzt wird)

$$x \cdot \beta = \alpha \cdot y = \alpha \cdot \beta = 0,$$

folglich

$$x' \cdot y' = (x + \alpha) \cdot (y + \beta) = xy.$$

Im Falle $A \subset (U, V)$, $B \subset (V, U)$ induziert somit das Multiplikationsgesetz des Gruppenpaares U, V ein Multiplikationsgesetz (nach demselben Modul) für die Faktorgruppen $U \mid A$ und $V \mid B$. Wenn insbesondere $A = (U, V)$ und $B = (V, U)$ ist, so ist das Gruppenpaar $U \mid A, V \mid B$ primitiv.

7. Wir betrachten jetzt ausführlicher den Fall $\mu = 0$ und führen zunächst folgende Definition ein.

Definition V. *Im Falle $\mu = 0$ heißt ein primitives Gruppenpaar orthogonal, wenn seine invarianten Faktoren sämtlich gleich 1 sind.*

Eine einfache Rechnung zeigt, daß, wenn im soeben formulierten Sinne U, V zueinander orthogonal sind und man ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der einen Gruppe, etwa U, hat, man ein Erzeugendensystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der anderen Gruppe so finden kann, daß $x_i \cdot y_j = \delta_{ij}$ ist, wobei — wie üblich — $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$ ist.

(Wenn a_i und b_i die Erzeugenden der charakteristischen Darstellung sind und $x_i = \lambda_i^j a_j$ die x_i durch die a_i ausdrückt, so hat man für die $y_i = \mu_i^h b_h$ die Bestimmungsgleichungen

$$\sum_{(j)} \lambda_i^j \mu_k^j = \delta_{ik},$$

die (wegen $\|\lambda_i^j\| = 1$) eindeutig und ganzzahlig lösbar sind.)

Man könnte natürlich den Begriff der Orthogonalität in genau derselben Weise auch für den Fall $\mu > 0$ einführen; es wird sich aber zeigen, daß dies unzweckmäßig ist, weil in diesem Falle schon die gewöhnlichen primitiven Gruppenpaare dasselbe leisten wie die orthogonalen Gruppenpaare im Falle $\mu = 0$. In der Mehrzahl der folgenden Sätze werden also primitive Gruppenpaare mit $\mu > 0$ parallel mit den orthogonalen Gruppenpaaren mit $\mu = 0$ auftreten, was dadurch zum Ausdruck gebracht wird, daß wir „primitiv" und in Klammern „orthogonal" schreiben, wobei ein für allemal die Verabredung getroffen wird, daß sich das erstere Adjektiv auf den Fall $\mu > 0$, das letztere auf den Fall $\mu = 0$ bezieht.

Definition VI. *Wenn für ein Gruppenpaar U, V im Falle $\mu = 0$ die Faktorgruppen $U|(U, V)$ und $V|(V, U)$ nicht nur zueinander primitiv, sondern auch orthogonal sind, so heißt U, V ein konjugiertes Gruppenpaar.*

Im Falle $\mu > 0$ leisten alle Gruppenpaare bereits dasselbe wie im Falle $\mu = 0$ die konjugierten Gruppenpaare. Dementsprechend wird im folgenden von „Eigenschaften (konjugierter) Gruppenpaare" gesprochen in dem Sinne, daß die betreffende Eigenschaft im Falle $\mu > 0$ für alle Gruppenpaare, im Falle $\mu = 0$ dagegen im allgemeinen nur für konjugierte Gruppenpaare stattfindet.

Wir bemerken schließlich noch, daß im Falle $\mu = 0$ unter einer Untergruppe A von U stets eine Untergruppe *mit Division*[23]) verstanden wird.

8. *Es sei U, V ein (konjugiertes) Gruppenpaar und $z(v)$ eine homomorphe Abbildung von V in die Gruppe M, bei der sämtliche Elemente von (V, U) auf das Nullelement von M abgebildet werden. Dann läßt sich dieser Homomorphismus durch ein Element x_0 von U erzeugen in dem Sinne, daß für sämtliche $v < V$*

$$z(v) = x_0 \cdot v$$

ist. Falls dabei das Gruppenpaar U, V primitiv (orthogonal) ist, läßt sich das Element x_0 nur auf eine Weise bestimmen.

Man nehme zuerst an, U und V seien zueinander primitiv (orthogonal).

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Erzeugenden der charakteristischen Darstellung von U und V, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ihre invarianten Faktoren.

---

[23]) Untergruppen mit Division sind in der Fußnote [15]) definiert.

Man setze $h_i = z(b_i)$ und beweise zunächst, daß k_i in h_i aufgeht. Für $\mu = 0$ ist dies klar, denn k_i ist ja in diesem Falle $= 1$. Wenn $\mu > 0$ ist, so hat man — da $\frac{\mu}{k_i}$ die Ordnung von b_i ist —

$$0 = z\left(\frac{\mu}{k_i} b_i\right) = \frac{\mu}{k_i} z(b_i) = \frac{\mu h_i}{k_i} \qquad (\mathrm{mod}\ \mu)$$

woraus folgt, daß μ in $\frac{\mu h_i}{k_i}$ aufgeht und somit $\frac{h_i}{k_i}$ eine ganze Zahl ist.

Man setze jetzt

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{k_i} a_i;$$

wenn $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$ ein beliebiges Element von V ist, so ist

$$x_0 \cdot v = \sum_{i,j} \frac{h_i}{k_i} a_i \cdot \mu_j b_j = \sum_{i,j} \frac{h_i}{k_i} \mu_j (a_i \cdot b_j) = \sum_{i} \frac{h_i}{k_i} \mu_i (a_i \cdot b_i)$$

$$= \sum_{i} h_i \mu_i = z\left(\sum_{i} \mu_i b_i\right) = z(v),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wenn es zwei Elemente x und x' gäbe, die der obigen Bedingung genügen, so wäre für jedes v $(x - x')v = 0$, was nur dann mit der Primitivität des Gruppenpaares U, V verträglich ist, wenn $x = x'$ ist.

Es sei jetzt U, V ein (konjugiertes) — jedoch nicht notwendig primitives — Gruppenpaar. Aus den Bedingungen unseres Satzes folgt unmittelbar, daß für alle v, die zu derselben Restklasse nach (V, U) gehören, $z(v)$ denselben Wert hat, so daß die Abbildung z eine homomorphe Abbildung der Faktorgruppe $V_1 = V \,|\, (V, U)$ definiert, welche unseren Bedingungen genügt; V_1 ist aber zu $U_1 = U \,|\, (U, V)$ primitiv (orthogonal), folglich existiert ein Element ξ_0 von U_1 derart, daß für jedes η aus V_1 $\xi_0 \cdot \eta = z(\eta)$ ist. Aus der Multiplikationsdefinition für Restklassen (§ 6) folgt sodann, daß für alle zur Restklasse ξ_0 gehörenden Elemente x_0 von U und für jedes Element y von V

$$x_0 \cdot y = \xi_0 \cdot \eta = z(\eta) = z(y)$$

ist, wobei η die Restklasse bedeutet, zu der y gehört. Unser Satz ist hiermit bewiesen.

9. Hilfssatz. *Wenn U, V ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar und A eine Untergruppe von U ist, so ist A, V ein (konjugiertes) Gruppenpaar.*

Für $\mu \neq 0$ ist der Hilfssatz trivial. Im Fall $\mu = 0$ sei $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von U, welches so beschaffen ist, daß etwa $u_1, \ldots, u_r$ die Untergruppe A erzeugen. Nach § 7 läßt sich dann das Erzeugendensystem $v_1, v_2, \ldots, v_n$ so bestimmen, daß $u_i \cdot v_j = \delta_{ij}$

ist. Da bei beliebigem $i \leqq r$ und $h > r$ $u_i \cdot v_h = 0$ ist, gehören die $v_{r+1}, \ldots, v_n$ sämtlich zu (V, A); wenn andererseits $v = c^i v_i$ irgendein Element von V ist derart, daß für ein $h \leqq r$ c^h von Null verschieden ist, ist $u_h \cdot v$ von Null verschieden. Somit gehören zu (V, A) alle und nur die von $v_{r+1}, \ldots, v_n$ erzeugten Elemente; m. a. W. $v_{r+1}, \ldots, v_n$ bilden ein unabhängiges Erzeugendensystem von (V, A).

Da offenbar (A, V) nur aus dem Nullelement besteht, haben wir zu zeigen, daß $A, V|(V, A)$ ein orthogonales Gruppenpaar ist. Bei der homomorphen Abbildung von V auf $V|(V, A)$ gehen die von $v_{r+1}, \ldots, v_r$ erzeugten Elemente nach dem soeben bewiesenen in Null, die $v_1, \ldots, v_r$ dagegen in lauter von Null und voneinander verschiedenen Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_r$ über, die ein Erzeugendensystem von $V|(V, A)$ bilden. Da ferner (für $i, j \leqq r$) $u_i \cdot \beta_j = u_i \cdot v_j = \delta_i^j$ gesetzt werden soll, sind die Gruppen A und $V|(V, A)$ zueinander orthogonal, und der Hilfssatz ist bewiesen.

10. Satz III. *Wenn U, V ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar, A eine Untergruppe von U und $B = (V, A)$ ist, so ist $A = (U, B)$.*

Man bezeichne mit A' die Gruppe (U, B); zunächst folgt aus der Definition von B, daß bei jeder Wahl der Elemente $x \subset A$, $y \subset B$ $x \cdot y = 0$ ist, so daß jedenfalls die Relation $A \subset A'$ gilt. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, betrachte man — in der Annahme, daß sie nicht zutrifft — irgendein Element z von $A' - A$. Für dieses Element z und ein beliebiges v aus V ist das Produkt $z \cdot v$ eindeutig bestimmt, wobei für sämtliche y aus B $z \cdot y = 0$ ausfällt. Somit ist eine homomorphe Abbildung $z(v) = z \cdot v$ definiert, auf die der Satz des § 8 angewandt werden kann, wobei jetzt A die Rolle von U übernimmt (was erlaubt ist, denn die Gruppen A und V sind ja nach dem Hilfssatz zueinander konjugiert). Somit existiert ein Element x_0 von A derart, daß für sämtliche $y \subset V$ $x_0 \cdot y = z \cdot y$, also $(x_0 - z) \cdot y = 0$ ist; da die Gruppen U und V zueinander primitiv sind, folgt aus der letzteren Gleichung, daß $z = x_0 \subset A$ ist, entgegen der Definition von z. Durch diesen Widerspruch ist Satz III bewiesen.

11. Als Verallgemeinerung des Hilfssatzes des § 9 beweisen wir noch den folgenden

Satz IV. *U und V mögen ein (konjugiertes) Gruppenpaar bilden; wenn A und B Untergruppen von U und V sind, welche die Annullatoren $A' = (U, B)$ und $B' = (V, A)$ bzw. enthalten, so bilden (auf Grund des für U und V erklärten Multiplikationsgesetzes) auch A und B ein (konjugiertes) Gruppenpaar.*

Beweis. Im Falle $\mu \neq 0$ ist die Behauptung trivial. Es sei also $\mu = 0$. Wir beweisen zunächst unseren Satz in der Annahme, daß U und V nicht nur konjugiert, sondern orthogonal sind.

Es seien

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+r}, a_{k+r+1}, \ldots, a_n,$$

$$(2) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k+r}, b_{k+r+1}, \ldots, b_n,$$

zwei Erzeugendensysteme von U bzw. V mit $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$. Wir numerieren die Elemente der Systeme (1) und (2) so, daß $a_1, \ldots, a_k$ ein Erzeugendensystem von A' und $a_1, \ldots, a_{k+r}$ ein Erzeugendensystem von A ist.

Da definitionsgemäß $A' = (U, B)$ ist, so ist vermöge des Satzes III $B = (V, A')$. Ein Element b von V gehört somit dann und nur dann zu B, wenn für alle a_i mit $i \leqq k$ $a_i \cdot b = 0$ ist; dieser Bedingung genügen aber nur die Linearkombinationen der b_j mit $j > k$; folglich bilden die letztgenannten b_j ein Erzeugendensystem von B. In analoger Weise gehört b zu $B' = (V, A)$, wenn für alle a_i mit $i \leqq k + r$ $a_i \cdot b = 0$ ist, woraus wiederum folgt, daß die $b_{k+r+1}, \ldots, b_n$ ein Erzeugendensystem von B' bilden.

Wir betrachten jetzt die beiden Faktorgruppen $A \,|\, A'$ und $B \,|\, B'$ und die zugehörigen Homomorphismen. Es seien bei diesen Homomorphismen α_i das Bild von a_i, β_j das Bild von b_j; dabei ist $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, während die $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+r}$ voneinander und von Null verschieden sind und ein unabhängiges Erzeugendensystem von $A \,|\, A'$ bilden. Ebenso ist $\beta_{k+r+1} = \ldots = \beta_n = 0$, und die $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{k+r}$ bilden ein unabhängiges Erzeugendensystem von $B \,|\, B'$. Ferner ist $\alpha_i \cdot \beta_j = a_i \cdot b_j = \delta_i^j$, so daß $A \,|\, A'$ zu $B \,|\, B'$ orthogonal ist. Im Spezialfall des orthogonalen Gruppenpaares U, V ist der Satz hiermit bewiesen.

Es sei jetzt U, V ein konjugiertes Gruppenpaar, von dessen Orthogonalität nichts vorausgesetzt wird. Wir bezeichnen mit A'' bzw. B'' die beiden Annullatoren (U, V) bzw. (V, U). Man hat dann die Inklusionen

$$A'' \subset A' \subset A, \qquad B'' \subset B' \subset B,$$

wobei alle diese Gruppen Untergruppen mit Division sind.

Wir bilden jetzt die Faktorgruppen $\overline{U} = U \,|\, A''$ und $\overline{V} = V \,|\, B''$ und betrachten die zugehörigen Homomorphismen f und g:

$$\overline{U} = f(U), \qquad \overline{V} = g(V).$$

Es sei dabei

$$\bar{A} = f(A), \ \bar{A}' = f(A') \quad \text{und} \quad \bar{B} = g(B), \ \bar{B}' = g(B');$$

diese Gruppen sind wieder Untergruppen mit Division.

Wegen des ersten Isomorphiesatzes[24]) ist $\bar{A} \,|\, \bar{A}'$ mit $A \,|\, A'$ sowie $\bar{B} \,|\, \bar{B}'$ mit $B \,|\, B'$ isomorph. Ferner sind $\overline{U}$ und $\overline{V}$ zueinander orthogonal, und es gelten die Relationen

$$\bar{A}' = (\overline{U}, \bar{B}) \subset \bar{A}; \qquad \bar{B}' = (\overline{V}, \bar{A}) \subset \bar{B}.$$

[24]) Vgl. etwa E. Noether, Math. Zeitschr. **30**, S. 648.

Aus der Orthogonalität von $\overline{U}, \overline{V}$ folgt sodann auf Grund des soeben Bewiesenen die Orthogonalität von $\bar{A}|\bar{A}'$ und $\bar{B}|\bar{B}'$, woraus sich — vermöge der Isomorphie zwischen $\bar{A}|\bar{A}'$ und $A|A'$ und zwischen $\bar{B}|\bar{B}'$ und $B|B'$ — die Orthogonalität von $A|A'$ und $B|B'$ ergibt. Dadurch ist der Satz IV vollständig bewiesen.

Kapitel II.

Die verallgemeinerten Dualitätssätze von Poincaré-Veblen und von Alexander.

I. Geometrische Hilfsbetrachtungen[25]).

1. Es sei K^n ein simplizialer Komplex; a^r sei ein Simplex von K, $a_1^n, a_2^n, \ldots, a_s^n$ seien die Simplexe von K^n, die a^r auf ihrem Rande tragen; diese Simplexe bilden den *Stern* um a^r; die Gesamtheit der dem Simplex a^r gegenüberliegenden Seiten der a_i^n bildet den *Umgebungskomplex* $Z^{n-r-1}(a^r)$ von a^r in K^n.

Ein zusammenhängender Komplex M^n heißt eine *Mannigfaltigkeit*, wenn sämtliche Umgebungskomplexe in ihm Sphären der entsprechenden Dimension homöomorph sind. Da die topologische Invarianz der soeben formulierten Definition (d. h. ihre Unabhängigkeit von der speziellen Simplizialzerlegung, in der M^n vorliegt) bis jetzt unbewiesen bleibt, werden wir uns im folgenden des allgemeineren Begriffes der sogenannten h-Mannigfaltigkeiten[26]) bedienen.

Ein zusammenhängender Komplex M^n heißt eine *h-Mannigfaltigkeit*, wenn an jedes $n-1$-dimensionale Element von M^n genau zwei n-dimensionale Simplexe anschließen, während der Umgebungskomplex eines jeden a^k $(k < n-1)$ folgende Eigenschaft hat: $Z^{n-k-1}(a^k)$ ist ein zusammenhängender Komplex, in dem der r-dimensionale Zyklus $(0 < r < n-k-1)$ berandet und im wesentlichen ein einziger $n-k-1$-dimensionaler Zyklus existiert, welcher dortselbst nicht homolog Null ist. Die Invarianz dieses Begriffes läßt sich leicht nachweisen[26]).

---

[25]) Wegen der Grundbegriffe der Topologie der Komplexe und Mannigfaltigkeiten vgl. etwa E. R. van Kampen, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Dissertation, Leiden 1929, sowie Alexander, Combinatorial Analysis Situs, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 301—329 und Ann. of Math. (2) **31** (1930), S. 292—320 und Lefschetz, Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926), S. 1—49. Weitere Literatur bei van der Waerden, Kombinatorische Topologie, Jahresber. d. D. M. V. **39** (1930), S. 121. Man beachte im folgenden die terminologischen Festsetzungen der Einleitungen, insbesondere die der Fußnote [15]).

[26]) Vgl. Alexander, Ann. of Math. (2) **31**, S. 307 und Vietoris, Monatsh. f. Math. u. Phys. **35** (1927), S. 165, sowie van Kampen a. a. O., S. 13.

Eine h-Mannigfaltigkeit (die übrigens stets eine Pseudomannigfaltigkeit im Brouwerschen Sinne ist) heißt *orientierbar*, wenn sich ihre n-dimensionalen Elemente so orientieren lassen, daß die algebraische Summe ihrer orientierten Ränder gleich Null ist. Im folgenden werden wir nur solche Orientierungen zulassen.

2. Es sei M^n eine n-dimensionale orientierbare h-Mannigfaltigkeit. Man betrachte eine baryzentrische Unterteilung von M^n und orientiere die Elemente derselben folgendermaßen: es seien $a^n = \varepsilon\ (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ein positiv-orientiertes n-dimensionales Simplex von M^n, $a^r = \eta\ (a_0, a_1, \ldots, a_r)$ eine ebenfalls positiv orientierte Seite von a^r; es sei endlich β_i der Schwerpunkt von $(a_0, a_1, \ldots, a_i)$ (dabei ist i beliebig, also unabhängig von r). Die positive Orientierung des durch die Eckpunkte $\beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ bestimmten baryzentrischen Simplexes ist dann definitionsgemäß $\varepsilon \cdot \eta \cdot (\beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$. Wenn man auf alle möglichen Weisen die Reihenfolge der Eckpunkte $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$ variiert, erhält man $(n-r)!$ verschiedene baryzentrische Simplexe; sie liegen in a^n und heißen zu a^r *dual*; wenn man diese Konstruktion in allen an a^r anschließenden Simplexen a^n durchführt, erhält man die Gesamtheit aller zu a^r dualen baryzentrischen Simplexe; die algebraische Summe dieser (nach obiger Vorschrift orientierten) Simplexe bildet den zu a^r *dualen baryzentrischen Stern*. Wir bezeichnen ihn mit $b^{n-r}(a^r)$.

Man sieht leicht ein, daß der Rand eines r-dimensionalen baryzentrischen Sternes aus baryzentrischen Sternen von der Dimension $r-1$ aufgebaut ist. Dabei gilt folgende Vorzeichenregel: Wenn

$$a^k \to \varepsilon a^{k-1} + \ldots$$

und b^{n-k} bzw. b^{n-k+1} die zu a^k bzw. a^{k-1} dualen baryzentrischen Sterne sind, so ist

$$b^{n-k+1} \to (-1)^k \cdot \varepsilon \cdot b^{n-k} + \ldots .$$

3. Wir betrachten jetzt zweierlei Arten von „Bausteinen", aus denen wir Teilkomplexe von M^n konstruieren werden: die Bausteine erster Art (die zu Teilkomplexen erster Art führen) sind die Elemente der gegebenen Simplizialzerlegung von M^n, d. h. die Simplexe verschiedener Dimension; es seien dies für die Dimension r etwa $a_1^r, a_2^r, \ldots, a_{\alpha_r}^r$. Ein Teilkomplex erster Art ist dementsprechend als eine Linearform von der Gestalt $\lambda^i a_i^r$ aufzufassen. Die Bausteine zweiter Art sind die baryzentrischen Sterne. Da die r-dimensionalen baryzentrischen Sterne eineindeutig den $n-r$-dimensionalen Simplexen von M^n entsprechen, lassen sie sich so numerieren:

$$b_1^r, b_2^r, \ldots, b_{\alpha_{n-r}}^r,$$

dabei ist $b_i^r = b^r(a_i^{n-r})$. Ein r-dimensionaler Teilkomplex zweiter Art ist sodann definitionsgemäß eine Linearform von der Gestalt $\lambda^i b_i^r$.

Es seien jetzt zwei Teilkomplexe $A = A^r = \lambda^i a_i^r$ und $B = B^{n-r} = \mu^i b_i^{n-r}$ bzw. erster und zweiter Art gegeben. Die Zahl

$$\chi(A, B) = \sum_{i=1}^{\alpha_r} \lambda^i \mu^i$$

heißt die *Kroneckersche Charakteristik* oder die *Schnittzahl* der beiden Komplexe A und B.

4. Man betrachte jetzt zwei *stetige Komplexe* A^r und B^{n-r}, die in M^n (mit eventuellen Singularitäten)[27]) eingebettet seien; es wird vorausgesetzt, daß keiner der beiden Komplexe A^r und B^{n-r} den Rand des anderen trifft, daß also die Minimalentfernung des einen Komplexes vom Rande des anderen eine positive Zahl σ ist. Man kann sodann annehmen, daß die Simplexe von M^n sämtlich kleiner als etwa $\frac{1}{100}\sigma$ sind. Die Komplexe A^r und B^{n-r} lassen sich durch Teilkomplexe erster bzw. zweiter Art von M^n beliebig gut approximieren.

Man beweist ohne Mühe die folgenden Tatsachen:

1. Wenn A' ein Teilkomplex erster, B' ein Teilkomplex zweiter Art ist und A' bzw. B' die Komplexe A^r und B^{n-r} hinreichend gut approximieren, so hat die Zahl $\chi(A', B')$ einen von der speziellen Wahl der approximierenden Komplexe A' und B' unabhängigen Wert; dieser heißt die *Kroneckersche Carakteristik* (die *Schnittzahl*) der Komplexe A^r und B^{n-r}, $\chi(A^r, B^{n-r})$.

2. Die Kroneckersche Charakteristik zweier Komplexe A^r und B^{n-r} hängt nicht von der Wahl der Simplizialzerlegung von M^n ab; sie stellt also eine relative Invariante von A und B in bezug auf M^n dar.

3. $$\chi(A^r, B^{n-r}) = (-1)^{r(n-r)} \chi(B^{n-r}, A^r).$$

Bemerkung. Wir bezeichnen mit $\dot{K}^{r-1}$ den (orientierten) Rand des (orientierten) Komplexes K^r.

Sodann gilt

Satz I. *Wenn $\dot{A}^{r-1}$ zu $\dot{B}^{n-r}$ fremd ist, so ist*

(1) $$\chi(A^r, \dot{B}^{n-r}) = (-1)^r \chi(\dot{A}^{r-1}, B^{n-r+1}).$$

Es genügt, diese Behauptung für den Fall zu beweisen, wo A^r ein Simplex, B^{n-r+1} ein baryzentrischer Stern ist. Falls dabei A^r und B^{n-r+1} zueinander fremd sind, ist die Behauptung trivial. Man nehme an, A^r und B^{n-r+1} haben einen nichtleeren Durchschnitt. In diesem Fall ist der bary-

[27]) Ein in M^n liegendes eindeutiges (jedoch nicht notwendig eineindeutiges) stetiges Bild eines Polyederkomplexes heißt ein in M^n (mit eventuellen Singularitäten) eingebetteter Komplex. Falls die Abbildung eineindeutig ist, spricht man von singularitätenfreier Einbettung.

zentrische Stern B^{n-r+1} zu einer Seite A^{r-1} von A^r dual; wenn dabei etwa

$$A^r \to \varepsilon \cdot A^{r-1} + \ldots, \quad B^{n-r} = b^{n-r}(A^r)$$

ist, so ist

$$\chi(\dot{A}^{r-1}, B^{n-r+1}) = \varepsilon, \quad B^{n-r+1} \to (-1)^r \cdot \varepsilon \cdot B^{n-r} + \ldots,$$
$$\chi(A^r, \dot{B}^{n-r}) = (-1)^r \varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz II. *Wenn A^r und B^{n-r} zwei Zyklen sind, von denen mindestens einer in M^n berandet, so ist*

$$\chi(A^r, B^{n-r}) = 0.$$

Beweis. Es sei in der Tat z. B. $B' \to B^{n-r}$; dann ist

$$\chi(A^r, B^{n-r}) = \chi(A^r, \dot{B}') = \pm \chi(\dot{A}^r, B') = 0,$$

w. z. b. w.

4. Es seien A^r und B^s zwei zueinander fremde Zyklen in M mit $r + s = n - 1$; diese Zyklen mögen ferner in M^n beranden, und zwar sei

$$A' \to A^r, \quad B' \to B^s.$$

Die Zahl $\chi(A^r, B')$ heißt die *Verschlingungszahl* von A^r mit B^s und wird mit $\mathfrak{v}(A^r, B^s)$ bezeichnet. *Sie hängt nicht von der Wahl von B' ab*, weil, wenn B'' ein zweiter durch B^s berandeter Komplex ist, $B' - B''$ ein Zyklus, und A^r ein berandender Zyklus ist. Mithin folgt aus Satz II

$$\chi(A^r, B' - B'') = 0, \quad \text{d. h.} \quad \chi(A^r, B') = \chi(A^r, B''),$$

w. z. b. w.

Satz III. *Es seien wieder A^r und B^s zwei zueinander fremde berandende Zyklen in M^n mit $r + s = n - 1$; dann ist*

$$\mathfrak{v}(A^r, B^s) = (-1)^{rs+n} \mathfrak{v}(B^s, A^r).$$

Beweis. Es sei wie immer $A' \to A^r$, $B' \to B^s$. Man hat vermöge des schon Bewiesenen

$$\mathfrak{v}(A^r, B^s) = \chi(\dot{A}', B') = (-1)^{r+1} \chi(A', \dot{B}') = (-1)^{r+1} (-1)^{(r+1)s} \chi(\dot{B}', A')$$
$$= (-1)^{rs+n} \chi(B^s, A') = (-1)^{rs+n} \mathfrak{v}(B^s, A^r),$$

w. z. b. w.

Wenn die Zyklen A^r und B^s, $r + s = n - 1$, zueinander fremd und in M^n homolog Null sind, so daß z. B. cA^r und dB^s in M^n beranden (wobei c und d passend gewählte ganzzahlige Koeffizienten sind), kann man die Verschlingungszahl $\mathfrak{v}(A^s, B^s)$ als $\frac{\mathfrak{v}(cA^r, dB^s)}{cd}$ definieren; im allgemeinen erhält man auf diese Weise gebrochene Verschlingungszahlen; in unserer weiteren Darstellung werden jedoch die Verhältnisse so liegen, daß wir stets mit ganzzahligen Verschlingungszahlen auskommen werden.

5. Wir schließen diese Hilfsbetrachtungen mit folgenden naheliegenden Sätzen:

Satz IV. *Es seien: M^n eine h-Mannigfaltigkeit, K ein aus Simplexen von M^n aufgebauter Komplex, L der aus sämtlichen zu K fremden baryzentrischen Sternen (= Bausteinen zweiter Art) bestehende Komplex, Γ irgendein in $M^n - K$ liegender Zyklus. Unter diesen Bedingungen ist Γ einem Teilzyklus Δ von L (der also ein Teilkomplex zweiter Art von M^n ist) in $M^n - K$ homolog. Falls Γ ein Teilzyklus von L ist, welcher in $M^n - K$ berandet, ist Γ Rand eines (aus Bausteinen zweiter Art zusammengesetzten) Teilkomplexes von L.*

Beweis. Zuerst beweisen wir folgenden Hilfssatz:

Jede abgeschlossene Menge $F \subset M^n - K$ läßt sich mittels einer stetigen Deformation innerhalb von $M^n - K$ in eine in L gelegene Menge F' überführen, und zwar so, daß während des ganzen Deformationsprozesses alle zu L gehörenden Punkte von F fest bleiben.

Es sei $\mathfrak{R}$ das System aller baryzentrischen Sterne von M^n, die mit K einen nicht leeren Durchschnitt haben, also zu den Simplexen von K dual sind. Wir bezeichnen mit s die Höchstdimension der Sterne des Systems $\mathfrak{R}$, die in ihrem Innern Punkte von F enthalten; es sei S einer unter jenen Sternen. Da S zu einem Simplex dual ist, welcher keinen Punkt von F enthält, befördert man durch Zentralprojektion aus dem Schwerpunkte dieses Simplexes (des „Mittelpunktes des Sternes") sämtliche zu S gehörenden Punkte von F auf den Rand des Sternes. Diese „Ausfegung" ist eine Deformation von F, welche alle außerhalb und auf dem Rande von S gelegenen Punkte dieser Menge festläßt und die ganze Zeit F und K fremd zueinander hält. Eine wiederholte Anwendung dieses Ausfegeverfahrens verwandelt F in eine abgeschlossene Menge F', die keinen Punkt im Innern eines zu $\mathfrak{R}$ gehörenden Sternes besitzt. Es sei x ein beliebiger Punkt von F'; dieser ist innerer Punkt eines baryzentrischen Sternes, der — da er nach dem soeben Bewiesenen zu K fremd ist — in L enthalten sein muß, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Es sei jetzt $\bar{L}$ der (geometrisch mit L zusammenfallende) Komplex erster Art, den man erhält, wenn man die Bausteine zweiter Art, aus denen L zusammengesetzt ist, wieder in Simplexe zerschlägt. Aus dem Hilfssatz folgt, daß jeder zu $M^n - K$ gehörende Zyklus Γ^r in einen in $\bar{L}$ liegenden, also weiter in einen aus Simplexen von $\bar{L}$ aufgebauten Zyklus γ^r durch eine Homotopie verwandelt werden kann; man betrachte jetzt die Simplexe von γ^r als Teilsimplexe der Bausteine zweiter Art, die den Komplex L bilden. Wenn ein solcher Baustein S^r in γ^r nur zum Teil enthalten wäre, würde man ihn dadurch wegschaffen können, daß man den in ihm liegenden Teil von γ^r auf den Rand von S^r befördert (was immer mühelos

geht). Nachdem man dies endlich oft wiederholt hat, verwandelt sich γ^r in einen aus Bausteinen zweiter Art aufgebauten Zyklus, also in einen Teilzyklus von L. Genau dasselbe Verfahren läßt sich auch auf den am Schluß des Satzes IV erwähnten Homologieträger anwenden und ergibt sodann den Beweis der beiden Behauptungen dieses Satzes.

II. Formulierung und Beweis der beiden Dualitätssätze.

1. M^n sei eine orientierbare und orientierte h-Mannigfaltigkeit; $a_1^r, a_2^r, \ldots, a_{\alpha_r}^r$ seien die r-dimensionalen Elemente der gegebenen Simplizialzerlegung von M^n, $\mathfrak{b}_1^{n-r}, \mathfrak{b}_2^{n-r}, \ldots, \mathfrak{b}_{\alpha_r}^{n-r}$ die zu ihnen dualen baryzentrischen Sterne; wir setzen $\chi(a_i^r, \mathfrak{b}_j^{n-r}) = \delta_{ij}$. K sei ein aus Simplexen von M^n aufgebauter Komplex, wobei die in K auftretenden r-dimensionalen Simplexe $a_1^r, a_2^r, \ldots, a_{h^r}^r$ sein mögen. Sodann haben unter den $\mathfrak{b}_k^{n-r}$ die mit $k \leqq h^r$ und nur diese einen nichtleeren Durchschnitt mit K.

Der ganzen folgenden Untersuchung liege eine feste ganze Zahl μ, die gleich Null oder größer als 1 ist, als Modul zugrunde. Die sich auf K beziehenden Gruppen L_μ^r, Z_μ^r, $\hat{H}_\mu^r$, H_μ^r seien einfach mit L^r, Z^r, $\hat{H}^r$, H^r bezeichnet. Die Bettischen Gruppen $\bmod \mu$ von K seien einfach mit B^r bezeichnet, wobei die in der Einleitung gemachten Verabredungen (insbesondere die der Fußnote [15])) durchweg ihre Geltung behalten.

Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{L}^r$ die von den Elementen $\mathfrak{b}_k^r, k=1,2,\ldots,h^{n-r}$ erzeugte Abelsche Gruppe mit der einzigen Relation $\mu\,\mathfrak{b}_k^r = 0$. Der Rand $\bmod \mu$ eines jeden Elementes von $\mathfrak{L}^r$ (der ja ein Komplex zweiter Art ist) kann als eine Linearform in den $\mathfrak{b}_k^{r-1}$ geschrieben werden; indem wir in dieser Linearform nur die Glieder mit $k \leqq h^{n-r+1}$ behalten, bekommen wir einen Komplex zweiter Art, den *reduzierten Rand* des gewähltes Elementes von $\mathfrak{L}^r$. Die Komplexe, die als reduzierte Ränder der in $\mathfrak{L}^r$ vorkommenden Komplexe auftreten, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{L}^{r-1}$, die wir mit $\hat{\mathfrak{H}}^{r-1}$ bezeichnen; analog zu den früheren Bezeichnungen setzen wir im Falle $\mu \neq 0$ $\mathfrak{H}^r = \hat{\mathfrak{H}}^r$, während im Falle $\mu = 0$ $\mathfrak{H}^r$ als die kleinste Untergruppe mit Division von $\mathfrak{L}^r$ über $\hat{\mathfrak{H}}^r$ definiert wird. Es liegt ferner eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{L}^r$ auf $\mathfrak{H}^{r-1}$ vor; der *Kern*[28]) dieses Homomorphismus soll mit $\mathfrak{Z}^r$ bezeichnet werden; man sieht leicht ein, daß $\mathfrak{H}^r$ eine Untergruppe von $\mathfrak{Z}^r$ ist.

2. Es soll jetzt ein Multiplikationsgesetz für die beiden Gruppen L^r und $\mathfrak{L}^{n-r}$ festgelegt werden. Dies geschieht einfach dadurch, daß als Produkt der Elemente $a \subset L^r$ und $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{L}^{n-r}$ die Schnittzahl $\chi(a, \mathfrak{b}) \bmod \mu$

[28]) Wenn eine Gruppe A auf eine Gruppe B homomorph abgebildet ist, so heißt die Untergruppe von A, die aus allen Elementen besteht, welche auf das Einheits-(Null-)element von B abgebildet werden, der *Kern* der homomorphen Abbildung.

gesetzt wird. Vermöge dieses Multiplikationsgesetzes bilden die Gruppen L^r und $\mathfrak{L}^{n-r}$ ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar, denn die beiden Gruppen besitzen ja je ein Erzeugendensystem a_i^r bzw. $\mathfrak{b}_j^{n-r}$ mit $a_i^r \cdot \mathfrak{b}_j^{n-r} = \delta_i^j$.

3. Wir beweisen jetzt die Relationen

$$(1) \qquad (L^r, \mathfrak{H}^{n-r}) = Z^r; \quad (\mathfrak{L}^{n-r}, H^r) = \mathfrak{Z}^{n-r},$$

aus denen dann wegen Kap. I, § 10, Satz III die Relationen

$$(2) \qquad (\mathfrak{L}^{n-r}, Z^r) = \mathfrak{H}^{n-r}; \quad (L^r, \mathfrak{Z}^{n-r}) = H^r$$

folgen.

A. Es sei $a < Z^r$, $\mathfrak{b} < \mathfrak{H}^{n-r}$; wir beweisen, daß $\chi(a, \mathfrak{b}) = 0 \pmod{\mu}$ ist. Wenn $\mu \neq 0$ ist, so existiert ein $\mathfrak{c} < \mathfrak{L}^{n-r+1}$, dessen reduzierter Rand $\mathfrak{b}$ ist. Folglich ist

$$\mathfrak{c} \to \mathfrak{b} + \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b}' \text{ zu } K \text{ fremd.}$$

$\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ ist homolog Null, woraus $\chi(a, \mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = 0$ folgt; da aber $\mathfrak{b}'$ außerhalb von K liegt, ist $\chi(a, \mathfrak{b}') = 0$, also $\chi(a, \mathfrak{b}) = 0$, wie wir es haben wollten.

Wenn $\mu = 0$ ist, existiert ein von Null verschiedenes k und ein $\mathfrak{c} < \mathfrak{L}^{n-r+1}$ derart, daß

$$\mathfrak{c} \to k\mathfrak{b} + \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b}' \text{ zu } K \text{ fremd;}$$

$k\mathfrak{b} + b'$ ist wieder homolog Null, also ist $\chi(a, k\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = 0$, was vermöge $\chi(a, \mathfrak{b}') = 0$

$$0 = \chi(a, k\mathfrak{b}) = k\chi(a, \mathfrak{b})$$

und schließlich $\chi(a, \mathfrak{b}) = 0$ ergibt.

B. Es sei a ein nicht zu Z^r gehörendes Element von L^r; wir nehmen uns vor, ein solches Element von $\mathfrak{H}^{n-r}$ zu finden, welches mit a eine von Null verschiedene Schnittzahl besitzt. Da a nicht zu Z^r gehört, also kein Zyklus ist, ist

$$a \to b < H^{r-1}, \quad b \neq 0;$$

L^{r-1} und $\mathfrak{L}^{n-r+1}$ bilden aber ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar; es existiert folglich ein solches $\mathfrak{c} < \mathfrak{L}^{n-r+1}$, daß $\chi(b, \mathfrak{c}) \neq 0$ ist. Wenn wir mit $\dot{\mathfrak{c}}$ den Rand, mit $\hat{\mathfrak{c}}$ den reduzierten Rand von $\mathfrak{c}$ bezeichnen und bemerken, daß wegen des Satzes I dieses Kapitels $\chi(b, \mathfrak{c}) = \pm\chi(a, \dot{\mathfrak{c}})$, während andererseits offenbar $\chi(a, \dot{\mathfrak{c}}) = \chi(a, \hat{\mathfrak{c}})$ ist, so sehen wir, daß $\chi(a, \hat{\mathfrak{c}}) \neq 0$ ist. Das Element $\hat{\mathfrak{c}}$ genügt also unseren Forderungen, und die erste der beiden Formeln (1) ist somit bewiesen; die zweite beweist sich auf genau dieselbe Weise.

Wir schließen an diese Ausführungen noch folgende Bemerkung an: da L^r und $\mathfrak{L}^{n-r}$ ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar bilden und

$$(L^r, \mathfrak{Z}^{n-r}) < Z^r, \quad (\mathfrak{L}^{n-r}, Z^r) < \mathfrak{Z}^{n-r}$$

ist, so folgt aus Kap. I, § 6, daß auch die Faktorgruppen $Z^r \mid H^r$ und $\mathfrak{Z}^{n-r} \mid \mathfrak{H}^{n-r}$ ebenfalls zueinander primitiv (orthogonal) sind.

4. Wir erhalten jetzt das Theorem von Poincaré-Veblen, wenn wir $K = M^n$ setzen. In diesem Fall ist die Gruppe $Z^r \mid H^r$ die r-dimensionale und $\mathfrak{Z}^{n-r} \mid \mathfrak{H}^{n-r}$ die $n-r$-dimensionale Bettische Gruppe von M^n. Wir erhalten somit

Das verallgemeinerte Poincaré-Veblensche Dualitätsgesetz. *Die reduzierten Bettischen Gruppen der Dimensionen r und $n-r$ einer n-dimensionalen h-Mannigfaltigkeit sind zueinander primitiv (orthogonal), sobald man als Multiplikationsgesetz die Bildung der Schnittzahl betrachtet; insbesondere sind die beiden Gruppen untereinander isomorph.*

5. Wir gehen jetzt zum Alexanderschen Dualitätssatz über. Wir beweisen zunächst den Alexanderschen Satz im engeren Sinne (der dennoch eine Verallgemeinerung des von Alexander selbst bewiesenen Resultates bildet), indem wir voraussetzen, daß in der h-Mannigfaltigkeit M^n sämtliche Zyklen beranden. Solche h-Mannigfaltigkeiten nennen wir (verallgemeinerte) *Poincarésche Räume.* Es sei sodann K ein (aus den Elementen der gegebenen Simplizialzerlegung von M^n) aufgebauter Komplex, von dem wir nur voraussetzen, daß er nicht mit M^n zusammenfällt.

Bei der folgenden Untersuchung der Berandungsrelationen in $M^n - K$ können wir uns auf die Betrachtung der aus baryzentrischen Sternen $\mathfrak{b}$ aufgebauten Komplexen beschränken. Wir tun das, ohne es jedesmal zu erwähnen.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein s-dimensionaler Zyklus in $M^n - K$. Da $\mathfrak{a}$ in M^n berandet, existiert ein $\mathfrak{c} \to \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c}$ ist eine Linearform in den $\mathfrak{b}_i^{s+1}$ und kann in der Gestalt $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{d}$ dargestellt werden, wobei $\mathfrak{b}$ ein Element von $\mathfrak{Z}^{s+1}$ und $\mathfrak{d}$ zu K fremd ist. Ferner ist

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{c} - \mathfrak{b} \to \dot{\mathfrak{c}} - \dot{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a} - \dot{\mathfrak{b}},$$

also $\mathfrak{a} \sim \dot{\mathfrak{b}}$ in $M^n - K$.

Es sei $\mathfrak{a}'$ irgendein anderer Zyklus in $M^n - K$, der dortselbst zu $\mathfrak{a}$ homolog ist. Wenn $\mu \neq 0$ ist, so gibt es einen $\mathfrak{e} < M^n - K$,

$$\mathfrak{e} \to \mathfrak{a}' - \mathfrak{a}.$$

Andererseits berandet a' in M^n, was zu

$$\mathfrak{c}' \to \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{c}' = \mathfrak{b}' + \mathfrak{d}'$$

führt. Ferner ist

$$\mathfrak{c} - \mathfrak{c}' + \mathfrak{e} \to \mathfrak{a} - \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}' - \mathfrak{a} = 0,$$

so daß $\mathfrak{c} - \mathfrak{c}' + \mathfrak{e}$ ein Zyklus ist (der in M^n berandet). Folglich gibt es einen $\mathfrak{f}$ mit

$$\mathfrak{f} \to \mathfrak{c} - \mathfrak{c}' + \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{f}' + \mathfrak{f}'',$$

wobei $\mathfrak{f}' \varepsilon \mathfrak{L}^{s+2}$, $\mathfrak{f}'' \subset M^n - K$. Der reduzierte Rand von $\mathfrak{f}'$ ist, wie leicht ersichtlich, $\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'$. Mit anderen Worten: *Aus der Homologie* $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}'$ *in* $M^n - K$ *folgt, daß die entsprechenden Komplexe* $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{b}'$ (*deren Ränder* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}'$ *bzw. homolog in* $M^n - K$ *sind*) *Elemente von* $\mathfrak{Z}^{s+1}$ *sind, die zur selben Restklasse bezüglich* $\mathfrak{H}^{s+1}$ *gehören.* Dasselbe Ergebnis findet auch im Falle $\mu = 0$ statt: dann ist nämlich (für ein bestimmtes $k \neq 0$)

$$\mathfrak{e} \to k(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}) \quad (\text{in } M^n - K),$$
$$\mathfrak{f} \to k(\mathfrak{c} - \mathfrak{c}') + \mathfrak{e}, \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{f}' + \mathfrak{f}'', \quad \mathfrak{f}' \varepsilon \mathfrak{L}^{s+2}, \quad \mathfrak{f}'' \subset M^n - K;$$

der reduzierte Rand von $\mathfrak{f}'$ ist diesmal $k(\mathfrak{b} - \mathfrak{b}')$, und die obige Behauptung behält ihre Gültigkeit.

Wir fassen nochmals zusammen: Jeder s-dimensionale Zyklus $\mathfrak{a} \subset M^n - K$ ist dortselbst dem Rande eines Elementes $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{Z}^{s+1}$ homolog, wobei, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ in $M^n - K$ homolog sind, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ zur selben Restklasse in bezug auf $\mathfrak{H}^{s+1}$ gehören; hieraus folgt aber ein Isomorphismus zwischen der s-dimensionalen Bettischen Gruppe von $M^n - K$, $\mathfrak{B}^s(M^n - K)$ und der Gruppe $\mathfrak{Z}^{s+1} | \mathfrak{H}^{s+1}$. Nun ist aber die r-dimensionale Bettische Gruppe von K, d. h. die Gruppe $Z^r | H^r$ zu $\mathfrak{Z}^{n-r} | \mathfrak{H}^{n-r}$ primitiv (orthogonal), und die Multiplikation ist dabei durch die Schnittbildung gegeben. Folglich bilden auch $Z^r | H^r$ und $\mathfrak{B}^{n-r-1}(M^n - K)$ ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar, wobei die Schnittzahl des entsprechenden $\mathfrak{b}$ mit dem r-dimensionalen Zyklus aus K nichts anderes als die Verschlingungszahl dieses Zyklus mit dem entsprechenden Zyklus $\mathfrak{a}$ aus $M^n - K$ definiert. Wir erhalten somit folgenden verallgemeinerten

Dualitätssatz von Alexander im engeren Sinne. *Es sei* M^n *ein verallgemeinerter Poincarésche Raum von der Dimension* n; *wenn* K *einen Komplex in* M^n *bedeutet, so ist die* r-*dimensionale Bettische Gruppe von* K *zu der* $n - r - 1$-*dimensionalen Bettischen Gruppe von* $M^n - K$ *primitiv* (*orthogonal*), *sobald man als Multiplikation die Bildung der Verschlingungszahl der entsprechenden Zyklen betrachtet*; *insbesondere sind die beiden Gruppen untereinander isomorph.*

6. Es sei jetzt M^n eine beliebige h-Mannigfaltigkeit. Wir betrachten irgendeinen aus Simplexen von M^n aufgebauten Komplex K, von dem nur vorausgesetzt wird, daß er nicht mit M^n zusammenfällt. $B^r, \mathfrak{B}^r, W^r$ seien bzw. die r-dimensionalen Bettischen Gruppen von K, $M^n - K$ und M^n. Wegen $K \subset M^n$ wird B^r auf eine Untergruppe $\hat{V}^r$ und $\mathfrak{B}^r$ auf die Untergruppe $\hat{\mathfrak{B}}^r$ von W^r homomorph abgebildet; die Kerne dieser Homomorphismen seien A^r und $\mathfrak{A}^r$. Bei $\mu \neq 0$ setzen wir $V^r = \hat{V}^r$ und $\mathfrak{B}^r = \hat{\mathfrak{B}}^r$, während bei $\mu = 0$ durch V^r bzw. $\mathfrak{B}^r$ die kleinste Untergruppe mit Division von W^r über $\hat{V}^r$ bzw. $\hat{\mathfrak{B}}^r$ bezeichnet wird. Offenbar besteht A^r aus allen denjenigen Elementen — d. h. Restklassen von $Z^r \bmod H^r$ —, die nur Zyklen,

welche in M^n homolog Null sind, enthalten. Dementsprechend bezeichnen wir mit $\overset{*}{A}{}^r$ die Gruppe aller derjenigen Elemente von B^r, die Restklassen sind, welche Zyklen enthalten, die in M^n beranden. Offenbar ist $\overset{*}{A}{}^r$ eine Untergruppe von A^r, welche im Fall $\mu \neq 0$ mit A^r zusammenfällt; ferner ist im Falle $\mu = 0$ A^r die kleinste in B^r enthaltene Obergruppe mit Division für die Gruppe $\overset{*}{A}{}^r$. Analog wird auch die Gruppe $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^r$ definiert. Der verallgemeinerte Alexandersche Dualitätssatz läßt sich sodann in der Gestalt der folgenden beiden Behauptungen aussprechen:

Dualitätssatz von Alexander im weiteren Sinne.

Vorbemerkung. Wegen des Poincaré-Veblenschen Satzes ist W^r, W^{n-r} ein Gruppenpaar.

Erste Behauptung:

$$(3) \qquad (W^r, \mathfrak{B}^{n-r}) = V^r; \quad (W^{n-r}, V^r) = \mathfrak{B}^{n-r}.$$

Zweite Behauptung:

A^r und $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ bzw. $\overset{*}{A}{}^r$ und $\mathfrak{A}^{n-r-1}$ bilden ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar (wobei als Produkte die Verschlingungszahlen der entsprechenden Zyklen auftreten).

Beweis der ersten Behauptung. Vermöge des Satzes III des Kap. I (§ 10) genügt es, die eine der beiden Formeln (3) zu beweisen, z. B. die zweite. Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, daß jeder außerhalb von K gelegene $n-r$-dimensionale Zyklus (sowie jeder ihm in M^n homologe Zyklus) selbstverständlich mit jedem r-dimensionalen Zyklus aus K die Schnittzahl Null hat. Daraus folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{B}^{n-r} \subset (W^{n-r}, V^r)$ ist. Um die umgekehrte Inklusion nachzuweisen, betrachten wir irgendeinen $n-r$-dimensionalen Zyklus $\mathfrak{a}$ von M^n und zeigen, daß, falls $\mathfrak{a}$ mit sämtlichen r-dimensionalen Zyklen von K die Schnittzahl Null hat, ein Zyklus $\mathfrak{a}'$ in $M^n - K$ existiert, welcher im Falle $\mu \neq 0$ mit $\mathfrak{a}$, im Falle $\mu = 0$ mit $k\mathfrak{a}$, $k \neq 0$, in M^n homolog ist. Man kann sich dabei auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{a}$ eine Linearform in den zu den r-dimensionalen Simplexen von M^n dualen baryzentrischen Sternen ist. Sodann ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^{n-r}, \quad \mathfrak{b}' \subset M^n - K.$$

Da die Schnittzahl von $\mathfrak{a}$ mit sämtlichen Zyklen aus K Null ist, ist $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{Z}^{n-r}$, folglich existiert ein Element $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{L}^{n-r+1}$ und eine höchstens im Fall $\mu = 0$ von 1 verschiedene positive ganze Zahl k derart, daß $k\mathfrak{b}$ den reduzierten Rand von $\mathfrak{c}$ bildet. Dann ist aber $\mathfrak{a}' = k\mathfrak{a} - \dot{\mathfrak{c}}$ ein in $M^n - K$ gelegener Zyklus und (da offenbar $\dot{\mathfrak{c}} \sim 0$ in M^n ist) ist

$$\mathfrak{a}' \sim k\mathfrak{a} \quad (\text{in } M^n),$$

w. z. b. w.

Beweis der zweiten Behauptung. Wir beweisen in erster Linie, daß A^r und $\overset{*}{\mathfrak{A}}^{n-r-1}$ zueinander primitiv (orthogonal) sind. Zunächst ist klar, daß jeder s-dimensionale Zyklus aus $M^n - K$, welcher in M^n berandet, in $M^n - K$ dem Rande eines Elementes von $\mathfrak{Z}^{s+1}$ homolog ist. Es genügt deshalb solche Zyklen zu betrachten, die Ränder der Elemente von $\mathfrak{Z}^{n-r}$ sind. Wir bezeichnen ferner mit $\overline{H}^r$ bzw. $\dot{\mathfrak{H}}^s$ diejenige Untergruppe von Z^r bzw. von $\mathfrak{Z}^s$, welche aus allen Elementen besteht, die in M^n, bzw. deren Ränder in $M^n - K$ homolog Null sind. Es soll jetzt die Formel

$$(4) \qquad (\mathfrak{Z}^{n-r}, \overline{H}^r) = \dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$$

bewiesen werden. Die Inklusion $\dot{\mathfrak{H}}^{n-r} \subset (\mathfrak{Z}^{n-r}, \overline{H}^r)$ ist wieder trivial; um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, hat man zu zeigen, daß, wenn für ein bestimmtes $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{Z}^{n-r}$ für sämtliche γ aus $\overline{H}^r$ $\chi(\mathfrak{a}, \gamma) = 0 \pmod{\mu}$ ist, $\dot{\mathfrak{a}}$ in $M^n - K$ notwendig homolog Null ist. Wir definieren zu diesem Zweck für jedes Element $y \subset B^r$ das Produkt $y \cdot \mathfrak{a}$ als die Schnittzahl $(\mathrm{mod}\ \mu)$ eines beliebigen Zyklus der Restklasse y mit $\mathfrak{a}$. Aus dieser Definition folgt, daß für die Gruppe (Restklasse) A^r, als Element y_0 von B^r betrachtet, $y_0 \cdot \mathfrak{a} = 0$ ist, woraus sich eine natürliche Definition der Produkte $x \cdot \mathfrak{a}$ ergibt, wenn x ein beliebiges Element der Faktorgruppe $B^r | A^r = \hat{V}^r$ bedeutet. Im Falle $\mu \neq 0$ ist dadurch automatisch ein Multiplikationsgesetz $x \cdot \mathfrak{a}$ für die Elemente x von V^r definiert (denn in diesem Fall ist ja V^r mit $\hat{V}^r$ identisch); wenn dagegen $\mu = 0$ ist, definiert man das analoge Multiplikationsgesetz folgendermaßen: x sei ein beliebiges Element von V^r; es existiert dann ein $z \subset \hat{V}^r$ mit $h \cdot x = z$, und wir setzen $x \cdot \mathfrak{a} = \frac{z \cdot \mathfrak{a}}{h}$. Dabei können Brüche auftreten, da aber V endlichviele Erzeugenden besitzt, sind alle Nenner beschränkt, so daß für ein passend gewähltes k bei jeder Wahl von $x \subset V^r$ $x \cdot k\,\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl ist. Der Einheitlichkeit der Formel halber führen wir auch im Fall $\mu \neq 0$ den Koeffizienten k ein, nur soll er dann definitionsgemäß gleich 1 sein. Da W^r und W^{n-r} zueinander primitiv (orthogonal) sind, bilden V^r und W^{n-r} (kraft des Hilfssatzes des § 9 des Kap. I) ein konjugiertes Gruppenpaar. Da überdies $(W^r, W^{n-r}) = 0$ ist, sind die Voraussetzungen des § 8 des Kap. I reichlich erfüllt, und es gibt ein solches Element $b \subset W^{n-r}$, daß bei jedem $x \subset V^r$ $x \cdot k\,\mathfrak{a} = x \cdot b$ ist, dies bedeutet aber, daß, wenn β ein beliebiger Zyklus aus der Restklasse b und ξ ein beliebiger Zyklus einer beliebigen Restklasse $x \subset V^r$, also einfach ein beliebiger r-dimensionaler Zyklus von K ist, $\chi(\xi, k\,\mathfrak{a} - \beta) = 0$ ausfällt. Wir zerlegen jetzt den Zyklus β wie üblich in die Summe zweier Komplexe $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$, wobei $\mathfrak{a}'$ ein Element von $\mathfrak{Z}^{n-r}$ und $\mathfrak{a}''$ zu K fremd ist. Aus dem soeben Bewiesenen folgt, daß $k\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'$ ein Element von $(\mathfrak{Z}^{n-r}, Z^r)$ ist; also ist (bei einem nur im Fall $\mu = 0$ von 1 eventuell verschiedenen k')

$k'(k\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')$ der reduzierte Rand eines gewissen $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{L}^{n-r+1}$ ist. Wir haben ferner die Berandungsrelation

$$k'k\mathfrak{a}-\dot{\mathfrak{c}}-k'\beta\to k'k\dot{\mathfrak{a}}, \tag{5}$$

andererseits ist aber nach der Definition von $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{c}$ die linke Seite von (5) ein in M^n-K liegender Komplex, so daß aus (5) die Homologie

$$k'k\dot{\mathfrak{a}}\sim 0 \quad \text{in} \quad M^n-K$$

folgt, wie wir es beweisen wollten.

Nachdem die Formel (4) bewiesen ist, bleibt nur noch ein leichter Schritt, und die zweite Behauptung des Alexanderschen Dualitätssatzes wird erledigt. Zunächst ist nach dem § 2 dieses Abschnittes L^r zu $\mathfrak{L}^{n-r}$ primitiv (orthogonal); da (wegen § 3, Form. (2))

$$(L^r,\mathfrak{Z}^{n-r})=H^r<Z^r,\quad (\mathfrak{L}^{n-r},Z^r)=\mathfrak{H}^{n-r}<\mathfrak{Z}^{n-r}$$

ist, bilden nach Satz IV des Kap. I Z^r und $\mathfrak{Z}^{n-r}$ ein konjugiertes Gruppenpaar; da ferner $(Z^r,\mathfrak{Z}^{n-r})=H^r<\overline{H}^r$ ist, sind wegen des Satzes IV, Kap. I auch die Gruppen $\overline{H}^r$ und $\mathfrak{Z}^{n-r}$ konjugiert, so daß die Faktorgruppen nach den Annullatoren $(\overline{H}^r,\mathfrak{Z}^{n-r})=H^r$ und $(\mathfrak{Z}^{n-r},\overline{H}^r)=\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$ primitiv (orthogonal) sind. M. a. W.: die Gruppen $\overline{H}^r\,|\,H^r$ und $\mathfrak{Z}^{n-r}\,|\,\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$ sind zueinander primitiv (orthogonal). Die erste dieser Gruppen ist aber definitionsgemäß die Gruppe A^r; ein Element ζ der zweiten Gruppe ist eine Restklasse von $\mathfrak{Z}^{n-r}$ mod $\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$; jedem Element $\mathfrak{z}$ dieser Restklasse wird sein Rand $\mathfrak{a}^{n-r-1}$ zugeordnet, und alle diese Ränder sind untereinander homolog in M^n-K (die Restklassen sind ja modulo $\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$ genommen!); mithin wird der ganzen Restklasse ζ ein Element von $\mathfrak{B}^{n-r-1}$, und sogar ein Element von $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ zugeordnet (die $\mathfrak{a}^{n-r-1}$ beranden ja nach ihrer Konstruktion in M^n, weil sie als Ränder definiert waren). Wenn umgekehrt ein Element von $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ gegeben ist, so ist es eine Restklasse modulo $\mathfrak{H}^{n-r-1}$ der Gruppe aller Zyklen von M^n-K, und in dieser Restklasse ist ein Zyklus enthalten, der in M^n berandet; dieser ist dem Rand eines Elementes von $\mathfrak{Z}^{n-r}$ homolog; folglich ist in der Restklasse der Rand eines Elementes aus $\mathfrak{Z}^{n-r}$ enthalten; auf die Weise werden Zyklen, die einem und demselben Element von $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ entspringen, Elemente von $\mathfrak{Z}^{n-r}$ zugeordnet, die zur selben Restklasse modulo $\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$ gehören, folglich ein und dasselbe Element von $\mathfrak{Z}^{n-r}\,|\,\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$. Somit wird ein Isomorphismus zwischen $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ und $\mathfrak{Z}^{n-r}\,|\,\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$ hergestellt, welcher erlaubt, die für $A^r=\overline{H}^r\,|\,H^r$ und $\mathfrak{Z}^{n-r}\,|\,\dot{\mathfrak{H}}^{n-r}$ erklärte Multiplikation unmittelbar auf A^r und $\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ zu übertragen; dieses Multiplikationsgesetz ergibt als Produkt der Elemente $a<A^r$ und $\mathfrak{a}<\overset{*}{\mathfrak{A}}{}^{n-r-1}$ die Verschlingungszahl eines Zyklus aus der Restklasse a mit einem solchen aus der Restklasse $\mathfrak{a}$.

7. Somit ist bewiesen, daß A^r und $\overset{*}{A}^{n-r-1}$ ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar bilden. Man kann dies als eine sich auf die beiden Komplexe K und L beziehende Aussage auffassen, denn jede in $M^n - K$ stattfindende Berandung läßt sich ja nach L wegziehen. Nun aber treten in unserem Beweise die Elemente (erster Art) von K und die Elemente (zweiter Art) von L in durchaus symmetrischer Weise auf, so daß man ihre Rollen tauschen könnte. Dann aber würden die Überlegungen der letzteren Paragraphen uns zum Beweis der Primitivität (Orthogonalität) des Gruppenpaares $\overset{*}{A}^r$ und $\mathfrak{A}^{n-r-1}$ führen, w. z. b. w.

8. Wir wollen zum Schluß noch zeigen, wie man aus dem soeben Bewiesenen die Dualitätsformeln ableitet, die für den Fall mod 2 noch früher aufgestellt worden sind[29]). Dabei ist unter dem Modul μ Null oder eine beliebige Primzahl zu verstehen.

Wenn man im allgemeinen mit $\mathfrak{r}(G)$ den Rang der Abelschen Gruppe G bezeichnet, so hat man zunächst:

$$\mathfrak{r}(\overset{*}{\mathfrak{A}}^{n-r-1}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{n-r-1}) = \mathfrak{r}(\overset{*}{A}^r) = \mathfrak{r}(A^r) \tag{6}$$

und

$$\mathfrak{r}(\hat{\mathfrak{B}}^{n-r}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{B}^{n-r}), \qquad \mathfrak{r}(\hat{V}^r) = \mathfrak{r}(V^r). \tag{6'}$$

Da ferner $(W^r, \mathfrak{B}^{n-r}) = V^r$ ist, während $(\mathfrak{B}^{n-r}, W^r)$ aus dem Nullelement besteht, ist $W^r \,|\, V^r$ mit $\mathfrak{B}^{n-r}$ isomorph, was unter Beachtung der allgemeinen Relation $\mathfrak{r}(W^r) = \mathfrak{r}(W^r \,|\, V^r) + \mathfrak{r}(V^r)$

$$\mathfrak{r}(W^r) = \mathfrak{r}(V^r) + \mathfrak{r}(\mathfrak{B}^{n-r}) \tag{7}$$

ergibt. Wir haben also

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{B}^{n-r-1}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{n-r-1}) + \mathfrak{r}(\mathfrak{B}^{n-r-1} \,|\, \mathfrak{A}^{n-r-1}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{n-r-1}) + \mathfrak{r}(\hat{\mathfrak{B}}^{n-r-1}). \tag{8}$$

Aus (6') und (7) folgt ferner

$$\mathfrak{r}(\hat{\mathfrak{B}}^{n-r-1}) = \mathfrak{r}(W^{r+1}) - \mathfrak{r}(V^{r+1}); \tag{9}$$

wenn man dies und (6) in (8) einsetzt und beachtet, daß

$$\mathfrak{r}(B^r) = \mathfrak{r}(A^r) + \mathfrak{r}(B^r \,|\, A^r) = \mathfrak{r}(A^r) + \mathfrak{r}(V^r)$$

ist, erhält man schließlich

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{B}^{n-r-1}) = \mathfrak{r}(B^r) + \mathfrak{r}(W^{r+1}) - \mathfrak{r}(V^r) - \mathfrak{r}(V^{r+1}),$$

w. z. b. w.

---

[29]) Pontrjagin, Zum Alexanderschen Dualitätssatz, zweite Mitteilung, Gött. Nachr., 1927, S. 446.

Kapitel III.

Das allgemeine Dualitätsgesetz für abgeschlossene Mengen.

I. Direkte und inverse Folgen von Homomorphismen.

1. Es sei

$$U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots \tag{1}$$

eine unendliche Folge von Gruppen, von denen jede Gruppe U_m in[30]) ihren Nachfolger U_{m+1} mittels des Homomorphismus φ_m abgebildet wird; die Folge

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots \tag{2}$$

heißt sodann eine *direkte Homomorphismenfolge.* Sie bestimmt folgendermaßen eine neue Gruppe U — den *Limes der Folge* (1) *in bezug auf die Folge* (2) oder kurz — die Limesgruppe. Zunächst nenne man eine *Fundamentalfolge* jede Folge von der Gestalt

$$x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, \ldots \tag{3}$$

wobei x_m ein Element von U_m und dabei stets $x_{m+1} = \varphi_m(x_m)$ ist. Zwei Fundamentalfolgen (3) und

$$y_h, y_{h+1}, \ldots, y_m, \ldots, \tag{4}$$

heißen *konfinal,* wenn es ein $\varkappa$ derart gibt, daß für $m > \varkappa$ $x_m = y_m$ ist. Offenbar zerfällt die Gesamtheit der Fundamentalfolgen in Klassen untereinander konfinaler Fundamentalfolgen. Diese Klassen werden zu Elementen der Gruppe U gemacht. Die Gruppenoperation in U wird sodann wie folgt erklärt. Es seien α und β zwei Klassen; man wähle in jeder je eine Fundamentalfolge, etwa

$$a = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m, \ldots)$$

und

$$b = (y_h, y_{h+1}, \ldots, y_m, \ldots.)$$

mit etwa $h \geqq k$; die durch die Fundamentalfolge

$$c = (x_h \cdot y_h, x_{h+1} \cdot y_{h+1}, \ldots, x_m \cdot y_m, \ldots)$$

bestimmte Klasse γ heißt dann das Produkt (im Sinne der Gruppenoperation in U) der Elemente α und β. Offenbar ist γ durch α und β eindeutig bestimmt (d. h. γ hängt von der Wahl der Folgen a und b in den Klassen α und β nicht ab). Wenn e_m das Einheitselement von U_m ist, so ist das durch $(e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots)$ definierte Element von U das Einheitselement in bezug

[30]) Wenn jedem Element a einer Menge A ein Element b einer Menge B zugeordnet ist, und dabei jedes b mindestens einem a entspricht, spricht man von einer Abbildung von A *auf* B. Eine Abbildung von A auf eine echte oder unechte Teilmenge von B heißt (nach Herrn van der Waerden) eine Abbildung von A *in* B.

auf die soeben definierte Gruppenoperation; man erhält ferner zu jedem Element α von U das inverse α^{-1}, wenn man in den Folgen der Klasse α alle Elemente durch ihre Inverse ersetzt. Da überdies unsere Operation dem assoziativen Gesetz genügt, sind alle Gruppenpostulate erfüllt, und U ist eine Gruppe. Bevor wir weiter gehen, führen wir folgende Bezeichnung ein: φ_s^r soll die Abbildung $\varphi_{s-1}(\ldots(\varphi_{r-1}(\varphi_r)))$ von U_r in U_s bedeuten (dabei ist natürlich $s > r$).

Wenn

$$U_{m_1}, U_{m_2}, \ldots, U_{m_q}, \ldots \tag{5}$$

eine Teilfolge der Folge (1) ist, so entspricht ihr die Homomorphismenfolge

$$\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_q', \ldots \qquad \text{mit } \varphi_q' = \varphi_{m_{q+1}}^{m_q}, \tag{6}$$

und die Gruppe U', die als Limes von (5) in bezug auf (6) auftritt, ist, wie leicht ersichtlich, mit dem Limes von (1) in bezug auf (2) isomorph. Wir sagen in diesem Falle von der direkten Homomorphismenfolge (2), sie *umfasse* die Folge (6). Zwei direkte Homomorphismenfolgen heißen ferner äquivalent, wenn man in ihnen zwei solche Teilfolgen finden kann, welche von einer dritten Folge umfaßt werden. Dieser Äquivalenzbegriff genügt den Gleichheitsaxiomen (der Reflektivität, der Symmetrie und der Transitivität)[31]), so daß man von Klassen untereinander äquivalenter Homomorphismenfolgen sprechen kann. Da ferner zwei Folgen, von denen die eine die andere umfaßt, im Limes isomorphe Gruppen bestimmen, ergibt sich folgender Satz:

I. *Äquivalente Homomorphismenfolgen haben isomorphe Limesgruppen.*

Eine direkte Homomorphismenfolge (1), (2) wird von jetzt an stets mit $\mathfrak{F}(U_m, \varphi)$ bezeichnet.

2. Wir betrachten wieder eine Folge

$$U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots, \tag{1}$$

---

[31]) Daß unser Äquivalenzbegriff transitiv ist, ergibt sich aus den folgenden beiden Bemerkungen, von denen die erste selbstverständlich und die zweite mühelos nachzuweisen ist:

1. wenn $I \equiv II$ und $I' \supset I$, $II' \supset II$ ist, so ist $I' \equiv II'$,
2. wenn $I \equiv II$ und $II'' \subset II$ ist, so ist $I \equiv II''$.

Zunächst folgt aus $I \equiv II$, $II \equiv III$ die Existenz der Teilfolgen I_1 und II_1, II'' und III'', sowie der Folgen IV und V mit

$$I_1 + II_1 \subset IV, \quad II'' + III'' \subset V.$$

Vermöge der Bemerkungen 1 und 2 ergibt sich sodann der Reihe nach

$$I \equiv II'', \; I \equiv V, \; I \equiv III'', \; I \equiv III,$$

w. z. b. w.

nehmen aber jetzt an, daß U_{m+1} in U_m mittels des Homomorphismus π_m abgebildet ist; die Folge

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m, \ldots \tag{7}$$

(dabei wird die Abbildung $\pi_r(\ldots \pi_{s-2}(\pi_{s-1}))$ von U_s in U_r $(s > r)$ mit π_r^s bezeichnet) heißt sodann eine *inverse Homomorphismenfolge.* Genau wie vorher lassen sich auch für inverse Homomorphismenfolgen die Begriffe der umfassenden bzw. äquivalenten Folgen einführen. Es gibt dabei kein Analogon zum Satze I, da ja eine inverse Homomorphismenfolge keine Limesgruppe besitzt.

Eine inverse Homomorphismenfolge (1), (7) wird von jetzt an stets mit $\bar{\mathcal{F}}(U_m, \pi)$ bezeichnet. Eine Homomorphismenfolge in (1), von der man nicht weiß, ob sie direkt oder invers ist, soll schlechtweg mit $\mathcal{F}(U_m)$ bezeichnet werden.

3. Von jetzt an beschränken wir uns auf kommutative Gruppen und bedienen uns dabei wie früher der additiven Schreibweise.

Hilfssatz. *Es seien U, A bzw. V, B zwei primitive (orthogonale) Gruppenpaare in bezug auf den Modul M. Es sei ferner ein Homomorphismus φ von U in V gegeben. Es gibt dann eine und nur eine homomorphe Abbildung ψ von B in A, welche folgender Bedingung genügt: wenn u bzw. b irgendein Element von U bzw. B ist, so ist*

$$u \cdot \psi(b) = \varphi(u) \cdot b. \tag{8}$$

Beweis. Wenn u die ganze Gruppe U durchläuft, nimmt $\varphi(u) \cdot b$ gewisse Werte aus M an, wobei stets $\varphi(u)\, b + \varphi(u') \cdot b = \varphi(u + u') \cdot b$ ist.

Man betrachte jetzt die homomorphe Abbildung

$$z(u) = \varphi(u) \cdot b$$

von U in M. Aus Kap. I, § 9 folgt sodann daß es ein einziges Element a von A gibt, welches für sämtliche u

$$u \cdot a = z(u) = \varphi(u) \cdot b$$

leistet. Dieses a bezeichnen wir mit $\psi(b)$. Aus

$$\begin{aligned} u \cdot (\psi(b) + \psi(b')) &= u \cdot \psi(b) + u \cdot \psi(b') = \varphi(u) \cdot b + \varphi(u) \cdot b' \\ &= \varphi(u) \cdot (b + b') = u \cdot \psi(b + b') \end{aligned}$$

folgt

$$u \cdot \big((\psi(b) + \psi(b')) - \psi(b + b')\big) = 0,$$

also (wegen der Primitivität des Gruppenpaares U, A)

$$\psi(b) + \psi(b') = \psi(b + b');$$

ψ ist also ein Homomorphismus, w. z. b. w.

4. Definition. Es seien $\mathcal{F}(U_m, \varphi)$ und $\bar{\mathcal{F}}(V_m, \pi)$ gegeben. Diese beiden Homomorphismenfolgen heißen zueinander *orthogonal* (in bezug auf den Modul M), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. U_m und V_m bilden ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar (in bezug auf M);

2. wenn u und v beliebige Elemente von U_m bzw. V_{m+1} sind, so ist

$$\varphi_m(u) \cdot v = u \cdot \pi_m(v).$$

Aus dem Hilfssatz des § 3 folgt unmittelbar der

Satz II. *Es sei $\mathcal{F}(U_m)$ gegeben, wobei die U_m so beschaffen sind, daß zu jeder Gruppe U_m eine zu ihr primitive (orthogonale) Gruppe V_m existiert (die dann bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ist). In den V_m läßt sich eine Homomorphismenfolge $\bar{\mathcal{F}}(V_m)$ eindeutig (ebenfalls bis auf Isomorphismen) so definieren, daß $\mathcal{F}$ und $\bar{\mathcal{F}}$ zueinander orthogonal (in bezug auf den Modul M) sind.*

Bemerkung. Wenn zwei Homomorphismenfolgen zueinander orthogonal sind, so gilt dasselbe von je zwei Teilfolgen, die aus zueinander entsprechenden (d. h. mit derselben Nummer m versehenen) Gliedern der beiden Folgen bestehen.

Satz III. *Es seien $\mathcal{F}(U_m)$ und $\mathcal{F}(V_m)$ zueinander orthogonal ebenso wie $\mathcal{F}'(U'_m)$ und $\mathcal{F}'(V'_m)$; wenn überdies $\mathcal{F}(U_m)$ mit $\mathcal{F}'(U'_m)$ äquivalent ist, so ist auch $\mathcal{F}(V_m)$ mit $\mathcal{F}'(V'_m)$ äquivalent.*

Beweis. Es gibt in $\mathcal{F}(U_m)$ und $\mathcal{F}'(U'_m)$ je eine Teilfolge $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}'_0$, welche Teilfolgen eines und desselben $\mathcal{F}_1$ sind; von der Homomorphismenfolge $\mathcal{F}_1$ dürfen wir dabei voraussetzen, daß sie nur aus den Elementen von $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}'_0$ besteht (indem wir alle übrigen eventuell vorhandenen Elemente einfach streichen); wir wählen ferner aus $\mathcal{F}(V_m)$ und $\mathcal{F}'(V'_m)$ die den Teilfolgen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}'_0$ entsprechenden Teilfolgen $\bar{\mathcal{F}}_0$ und $\bar{\mathcal{F}}'_0$. Da man zu jedem Element von $\mathcal{F}_1$ ein primitives (orthogonales) Element konstruieren kann, existiert kraft des Satzes II eine zu $\mathcal{F}_1$ orthogonale Homomorphismenfolge $\bar{\mathcal{F}}_1$; $\bar{\mathcal{F}}_0$ und $\bar{\mathcal{F}}'_0$ können als Teilfolgen von $\bar{\mathcal{F}}_1$ betrachtet werden, $\mathcal{F}(V_m)$ und $\mathcal{F}'(V'_m)$ sind also äquivalent.

5. Wir heben besonders hervor: eine inverse Homomorphismenfolge $\bar{\mathcal{F}}(U_m, \pi)$ definiert — unter der Voraussetzung, daß es zu jedem U_m eine (also im wesentlichen nur eine) primitive (orthogonale) Gruppe V_m gibt — eindeutig eine zu $\bar{\mathcal{F}}(U_m, \pi)$ orthogonale direkte Homomorphismenfolge $\mathcal{F}(V_m, \varphi)$, und diese definiert eindeutig die Limesgruppe V. *Diese durch die Homomorphismenfolge $\bar{\mathcal{F}}(U_m, \pi)$ eindeutig bestimmte Gruppe heißt die zu $\bar{\mathcal{F}}(U_m, \pi)$ duale Gruppe. Äquivalente Homomorphismenfolgen besitzen isomorphe duale Gruppen.*

II. Formulierung und Beweis des allgemeinen Dualitätssatzes.

6. Es sei F eine im R^n gelegene kompakte abgeschlossene Menge. Man betrachte irgendein Projektionsspektrum[32])

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots) \tag{1}$$

von F und die zugehörigen simplizialen Abbildungen π_m von A_{m+1} auf A_m.

$B_m = B^r(A_m)$ sei die r-te Bettische Gruppe von A_m. Vermöge der simplizialen Abbildung π_m entsteht ein Homomorphismus von B_{m+1} in B_m (den wir ebenfalls mit π_m bezeichnen werden) und folglich eine inverse Homomorphismenfolge $\bar{F}(B_m, \pi)$. Man hat zunächst den

Hilfssatz. *Es seien zwei verschiedene Projektionsspektra* (1) *und*

$$A' = (A'_1, A'_2, \ldots, A'_m, \ldots) \tag{2}$$

der Menge F gegeben. Die diesen Spektra entsprechenden Homomorphismenfolgen $\bar{F}(B_m, \pi)$ und $\bar{F}(B'_m, \pi)$ sind äquivalent.

Nehmen wir für einen Augenblick an, der Hilfssatz wäre schon bewiesen.

Den Inbegriff aller untereinander äquivalenten Homomorphismenfolgen $\bar{F}(B_m, \pi)$, die durch die Projektionsspektra von F bestimmt werden, ist offenbar eine topologische Invariante der Menge F. Wir nennen sie *die r-dimensionale Zyklosis der Menge F.* Die Zyklosis bestimmt eindeutig eine Gruppe, nämlich die (bis auf Isomorphie) einzige zu allen Homomorphismenfolgen der Zyklosis duale Gruppe, die wir kurz *die zur r-dimensionalen Zyklosis duale Gruppe* nennen. Diese Gruppe hat offenbar ebenfalls eine invariante topologische Bedeutung für die Menge F. Nun besteht der Hauptzweck dieses Kapitels im Beweise des folgenden Satzes.

Allgemeiner Dualitätssatz. *Wenn F eine abgeschlossene kompakte Menge des R^n ist, so ist die zur r-dimensionalen Zyklosis von F duale Gruppe mit der $n-r-1$-ten Bettischen Gruppe des Komplementärraumes $R^n - F$ isomorph.*

Hieraus ergibt sich ohne weiteres der

Invarianzsatz. *Die Bettischen Gruppen*[33]) *des Komplementärraumes zu einer abgeschlossenen Menge F des R^n sind topologische Invarianten der Menge F.*

Beweis. Wir führen den Beweis des Hilfssatzes und des Dualitätssatzes gleichzeitig.

Es sei

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots \tag{3}$$

eine abnehmende Folge von Polyederumgebungen der Menge F, welche sich auf diese Menge zusammenziehen.

---

[32]) Alexandroff, a. a. O. [3]), S. 107.

[33]) Vgl. Fußnote [15]) und Anhang III.

G_i sei die zu Q_i komplementäre offene Menge. Diese Mengen wachsen mit i, und ihre Vereinigungsmenge ist mit $G = R^n - F$ identisch. Wir bezeichnen mit β_i die r-te Bettische Gruppe von Q_i, mit $\bar{\beta}_i$ die $n-r-1$-te Bettische Gruppe von G_i. Aus $Q_i \supset Q_{i+1}$ folgt eine homomorphe Abbildung $\tilde{\omega}_i$ von β_{i+1} in β_i, aus $G_{i+1} \supset G_i$ eine homomorphe Abbildung φ_i von $\bar{\beta}_i$ in $\bar{\beta}_{i+1}$. Die so entstandenen Homomorphismenfolgen $\bar{\mathcal{F}}(\beta_i, \tilde{\omega})$ und $\mathcal{F}(\bar{\beta}_i, \varphi)$ sind zueinander orthogonal, denn β_i ist ja zu $\bar{\beta}_i$ primitiv (orthogonal). Die durch die Homomorphismenfolge $\mathcal{F}(\bar{\beta}_i, \varphi)$ bestimmte Limesgruppe $\bar{\beta}$ ist, wie leicht ersichtlich, zur $n-r-1$-ten Bettischen Gruppe von G isomorph. Wir brauchen also — um alles zu beweisen — nur noch folgendes zu zeigen:

Bei jeder Wahl des Projektionsspektrums (1) *der Menge* F ist die Homomorphismenfolge $\bar{\mathcal{F}}(B_i, \pi)$ mit $\bar{\mathcal{F}}(\beta_i, \tilde{\omega})$ äquivalent.

8. Wir wenden uns jetzt dem Beweise der letzteren Behauptung zu.

Zunächst ist es vorteilhaft, durch einen leichten Kunstgriff zu erreichen, daß die Komplexe A_i geometrisch, und zwar ohne Singularitäten realisiert seien. Zu diesem Zweck betrachten wir das topologische Produkt $Z = R^n \times E$ von R^n mit einem hinreichend hoch dimensionalen Simplex E. Der Schwerpunkt von E sei ξ; wir nehmen an, R^n sei mit $R^n \times \xi$ identisch, und betrachten eine Folge konzentrischer Simplexe $E_1, E_2, \ldots, E_h, \ldots$ um ξ, welche sich auf diesen Punkt zusammenziehen. Die

$$Q_1 \times E_1,\ Q_2 \times E_2, \ldots, Q_h \times E_h, \ldots$$

bilden sodann eine Folge von sich auf F zusammenziehender Polyederumgebungen von F in Z. Da $Q_i \times E_i$ innerhalb von sich selbst in Q_i stetig übergeführt werden kann (so daß dabei Q_i punktweise festbleibt), sind die Bettischen Gruppen von $Q_i \times E_i$ mit denen von Q_i isomorph, die entsprechenden Homomorphismen sind dieselben, und man kann ruhig Q_i durch $Q_i \times E_i$ — also eine Umgebung von F in R^n durch eine Umgebung von F in Z — ersetzen. In den $Q_i \times E_i$ lassen sich aber — wenn nur die Dimension von E hinreichend groß ist — sämtliche A_m (mit eventueller Ausnahme von endlich vielen) singularitätenfrei realisieren. Von jetzt an bezeichnen wir die $Q_i \times E_i$ einfach mit Q_i.

Es sei i beliebig, q so groß, daß A_q in Q_i liegt; daraus folgt die Existenz einer homomorphen Abbildung f_1 von B_q in β_i; wir schreiben dies so:

$$f_1(B_q) < \beta_i.$$

Es ist nun bekannt, daß, wenn ein Komplex K in einer hinreichend engen Umgebung von F liegt und aus genügend kleinen Simplexen aufgebaut ist, man diesen Komplex mittels einer kleinen Verschiebung seiner Eckpunkte simplizial in A_q abbilden kann[34]). Wenn man j hinreichend

[34]) Alexandroff, a. a. O. [3]), S. 117 (Cor. I).

groß und die Simplexe von Q_j hinreichend klein nimmt, kann Q_j für einen solchen K gewählt werden. Die erwähnte simpliziale Abbildung von Q_j in A_q bezeichne man mit g; wir wollen sie folgendermaßen konstruieren. Zunächst sei s so groß, daß A_s in Q_j liegt. Man wähle jetzt eine solche Simplizialzerlegung $\mathfrak{z}$ von Q_j, daß eine gewisse Unterteilung A_s^* von A_s als Teilkomplex der Zerlegung $\mathfrak{z}$ betrachtet werden kann. Der simplizialen Abbildung g von Q_j in A_q soll die Simplizialzerlegung $\mathfrak{z}$ zugrunde gelegt werden. Es sei also a irgendein Eckpunkt von $\mathfrak{z}$. Wir untersuchen in erster Linie den Fall, wo a gleichzeitig ein Eckpunkt von A_s^* ist. In diesem Fall ist a ein innerer Punkt eines bestimmten (eventuell auch nulldimensionalen) Simplex T von A_s; als Bild von a soll ein Eckpunkt a' von A_q gewählt werden, in den vermöge der Projektion von A_s auf A_q irgendein Eckpunkt von T abgebildet wird; die übrigen (also nicht zu A_s^* gehörenden) Eckpunkte von $\mathfrak{z}$ mögen in je einen der zu ihnen am nächsten liegenden Eckpunkte von A_q abgebildet werden. Wie leicht ersichtlich, stimmt die so definierte Abbildung g auf den Komplex A_s mit der Projektion von A_s auf A_q algebraisch überein[35]). Endlich kann von g noch vorausgesetzt werden, daß sie mittels einer stetigen Deformation innerhalb von Q_i realisierbar sei.

Man erhält also folgende Homomorphismen:

$$f_2(B_s) \subset \beta_j$$

(denn A_s ist ja in Q_j enthalten);

$$f_3(\beta_j) \subset B_q$$

(vermöge der Abbildung g von Q_j in A_q);

$$\tilde{\omega}(\beta_j) \subset \beta_i$$

(denn Q_j ist in Q_i enthalten),

$$\pi(B_s) \subset B_q$$

(Projektion). Dabei ist

$$f_1 f_3(\beta_j) = \tilde{\omega}(\beta_j), \tag{4}$$

$$f_3 f_2(B_s) = \pi(B_s), \tag{5}$$

so daß die Gruppen $\beta_i, B_q, \beta_j, B_s$ wie folgt ineinander abgebildet werden:

$$\beta_i \leftarrow B_q \leftarrow \beta_j \leftarrow B_s.$$

Wenn man dieses Verfahren mit $i = 1$ beginnt und immer weiter fortsetzt, erhält man ohne Mühe eine Homomorphismenfolge, welche wegen (4) und (5) gewisse Teilfolgen der beiden Folgen $\bar{F}(B_m, \pi)$ und $\bar{F}(\beta_m, \tilde{\omega})$ umfaßt. Somit sind die beiden letztgenannten Homomorphismenfolgen äquivalent, w. z. b. w.

---

[35]) Beweis durch Induktionsschluß nach der Dimension der Elemente der Komplexe; vgl. z. B. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. 28.

Anhang I.

Der Dualitätssatz für stetige Komplexe.

Es sei K ein (singularitätenfreier) stetiger Komplex im R^n. Man betrachte einen zu K homöomorphen Polyederkomplex Q in einem hinreichend hoch dimensionalen R^m. Da K und Q homöomorphe abgeschlossene Mengen sind, sind die zu den r-dimensionalen Zyklosen derselben dualen Gruppen, also auch die $n-r-1$-te Bettische Gruppe von $R^n - K$ und die $m-r-1$-te Bettische Gruppe von $R^m - Q$ zueinander isomorph. Nun ist aber letztere Gruppe zur r-dimensionalen Bettischen Gruppe von Q (also auch zu der von K) isomorph.

Mit anderen Worten:

Wenn $K \subset R^n$ ein stetiger Komplex ist, so ist die $n-r-1$-te Bettische Gruppe von $R^n - K$ zu der r-dimensionalen Bettischen Gruppe von K isomorph.

Um aus dieser Isomorphie die (auf Verschlingung) beruhende Primitivität (Orthogonalität)[36]) der beiden Gruppen abzuleiten, betrachte man eine Polyederumgebung V von K, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

a) jeder Zyklus von K, welcher in V homolog Null ist, ist es auch in K selbst;

b) zu jedem Zyklus $z \subset R^n - K$ gibt es einen Zyklus $z' \subset R^n - V$ von der Eigenschaft, daß $z \sim z'$ in $R^n - K$ ist.

Es sei ferner $U \subset V$ eine solche Polyederumgebung von K, daß es zu jedem Zyklus $z \subset U$ einen Zyklus $z' \subset K$ gibt derart, daß $z \sim z'$ in V ist.

Wir bezeichnen mit B bzw. B' die r-dimensionale Bettische Gruppe von K bzw. U, mit β bzw. β' die $n-r-1$-dimensionale Bettische Gruppe von $R^n - K$ bzw. $R^n - U$. Wegen der Bedingung a) folgt aus $K \subset U$ eine *iso*morphe Abbildung von B auf eine Untergruppe von B', die wir ebenfalls mit B bezeichnen. Wir beweisen zunächst, daß im Falle $\mu = 0$ *diese Untergruppe eine Untergruppe mit Division von B' ist.* Es sei in der Tat $x \subset B$, $y \subset B'$, $x = ky$, $k \neq 0$; wir zeigen, daß auch $y \subset B$ ist. Zu dem Zweck bezeichnen wir mit $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ Zyklen in K bzw. U, die zu den Homologieklassen x bzw. y gehören. Sodann gilt

$$\bar{x} \sim k\bar{y} \quad (\text{in } U).$$

Aus der Definition von U folgt, daß es einen Zyklus $\bar{y}'$ in K gibt, der $\sim \bar{y}$ in V ist, so daß

$$\bar{x} \sim k\bar{y}' \quad (\text{in } V),$$

[36]) Vgl. die Formulierung des Alexanderschen Dualitätssatzes im engeren Sinne (Kap. II, II, § 5).

also (wegen a))

$$\bar{x} \sim k\bar{y}' \quad (\text{in } K)$$

ist. Wenn wir mit y' das durch den Zyklus $\bar{y}'$ erzeugte Element von B bezeichnen, so ist $x = ky'$; da aber andererseits $x = ky$ und die Gruppe B' frei ist, ist $y = y'$, also $y \subset B$.

Die Gruppen B' und β' sind zueinander primitiv (orthogonal), während B und β isomorph sind. Aus der Inklusion $R^n - U \subset R^n - K$ und der Bedingung b) ergibt sich eine homomorphe Abbildung von β' auf die ganze Gruppe β. Den Kern dieses Homomorphismus bezeichnen wir etwa mit A und beweisen, daß $A = (\beta', B)$ ist. Zunächst ist klar, daß $A \subset (\beta', B)$ ist, denn ein Zyklus von $R^n - K$, der mit einem Zyklus von K verschlungen ist, kann in $R^n - K$ nicht homolog Null sein. A kann aber auch nicht eine echte Untergruppe von (β', B) sein, denn sonst hätte die Gruppe $\beta' \mid A \simeq \beta$ (je nachdem $\mu \neq 0$ oder $= 0$ ist) eine größere Ordnung bzw. einen größeren Rang als die Gruppe $\beta' \mid (\beta', B) \simeq B$, was der Isomorphie zwischen β und B widersprechen würde. Somit ist $A = (\beta', B)$, und, da $\beta \simeq \beta' \mid (\beta', B)$ ist, bilden B und β ein primitives (orthogonales) Gruppenpaar, w. z. b. w.

Anhang II.

Einordnung des Lefschetzschen Dualitätssatzes für abgeschlossene Mengen in die Theorie des Kapitels III. [37])

Definition I. Es sei $\bar{F}(V_n, \pi)$ eine inverse Homomorphismenfolge. Eine Folge

$$y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n, \cdots, \tag{1}$$

wobei y_n ein Element von V_n ist, heißt eine *Kette*, wenn für jedes $n \geqq k$

$$\pi_n(y_{n+1}) = t_n y_n$$

und dabei t_n eine positive ganze Zahl ist.

Definition II. Ein System von Ketten heißt *linear unabhängig*, wenn die entsprechenden (d. h. die gleiche Nummer habenden) Elemente dieser Ketten, als Elemente der Gruppen, zu denen sie gehören, betrachtet, in diesen Gruppen linear unabhängig sind. Wenn man in einer gegebenen Homomorphismenfolge beliebig viele untereinander unabhängige Ketten finden kann, sagen wir, daß diese Homomorphismenfolge einen *unendlichen Rang* hat, sonst aber heißt die Höchstzahl der in der Homomorphismenfolge vorkommenden unabhängigen Ketten der *Rang* derselben. Als Rang

[37]) Wir betrachten nur den Fall, in dem M^n ein verallgemeinerter Poincarésche Raum ist; der Fall einer allgemeinen M^n läßt sich in analoger Weise erledigen.

einer direkten Homomorphismenfolge soll der Rang ihrer Limesgruppe definiert werden.

Die Einordnung des Lefschetzschen Satzes in unsere Theorie ist somit durch folgenden Satz gegeben:

Zwei (modulo Null) orthogonale Homomorphismenfolgen haben denselben Rang.

Zunächst bemerken wir, daß *äquivalente Homomorphismenfolgen denselben Rang haben.* Für direkte Homomorphismenfolgen folgt dies daraus, daß äquivalente Folgen isomorphe Limesgruppen haben; was inverse Homomorphismenfolgen betrifft, so folgt für diese unsere Behauptung aus der analogen Behauptung für zwei Folgen, von denen die erste eine Teilfolge der zweiten ist; für diesen Spezialfall läßt sich aber die Behauptung sofort begründen.

Wir nennen jetzt eine inverse Homomorphismenfolge *voll,* falls bei jedem n die einzige Untergruppe mit Division von V_n, welche $\pi_n(V_{n+1})$ enthält, die Gruppe V_n selbst ist.

Wenn $\bar{\mathfrak{F}}(V_n, \pi)$ eine volle Homomorphismenfolge und a_n irgendein freies Element von V_n ist, so gibt es ein Element a_{n+1} von V_{n+1}, so daß $\pi_n(a_{n+1}) = t\,a_n$ bei passend gewähltem ganzzahligem $t \neq 0$ ist. Das heißt aber, daß man zu jedem freien Element a_n einer beliebigen Gruppe V_n aus $\bar{\mathfrak{F}}(V_n, \pi)$ mindestens eine Kette finden kann, die mit a_n beginnt. Wenn man ferner ein System von linear-unabhängigen Elementen $a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k$ von V_n hat, so sind die in ihnen beginnenden Ketten offenbar auch linear unabhängig. Daraus folgt, daß der Rang einer vollen Homomorphismenfolge gleich der endlichen oder unendlichen oberen Grenze der Ränge der einzelnen Gruppen V_n ist.

Jetzt beweisen wir die folgenden beiden Hilfssätze.

Hilfssatz I. *Zu jeder inversen Homomorphismenfolge $\bar{\mathfrak{F}}(V_n, \pi)$ gibt es eine mit ihr äquivalente volle Homomorphismenfolge.*

Es sei in der Tat V_{nk} die kleinste Untergruppe mit Division von V_n, welche $\pi_n^{n+k} V_{n+k}$ enthält. Wenn k wächst, kann V_{nk} nur abnehmen; unter den V_{nk} (n fest!) existiert infolgedessen (V_n hat ja endlichviele Erzeugende) eine kleinste Untergruppe, und diese soll V_n' heißen. Man setze jetzt $V_{s_1} = V_1$, also auch $V_{s_1}' = V_1'$ und nehme an, V_{s_i} (also auch V_{s_i}') wäre bereits gefunden. V_{s_i}' ist definitionsgemäß die kleinste unter den Gruppen $V_{s_i k}$, ist also eine bestimmte Gruppe $V_{s_i s}$. Wir setzen $V_{s_{i+1}} = V_{s_i + s}$. Für jedes $h > s_{i+1}$ ist V_{s_i}' die kleinste Untergruppe mit Division von V_{s_i}, welche $\pi_{s_i}^h V_h$ oder auch nur $\pi_{s_i}^h V_h'$ enthält. Daraus folgt, daß

$$(2) \qquad \begin{cases} V_{s_1}', V_{s_2}', \ldots, V_{s_n}', \ldots \\ \pi_{s_1}^{s_2}, \pi_{s_2}^{s_3}, \ldots, \pi_{s_n}^{s_{n+1}}, \ldots \end{cases}$$

eine volle Homomorphismenfolge ist. Man kann aber auch in

$$V_{s_1}, V'_{s_1}, V_{s_2}, V'_{s_2}, \ldots, V_{s_n}, V'_{s_n}, \ldots \tag{3}$$

eine Homomorphismenfolge erklären, indem man V_{s_n} in $V'_{s_{n-1}}$ mittels der Abbildungen $\pi^{s_n}_{s_{n-1}}$ und V'_{s_n} in V_{s_n} mittels der identischen Abbildung abbildet. Die Folge (3) umfaßt (2) und die Teilfolge $V_{s_1}, V_{s_2}, \ldots, V_{s_n}, \ldots$ der ursprünglich gegebenen Folge $\bar{\mathcal{F}}(V_n, \pi)$, also ist (2) mit $\bar{\mathcal{F}}(V_n, \pi)$ äquivalent, womit der Hilfssatz I bewiesen ist.

Hilfssatz II. *Wenn $\bar{\mathcal{F}}(V_n, \pi)$ eine volle und $\mathcal{F}(U_n, \varphi)$ eine zu $\bar{\mathcal{F}}(V_n, \pi)$ orthogonale Homomorphismenfolge ist, so sind die Homomorphismen φ lauter Isomorphismen.*

Es sei in der Tat a ein von Null verschiedenes Element von U_n, das vermöge φ_n auf das Nullelement von U_{n+1} abgebildet ist. Infolge der Orthogonalität des Gruppenpaares U_n, V_n gibt es ein Element b von V_n derart, daß $ab \neq 0$ ist; da $\bar{\mathcal{F}}(V_n, \pi)$ voll ist, existiert ein $b' < V_{n+1}$, so daß $\pi_n(b') = tb$ (mit $t > 0$) ist. Nun hat man aber $\varphi_n(a)b' = a\pi_n(b') = tab \neq 0$, folglich auch $\varphi_n(a) \neq 0$; durch diesen Widerspruch ist Hilfssatz II bewiesen.

Wenn man jetzt zwei orthogonale Homomorphismenfolgen $\mathcal{F}$ und $\bar{\mathcal{F}}$ hat, so ersetze man sie zunächst durch zwei ebenfalls orthogonale Folgen $\mathcal{F}_1$ und $\bar{\mathcal{F}}_1$, die zu $\mathcal{F}$ bzw. $\bar{\mathcal{F}}$ äquivalent sind, von denen die erste eine volle Homomorphismenfolge, die zweite also eine direkte Isomorphismenfolge ist. Der Rang einer Isomorphismenfolge ist offenbar gleich der oberen Grenze der Ränge der betreffenden Gruppen; da das analoge auch von vollen Homomorphismenfolgen gilt und die einander entsprechenden Gruppen der beiden Folgen orthogonal, also isomorph sind, haben die beiden Folgen denselben Rang, w. z. b. w.

Anhang III.

Beispiel einer Kurve im R^3, deren Komplementärraum eine beliebige abzählbare Abelsche Gruppe ohne Elemente endlicher Ordnung als erste Bettische Gruppe hat.

U sei eine beliebige Abelsche Gruppe, welche aus abzählbarvielen freien Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ besteht; U_n sei die von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erzeugte Untergruppe von U. Da U_n Untergruppe von U_{n+1} ist, liegt ein Homomorphismus φ_n von U_n in U_{n+1} und somit eine direkte Homomorphismenfolge $\mathcal{F}(U_n, \varphi)$ vor. Die entsprechende Limesgruppe ist, wie leicht ersichtlich, zu U isomorph.

Da U_n eine freie Gruppe mit endlichvielen Erzeugenden ist, so existiert eine zu U_n orthogonale Gruppe V_n und folglich eine zu $\mathcal{F}(U_n, \varphi)$ ortho-

gonale (inverse) Homomorphismenfolge $\bar{\mathcal{F}}(V_n, \pi)$. Wenn $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ ein System von freien Erzeugenden der Gruppe V_n ist, so ist (bei passend gewählten ganzzahligen ${}_nc_j^i$)

$$\pi_n(x_{n+1}^i) = {}_nc_j^i\, x_n^j. \tag{1}$$

Es sei jetzt K_n der Streckenkomplex, den man erhält, wenn man die Eckpunkte eines α_n-Ecks alle untereinander identifiziert. Wir bezeichnen mit $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ das in der einfachsten Weise gewählte System von eindimensionalen Zyklen von K_n, die eine eindimensionale Basis dieses Komplexes bilden. Es läßt sich nun leicht eine stetige Abbildung f_n von K_{n+1} in K_n angeben, bei der

$$f_n(x_{n+1}^i) \sim {}_nc_j^i\, x_n^j$$

ist. Man bette jetzt K_1 als einen singularitätenfreien polygonalen Streckenkomplex in den R^3 ein und wähle eine solche Polyederumgebung Q_1 von K_1, daß jeder Zyklus von Q_1 dortselbst einem Zyklus von K_1 homolog ist und dadurch eine Isomorphie zwischen den Bettischen Gruppen von K_1 und Q_1 erreicht wird. Das Bild $f_1(K_2)$ von K_2 liegt auf K_1, und man kann durch eine beliebig kleine Abänderung von f_1 diese Abbildung in eine solche überführen, welche K_2 auf einen in Q_1 singularitätenfrei gelegenen, zu K_2 homöomorphen polygonalen Komplex $\bar{K}_2$ abbildet. Man wähle jetzt eine in Q_1 enthaltene Polyederumgebung Q_2 von $\bar{K}_2$ derart, daß jeder in Q_2 gelegene Zyklus dortselbst einem Zyklus von $\bar{K}_2$ homolog ist und die Bettischen Gruppen von Q_2 und K_2 isomorph sind, und setze dieses Verfahren fort. Es entsteht dabei eine Folge von ineinander geschachtelten zusammenhängenden Polyederbereichen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$, die so gewählt werden konnten, daß ihr Durchschnitt eine Kurve F ist. Dabei wird die Bettische Gruppe von Q_{n+1} in die von Q_n gemäß den Formeln (1) homomorph abgebildet. Die zu der so entstehenden inversen Homomorphismenfolge duale Gruppe (die mit der zur Zyklosis von F dualen Gruppe übereinstimmt) ist offenbar die Gruppe U, welche somit zu der ersten Bettischen Gruppe von $R^3 - F$ isomorph ist.

Es möge zum Schluß noch bemerkt werden, daß schon die Menge der aus abzählbarvielen freien Elementen bestehenden, im Sinne der Isomorphie voneinander paarweise verschiedenen Abelschen Gruppen vom Range 1 die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Man sieht hieraus, in wie hohem Maße der Satz von der Invarianz der Bettischen Gruppen inhaltsreicher ist als der Invarianzsatz für die Bettischen Zahlen.

(Eingegangen am 24. 12. 1930.)