

# Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I.

by Puppe, Dieter  
in Mathematische Zeitschrift  
volume 69; pp. 299 - 344



Göttingen State and University Library

---

## Terms and Conditions

The Göttingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Göttingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online-systems to access or download a digitized document you accept these Terms and Conditions.

Reproductions of materials on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may they be further reproduced without written permission from the Göttingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

### Contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Digitalisierungszentrum  
37070 Göttingen  
Germany  
E-Mail: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)

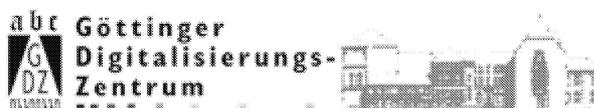
## Purchase a CD-ROM

The Göttingen State and University Library offers CD-ROMs containing whole volumes / monographs in PDF for Adobe Acrobat. The PDF-version contains the table of contents as bookmarks, which allows easy navigation in the document. For availability and pricing, please contact:

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Digitalisierungszentrum  
37070 Göttingen  
Germany  
E-Mail: [gdz@www.sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@www.sub.uni-goettingen.de)



Göttingen State and University Library



# Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I

Von

DIETER PUPPE

## Einleitung

$\pi(X, Y)$  bezeichne die Homotopiemenge der topologischen Räume  $X$  und  $V$ , d.h. die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen  $X \rightarrow V$  (mit festem Grundpunkt, vgl. 1.1–1.3).  $\pi(X, Y)$  besitzt ein ausgezeichnetes Element  $0$ , repräsentiert durch die konstante Abbildung  $X \rightarrow v_0 \in V$  ( $v_0 =$  Grundpunkt von  $V$ ). Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert

$$f^* : \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V).$$

$f^*$  bildet die Homotopieklasse von  $a: Y \rightarrow V$  in die Homotopieklasse von  $a \circ f: X \rightarrow V$  ab. Insbesondere ist  $f^*(0) = 0$ . Wie bei Homomorphismen von Gruppen wird Kern  $f^* = f^{*-1}(0)$  gesetzt und damit der Begriff der exakten Folge definiert.

Wir ordnen in § 1 jeder Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine unendliche Folge von Abbildungen

$$\mathfrak{A}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{Qf} SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{SPf} SC_f \xrightarrow{SQf} S^2X \xrightarrow{S^2f} S^2Y \rightarrow \dots$$

zu, so daß die induzierte Folge der Homotopiemengen

$$(\mathfrak{A}f)^* : \pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V) \xleftarrow{(Qf)^*} \pi(SX, V) \xleftarrow{(Sf)^*} \pi(SY, V) \leftarrow \dots$$

*exakt* ist (für jeden Raum  $V$ , vgl. 1.12 Satz 6).  $C_f$  ist dabei der „Abbildungskegel“ von  $f$ . Er entsteht aus  $X \times I + Y$  durch folgende Identifizierungen (vgl. 1.4):

$$X \times I \ni (x, 1) = f(x) \in Y \quad \text{für alle } x \in X,$$

$$X \times 0 \cup x_0 \times I (\subset X \times I) \quad \text{wird ein einziger Punkt.}$$

$Y$  läßt sich als Teilraum von  $C_f$  auffassen;  $Pf: Y \rightarrow C_f$  ist die Injektion. Durch Identifizieren von  $Y$  zu einem Punkt erhält man aus  $C_f$  die Einhängung  $SX$  von  $X$  (vgl. 1.8).  $Qf$  ist die natürliche Projektion, und  $Sf$  ist die Einhängung von  $f$ .

Von der vierten Stelle an besteht die Folge  $(\mathfrak{A}f)^*$  aus Gruppen und Homomorphismen (4.2). Dieser Teil kann als Verallgemeinerung der „track group sequence“ von BARRATT [I] § 5 aufgefaßt werden. Ist nämlich  $X \subset Y$  und  $f: X \rightarrow Y$  die Injektion, so ist  $C_f$  mit  $Y/X$  (d.h.  $X$  wird zu einem Punkt identifiziert) homotopieäquivalent, falls das Paar  $(Y, X)$  eine gewisse Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt (1.6). Andererseits sind  $\pi(S^n X, V)$ ,  $\pi(S^n Y, V)$ ,  $\pi(S^n(Y/X), V)$  nichts anderes als die track groups  $(X, x_0)^n(V, v_0; v_0)$ ,

$(Y, x_0)^n(V, v_0; v_0)$  bzw.  $(Y, X)^n(V, v_0; v_0)$  (vgl. [I]). Man erhält also die track group sequence des Tripels  $\{x_0\} \subset X \subset Y$ . (Über den allgemeinen Fall eines beliebigen Tripels von Räumen vgl. 4.2.)

Wir werden zeigen: *Die Folge  $\mathcal{A}f$  ist homotopieäquivalent mit der Folge*

$$\mathfrak{B}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{P_f} C_f \xrightarrow{P_{P_f}} C_{P_f} \xrightarrow{P_{P_{P_f}}} C_{P_{P_{P_f}}} \rightarrow \dots$$

(4.11 Satz 5). Demnach ergibt sich jede Abbildung der Folge  $\mathcal{A}f$  aus der vorhergehenden bis auf Homotopieäquivalenz durch dieselbe Konstruktion. Der Beweis für die Exaktheit von  $(\mathcal{A}f)^*$  wird dadurch vereinfacht: Man braucht die Exaktheit nur an der ersten Stelle nachzuprüfen, während man bisher bei der track group sequence drei verschiedene Arten von Stellen zu untersuchen hatte.

In § 2 wird gezeigt, daß *der Homotopietyp der Folge  $\mathcal{A}f$  nur vom Homotopietyp von  $f$  abhängt* (2.4 Satz 9). Die letzten drei Paragraphen bringen Anwendungen:

In § 3 wird untersucht, für welche  $f: X \rightarrow Y$  die induzierten Abbildungen  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  für jedes  $V$  monomorph<sup>1)</sup> sind. Anders ausgedrückt: Für welche  $f: X \rightarrow Y$  folgt immer  $a \simeq 0$  aus  $a \circ f \simeq 0$  ( $V$  und  $a: Y \rightarrow V$  beliebig)? Unter gewissen — nicht sehr einschneidenden — Voraussetzungen über  $X$  und  $Y$  gilt:  *$f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  ist genau dann monomorph für jeden Bildraum  $V$ , wenn die Einhängung  $Sf: SX \rightarrow SY$  von  $f: X \rightarrow Y$  ein Rechts-Homotopieinverses besitzt* (3.4 Satz 12). In einem zweiten Teil dieser Arbeit [I2] wird dieselbe Frage für einen Spezialfall noch genauer behandelt werden, nämlich für den Fall, daß  $f$  eine Abbildung einer orientierbaren  $n$ -dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit auf die  $n$ -Sphäre vom Grade 1 ist.

Aus der Monomorphie von  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  folgt im allgemeinen nicht, daß  $f^*$  auch einwertig<sup>2)</sup> ist (vgl. die Beispiele in 4.1 und 4.6). Wenn es aber in  $\pi(X, V)$  und  $\pi(Y, V)$  Gruppenstrukturen gibt, so daß  $f^*$  ein Homomorphismus ist, z.B. wenn  $f$  (bis auf Homotopieäquivalenz) die Einhängung  $Sf'$  einer anderen Abbildung  $f'$  ist (vgl. 4.2), so ist das doch der Fall. Etwas allgemeiner gilt dann: *Die Mengen  $f^{*-1}f^*(\eta)$  haben für jedes  $\eta \in \pi(Y, V)$  gleiche Mächtigkeit*. Wir zeigen in § 4 (vgl. 4.4 Satz 13), daß letzteres auch dann richtig ist, wenn  $f$  (bis auf Homotopieäquivalenz) von der Form  $Qf' \equiv P^2f'$  ( $\equiv$  bedeutet: homotopieäquivalent). Diese Voraussetzung ist offenbar allgemeiner als  $f \equiv Sf' \equiv P^3f'$ . Daß eine weitere Verschärfung in derselben Richtung nicht möglich ist, zeigen die Beispiele in 4.6.

In § 5 benutzen wir die Abbildungsfolge  $\mathcal{A}i$  der Injektion  $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$  (vgl. 5.1) zum Beweis einer *Formel über die Einhängung eines topologischen Produkts*  $S(X \times Y)$  [5.1 Satz 15 und 5.6 (34)] bzw.  $S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$  (5.9 Satz 19).  $S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$  spaltet in ein „Büschel“ (topologische Summe

<sup>1)</sup> Wir nennen eine Abbildung  $\varphi$  zwischen Mengen mit einem ausgezeichneten Element 0 *monomorph*, wenn Kern  $\varphi = \varphi^{-1}(0) = 0$  ist, und *epimorph*, wenn sie die eine Menge auf die andere abbildet.

<sup>2)</sup> Eine Abbildung heißt *einwertig*, wenn sie je zwei verschiedenen Elementen verschiedene Bilder zuordnet (eindeutig-in).

mit Identifizierung der Grundpunkte) von Teilräumen auf. Diese Teilräume sind Sphären, wenn alle  $X_i$  Sphären sind (5.9 Satz 20). Im allgemeinen sind es Einhängungen von  $\wedge$ -Produkten der Räume  $X_i$ , wobei wir (im Anschluß an HILTON) als  $\wedge$ -Produkt  $X \wedge Y$  den Raum bezeichnen, der aus  $X \times Y$  durch Identifizieren des Teilraums  $X \vee Y$  zu einem Punkt entsteht („reduced join“ bei JAMES [10] § 14). Für den Fall, daß alle  $X_i$  Sphären sind, wurde die genannte Formel (mit anderen Methoden) zuerst von K. A. HARDIE bewiesen (nach einer brieflichen Mitteilung von HILTON). Die allgemeine Formel für zwei Faktoren

$$S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \wedge Y)$$

hat HILTON angegeben (unter gewissen Voraussetzungen über die Erweiterbarkeit von Homotopien). Neu ist also hier nur die Verallgemeinerung auf mehrere Faktoren und zum Teil die genaue Untersuchung der Voraussetzungen, die über die Faktoren gemacht werden müssen. Ein wichtiger Schritt ist dabei der Nachweis, daß *das  $\wedge$ -Produkt bis auf Homotopieäquivalenz assoziativ ist* (5.8 Satz 18), eine Tatsache, die keineswegs trivial ist und auch nicht ganz allgemein gezeigt werden kann, sondern nur unter der Voraussetzung, daß die Grundpunkte „nicht ausgeartet“ sind (zur Definition s. 5.5). Das ist zugleich die einzige Voraussetzung für die Gültigkeit der Formel für  $S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ . Wenn es nur auf den freien Homotopietyp der Räume ankommt und nicht auf die Wahl der Grundpunkte, so ist sie keine Einschränkung [vgl. 5.5. D)].

Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $Z$  ein weiterer Raum.  $f$  und die Identität  $1_Z$  von  $Z$  induzieren  $f \wedge 1_Z: X \wedge Y \rightarrow Y \wedge Z$  [vgl. 5.3. A)]. Diese  $\wedge$ -Multiplikation mit  $1_Z$  ist (bis auf Homotopieäquivalenz) mit der Bildung der Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  vertauschbar, d. h. *man erhält eine zu  $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$  homotopieäquivalente Folge, wenn man jede Abbildung von  $\mathfrak{A}f$  mit  $1_Z$   $\wedge$ -multipliziert* (5.10 Satz 21). Ein Spezialfall davon ist [ $Z = S^1$ , vgl. 5.3 (33)], daß die Einhängung von  $\mathfrak{A}f$  mit  $\mathfrak{A}(Sf)$  homotopieäquivalent ist.

Weitere Anwendungen der Abbildungsfolge und der hier genannten Ergebnisse werden im zweiten Teil der Arbeit [12] angegeben.

## § 1. Die Abbildungsfolge

**1.1.** In den topologischen Räumen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, soll immer ein bestimmter Punkt als *Grundpunkt* ausgezeichnet sein, es sei denn, daß ausdrücklich etwas anderes gesagt ist. Unter einer *Abbildung*  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen verstehen wir grundsätzlich eine stetige Abbildung, die den Grundpunkt  $x_0$  von  $X$  in den Grundpunkt  $y_0$  von  $Y$  überführt.

$I$  sei das Einheitsintervall der reellen Zahlen. (Als Grundpunkt wird etwa  $0 \in I$  genommen, was jedoch hier nebensächlich ist.) Eine Schar von Abbildungen  $f_t: X \rightarrow Y$ ,  $t \in I$ , heißt eine *Homotopie*, wenn  $(x, t) \rightarrow f_t(x)$  eine stetige Abbildung  $X \times I \rightarrow Y$  definiert. Es wird bei einer Homotopie also  $f_t(x_0) = y_0$



$\varphi_\nu: X_\nu \rightarrow X'_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ , gibt, so daß jedes Quadrat des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \dots \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & X'_2 & \xrightarrow{f'_2} & X'_3 & \xrightarrow{f'_3} & \dots \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. Das System  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$  heißt *Homotopieäquivalenz zwischen den Folgen*  $[f_1, f_2, f_3, \dots]$  und  $[f'_1, f'_2, f'_3, \dots]$ .

Es ist klar, daß die Relation der Homotopieäquivalenz zwischen Abbildungen und Folgen von Abbildungen reflexiv und transitiv ist. Die Symmetrie folgt aus:

**Hilfssatz 2.** *Ist  $(\varphi, \psi)$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $f: X \rightarrow Y$  und  $f': X' \rightarrow Y'$  und sind  $\varphi', \psi'$  homotopieinvers zu  $\varphi$  bzw.  $\psi$ , so ist  $(\varphi', \psi')$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $f'$  und  $f$ .*

**Beweis.** Da  $\varphi', \psi'$  offenbar Homotopieäquivalenzen sind, braucht nur gezeigt zu werden, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \psi' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. In der Tat folgt aus der vorausgesetzten Beziehung  $\psi \circ f' \simeq f \circ \varphi'$ :

$$f \circ \varphi' \simeq \psi' \circ \psi \circ f \circ \varphi' \simeq \psi' \circ f' \circ \varphi \circ \varphi' \simeq \psi' \circ f'.$$

Um später darauf Bezug nehmen zu können, formulieren wir hier noch einen Hilfssatz:  $A$  sei ein *Teilraum* des topologischen Raumes  $X$ . Wir meinen damit (hier und im folgenden) zugleich, daß  $A$  und  $X$  denselben Punkt  $x_0 \in A < X$  als Grundpunkt haben.  $X/A$  sei der Raum, der aus  $X$  entsteht, wenn alle Punkte von  $A$  miteinander identifiziert werden.

**Hilfssatz 3.** *Gibt es eine Homotopie der Identität  $1_X: X \rightarrow X$ , die den Teilraum  $A < X$  in sich auf einen Punkt zusammenzieht, so ist die natürliche Projektion  $p: X \rightarrow X/A$  eine Homotopieäquivalenz.*

**Beweis.** Die Voraussetzung besagt: Es gibt eine Homotopie  $h_t: X \rightarrow X$  mit

$$h_0 = 1_X, \quad h_1(A) = x_0, \quad h_t(A) < A \quad \text{für alle } t \in I.$$

$h_1$  induziert eine Abbildung  $h'_1: X/A \rightarrow X$ , die durch  $h'_1 \circ p = h_1$  charakterisiert ist.  $p \circ h_t$  induziert in analoger Weise für alle  $t$  eine Abbildung  $h''_t: X/A \rightarrow X/A$ . Offenbar ist  $h''_1 = p \circ h'_1$ . Nach Hilfssatz 1 ist  $h''_t$  eine Homotopie. Die Formeln

$$\begin{aligned} h'_1 \circ p &= h_1 \simeq h_0 = 1_X, \\ p \circ h'_1 &= h''_1 \simeq h''_0 = 1_{X/A} \end{aligned}$$

zeigen, daß  $h'_1$  zu  $p$  homotopieinvers ist.

1.3. Für zwei topologische Räume  $X, V$  (mit den Grundpunkten  $x_0, v_0$ ) sei  $\pi(X, V)$  die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen  $X \rightarrow V$  (im Sinne von 1.1, d.h.  $x_0$  wird immer in  $v_0$  abgebildet). Wir nennen  $\pi(X, V)$  die *Homotopiemenge* von  $X$  und  $V$ . Sie besitzt ein ausgezeichnetes Element  $0$ , repräsentiert durch die konstante Abbildung  $X \rightarrow v_0$ .  $[a]$  bezeichne die Homotopieklassse von  $a: X \rightarrow V$ .

Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  mit  $f^*(0) = 0$ . Man definiert nämlich

$$f^*[a] = [a \circ f]$$

für jedes  $a: Y \rightarrow V$ . Offenbar gilt  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  für  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ . Für  $f^{*-1}(0)$  schreiben wir auch Kern  $f^*$ .

Eine Folge von Abbildungen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

soll in dieser Arbeit *exakt* heißen, wenn die induzierte Folge

$$\pi(X_1, V) \xleftarrow{f_1^*} \pi(X_2, V) \xleftarrow{f_2^*} \pi(X_3, V) \xleftarrow{f_3^*} \dots$$

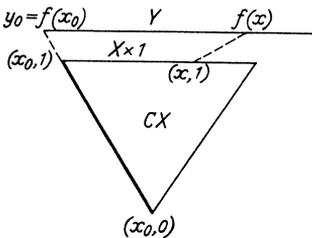
für jedes  $V$  exakt ist, d. h.

$$\text{Kern } f_v^* = \text{Bild } f_{v+1}^* \quad \text{für alle } v = 1, 2, 3, \dots$$

1.4. Ist  $X$  irgendein topologischer Raum mit dem Grundpunkt  $x_0$ , so nennen wir

$$CX = (X \times I) / (X \times 0 \cup x_0 \times I)$$

Fig. 1. Die stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen



den *Kegel über X*. Die Punkte von  $CX$  werden ebenso wie ihre Repräsentanten in  $X \times I$  mit  $(x, s)$ ,  $x \in X$ ,  $s \in I$ , bezeichnet, und  $(x_0, 0) (= (x_0, s) = (x, 0))$  gilt als Grundpunkt.

Zu einer (stetigen) Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definieren wir nun den *Abbildungskegel*  $C_f$ :  $C_f$  entsteht aus  $CX + Y$  (topologische Summe im Sinne von BOURBAKI [2] § 8, No. 10), wenn  $(x, 1) \in CX$  für jedes  $x \in X$  mit  $f(x) \in Y$  identifiziert wird (Fig. 1). Die Punkte von  $C_f$  werden ebenso wie ihre Repräsentanten in  $CX + Y$  mit  $(x, s) (\in CX)$  bzw.  $y (\in Y)$  bezeichnet, und  $y_0 (= (x_0, s) = (x, 0))$  gilt als Grundpunkt. Beim Übergang  $CX + Y \rightarrow C_f$  wird in  $Y$  nichts identifiziert.  $Y$  kann also als Teilmenge von  $C_f$  betrachtet werden. Die Injektion  $Pf: Y \rightarrow C_f$  ist (als Einschränkung der Identifizierung  $CX + Y \rightarrow C_f$ ) offenbar stetig. Darüberhinaus stimmt die in  $Y$  als Teilmenge von  $C_f$  induzierte Topologie mit der ursprünglichen überein.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß es zu jeder abgeschlossenen Menge  $A \subset Y$  (bezüglich der ursprünglichen Topologie) eine abgeschlossene Teilmenge  $B \subset C$  gibt, so daß  $A = B \cap Y$ . Ein solches  $B$  wird z.B. durch

$$B = \begin{cases} f^{-1}(A) \times 1 \cup A, & \text{falls } y_0 \notin A, \text{ also } x_0 \notin f^{-1}(A) \\ C f^{-1}(A) \cup A, & \text{falls } y_0 \in A, \text{ also } x_0 \in f^{-1}(A) \end{cases}$$

definiert. Diese Mengen sind abgeschlossen in  $C_f$ , weil  $f^{-1}(A)$  wegen der Stetigkeit von  $f$  in  $X$  abgeschlossen ist. Man beachte, daß keine Trennungsaxiome vorausgesetzt wurden. Insbesondere braucht  $x_0$  in  $X$  nicht abgeschlossen zu sein, und deshalb mußten die beiden Fälle  $y_0 \notin A$  und  $y_0 \in A$  unterschieden werden. Man kann im allgemeinen auch nicht behaupten, daß  $Y$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $C_f$  ist.

Beispiel.  $X = S^{n-1}$  [ $(n-1)$ -Sphäre]. Dann ist  $CX$  eine  $n$ -Vollkugel  $E^n$  (vgl. Fig. 2), und  $C_f$  ist der Raum, der aus  $Y$  entsteht, wenn  $E^n$  mittels  $f: S^{n-1} \rightarrow Y$  ( $S^{n-1} =$  Randsphäre von  $E^n$ ) an  $Y$  „angeheftet“ wird (vgl. HILTON [6] S. 76).

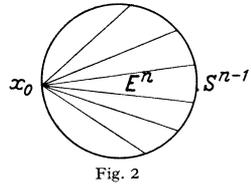


Fig. 2

1.5. Satz 1. Die Folge

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f$$

ist exakt (vgl. 1.3), d.h. für jeden Bildraum  $V$  ist die induzierte Folge

$$\pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V)$$

exakt, d.h. Kern  $f^* =$  Bild  $(Pf)^*$ .

Beweis. Aus der Definition von  $C_f$  und  $Pf$  ( $=$  Injektion) ergibt sich unmittelbar  $Pf \circ f \simeq 0$ , denn  $Pf \circ f: X \rightarrow C_f$  läßt sich durch die Zuordnung  $(x, s) \rightarrow (x, s)$  zu einer Abbildung  $CX \rightarrow C_f$  fortsetzen [vgl. 1.4 Fig. 1]. Daraus folgt  $(Pf \circ f)^* = f^* \circ (Pf)^* = 0$ , d.h. Bild  $(Pf)^* <$  Kern  $f^*$ .

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein  $a: Y \rightarrow V$  mit  $[a] \in$  Kern  $f^*$ . Das bedeutet  $f^*[a] = [a \circ f] = 0$ , d.h.  $a \circ f \simeq 0$ . Folglich gibt es eine Abbildung  $b: CX \rightarrow V$  mit  $b(x, 1) = a(f(x))$  für alle  $x \in X$ .  $b$  und  $a$  zusammen definieren eine Abbildung  $CX + Y \rightarrow V$ , die mit der Identifizierung  $CX + Y \rightarrow C_f$  verträglich ist. Sie induziert also  $b': C_f \rightarrow V$ , und nach Konstruktion gilt

$$(Pf)^*[b'] = [b' \circ Pf] = [b' | Y] = [a],$$

d.h.  $[a] \in$  Bild  $(Pf)^*$ .

1.6. Sei speziell  $X < Y$  und  $f: X \rightarrow Y$  die Injektion. Dann ist  $CX$  ein Teilraum von  $C_f$  (man bestätigt leicht, daß er die induzierte Topologie trägt), und es ist  $CX \cap Y = X$ . Ferner nehmen wir an, daß das Paar  $(Y, X)$  folgende Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt:

HE: Zu jeder Abbildung  $g_0$  von  $Y$  in einen beliebigen Bildraum und jeder Homotopie  $h_i$  von  $h_0 = g_0|X$  gibt es eine Homotopie  $g_i$  von  $g_0$  mit  $h_i = g_i|X$ .

Einen Überblick über Fragen der Homotopieerweiterung gibt BARRATT [1] 5.1. Wir heben hier nur hervor (vgl. HILTON [6] S. 97 Th. 1.4 oder J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (J)):

Ist  $Y$  ein CW-Komplex im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD [19] und  $X$  ein Teilkomplex, so ist HE erfüllt.

Hilfssatz 4. Ist  $X < Y$ ,  $f: X \rightarrow Y$  die Injektion und genügt  $(Y, X)$  der Bedingung HE, so gibt es eine Homotopie der Identität  $C_f \rightarrow C_f$ , die  $CX$  in sich auf einen Punkt zusammenzieht.

Den Beweis stellen wir für den Augenblick zurück. Aus Hilfssatz 4 zusammen mit 1.2 Hilfssatz 3 folgt, daß die natürliche Projektion  $q: C_f \rightarrow C_f/CX$  eine Homotopieäquivalenz ist. Andererseits ist (für jede Injektion  $f: X < Y$ ):

$$(1) \quad C_f/CX = (CX + Y)/(CX + X) = Y/X,$$

und bezeichnet  $p: Y \rightarrow Y/X$  die natürliche Projektion, so ist das Diagramm

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Pf} & C_f \\ 1_Y \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{p} & Y/X \end{array}$$

kommutativ. Das bedeutet (vgl. 1.2):

Satz 2. Ist  $X < Y$ ,  $f: X \rightarrow Y$  die Injektion und genügt  $(Y, X)$  der Bedingung HE, so ist  $Pf: Y \rightarrow C_f$  mit der natürlichen Projektion  $p: Y \rightarrow Y/X$  homotopieäquivalent.  $(1_Y, q)$  ist eine Homotopieäquivalenz zwischen  $Pf$  und  $p$ .

Beweis von Hilfssatz 4.  $h_t: CX \rightarrow C_f$  sei die natürliche Nullhomotopie der Injektion  $h_0: CX \rightarrow C_f$ , d.h.

$$h_t(x, s) = (x, s(1 - t)), \quad (x, s) \in CX, t \in I.$$

$h_t|X$  ist eine Nullhomotopie der Injektion  $h_0|X: X \rightarrow C_f$ . Wegen HE ist  $h_t|X$  so zu  $g_t: Y \rightarrow C_f$  fortsetzbar, daß  $g_0: Y \rightarrow C_f$  die Injektion ist.  $h_t$  und  $g_t$  zusammen definieren eine Homotopie  $CX + Y \rightarrow C_f$ , die mit der Identifizierung  $CX + Y \rightarrow C_f$  (im Urbildraum) verträglich ist; nach 1.1 Hilfssatz 1 wird also eine Homotopie  $\varphi_t: C_f \rightarrow C_f$  induziert. Nach Konstruktion ist  $\varphi_0 = 1$ , und  $\varphi_t|CX = h_t$  zieht  $CX$  in sich auf einen Punkt zusammen.

1.7. Bemerkung. Das Resultat von 1.6 beleuchtet noch einmal die Definition von  $C_f$ . Für eine Injektion  $f: X < Y$  ist  $C_f$  im wesentlichen  $Y/X$  (vorausgesetzt, daß HE erfüllt ist). Den Fall einer beliebigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$

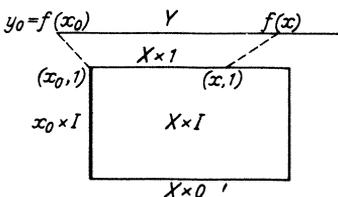


Fig.3. Die stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen

kann man darauf mit Hilfe der bekannten Konstruktion des Abbildungszylinders zurückführen. Ersetzt man  $f$  durch die Injektion von  $X$  in den Abbildungszyylinder  $Z_f$ , die mit  $f$  homotopieäquivalent ist, und bildet dann  $Z_f/X$ , so erhält man gerade  $C_f$ .

[Genauere Durchführung: Der Abbildungszyylinder  $Z_f$  (Fig. 3) von  $f: X \rightarrow Y$  entsteht aus  $(X \times I)/(x_0 \times I) + Y$ , wenn  $(x, 1) \in (X \times I)/(x_0 \times I)$  für jedes  $x \in X$  mit  $f(x) \in Y$  identifiziert wird. (Vgl. Fox [8] § 3 oder HILTON [6] S. 107 f.; dort wird allerdings  $\dot{x}_0 \times I$  in  $X \times I$  nicht zu einem Punkt identifiziert.) Identifiziert man jedes  $x \in X$  mit  $(x, 0) \in Z_f$ , so wird  $X$  zu einem Teilraum von  $Z_f$ .

Auch  $Y$  kann man als Teilraum von  $Z_f$  auffassen (analog wie bei  $C_f$ , vgl. 1.4). Die Zuordnung  $x \rightarrow (x, t)$  definiert eine Homotopie  $j_t: X \rightarrow Z_f$  zwischen der Injektion  $j_0$  und  $j_1 = i \circ f$ , wobei  $i: Y \rightarrow Z_f$  die Injektion ist; d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 1_X \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{j_0} & Z_f \end{array}$$

ist bis auf Homotopie kommutativ. Man sieht leicht (unter Benutzung von 1.1 Hilfssatz 1), daß  $Y$  Deformationsretrakt von  $Z_f$  ist (vgl. [6] S. 109, Th. 3.2). Folglich ist  $(1_X, i)$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $f$  und der Injektion  $j_0: X \rightarrow Z_f$ . Daß tatsächlich  $Z_f/X = C_f$  ist, ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.]

1.8. Als *Einhängung* des Raumes  $X$  bezeichnet man den Raum

$$SX = (X \times I) / (X \times 0 \cup X \times 1 \cup x_0 \times I).$$

Die Punkte von  $SX$  werden wie ihre Repräsentanten in  $X \times I$  mit  $(x, s)$ ,  $x \in X$ ,  $s \in I$ , bezeichnet, und  $(x_0, 0) (= (x, 0) = (x, 1) = (x_0, s))$  gilt als Grundpunkt. Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  wird die Einhängung  $Sf: SX \rightarrow SY$  durch  $Sf(x, s) = (f(x), s)$  definiert. Offenbar ist  $S1_X = 1_{SX}$  und  $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$  für  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ .

Ist  $h_t: X \rightarrow Y$  eine Homotopie, so auch  $Sh_t$  (vgl. 1.1 Hilfssatz 1). Daraus folgt leicht, daß die Einhängung einer Homotopieäquivalenz wieder eine Homotopieäquivalenz ist.

Für  $f: X \rightarrow \{y_0\} = Y$  ist offenbar  $C_f = SX$  (vgl. 1.4).

Man bezeichnet auch manchmal den Raum  $\tilde{S}X$ , der aus  $X \times I$  durch Identifizieren von  $X \times 0$  und  $X \times 1$  zu je einem Punkt entsteht, als Einhängung von  $X$ . Der Unterschied ist für „vernünftige“  $X$  nicht wesentlich; z.B. gilt:

Hilfssatz 5. *Ist  $X$  ein CW-Komplex<sup>3)</sup>, so ist die natürliche Projektion  $p: \tilde{S}X \rightarrow SX$  eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Nach 1.2 Hilfssatz 3 genügt es zu zeigen, daß sich eine Zusammenziehung von  $x_0 \times I < \tilde{S}X$  zu einer Homotopie der Identität von  $\tilde{S}X$  fortsetzen läßt. Das ist möglich, weil  $(\tilde{S}X, x_0 \times I)$  ein Paar von CW-Komplexen ist (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [19] (H)) und daher die Bedingung  $HE$  erfüllt (1.6). (Wir haben bisher in  $\tilde{S}X$  keinen Grundpunkt festgelegt. Entweder verzichtet man darauf ganz, dann ist unter „Homotopieäquivalenz“ in Hilfssatz 5 freie Homotopieäquivalenz ohne Festhaltung von Grundpunkten zu verstehen; oder man wählt irgendeinen Punkt von  $x_0 \times I$  als Grundpunkt für  $\tilde{S}X$ .)

<sup>3)</sup> In einem CW-Komplex wird grundsätzlich eine 0-Zelle der Zerlegung als Grundpunkt genommen. Das ist jedoch keine Einschränkung, weil man durch geeignete Unterteilung einer gegebenen Zellenzerlegung jeden Punkt zu einer 0-Zelle machen kann.

1.9. Nach Definition (vgl. 1.4) ist  $Pf: Y \rightarrow C_f$  für alle  $f: X \rightarrow Y$  eine Injektion. Wir wollen auf sie die Überlegungen von 1.6 anwenden und haben dazu zunächst zu zeigen:

Hilfssatz 6. Das Paar  $(C_f, Y)$  besitzt die Eigenschaft HE (vgl. 1.6).

Beweis. Sei  $g: C_f \rightarrow V$  und  $h_t: Y \rightarrow V$  mit  $h_0 = g|_Y$  gegeben. Zu zeigen ist, daß es eine Fortsetzung  $g_t: C_f \rightarrow V$  von  $h_t$  gibt mit  $g_0 = g$ . Eine solche Fortsetzung läßt sich anschaulich so beschreiben: Die Deformationswege für die Punkte  $y \in Y$  sind durch  $h_t$  gegeben. Der Bildpunkt von  $(x, s) \in C_f$ ,  $s \geq \frac{1}{2}$ , durchläuft erst das  $g$ -Bild der Strecke von  $(x, s)$  nach  $(x, 1) = f(x)$  und dann einen Teil des Deformationsweges von  $f(x) \in Y$ . Die „Länge“ dieses Teils (gemessen durch den Parameter  $t$  des Deformationsweges) nimmt vom vollen Wert 1 bis auf 0 ab, wenn  $s$  von 1 nach  $\frac{1}{2}$  geht. Der Bildpunkt von  $(x, s) \in C_f$ ,  $s \leq \frac{1}{2}$ , durchläuft nur einen Teil des  $g$ -Bildes der Strecke von  $(x, s)$  nach  $(x, 1)$ , und dieser Teil nimmt von der vollen Länge bis auf 0 ab, wenn  $s$  von  $\frac{1}{2}$  nach 0 geht. Explizit kann man  $g_t: C_f \rightarrow V$  etwa durch

$$g_t(y) = h_t(y), \quad y \in Y$$

$$g_t(x, s) = \begin{cases} g\left(x, s + \frac{t}{2}\right), & s \geq \frac{1}{2}, t \leq 2 - 2s, x \in X \\ h_{2s+t-2}(f(x)), & s \geq \frac{1}{2}, t \geq 2 - 2s, x \in X \\ g(x, s + st), & s \leq \frac{1}{2}, x \in X \end{cases}$$

definieren.

Demnach läßt sich 1.6 Satz 2 für jedes  $f: X \rightarrow Y$  auf  $Pf: Y \rightarrow C_f$  (an Stelle des dortigen  $f$ ) anwenden. Aus den Definitionen in 1.4 und 1.8 geht unmittelbar hervor, daß  $C_{Pf}/Y = SX$  ist.  $Qf: C_f \rightarrow C_{Pf}/Y = SX$  sei die natürliche Projektion, d. h.

$$(3) \quad \begin{cases} Qf(x, s) = (x, s), & x \in X, s \in I \\ Qf(y) = (x_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & y \in Y. \end{cases}$$

$C_{Pf}$  entsteht nach Definition aus  $CX + CY + Y$  durch die Identifizierungen

$$\begin{aligned} CX \ni (x, 1) &= f(x) \in Y && \text{für alle } x \in X \\ CY \ni (y, 1) &= y \in Y && \text{für alle } y \in Y. \end{aligned}$$

Man erhält es aber offenbar auch aus  $CX + CY$  durch die Identifizierungen (Fig. 4)

$$CX \ni (x, 1) = (f(x), 1) \in CY \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die natürliche Projektion [vgl. 1.6 (1)]

$$Rf: C_{Pf} \rightarrow C_{Pf}/CY = C_{Pf}/Y = SX$$

ist durch

$$(4) \quad \begin{cases} Rf(x, s) = (x, s), & x \in X, s \in I \\ Rf(y, s) = (x_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & y \in Y, s \in I \end{cases}$$

gegeben. Mit diesen Bezeichnungen geht 1.6 Satz 2 hier über in:

Satz 3. Für jedes  $f: X \rightarrow Y$  ist  $P^2f: C_f \rightarrow C_{Pf}$  mit  $Qf: C_f \rightarrow SX$  homotopieäquivalent.  $(1_{C_f}, Rf)$  ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen Abbildungen.

Dem kommutativen Diagramm (2) in 1.6 entspricht hier

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{P^2f} & C_{Pf} \\ & \searrow Qf & \downarrow Rf \\ & & SX. \end{array}$$

1.10. Das Diagramm

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} C_{Pf} & \xrightarrow{P^2f} & C_{P^2f} \\ Rf \downarrow & \searrow QPf & \downarrow RPf \\ SX & & SY \end{array}$$

erhält man aus (5), wenn man  $f$  durch  $Pf$  ersetzt und  $Rf$  hinzufügt. Das Dreieck in (6) ist daher kommutativ. Die untere Zeile soll nun so ergänzt werden, daß (6) — wenigstens bis auf Homotopie — kommutativ bleibt. Sei für jedes  $x \in X$

$$W(x) = \{(x, s) \mid s \in I\} \cup \{(f(x), s) \mid s \in I\} \subset C_{Pf}$$

(vgl. 1.9 Fig. 4).  $W(x)$  wird durch  $Rf$  [vgl. 1.9 (4)] auf die Strecke  $\{(x, s) \mid s \in I\} \subset SX$  und durch  $QPf$  [vgl. 1.9 (3)] auf  $\{(f(x), s) \mid s \in I\} \subset SY$  abgebildet. Wird  $W(x)$  in der Richtung von  $(x, 0)$  über  $(x, 1) = (f(x), 1)$  nach  $(f(x), 0)$  durchlaufen, so bewegt sich der Bildpunkt bei  $Rf$  von  $(x, 0)$  nach  $(x, 1)$  und bei  $QPf$  von  $(f(x), 1)$  nach  $(f(x), 0)$ . Daher ist zu vermuten, daß  $S_-f: SX \rightarrow SY$ , definiert durch  $S_-f(x, s) = (f(x), 1 - s)$  das Diagramm (6) so ergänzt, daß das untere Dreieck und damit das ganze Diagramm bis auf Homotopie kommutativ wird. Tatsächlich ist  $\varphi_i: C_{Pf} \rightarrow SY$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, s) &= (f(x), 1 - ts), & x \in X, s \in I \\ \varphi_i(y, s) &= (y, (1 - t)s), & y \in Y, s \in I, \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen  $\varphi_0 = QPf$  und  $\varphi_1 = S_-f \circ Rf$ . Weil  $Rf$  und  $RPf$  Homotopieäquivalenzen sind (1.9 Satz 3), liest man aus dem durch  $S_-f: SX \rightarrow SY$  ergänzten Diagramm (6) ab:

Satz 4. Für jedes  $f: X \rightarrow Y$  ist  $P^3f: C_{Pf} \rightarrow C_{P^2f}$  mit  $S_-f: SX \rightarrow SY$  homotopieäquivalent.  $(Rf, RPf)$  ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen Abbildungen.

Sei  $\sigma_X: SX \rightarrow SX$  durch  $\sigma_X(x, s) = (x, 1 - s)$  definiert. Dann ist  $\sigma_X \circ \sigma_X = 1$  und  $S_-f = Sf \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ Sf$ . Das Diagramm (6) bleibt also bis auf Homotopie kommutativ, wenn man die untere Zeile nicht durch  $S_-f$  sondern durch  $Sf: SX \rightarrow SY$  ergänzt und  $Rf$  durch  $R_-f = \sigma_X \circ Rf$  oder  $RPf$  durch  $R_-Pf = \sigma_Y \circ RPf$  ersetzt. Da  $\sigma_X$  und  $\sigma_Y$  topologische Abbildungen sind, gilt ergänzend zu Satz 4:

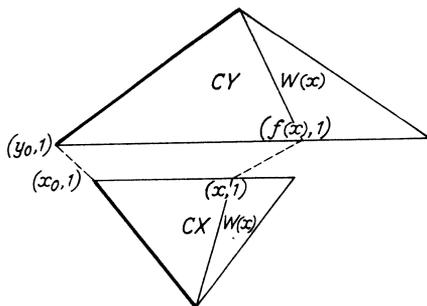


Fig. 4. Die stark ausgezogenen Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

Satz 4'. Für jedes  $f: X \rightarrow Y$  bestehen die Homotopieäquivalenzen

- a)  $(R_-f, RPf) : P^3f \equiv Sf$
- b)  $(Rf, R_-Pf) : P^3f \equiv Sf$ .

1.11. Zur Abkürzung setzen wir

$$R_n f = \begin{cases} RP^n f, & n \text{ gerade} \\ R_-P^n f, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Durch wiederholte Anwendung von 1.9 Satz 3, 1.10 Satz 4' und der Tatsache, daß die Einhängung einer Homotopieäquivalenz weder eine Homotopieäquivalenz ist (vgl. 1.8), erhält man:

- (a)  $(1, Rf) : P^2f \equiv Qf$  (Satz 3),
- (b)  $(Rf, R_1f) : P^3f \equiv Sf$  ((Satz 4'b)),
- (c)  $(R_1f, R_2f) : P^4f \equiv SPf$  ((Satz 4'a), angewandt auf  $Pf$ ),
- (d)  $\begin{cases} (R_2f, R_3f) : P^5f \equiv SP^2f & \text{((b), angewandt auf } P^2f\text{)}, \\ (1, SRf) : SP^2f \equiv SQf & \text{(Einhängung von (a))}, \end{cases}$
- (e)  $\begin{cases} (R_3f, R_4f) : P^6f \equiv SP^3f & \text{((c), angewandt auf } P^2f\text{)}, \\ (SRf, SR_1f) : SP^3f \equiv S^2f & \text{(Einhängung von (b))}, \end{cases}$
- ...

Durch entsprechende Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich:

Satz 5. Zwischen den Folgen von Abbildungen

$$\mathfrak{B}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{P^2f} C_{Pf} \xrightarrow{P^3f} C_{P^2f} \xrightarrow{P^4f} \dots$$

und

$$\mathfrak{A}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{Qf} SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{SPf} SC_f \xrightarrow{SQf} S^2X \xrightarrow{S^2f} \dots$$

besteht die Homotopieäquivalenz

$$(1_X, 1_Y, 1_{C_f}, Rf, R_1f, R_2f, SRf \circ R_3f, SR_1f \circ R_4f, SR_2f \circ R_5f, \dots, \\ \dots, S^n Rf \circ S^{n-1} R_3f \circ S^{n-2} R_6f \circ \dots \circ R_{3n}f, S^n R_1f \circ \dots \circ R_{3n+1}f, \\ S^n R_2f \circ \dots \circ R_{3n+2}f, \dots)$$

(vgl. 1.2), d. h. in dem Diagramm

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{Pf} & C_f & \xrightarrow{P^2f} & C_{Pf} & \xrightarrow{P^3f} & C_{P^2f} & \xrightarrow{P^4f} & C_{P^3f} & \xrightarrow{P^5f} & C_{P^4f} & \xrightarrow{P^6f} & \dots \\ 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & 1 & & Rf \downarrow & & R_1f \downarrow & & R_2f \downarrow & & \downarrow SRf \circ R_3f & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{Pf} & C_f & \xrightarrow{Qf} & SX & \xrightarrow{Sf} & SY & \xrightarrow{SPf} & SC_f & \xrightarrow{SQf} & S^2X & \xrightarrow{S^2f} & \dots \end{array}$$

sind die vertikalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen, und jedes Quadrat ist bis auf Homotopie kommutativ.

$\mathfrak{A}f$  soll die Abbildungsfolge von  $f$  genannt werden.

1.12. Nach 1.5 Satz 1 ist die Folge  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f$  exakt, also auch die Folge  $\mathfrak{B}f$ . Nach 1.11 Satz 5 ist  $\mathfrak{B}f$  mit der Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  homotopieäquivalent.

Eine solche Homotopieäquivalenz [vgl. (7)] induziert für jeden Bildraum  $V$  ein Diagramm (vgl. 1.3)

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi(X, V) & \xleftarrow{f^*} & \pi(Y, V) & \xleftarrow{(Pf)^*} & \pi(C_f, V) & \xleftarrow{(P^2f)^*} & \pi(C_{Pf}, V) & \xleftarrow{(P^3f)^*} & \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \pi(X, V) & \xleftarrow{f^*} & \pi(Y, V) & \xleftarrow{(Pf)^*} & \pi(C_f, V) & \xleftarrow{(Qf)^*} & \pi(SX, V) & \xleftarrow{(Sf)^*} & \dots \end{array}$$

Da die vertikalen Abbildungen in (7) Homotopieäquivalenzen sind, sind sie hier Isomorphismen; da die einzelnen Quadrate in (7) bis auf Homotopie kommutativ sind, besteht hier strenge Kommutativität. Also ist mit der oberen Zeile auch die untere exakt, d.h. es gilt:

Satz 6. Die Abbildungsfolge  $\mathcal{A}f$  irgendeiner Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist exakt, d.h. sie induziert für jeden Bildraum  $V$  eine exakte Folge der entsprechenden Homotopiemengen (vgl. 1.3).

### § 2. Invarianz der Abbildungsfolge

2.1. Das Hauptziel dieses Paragraphen ist es zu zeigen, daß die Abbildungsfolge  $\mathcal{A}f$  (vgl. 1.11) bis auf Homotopieäquivalenz nur vom Homotopietyp von  $f: X \rightarrow Y$  abhängt (2.4 Satz 9). Etwas allgemeiner untersuchen wir das Verhalten von  $\mathcal{A}f$  bei einer „Transformation“ von  $f$ .

Unter einer *Transformation* von  $f: X \rightarrow Y$  in  $f': X' \rightarrow Y'$  verstehen wir ein Paar  $(\varphi, \psi)$  von Abbildungen  $\varphi: X \rightarrow X'$ ,  $\psi: Y \rightarrow Y'$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist, d.h.  $f' \circ \varphi \simeq \psi \circ f$ . Dementsprechend heißt ein System  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$  von Abbildungen  $\varphi_\nu: X_\nu \rightarrow X'_\nu$  eine Transformation von

$$\begin{array}{c} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \\ \text{in} \\ X'_1 \xrightarrow{f'_1} X'_2 \xrightarrow{f'_2} X'_3 \xrightarrow{f'_3} \dots, \end{array}$$

wenn  $f'_\nu \circ \varphi_\nu \simeq \varphi_{\nu+1} \circ f_\nu$  gilt für  $\nu = 1, 2, 3, \dots$ . Eine Transformation  $(\varphi, \psi)$  oder  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$  ist also eine Homotopieäquivalenz im Sinne von 1.2, wenn  $\varphi$  und  $\psi$  bzw.  $\varphi_\nu$  für alle  $\nu$  Homotopieäquivalenzen sind.

2.2. Zu einer Transformation  $(\varphi, \psi)$  von  $f: X \rightarrow Y$  in  $f': X' \rightarrow Y'$  zusammen mit einer bestimmten Homotopie  $\Phi_i: X \rightarrow Y'$  zwischen  $\Phi_0 = f' \circ \varphi$  und  $\Phi_1 = \psi \circ f$  definieren wir

$$\chi = C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \rightarrow C_{f'}$$

(vgl. 1.4) durch

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi(y) = \psi(y), \quad y \in Y \\ \chi(x, s) = \begin{cases} (\varphi(x), 2s) & x \in X, s \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_{2s-1}(x), & x \in X, s \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Offenbar gilt  $\chi \circ Pf = \chi|Y = Pf' \circ \psi$  ( $Pf: Y \rightarrow C_f$  ist die Injektion, vgl. 1.4), also ist  $(\psi, \chi)$  eine Transformation von  $Pf$  in  $Pf'$ , bei der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Pf} & C_f \\ \psi \downarrow & & \downarrow \chi \\ Y' & \xrightarrow{Pf'} & C_{Pf'} \end{array}$$

sogar (streng) kommutativ ist. Hierzu kann man nun wieder

$$C(\psi, \chi, \Psi) : C_{Pf} \rightarrow C_{Pf'}$$

bilden, wobei  $\Psi_t: Y \rightarrow C_{Pf'}$  irgendeine Homotopie zwischen  $\Psi_0 = Pf' \circ \psi$  und  $\Psi_1 = \chi \circ Pf (= \Psi'_0)$  ist, z.B. die triviale Homotopie  $\Psi_t = Pf' \circ \psi$  für alle  $t \in I$ . Im letzteren Fall schreiben wir kurz  $C(\psi, \chi)$  für  $C(\psi, \chi, \Psi)$ .

Durch Iteration erhält man eine „durch  $(\varphi, \psi, \Phi)$  induzierte“ Transformation  $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots)$  von

$$\mathfrak{A}f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{P^2f} C_{Pf} \xrightarrow{P^3f} C_{P^2f} \rightarrow \dots$$

in  $\mathfrak{A}f'$ , wenn man  $\chi_\nu$  durch

$$\begin{aligned} \chi_1 &= C(\psi, \chi) \\ \chi_2 &= C(\chi, \chi_1) \\ \chi_\nu &= C(\chi_{\nu-2}, \chi_{\nu-1}), \quad \nu > 2 \end{aligned}$$

definiert.

Für die Abbildungsfolgen  $\mathfrak{A}f$  bzw.  $\mathfrak{A}f'$  (vgl. 1.14) liegt es nahe, das Diagramm

$$(10) \quad \begin{array}{cccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \rightarrow & C_f & \xrightarrow{Qf} & SX & \xrightarrow{Sf} & SY & \xrightarrow{SPf} & SC_f & \rightarrow & \dots \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi & & \downarrow S\varphi & & \downarrow S\psi & & \downarrow S\chi & & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \rightarrow & C_{f'} & \xrightarrow{Qf'} & SX' & \xrightarrow{Sf'} & SY' & \xrightarrow{SPf'} & SC_{f'} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

zu betrachten. Das erste Quadrat ist nach Voraussetzung bis auf Homotopie kommutativ. Vom zweiten haben wir die Kommutativität oben schon festgestellt. Im dritten geht  $Y \subset C_f$  sowohl bei  $S\varphi \circ Qf$  als auch bei  $Qf' \circ \chi$  [vgl. 1.8, 1.9 (3)] in den Grundpunkt von  $SX'$  über, und für  $(x, s) \in C_f$  ( $x \in X, s \in I$ ) gilt

$$\begin{aligned} (S\varphi \circ Qf)(x, s) &= (\varphi(x), s) \\ (Qf' \circ \chi)(x, s) &= \begin{cases} (\varphi(x), 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ (x'_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

[vgl. (3), (9)]. Daraus folgt leicht  $Qf' \circ \chi \simeq S\varphi \circ Qf$ . Das vierte Quadrat in (10) geht durch Einhängung aus dem ersten, das fünfte aus dem zweiten usw. hervor. Folglich sind alle Quadrate in (10) mindestens bis auf Homotopie kommutativ, d.h.  $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \dots)$  ist eine Transformation von  $\mathfrak{A}f$  in  $\mathfrak{A}f'$ . Wir nennen sie die durch  $(\varphi, \psi, \Phi)$  induzierte Transformation.

**2.3. Satz 7.** *Ist  $(\varphi, \psi)$  eine Transformation von  $f: X \rightarrow Y$  in  $f': X' \rightarrow Y'$  (vgl. 2.1) und  $\Phi_i: X \rightarrow Y'$  eine Homotopie zwischen  $\Phi_0 = f' \circ \varphi$  und  $\Phi_1 = \psi \circ f$ , so sind in den induzierten Transformationen  $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots)$  von  $\mathfrak{B}f$  in  $\mathfrak{B}f'$  und  $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, \dots)$  von  $\mathfrak{A}f$  in  $\mathfrak{A}f'$  (vgl. 2.2) je zwei entsprechende Abbildungen homotopieäquivalent, d. h.*

$$\begin{aligned} S^n \varphi &\equiv \chi_{3n-2} \\ S^n \psi &\equiv \chi_{3n-1} \\ S^n \chi &\equiv \chi_{3n} \end{aligned}$$

für alle  $n \geq 1$ .

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$(11) \quad \chi_1 = C(\psi, \chi) = C(\psi, C(\varphi, \psi, \Phi)) \equiv S\varphi.$$

$\chi_1: C_{Pf} \rightarrow C_{P'f}$  ist nach 2.2 durch

$$\begin{aligned} \chi_1(x, s) &= \chi(x, s), \quad x \in X, s \in I \\ \chi_1(y, s) &= \begin{cases} (\psi(y), 2s), & s \leq \frac{1}{2}, y \in Y \\ (Pf' \circ \psi)(y) = (\chi \circ Pf)(y), & s \geq \frac{1}{2}, y \in Y \end{cases} \end{aligned}$$

definiert (über  $C_{Pf}$  vgl. 1.9). In dem Diagramm

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} C_{Pf} & \xrightarrow{\chi_1} & C_{P'f} \\ Rf \downarrow & & \downarrow Rf' \\ SX & \xrightarrow{S\varphi} & SX' \end{array}$$

sei  $Rf$  wie in 1.9 die natürliche Projektion  $C_{Pf} \rightarrow C_{Pf}/CY = SX$ . Jedes  $(y, s) \in CY \subset C_{Pf}$  geht sowohl bei  $Rf' \circ \chi_1$  als auch bei  $S\varphi \circ Rf$  in den Grundpunkt von  $SX'$  über. Für  $(x, s) \in C_{Pf}$  ( $x \in X, s \in I$ ) gilt

$$(Rf' \circ \chi_1)(x, s) = Rf'(\chi(x, s)) = \begin{cases} Rf'(\varphi(x), 2s) = (\varphi(x), 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ Rf'(\Phi_{2s-1}(x)) = (x'_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[vgl. (9), (4)] und

$$(S\varphi \circ Rf)(x, s) = S\varphi(x, s) = (\varphi(x), s).$$

Daraus entnimmt man leicht  $S\varphi \circ Rf \simeq Rf' \circ \chi_1$ . Also ist (12) bis auf Homotopie kommutativ, und weil  $Rf, Rf'$  Homotopieäquivalenzen sind (1.9 Satz 3), ist (11) damit bewiesen.

Aus (11) gewinnt man

$$\chi_2 \equiv S\psi \text{ durch Anwendung auf } (\psi, \chi) \text{ an Stelle von } (\varphi, \psi),$$

$$\chi_3 \equiv S\chi \text{ durch Anwendung auf } (\chi, \chi_1),$$

$$\chi_\nu \equiv S\chi_{\nu-3}, \nu > 3, \text{ durch Anwendung auf } (\chi_{\nu-3}, \chi_{\nu-2}),$$

$\chi_\nu \equiv S\chi_{\nu-3} \equiv S^2\chi_{\nu-6} \equiv \dots$  durch wiederholte Anwendung der vorigen Formel und ihrer Einhängungen.

Aus diesen Formeln ist Satz 7 leicht zu entnehmen.

2.4. Wir werden nun zeigen, daß der Homotopietyp der Folgen  $\mathfrak{B}f$  und  $\mathfrak{A}f$  (vgl. 1.14) nur vom Homotopietyp von  $f: X \rightarrow Y$  abhängt. In diesem ganzen Abschnitt sei  $(\varphi, \psi)$  eine Transformation von  $f: X \rightarrow Y$  in  $f': X' \rightarrow Y'$  (vgl. 2.1) und  $\Phi_t: X \rightarrow Y'$  eine Homotopie zwischen  $\Phi_0 = f' \circ \varphi$  und  $\Phi_1 = \psi \circ f$ .

Hilfssatz 7. *Ist  $(\varphi, \psi)$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $f$  und  $f'$ , so ist auch  $\chi = C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \rightarrow C_{f'}$  (vgl. 2.2) eine Homotopieäquivalenz.*

Der Beweis wird bis zum nächsten Abschnitt zurückgestellt. Als Folgerung ergibt sich:

Satz 8a). *Sind in der durch  $(\varphi, \psi, \Phi)$  induzierten Transformation  $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots)$  von  $\mathfrak{B}f$  in  $\mathfrak{B}f'$  (vgl. 2.2) zwei aufeinanderfolgende Abbildungen Homotopieäquivalenzen, so auch alle folgenden.*

Da nach 2.3 Satz 7 jede der Abbildungen  $\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots$  mit der entsprechenden aus  $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \dots)$  homotopieäquivalent ist, folgt aus Satz 8a):

Satz 8b). *Sind in der durch  $(\varphi, \psi, \Phi)$  induzierten Transformation  $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \dots)$  von  $\mathfrak{A}f$  in  $\mathfrak{A}f'$  (vgl. 2.2) zwei aufeinanderfolgende Abbildungen Homotopieäquivalenzen, so auch alle folgenden.*

Die Sätze 8a) und 8b), angewandt auf die ersten beiden Abbildungen  $\varphi, \psi$  der genannten Transformationen, ergeben die Invarianzaussage:

Satz 9. *Ist  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f': X' \rightarrow Y'$  homotopieäquivalent, so auch  $\mathfrak{B}f$  mit  $\mathfrak{B}f'$  und  $\mathfrak{A}f$  mit  $\mathfrak{A}f'$ .*

2.5. Beweis von Hilfssatz 7. Zunächst einige Vorbemerkungen:

A) Zwei Transformationen  $(\varphi, \psi)$  von  $f: X \rightarrow Y$  in  $f': X' \rightarrow Y'$  und  $(\varphi', \psi')$  von  $f'$  in  $f'': X'' \rightarrow Y''$  setzen sich offenbar zu einer Transformation  $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$  von  $f$  in  $f''$  zusammen. Sind  $\Phi_t: X \rightarrow Y'$  und  $\Phi'_t: X' \rightarrow Y''$  Homotopien zwischen  $\Phi_0 = f' \circ \varphi$  und  $\Phi_1 = \psi \circ f$  bzw. zwischen  $\Phi'_0 = f'' \circ \varphi'$  und  $\Phi'_1 = \psi' \circ f'$ , so ist  $(\Phi' \circ \Phi)_t: X \rightarrow Y''$ , definiert durch

$$(13) \quad (\Phi' \circ \Phi)_t = \begin{cases} \Phi'_{2t} \circ \varphi, & t \leq \frac{1}{2} \\ \psi' \circ \Phi_{2t-1}, & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen  $f'' \circ \varphi' \circ \varphi$  und  $\psi' \circ \psi \circ f$ . Es gilt

$$(14) \quad C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi) \simeq C(\varphi', \psi', \Phi') \circ C(\varphi, \psi, \Phi)$$

(zur Definition dieser Abbildungen vgl. 2.2).

Beweis von (14). Wir bezeichnen die linke Seite von (14) zur Abkürzung mit  $\chi'$ , die rechte mit  $\chi''$ . Nach Definition von  $C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \rightarrow C_{f'}$  [2.2 (9)] ist

$$\chi'(y) = \psi'(\psi(y)) = \chi''(y) \quad \text{für alle } y \in Y \subset C_f.$$

Die Strecke  $\{(x, s) \mid s \in I\} \subset C_f$  ( $x \in X$  fest) geht bei  $\chi'$  und  $\chi''$  in denselben Weg über, der lediglich in verschiedener Weise parametrisiert ist. Es ist nämlich

[vgl. (9), (13)]

$$\chi'(x, s) = \begin{cases} (\varphi'(\varphi(x)), 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \Phi'_{4s-2}(\varphi(x)), & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \psi'(\Phi_{4s-3}(x)), & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\chi''(x, s) = \begin{cases} (\varphi'(\varphi(x)), 4s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \Phi'_{4s-1}(\varphi(x)), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \psi'(\Phi_{2s-1}(x)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Eine Homotopie der Identität von  $I$  in diejenige stückweise affine Selbstabbildung, die 0 in 0,  $\frac{1}{2}$  in  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  in  $\frac{1}{2}$  und 1 in 1 abbildet, liefert offenbar eine Homotopie zwischen  $\chi'$  und  $\chi''$ .

**B)** Sei  $(\varphi_\tau, \psi_\tau)$ ,  $\tau \in I$ , eine Schar von Transformationen von  $f: X \rightarrow Y$  in  $f': X' \rightarrow Y'$  und  $\Phi_i^\tau: X \rightarrow Y'$  sei für jedes  $\tau \in I$  eine Homotopie zwischen  $\Phi_0^\tau = f' \circ \varphi_\tau$  und  $\Phi_1^\tau = \psi_\tau \circ f$ . Sind  $\varphi_\tau, \psi_\tau$  Homotopien (d.h. stetig von  $\tau$  abhängig, vgl. 1.1) und definiert die Zuordnung  $(x, t, \tau) \rightarrow \Phi_t^\tau(x)$  eine stetige Abbildung  $X \times I \times I \rightarrow Y'$ , so ist auch

$$C(\varphi_\tau, \psi_\tau, \Phi^\tau) : C_f \rightarrow C_{f'}$$

(vgl. 2.2) eine Homotopie, wie man mit Hilfe von 1.1 Hilfssatz 1 leicht zeigt.

Ist  $\varphi_\tau, \psi_\tau$  und  $\Phi_t^\tau$  mit den genannten Eigenschaften gegeben, jedoch zunächst nicht  $\Phi_t^\tau$  für  $\tau > 0$ , so kann man  $\Phi_t^\tau$  immer so zu  $\Phi_t^\tau$  für alle  $\tau \in I$  erweitern, daß alle obigen Eigenschaften erfüllt sind. Man setze z.B.

$$\Phi_t^\tau = \begin{cases} f' \circ \varphi_{\tau-4t}, & t \leq \frac{\tau}{4} \\ \Phi_{(4t-\tau)(4-2\tau)^{-1}}^0, & \frac{\tau}{4} \leq t \leq 1 - \frac{\tau}{4} \\ \psi_{\tau-4+4t} \circ f, & t \geq 1 - \frac{\tau}{4}. \end{cases}$$

Daraus folgt: Sind  $(\varphi_0, \psi_0)$  und  $(\varphi_1, \psi_1)$  zwei homotope Transformationen von  $f$  in  $f'$  (d.h.  $\varphi_0 \simeq \varphi_1, \psi_0 \simeq \psi_1$ ) und ist  $\Phi_t^0$  eine Homotopie zwischen  $f' \circ \varphi_0$  und  $\psi_0 \circ f$ , so gibt es eine Homotopie  $\Phi_t^1$  zwischen  $f' \circ \varphi_1$  und  $\psi_1 \circ f$ , so daß

$$C(\varphi_0, \psi_0, \Phi^0) \simeq C(\varphi_1, \psi_1, \Phi^1).$$

**C)** Gibt es zu  $f: X \rightarrow Y$  zwei Abbildungen  $g, g': Y \rightarrow X$  mit

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq 1_X && (\text{„Links-Homotopieinverses“}) \\ f \circ g' &\simeq 1_Y && (\text{„Rechts-Homotopieinverses“}), \end{aligned}$$

so folgt  $g \simeq g \circ f \circ g' \simeq g'$  und daraus  $f \circ g \simeq 1_Y$ , d.h.  $g$  ist (zweiseitig) homotopieinvers zu  $f$ ,  $f$  ist also eine Homotopieäquivalenz (vgl. auch Fox [8] Th. 2).

Der eigentliche Beweis von Hilfssatz 7 wird nun folgendermaßen geführt: Sei  $(\varphi, \psi)$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $f: X \rightarrow Y$  und  $f': X' \rightarrow Y'$  und

$\Phi_t: X \rightarrow Y'$  eine Homotopie zwischen  $f' \circ \varphi$  und  $\psi \circ f$ . Sind  $\varphi'$  und  $\psi'$  homotopieinvers zu  $\varphi$  bzw.  $\psi$ , so ist  $(\varphi', \psi')$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $f'$  und  $f$  (1.2 Hilfssatz 2). Es gibt also eine Homotopie  $\Phi'_t: X' \rightarrow Y$  zwischen  $f \circ \varphi'$  und  $\psi' \circ f'$ . Nach (14) ist

$$(15) \quad C(\varphi', \psi', \Phi') \circ C(\varphi, \psi, \Phi) \simeq C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi),$$

$$(16) \quad C(\varphi, \psi, \Phi) \circ C(\varphi', \psi', \Phi') \simeq C(\varphi \circ \varphi', \psi \circ \psi', \Phi \circ \Phi').$$

Wir werden zeigen, daß auf den rechten Seiten von (15) und (16) Homotopieäquivalenzen stehen. Daraus folgt dann die Behauptung von Hilfssatz 7. Multipliziert man nämlich (15) von links mit einem Homotopieinversen der rechten Seite, so sieht man, daß  $C(\varphi, \psi, \Phi)$  ein Links-Homotopieinverses besitzt. Analog ergibt sich aus (16) die Existenz eines Rechts-Homotopieinversen; also ist  $C(\varphi, \psi, \Phi)$  eine Homotopieäquivalenz [vgl. C)].

Beim Nachweis, daß die rechten Seiten von (15) und (16) Homotopieäquivalenzen sind, kann man sich offenbar auf eine der beiden Formeln, etwa (15) beschränken: Nach Voraussetzung ist  $\varphi' \circ \varphi \simeq 1_X$ ,  $\psi' \circ \psi \simeq 1_Y$ . Daher gibt es nach B) eine zu der Transformation  $(1_X, 1_Y)$  von  $f$  in  $f$  gehörende Homotopie  $\Phi'_t: X \rightarrow Y$  zwischen  $\Phi'_0 = f$  und  $\Phi'_1 = f$ , so daß

$$(17) \quad C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi').$$

Setzen wir  $\Phi'_t = \Phi'_{1-t}$ , so gilt nach (14)

$$(18) \quad C(1_X, 1_Y, \Phi') \circ C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1}) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi' \circ \Phi^{-1}),$$

$$(19) \quad C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1}) \circ C(1_X, 1_Y, \Phi) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1} \circ \Phi).$$

Es gibt eine stetig von allen Variablen abhängende Schar  $\Psi_t^\tau: X \rightarrow Y$ ,  $t, \tau \in I$ , mit  $\Psi_t^0 = (\Phi' \circ \Phi^{-1})_t$  und  $\Psi_t^1 = f$  für alle  $t \in I$ ; man braucht nur

$$\Psi_t^\tau = \begin{cases} \Phi'_{(1-\tau) \cdot 2t}, & t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_{1-(1-\tau)(2-2t)}^{-1} = \Phi'_{(1-\tau)(2-2t)}, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

zu setzen [vgl. (13)]. Daher folgt aus B):

$$(20) \quad C(1_X, 1_Y, \Phi' \circ \Phi^{-1}) \simeq C(1_X, 1_Y, \Psi^1) = C(1_X, 1_Y).$$

Nach Definition gilt [vgl. (9)]

$$C(1_X, 1_Y)(y) = y, \quad y \in Y$$

$$C(1_X, 1_Y)(x, s) = \begin{cases} (x, 2s), & s \leq \frac{1}{2}, \quad x \in X \\ f(x) = (x, 1), & s \geq \frac{1}{2}, \quad x \in X, \end{cases}$$

woraus man leicht entnimmt, daß  $C(1_X, 1_Y)$  zur Identität von  $C_t$  homotop ist. Wegen (20) und (18) ist dann auch die linke Seite von (18) zur Identität homotop. Entsprechendes gilt für (19), d.h.  $C(1_X, 1_Y, \Phi')$  ist eine Homotopieäquivalenz und damit wegen (17) auch die rechte Seite von (15).

### § 3. Bedingungen für die Monomorphie von $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$

3.1. Folgende Feststellungen sind nahezu trivial:

A)  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann nullhomotop, wenn die induzierte Abbildung der Homotopiemengen  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  für jeden Bildraum  $V$  die Nullabbildung ist. [ $0 \in \pi(X, V)$  ist die Homotopieklasse von  $X \rightarrow v_0 = \text{Grundpunkt von } V$ , vgl. 1.3.]

B)  $f: X \rightarrow Y$  besitzt genau dann ein Links-Homotopieinverses  $l: Y \rightarrow X$  (d. h.  $l \circ f \simeq 1_X$ ), wenn  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  für jedes  $V$  epimorph<sup>4)</sup> ist.

Beweis von A). Aus  $f \simeq 0$  folgt  $f^*[a] = [a \circ f] = 0$  (vgl. 1.3) für alle  $a: Y \rightarrow V$ . Zum Nachweis der Umkehrung wähle man  $V = Y$ ; dann ist nach Voraussetzung insbesondere  $0 = f^*[1_Y] = [f]$ , d. h.  $f \simeq 0$ .

Beweis von B). Aus  $l \circ f \simeq 1$  folgt  $f^* \circ l^* = 1$  und daraus die Epimorphie von  $f^*$ . Zum Nachweis der Umkehrung wähle man  $V = X$ . Nach Voraussetzung gibt es dann ein  $l: Y \rightarrow V = X$  mit  $[1_X] = f^*[l] = [l \circ f]$ , d. h.  $l \circ f \simeq 1_X$  (vgl. 1.3).

Gibt es ein  $r: Y \rightarrow X$  mit  $f \circ r \simeq 1_Y$ , so folgt  $r^* \circ f^* = 1$ , d. h.

C) Besitzt  $f: X \rightarrow Y$  ein Rechts-Homotopieinverses, so ist  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  für jedes  $V$  monomorph<sup>4)</sup>.

Im Gegensatz zu A) und B) wäre hier die Umkehrung falsch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: Hat  $g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$  ( $S^n = n$ -Sphäre) den Grad 1, so ist  $g^*: \pi(S^2, V) \rightarrow \pi(S^1 \times S^1, V)$  für jedes  $V$  monomorph ([12] 6.4, Satz 5); es gibt aber kein Rechts-Homotopieinverses zu  $g$ , denn jede Abbildung  $S^2 \rightarrow S^1 \times S^1$  ist nullhomotop (wegen  $\pi(S^2, S^1 \times S^1) = \pi_2(S^1 \times S^1) \cong \pi_2(S^1) + \pi_2(S^1) = 0$ , s. STEENROD [15] 17.8 und 21.2 (2)). Mit Hilfe der Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  (vgl. 1.14) kann man unter gewissen Voraussetzungen über  $X$  und  $Y$  aber doch ein Kriterium für die Monomorphie von  $f^*$  finden, das notwendig und hinreichend ist (3.4 Satz 12).

Bemerkung. Die Aussage C) bleibt nach unserem Beweis richtig, wenn man „monomorph“ durch das schärfere „einwertig“ ersetzt. Eine Abbildung heißt einwertig, wenn je zwei verschiedene Elemente verschiedene Bilder haben. Bei der Monomorphie wird nur verlangt, daß kein von 0 verschiedenes Element in 0 übergeht. Tatsächlich gibt es Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ , deren induzierte Abbildung  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  für alle  $V$  monomorph, aber für gewisse  $V$  nicht einwertig ist (vgl. 4.1 und 4.6 Beispiel A). Genaueres darüber findet man in § 4; hier steht die Frage nach der Monomorphie im Vordergrund.

3.2. Ist  $f: X \rightarrow Y$  die konstante Abbildung von  $X$  in den Grundpunkt von  $Y$ , so ist  $C_f = Y \vee SX$ . Das Zeichen  $\vee$  bedeutet dabei die topologische Summe mit Identifizierung der Grundpunkte, d. h.

$$A \vee B = (A + B) / \{a_0, b_0\},$$

<sup>4)</sup> Siehe Fußnote<sup>1)</sup> S. 300.

wenn  $a_0, b_0$  die Grundpunkte der Räume  $A$  bzw.  $B$  sind. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen von  $C_i$  (1.4) und  $SX$  (1.8).  $Pf: Y \rightarrow Y \vee SX$  (vgl. 1.4) ist die Injektion und  $Qf: Y \vee SX \rightarrow SX$  [vgl. 1.9 (3)] die natürliche Projektion, bei der  $Y$  in den Grundpunkt übergeht. Durchläuft man die Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  (vgl. 1.11) weiter, so erhält man:

- a)  $Sf: SX \rightarrow SY$  ist die konstante Abbildung,
- b)  $SPf: SY \rightarrow S(Y \vee SX) = SY \vee S^2X$  ist die Injektion,
- c)  $SQf: S(Y \vee SX) = SY \vee S^2X \rightarrow S^2X$  ist die natürliche Projektion, usw.

[Bei b) und c) wurde von der allgemeinen Beziehung  $S(A \vee B) = SA \vee SB$  Gebrauch gemacht, die sich aus den Definitionen unter Benutzung von 1.1 Hilfssatz 1 leicht ergibt.] Da nach 2.4 Satz 9 der Homotopietyp von  $\mathfrak{A}f$  nur vom Homotopietyp von  $f$  abhängt, folgt:

**Satz 10.** *Die Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  (vgl. 1.11) einer nullhomotopen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  stimmt bis auf Homotopieäquivalenz mit der aus konstanten Abbildungen, Injektionen und Projektionen (in periodischem Wechsel) bestehenden Folge*

$$X \rightarrow Y \rightarrow Y \vee SX \rightarrow SX \rightarrow SY \rightarrow SY \vee S^2X \rightarrow \dots$$

*überein.*

**3.3. Satz 11.** *Ist die durch  $f: X \rightarrow Y$  induzierte Abbildung der Homotopiemengen  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  monomorph für jedes  $V$ , so besitzt die Einhängung  $Sf$  ein Rechts-Homotopieinverses.*

**Beweis.** Aus der Monomorphie von  $f^*$  folgt wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge (1.12 Satz 6)  $(Pf)^* = 0$ . Da das für alle  $V$  gilt, folgt nach 3.1 A)  $Pf \simeq 0$ . Wendet man Satz 10 auf  $Pf: Y \rightarrow C_i$  (an Stelle von  $f: X \rightarrow Y$ ) an, so ergibt sich, daß  $QPf$  mit der natürlichen Projektion  $p: C_i \vee SY \rightarrow SY$  homotopieäquivalent ist. Die Injektion  $SY \rightarrow C_i \vee SY$  ist rechts-(homotopie-)invers zu  $p$ . Nach 1.11 Satz 5 ist  $QPf \equiv P^2Pf$  und  $P^3f \equiv Sf$  also  $Sf \equiv P^3f \equiv QPf \equiv p$ . Mit  $p$  hat daher auch  $Sf$  ein Rechts-Homotopieinverses.

Satz 11 ist eine „abgeschwächte Umkehrung“ von 3.1 C); denn wenn  $f$  ein Rechts-Homotopieinverses besitzt, so auch  $Sf$  (aber nicht umgekehrt). Im folgenden Abschnitt wird sich zeigen, daß auch die genaue Umkehrung von Satz 11 richtig ist (3.4 Satz 12), allerdings nicht ohne gewisse Voraussetzungen über die Räume  $X$  und  $Y$  (vgl. das Beispiel am Schluß von 3.4).

**3.4. Satz 12.** *Sind  $X$  und  $Y$  zusammenhängende CW-Komplexe und ist  $Y$  einfach zusammenhängend, so induziert  $f: X \rightarrow Y$  genau dann Monomorphismen  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  der Homotopiemengen für jeden Bildraum  $V$ , wenn die Einhängung  $Sf$  ein Rechts-Homotopieinverses besitzt.*

Wir benötigen folgende Hilfssätze, deren Beweise in den nächsten Abschnitten nachgeholt werden:

**Hilfssatz 8.** *Wenn es zu  $Pf: Y \rightarrow C_i$  (für irgendein  $f: X \rightarrow Y$ , vgl. 1.4) ein Rechts-Homotopieinverses  $r: C_i \rightarrow Y$  gibt, so ist die Einhängung  $S_p$  der durch*

$f$  und  $r$  gegebenen Abbildung  $\psi: X \vee C_f \rightarrow Y$  (d.h.  $\psi|_X = f, \psi|_{C_f} = r$ ) eine Homotopieäquivalenz.

Hilfssatz 9. Sind  $X$  und  $Y$  zusammenhängende CW-Komplexe und ist  $Y$  einfach zusammenhängend, so ist  $C_f$  für jedes  $f: X \rightarrow Y$  einfach zusammenhängend und zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent.

Wählt man für  $Y$  speziell einen Raum, der nur aus dem Grundpunkt besteht, so ist  $C_f = SX$  (vgl. 1.8), und man erhält aus Hilfssatz 9:

Folgerung. Ist  $X$  ein zusammenhängender CW-Komplex, so ist  $SX$  einfach zusammenhängend.

Hilfssatz 10. Für jeden CW-Komplex  $A$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus  $H_q(A) \cong H_{q+1}(SA)$ ,  $q > 0$ , der Homologiegruppen zu beliebiger Koeffizientengruppe.

„Natürlich“ bedeutet hier, daß für jede Abbildung  $g: A \rightarrow B$  zwischen CW-Komplexen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(A) \cong H_{q+1}(SA) & & \\ g_* \downarrow & \downarrow (Sg)_* & q > 0 \\ H_q(B) \cong H_{q+1}(SB) & & \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis von Satz 12. Daß die Bedingung für Monomorphie notwendig ist (sogar ohne Voraussetzungen über  $X$  und  $Y$ ), wurde schon in 3.3 Satz 11 festgestellt.

Wir müssen noch zeigen, daß sie hinreichend ist, gehen also davon aus, daß  $Sf$  ein Rechts-Homotopieinverses besitzt. Nach 1.11 Satz 5 ist  $Sf \equiv P^3f$  und  $P^2f \equiv Qf$ . Aus letzterem folgt  $P^3f \equiv PQf$ , wenn man auf beide Seiten den Operator  $P$  anwendet (vgl. 2.4 Satz 9). Mit  $Sf$  besitzt daher auch  $PQf$  ein Rechts-Homotopieinverses. Wir wenden Hilfssatz 8 auf  $Qf: C_f \rightarrow SX$  (an Stelle von  $f: X \rightarrow Y$ ) an und erhalten eine Abbildung  $\psi: C_f \vee C_{Qf} \rightarrow SX$ , für die  $\psi|_{C_f} = Qf$  gilt und deren Einhängung  $S\psi$  eine Homotopieäquivalenz ist. Die Voraussetzungen über  $X$  und  $Y$  gestatten es, daraus zu folgern, daß  $\psi$  selbst eine Homotopieäquivalenz ist. Stellen wir den Beweis dafür zunächst zurück, so wird folgendermaßen weitergeschlossen:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{i} & C_f \vee C_{Qf} \\ & \searrow Qf & \downarrow \psi \\ & & SX \end{array}$$

worin  $i$  die Injektion bezeichnet, ist wegen  $\psi|_{C_f} = Qf$  kommutativ. Weil  $\psi$  (wie wir noch zu zeigen haben) eine Homotopieäquivalenz ist, folgt  $Qf \equiv i$ . Die natürliche Projektion  $C_f \vee C_{Qf} \rightarrow C_f$  ist links-(homotopie-)invers zu  $i$ , also besitzt auch  $Qf$  ein Links-Homotopieinverses. Nach 3.1 B) ist dann

$$(Qf)^*: \pi(SX, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$$

für jedes  $V$  epimorph, und wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge  $\mathcal{A}f$  (1.12 Satz 6) folgt nacheinander:

$$(Pf)^* = 0, \\ f^* \text{ ist monomorph,}$$

und das war zu beweisen.

Es bleibt zu zeigen, daß  $\psi: C_f \vee C_{Qf} \rightarrow SX$  eine Homotopieäquivalenz ist, wenn  $S\psi$  es ist: Wegen  $Qf \equiv P^2f$  (1.11 Satz 5) ist

$$C_{Qf} \equiv C_{P^2f} \quad (2.4 \text{ Satz 9 oder Hilfssatz 7}) \\ \equiv SY \quad (1.11 \text{ Satz 5}).$$

Nach Hilfssatz 9 ist  $C_f$  einfach zusammenhängend und zu einem  $CW$ -Komplex homotopieäquivalent. Das gleiche gilt für  $SX$  und  $SY$  (Folgerung aus Hilfssatz 9) und folglich auch für  $C_f \vee C_{Qf} \equiv C_f \vee SY$ . Demnach ist  $\psi$  mit einer Abbildung  $\psi': A \rightarrow B$  zwischen zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden  $CW$ -Komplexen  $A, B$  homotopieäquivalent. Aus  $\psi \equiv \psi'$  folgt  $S\psi \equiv S\psi'$  (vgl. 1.8), d.h. mit  $S\psi$  ist auch  $S\psi'$  eine Homotopieäquivalenz. Als solche induziert  $S\psi'$  Isomorphismen der Homologiegruppen  $H_{q+1}(SA) \rightarrow H_{q+1}(SB)$  für alle  $q$ . Nach Hilfssatz 10 induziert dann auch  $\psi'$  Isomorphismen  $H_q(A) \rightarrow H_q(B)$  für alle  $q > 0$ . Nach einem bekannten Satz von J. H. C. WHITEHEAD ([19] Th. 3) folgt daraus, daß  $\psi'$  eine Homotopieäquivalenz ist. Wegen  $\psi \equiv \psi'$  ist der Beweis von Satz 12 damit beendet.

Daß die Voraussetzungen über  $X$  und  $Y$  in Satz 12 nicht entbehrlich sind, zeigt folgendes Beispiel:  $X$  bestehe nur aus dem Grundpunkt  $x_0$ , und  $Y$  sei ein zusammenhängender  $CW$ -Komplex mit  $H_q(Y) = 0$  für alle  $q > 0$ , der aber nicht einfach zusammenhängend ist. (Ist  $M^3$  ein Poincaréscher Raum, vgl. SEIFERT-THRELFALL [13] S. 218 und  $e^3$  eine 3-Zelle einer Zerlegung von  $M^3$ , so hat z.B.  $Y = M^3 - e^3$  die geforderten Eigenschaften.) Die Abbildung  $f: X = \{x_0\} \rightarrow y_0 \in Y$  induziert nicht für jedes  $V$  einen Monomorphismus  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ ; denn z.B. für  $V = Y$  ist  $[1_Y] \neq 0$  aber  $f^*[1_Y] = [f] = 0$ . Die Einhängung  $Sf$  besitzt jedoch trotzdem ein Rechts-Homotopieinverses, ja sie ist sogar eine Homotopieäquivalenz nach J. H. C. WHITEHEAD [19] Th. 3, denn  $SY$  ist ebenso wie  $SX$  einfach zusammenhängend (Folgerung aus Hilfssatz 9), und  $Sf$  induziert Isomorphismen der (trivialen) Homologiegruppen (vgl. Hilfssatz 10).

**3.5. Beweis von Hilfssatz 8.** Bezeichnet  $i: X \rightarrow X \vee C_f$  die Injektion, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X \vee C_f \\ 1_X \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

nach Definition von  $\psi$  kommutativ. Also ist  $(1_X, \psi)$  eine Transformation von  $i$  in  $f$  (vgl. 2.1) und induziert nach 2.2 die Transformation  $(1_X, \psi, \chi,$

$S1_X, S\psi, \dots$ ) der Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}i$  in  $\mathfrak{A}f$  mit  $\chi = C(1_X, \psi): C_i \rightarrow C_f$ . Offenbar ist  $C_i = CX \vee C_f$ . Nach Definition von  $\chi$  [2.2 (9)] gilt  $\chi|(X \vee C_f) = Pf \circ \psi$ , also insbesondere  $\chi|C_f = Pf \circ \psi$ . Nach Voraussetzung ist diese Abbildung zur Identität von  $C_f$  homotop. Ist  $j: C_f \rightarrow CX \vee C_f$  die Injektion, so gilt also

$$\chi \circ j = \chi|C_f \simeq 1_{C_f}.$$

Weil sich  $CX$  auf den Grundpunkt zusammenziehen läßt, ist  $j$  eine Homotopieäquivalenz, und folglich auch  $\chi$ . Da demnach die beiden in  $(1_X, \psi, \chi, S1_X, S\psi, \dots)$  aufeinanderfolgenden Abbildungen  $\chi$  und  $S1_X = 1_{SX}$  Homotopieäquivalenzen sind, ist es nach 2.4 Satz 8b) auch die nächste Abbildung  $S\psi$ , und Hilfssatz 8 ist bewiesen.

Hilfssatz 9 läßt sich mit geläufigen Methoden leicht beweisen, und Hilfssatz 10 ist bekannt, aber anscheinend nirgends in dieser Form veröffentlicht. Der Vollständigkeit halber führen wir die Beweise aus:

**3.6. Beweis von Hilfssatz 9.** Sind  $X, Y$  CW-Komplexe<sup>5)</sup>, so gibt es zu jeder Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine homotope Zellenabbildung  $f': X \rightarrow Y$ , d.h. eine Abbildung  $f'$ , die jedes Gerüst  $X^{(q)}$  (Vereinigung aller Zellen von  $X$ , deren Dimension höchstens  $q$  ist) in das entsprechende Gerüst  $Y^{(q)}$  von  $Y$  abbildet (J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (L)). Homotope Abbildungen sind insbesondere homotopieäquivalent, also folgt aus 2.4 Hilfssatz 7:  $C_f \equiv C_{f'}$ . Für den Beweis von Hilfssatz 9 kann man sich daher auf den Fall beschränken, daß  $f$  schon eine Zellenabbildung ist:

Wir setzen  $\tilde{C}X = (X \times I)/(X \times 0)$  und betrachten an Stelle von  $C_f$  zunächst den Raum  $\tilde{C}_f$ , der aus  $\tilde{C}X + Y$  entsteht, wenn man  $(x, 1) \in \tilde{C}X$  für jedes  $x \in X$  mit  $f(x) \in Y$  identifiziert.  $(x_0, 1) = y_0$  sei der Grundpunkt von  $\tilde{C}_f$ .  $x_0 \times I$  läßt sich als Teilraum von  $\tilde{C}_f$  auffassen, und es gilt  $\tilde{C}_f/(x_0 \times I) = C_f$  (vgl. 1.4). Aus den Zellenzerlegungen von  $X$  und  $Y$  erhält man in natürlicher Weise Zellenzerlegungen von  $X \times I$ ,  $\tilde{C}X$  und schließlich von  $\tilde{C}_f$ ;  $\tilde{C}_f$  ist mit dieser Zerlegung ein CW-Komplex, weil  $f$  eine Zellenabbildung sein sollte (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (H) und § 8), und  $x_0 \times I$  ist offenbar ein Teilkomplex. Folglich ist auch  $C_f = \tilde{C}_f/(x_0 \times I)$  ein CW-Komplex. Weil  $x_0 \times I$  zusammenziehbar ist und sich eine solche Zusammenziehung zu einer Homotopie der Identität von  $\tilde{C}_f$  fortsetzen läßt (vgl. 1.6), folgt aus 1.2 Hilfssatz 3:

*Die natürliche Projektion*

$$p: \tilde{C}_f \rightarrow \tilde{C}_f/(x_0 \times I) = C_f$$

*ist eine Homotopieäquivalenz.*

Es braucht nun nur noch gezeigt zu werden, daß  $\tilde{C}_f$  einfach zusammenhängend ist. Hierzu ist die Voraussetzung, daß  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe sind, übrigens nicht mehr erforderlich. Die Teilmengen  $U = \tilde{C}_f - \{(x_0, 0)\}$  und  $V = \tilde{C}_f - Y = \tilde{C}X - X \times 1$  bilden eine offene Überdeckung von  $\tilde{C}_f$  (Fig. 5).  $w: I \rightarrow \tilde{C}_f$  sei ein geschlossener Weg mit dem Anfangspunkt  $y_0 \in Y \subset \tilde{C}_f$ .

<sup>5)</sup> Siehe Fußnote <sup>3)</sup> S. 307.

Wegen der Kompaktheit von  $I$  gibt es eine positive Zahl  $\varepsilon$ , so daß jedes Teilintervall von  $I$ , dessen Länge kleiner als  $\varepsilon$  ist, entweder in  $w^{-1}(U)$  oder in  $w^{-1}(V)$  liegt (Lebesguesche Zahl). Folglich setzt sich  $w$  aus endlich vielen Wegen  $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots$  zusammen, so daß  $u_v$  ganz in  $U$  und  $v_v$  ganz in  $V$  verläuft. Weil  $X$  zusammenhängend ist, lassen sich die Endpunkte von  $v_v$  innerhalb  $U \cap V = X \times (I - \{0, 1\})$  durch einen Weg  $v'_v$  verbinden. Wegen der Zusammenziehbarkeit von  $V$  ist  $v_v$  unter Festhaltung der Endpunkte mit  $v'_v$ , also

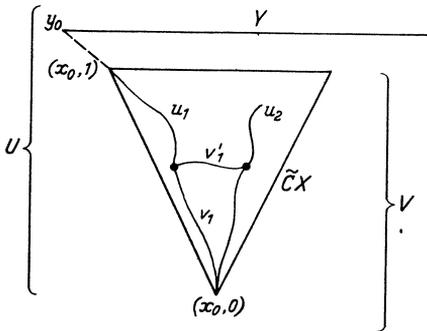


Fig. 5

$w = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots$  mit  $w' = u_1 v'_1 u_2 v'_2 \dots$  homotop.  $w'$  liegt ganz in  $U$ ,  $Y$  ist Deformationsretrakt von  $U$  und nach Voraussetzung einfach zusammenhängend; folglich ist  $w' \simeq w$  nullhomotop, und Hilfssatz 9 ist bewiesen.

**3.7. Beweis von Hilfssatz 10.** Nach 1.8 Hilfssatz 5 ist die natürliche Projektion  $p: \tilde{S}A \rightarrow SA$  eine Homotopieäquivalenz, wenn  $A$  ein CW-Komplex ist. Ohne jede Voraussetzung über  $A$  gilt:

Hilfssatz 11. Für jeden Raum  $A$  und jedes  $q > 0$  bestehen die Isomorphismen

$$(21) \quad H_q(A) \xleftarrow[\cong]{\partial_*} H_{q+1}(\tilde{C}A, A) \xrightarrow[\cong]{\tilde{p}_*} H_{q+1}(\tilde{S}A, (a_0, 1)) \cong H_{q+1}(\tilde{S}A).$$

Dabei ist  $\tilde{C}A = (A \times I)/(A \times 0)$  wie in 3.6;  $A$  wird mit  $A \times 1 \subset \tilde{C}A$  identifiziert.  $\partial_*$  ist der Randhomomorphismus der Homologiefolge und  $\tilde{p}: \tilde{C}A \rightarrow \tilde{C}A/A = \tilde{S}A$  die natürliche Projektion.

Wird im Fall der CW-Komplexe  $p_*: H_{q+1}(\tilde{S}A) \xrightarrow{\cong} H_{q+1}(SA)$  an (21) angeschlossen, so erhält man den in Hilfssatz 10 behaupteten Isomorphismus  $H_q(A) \cong H_{q+1}(SA)$ . Er ist natürlich, weil bei jedem einzelnen Schritt ein natürlicher Isomorphismus vorliegt.

Beweis von Hilfssatz 11.  $\tilde{C}A$  ist zusammenziehbar, also  $H_q(\tilde{C}A) = 0$  für alle  $q > 0$ . Daß  $\partial_*$  ein Isomorphismus ist, folgt demnach aus der Exaktheit der Homologiefolge

$$0 = H_{q+1}(\tilde{C}A) \rightarrow H_{q+1}(\tilde{C}A, A) \xrightarrow{\partial_*} H_q(A) \rightarrow H_q(\tilde{C}A) = 0.$$

Um zu zeigen, daß  $\tilde{p}_*$  ein Isomorphismus ist, setzen wir

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(a, s) \mid s \geq \frac{1}{3}\} \subset \tilde{C}A \\ U_2 &= \{(a, s) \mid s \geq \frac{2}{3}\} \subset \tilde{C}A \end{aligned} \quad a \in A, s \in I.$$

Wie man leicht sieht, gibt es eine Homotopie der Identität von  $\tilde{C}A$ , die  $U_1$  in sich auf  $A (= A \times 1 \subset \tilde{C}A)$  zusammenzieht und  $A$  punktweise festläßt. Daraus folgt

$$(22) \quad H_{q+1}(\tilde{C}A, A) \cong H_{q+1}(\tilde{C}A, U_1).$$

Nach dem Ausschneidungssatz für die Homologiegruppen („excision property“, vgl. EILENBERG-STEENROD [5] Chap. VII, Th. 9.1) ist

$$(23) \quad H_{q+1}(\tilde{C}A, U_1) \cong H_{q+1}(\tilde{C}A - U_2, U_1 - U_2).$$

Setzt man (22) mit (23) zusammen und verfährt man für  $\tilde{S}A$  analog, so erhält man das kommutative Diagramm

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} H_{q+1}(\tilde{C}A, A) & \cong & H_{q+1}(\tilde{C}A - U_2, U_1 - U_2) \\ \tilde{p}_* \downarrow & & \downarrow (\tilde{p}|_{(\tilde{C}A - U_2)_*}) \\ H_{q+1}(\tilde{S}A, (a_0, 1)) & \cong & H_{q+1}(\tilde{S}A - \tilde{p}(U_2), \tilde{p}(U_1 - U_2)). \end{array}$$

Weil  $\tilde{p}|_{(\tilde{C}A - U_2)}$  eine Homöomorphie ist, ist  $(\tilde{p}|_{(\tilde{C}A - U_2)})_*$  und daher auch  $\tilde{p}_*$  ein Isomorphismus.

#### § 4. Algebraische Strukturen in $\pi(X, V)$

4.1. In § 3 wurde untersucht, wann eine Abbildung  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  zwischen Homotopiemengen, die durch  $f: X \rightarrow Y$  induziert wird, monomorph ist. Es wurde schon erwähnt, daß dabei Monomorphie nicht mit Einwertigkeit äquivalent ist (3.1 Bemerkung). Sei z.B.  $X = S^3, Y = V = S^2$ , d.h.  $\pi(Y, V) = \pi_2(S^2) \cong Z$  (= Gruppe der ganzen Zahlen) und  $\pi(X, V) = \pi_3(S^2) \cong Z$  (vgl. STEENROD [15] 21.2). Hat  $f: S^3 \rightarrow S^2$  die Hopfsche Invariante 1 (vgl. H. HOPF [7]) und  $a_n: S^2 \rightarrow S^2$  den Grad  $n$ , so hat  $a_n \circ f$  die Hopfsche Invariante  $n^2$  ([7] Satz IIb'). Da die Hopfsche Invariante einer Abbildung  $S^3 \rightarrow S^2$  ihre Homotopieklasse bestimmt, gilt einerseits

$$f^*[a_n] = [a_n \circ f] = [a_{-n} \circ f] = f^*[a_{-n}];$$

andererseits ist nur dann  $f^*[a_n] = 0$ , wenn  $n = 0$ , also  $[a_n] = 0$  ist. Demnach ist  $f^*$  monomorph, bildet aber  $[a_n]$  und  $[a_{-n}]$ , die für  $n \neq 0$  voneinander verschieden sind, in dasselbe Element ab.

Im Gegensatz zu diesem Beispiel gilt

*GM:  $f^{*-1}f^*[a]$  besitzt für jedes  $[a] \in \pi(Y, V)$  die gleiche Mächtigkeit,*

sicher dann, wenn es in  $\pi(X, V)$  und  $\pi(Y, V)$  Gruppenstrukturen gibt, so daß  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  ein Homomorphismus ist. Wir werden in diesen Paragraphen einige Bemerkungen über algebraische Strukturen in den Abbildungsmengen sowie über die Gültigkeit von *GM* machen. Unter anderem ergänzen wir dabei die Ergebnisse von § 3 in bezug auf die Frage nach der Einwertigkeit.

4.2. Für Abbildungen  $\alpha, \beta: SX \rightarrow V$  ( $SX$  ist die Einhängung von  $X$ , vgl. 1.8) liegt es nahe eine „Addition“ durch

$$(25) \quad (\alpha + \beta)(x, s) = \begin{cases} \alpha(x, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(x, 2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, s) \in SX$$

zu definieren. Es ist bekannt und man bestätigt ohne Schwierigkeiten, daß diese Verknüpfung beim Übergang zu den Homotopieklassen eine Gruppenoperation in  $\pi(SX, V)$  induziert. Wir schreiben sie wieder additiv, obwohl sie nicht abelsch zu sein braucht [Beispiel:  $\pi(S S^0, V) = \pi_1(V) =$  Fundamentalgruppe von  $V$ ].

Für die Einhängung einer Abbildung  $Sf: SX \rightarrow SY$  gilt

$$(\alpha + \beta) \circ Sf = \alpha \circ Sf + \beta \circ Sf,$$

wie man aus der Definition (25) unmittelbar entnimmt. Folglich induziert  $Sf$  einen Homomorphismus

$$(Sf)^* : \pi(SY, V) \rightarrow \pi(SX, V) \quad (\text{vgl. 1.3}).$$

Die durch die Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  (vgl. 1.11) induzierte exakte Folge von Homotopiemengen (vgl. 1.12)

$$(26) \quad \pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(P)^*} \pi(C_f, V) \xleftarrow{(Q)^*} \pi(SX, V) \xleftarrow{(S)^*} \dots$$

besteht demnach von der vierten Stelle an aus Gruppen und Homomorphismen. Beschränkt man sich auf diesen Teil und nimmt man für  $f$  eine Injektion  $X < Y$ , bei der die Homotopieerweiterungseigenschaft  $HE$  von 1.6 erfüllt ist, so erhält man die „track group sequence“ von BARRATT [1] für das Raumtripel  $\{x_0\} < X < Y$ . Nach 1.6 Satz 2 ist nämlich  $C_f \equiv Y/X$ , folglich  $S^n C_f \equiv S^n(Y/X)$  und daher  $\pi(S^n C_f, V) \cong \pi(S^n(Y/X), V)$ .

$$\pi(S^n X, V), \quad \pi(S^n Y, V) \quad \text{und} \quad \pi(S^n(Y/X), V)$$

sind aber gerade die Barrattschen track groups

$$(X, x_0)^n(V, v_0; v_0), \quad (Y, x_0)^n(V, v_0; v_0) \quad \text{bzw.} \quad (Y, X)^n(V, v_0; v_0).$$

Die track group sequence für ein Raumtripel  $A < B < C$  mit beliebigem  $A$  erhält man, falls  $A$  nicht leer ist, aus der Abbildungsfolge von  $B/A < C/A$ . Wenn  $A$  leer ist, kann man  $\emptyset < B < C$  durch  $\{a_0\} < B + \{a_0\} < C + \{a_0\}$  ersetzen, ohne die track group sequence zu ändern, und damit diesen Fall auf den vorigen zurückführen. Unsere exakte Folge von Homotopiemengen (26) verallgemeinert und verlängert also die track group sequence.

**4.3.** Wir werden hier auch an der dritten Stelle der Folge (26) eine algebraische Struktur definieren nämlich eine Operation von  $\pi(SX, V)$  in  $\pi(C_f, V)$ . Für  $\alpha: SX \rightarrow V$ ,  $a: C_f \rightarrow V$  wird  $\alpha \tau a: C_f \rightarrow V$  durch

$$(27) \quad \begin{cases} (\alpha \tau a)(x, s) = \begin{cases} \alpha(x, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ a(x, 2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} & x \in X, s \in I \\ (\alpha \tau a)(y) = a(y), & y \in Y \end{cases}$$

definiert (Fig. 6). Durch Übergang zu den Homotopieklassen ergibt sich eine Verknüpfung  $\pi(SX, V) \times \pi(C_f, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$ , die wir auch mit  $\tau$  bezeichnen

und die folgenden Regeln genügt ( $[\alpha], [\beta] \in \pi(SX, V)$ ,  $[a], [b] \in \pi(C_f, V)$ ):

- A)  $[\alpha] \top ([\beta] \top [a]) = ([\alpha] + [\beta]) \top [a]$ ,
- B)  $0 \top [a] = [a]$ ,
- C)  $[\alpha] \top (Qf)^*[\beta] = (Qf)^*([\alpha] + [\beta])$ .

Man bestätigt diese Regeln sehr leicht anhand der Definitionen (25) und (27). Bei C) sei daran erinnert, daß  $Qf: C_f \rightarrow C_f/Y = SX$  die natürliche Projektion

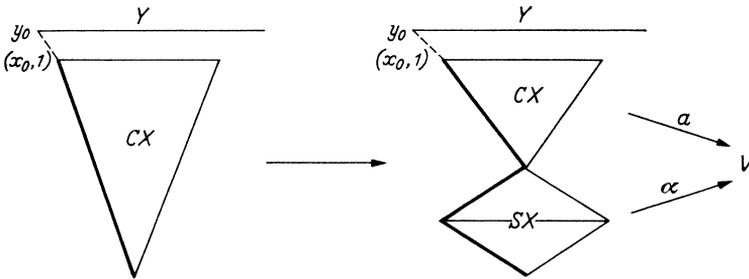


Fig. 6. Jede stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen

ist (1.9). Ist  $[\alpha] \top [a] = [\alpha] \top [b]$ , so folgt aus A) und B):

$$\begin{aligned}
 [a] &= 0 \top [a] = (-[\alpha] + [\alpha]) \top [a] = (-[\alpha]) \top ([\alpha] \top [a]) \\
 &= (-[\alpha]) \top ([\alpha] \top [b]) = [b],
 \end{aligned}$$

also

D) Die Zuordnung  $[a] \rightarrow [\alpha] \top [a]$  definiert für jedes  $[\alpha]$  eine einwertige Abbildung.

Aus C) folgt insbesondere:

E)  $[\alpha] \top 0 = (Qf)^*[\alpha]$ .

4.4. Mit Hilfe von 4.3 kann man die Frage, wann zwei Elemente von  $\pi(SX, V)$  durch  $(Qf)^*$  in dasselbe Element von  $\pi(C_f, V)$  abgebildet werden, auf die Frage nach Kern  $(Qf)^* = \text{Bild}(Sf)^*$  (vgl. 1.12 Satz 6) zurückführen:

$$\begin{aligned}
 (Qf)^*[\alpha] &= (Qf)^*[\beta] \text{ ist nach 4.3 D) mit} \\
 (-[\alpha]) \top (Qf)^*[\alpha] &= (-[\alpha]) \top (Qf)^*[\beta]
 \end{aligned}$$

äquivalent. Nach 4.3 C) ist die rechte Seite hiervon  $(Qf)^*(-[\alpha] + [\beta])$  und die linke  $(Qf)^*(-[\alpha] + [\alpha]) = 0$ .  $[\alpha]$  und  $[\beta]$  haben also genau dann das gleiche Bild bei  $(Qf)^*$ , wenn

$$-[\alpha] + [\beta] \in \text{Kern}(Qf)^* = \text{Bild}(Sf)^*$$

ist. Insbesondere hat  $(Qf)^*^{-1}(Qf)^*[\alpha]$  für jedes  $[\alpha] \in \pi(SX, V)$  die gleiche Mächtigkeit, und zwar die Mächtigkeit von  $\text{Bild}(Sf)^*$ .

Das gleiche gilt für jede Abbildung, die zu  $Qf$  homotopieäquivalent ist (zur Definition vgl. 1.2), da eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen

Räumen einen Isomorphismus zwischen den entsprechenden Homotopiemengen induziert. Wir fassen zusammen:

**Satz 13.** *Ist  $f: X \rightarrow Y$  für eine geeignete Abbildung  $f'$  mit  $Qf'$  ( $\equiv P^2f'$ , vgl. 1.11 Satz 5) homotopieäquivalent, so gilt GM (vgl. 4.1) für die induzierte Abbildung  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  ( $V$  beliebig), d.h. für jedes  $[\alpha] \in \pi(Y, V)$  hat  $f^{*-1}f^*[\alpha]$  die gleiche Mächtigkeit. Ist insbesondere  $f^*$  monomorph, so ist es sogar einwertig.*

Als Beispiel betrachten wir einen Raum  $Y \cup e^n$ , der aus  $Y$  durch Anheften einer  $n$ -Zelle entsteht, d.h.  $Y \cup e^n = C_f$  für geeignetes  $f': S^{n-1} \rightarrow Y$  (vgl. das Beispiel in 1.4). Die natürliche Projektion  $f: Y \cup e^n \rightarrow (Y \cup e^n)/Y = S^n$  ist nichts anderes als  $Qf'$  (vgl. 1.9). Folglich gilt GM für  $f^*$ . Wir werden einen Spezialfall dieses Beispiels, nämlich den Fall, daß  $Y \cup e^n$  eine  $n$ -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ist, im zweiten Teil der Arbeit [12] noch einmal aufgreifen.

**4.5.** Untersucht man die in 4.4 behandelte Frage für  $Pf: Y \rightarrow C_f$  (vgl. 1.4) an Stelle von  $Qf$ , so ergibt sich:

Für  $a, b: C_f \rightarrow V$  ist genau dann  $(Pf)^*[a] = (Pf)^*[b]$ , wenn es ein  $\alpha: SX \rightarrow V$  mit  $[\alpha] \top [a] = [b]$  gibt.

Beweis.  $Pf: Y \rightarrow C_f$  ist die Injektion, also gilt  $(Pf)^*[a] = [a|Y]$ , und aus der Definition (27) folgt

$$(Pf)^*([\alpha] \top [a]) = (Pf)^*[a].$$

Das beweist die Implikation in der einen Richtung.

Sei nun umgekehrt  $(Pf)^*[a] = (Pf)^*[b]$ , d.h.  $a|Y \simeq b|Y$  vorausgesetzt. Nach 1.9 Hilfssatz 6 hat  $(C_f, Y)$  die Homotopieerweiterungseigenschaft HE von 1.6, folglich gibt es ein  $b': C_f \rightarrow V$  mit  $b' \simeq b$  und  $b'|Y = a|Y$ . Wegen der Identifizierung  $CX \ni (x, 1) = f(x) \in Y$  in  $C_f$  folgt  $b'(x, 1) = a(x, 1)$  für alle  $x \in X$ . Daher definiert die Festsetzung

$$\alpha(x, s) = \begin{cases} b'(x, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ a(x, 2 - 2s), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Abbildung  $\alpha: SX \rightarrow V$ . Man zeigt leicht  $\alpha \top a \simeq b'$  (vgl. Fig. 6); denn  $Y \subset C_f$  wird durch  $\alpha \top a$  und  $b'$  gleich abgebildet, und der Weg  $(\alpha \top a)|_{I_x}$  mit  $I_x = \{(x, s) | s \in I\} \subset C_f$  setzt sich aus  $b'|_{I_x}$ , dem zu  $a|_{I_x}$  inversen Weg und dem Weg  $a|_{I_x}$  selbst zusammen. Aus  $\alpha \top a \simeq b'$  und  $b' \simeq b$  folgt die Behauptung  $[\alpha] \top [a] = [b]$ .

Das hiermit bewiesene Kriterium läßt sich auch in der Form

$$(28) \quad (Pf)^{*-1}(Pf)^*[a] = \pi(SX, V) \top [a] \quad \text{für alle } [a] \in \pi(C_f, V)$$

ausdrücken. Man kann daraus jedoch nicht etwa folgern, daß  $(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a]$  für jedes  $[a]$  gleiche Mächtigkeit hat. Es kann sogar vorkommen, daß  $(Pf)^{*-1}(Pf)^*[a]$  für  $[a] = 0$  nur ein Element, für ein gewisses anderes  $[a]$  aber unendlich viele Elemente besitzt — und umgekehrt. Das zeigen die folgenden Beispiele.

4.6. Beispiel A.  $f: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  sei die Injektion des ersten Faktors, d.h.  $f(x) = (x, x_0)$  für alle  $x \in S^1$ .  $C_f$  besteht dann aus dem Torus  $S^1 \times S^1$  und einer 2-Zelle  $e^2$  (vgl. Fig. 7 und das Beispiel in 1.4). Die Projektion  $\phi_1: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  auf den ersten Faktor ist links-(homotopie-)invers zu  $f$ , folglich  $S\phi_1$  links-(homotopie-)invers zu  $Sf$ . Nach 3.1 B) ist dann  $(Sf)^*: \pi(S(S^1 \times S^1), V) \rightarrow \pi(S S^1, V)$  epimorph. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge  $\mathcal{A}f$  (1.12 Satz 6) folgt nacheinander:  $(Qf)^* = 0$  und

$$(29) \quad \text{Kern } (Pf)^* = 0.$$

Das gilt für jedes  $V$ .

Sei andererseits  $V = S^1 \vee S^2$  (zur Definition vgl. 3.2). Wir definieren  $a: C_f \rightarrow V$  durch

$$\begin{aligned} a|_{(S^1 \times S^1)} &= i \circ \phi_2 \\ a(e^2) &= v_0 = \text{Grundpunkt von } V = S^1 \vee S^2, \end{aligned}$$

wobei  $i: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^2$  die Injektion und  $\phi_2: S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$  die Projektion auf den zweiten Faktor ist, und werden zeigen:

Hilfssatz 12. Die Zuordnung  $[\alpha] \rightarrow [\alpha] \tau [a]$  definiert eine einwertige Abbildung  $\pi(S S^1, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$ .

Daraus folgt, daß

$$(Pf)^{*^{-1}}(Pf)^*[a] = \pi(S S^1, V) \tau [a]$$

[vgl. 4.5 (28)] ebenso viele Elemente hat wie  $\pi(S S^1, V) = \pi_2(S^1 \vee S^2)$ , also abzählbar unendlich viele, während  $(Pf)^*$  nach (29) monomorph ist.

Beweis von Hilfssatz 12. Wir müssen zeigen, daß für jedes Paar  $\alpha, \beta: S S^1 = S^2 \rightarrow V = S^1 \vee S^2$  mit  $\alpha \not\cong \beta$  auch  $\alpha \tau a \not\cong \beta \tau a$  ist. Dazu denken wir uns  $C_f$  aus der Randsphäre  $S^2$  von  $E^2 \times I$  ( $E^2 =$  abgeschlossene Kreisscheibe) durch Identifizieren von  $E^2 \times 0$  mit  $E^2 \times 1$  entstanden (Fig. 7).  $\phi: S^2 \rightarrow C_f$  sei die natürliche Projektion. Nach Definition von  $\alpha \tau a$  [vgl. (27) und Fig. 6] repräsentiert  $(\alpha \tau a) \circ \phi | (x \times I)$  für jedes  $x$  aus dem Rand von  $E^2$  eine Erzeugende  $[i] = \iota \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$ , und

$$(\alpha \tau a) \circ \phi | (E^2 \times 0) = (\alpha \tau a) \circ \phi | (E^2 \times 1)$$

repräsentiert  $[\alpha] \in \pi_2(S^1 \vee S^2)$ . Folglich ist  $[(\alpha \tau a) \circ \phi]$  das Whitehead-Produkt  $[[\alpha], \iota]$  (vgl. [18] § 3). Es genügt nun zu zeigen, daß für  $\xi = [\alpha] - [\beta] \neq 0$  auch

$$[[\alpha], \iota] - [[\beta], \iota] = [\xi, \iota] \neq 0$$

ist (zur Bilinearität des Whitehead-Produkts vgl. [18] Th. 1 und 3.3). Nach [18] 3.2 ist  $[\xi, \iota] = \iota \cdot \xi - \xi$ , wobei  $\iota \cdot \xi$  das Bild von  $\xi$  bei Anwendung der Operation  $\iota \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$  bezeichnet. Sei  $\tilde{V}$  die universelle Überlagerung von  $V = S^1 \vee S^2$ . Die Operation  $\iota$  in  $\pi_2(S^1 \vee S^2)$  wird, wenn man  $\pi_2(S^1 \vee S^2)$  mit  $\pi_2(\tilde{V})$  identifiziert, durch die zu  $\iota$  gehörende Deckbewegung  $d_\iota$  von  $\tilde{V}$  induziert (vgl. EILENBERG [4] § 9).  $\tilde{V}$  besteht aus einer Geraden (der universellen

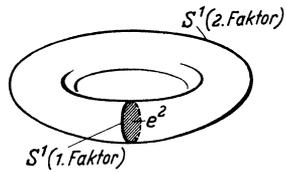


Fig. 7

Überlagerung von  $S^1$ ), an die abzählbar viele 2-Sphären in konstanten Abständen mit je einem Punkt angeheftet sind (Fig. 8).  $d_i$  „verschiebt“ dieses Gebilde um eine Stufe. Daraus entnimmt man leicht, daß die Operation  $\iota$  kein von 0 verschiedenes Element  $\xi \in \pi_2(S^1 \vee S^2) = \pi_2(\tilde{V})$  in sich abbildet, d.h.  $[\xi, \iota] = \iota \cdot \xi - \xi \neq 0$ .

Beispiel B. Das Produkt  $S^5 \times S^6$  kann man aus  $S^5 \vee S^6$  (vgl. 3.2) durch Anheften einer 11-Zelle erhalten, d.h. es gibt eine Abbildung  $f: S^{10} \rightarrow S^5 \vee S^6$  mit  $C_f = S^5 \times S^6$  (vgl. das Beispiel in 1.4).  $Pf: S^5 \vee S^6 \rightarrow S^5 \times S^6$  ist dann die

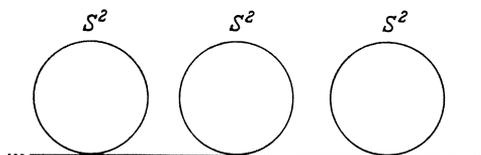


Fig. 8

natürliche Injektion, und wie wir zeigen werden (5.1 Satz 14) ist  $(P^2 f)^*: \pi(C_{Pf}, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$  monomorph für jedes  $V$ . Wegen  $P^2 f \equiv Qf$  (1.9 Satz 3) ist daher auch  $(Qf)^*: \pi(S S^{10}, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$  monomorph und folglich einwertig

(4.4 Satz 13). Also hat Kern  $(Pf)^* = \text{Bild } (Qf)^*$  (vgl. 1.12 Satz 6) ebenso viele Elemente wie  $\pi(S S^{10}, V) = \pi_{11}(V)$ . Nimmt man  $V = S^6$ , so hat Kern  $(Pf)^*$  unendlich viele Elemente, denn  $\pi_{11}(S^6)$  ist frei zyklisch (SERRE [14]).

Andererseits besteht  $(Pf)^{*^{-1}}(Pf)^*[a]$  nur aus  $[a]$  selbst, wenn  $a: S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$  die natürliche Projektion ist.

Beweis. Sei  $\mathcal{O}$  der Raum der Abbildungen  $S^6 \rightarrow S^6$  vom Grade 1 (ohne Festlegung eines Grundpunktes) und  $\mathfrak{F}$  der Teilraum derjenigen Abbildungen, die den Grundpunkt  $y_0 \in S^6$  in sich überführen.  $\mathcal{O}$  und  $\mathfrak{F}$  werden mit der „Kompakt-Offen-Topologie“ versehen (Topologie der kompakten Konvergenz bei BOURBAKI, vgl. [3] § 1, No. 3, III und § 2, Prop. 7), und die Identität  $S^6 \rightarrow S^6$  gilt als Grundpunkt. Man erhält eine (natürliche) Abbildung  $\omega: \pi_5(\mathcal{O}) \rightarrow \pi(S^5 \times S^6, S^6)$ , wenn man jedem  $g: S^5 \rightarrow \mathcal{O}$  die durch

$$(x, y) \rightarrow g(x)(y) = \text{Bild von } y \in S^6 \text{ bei Anwendung von } g(x) \in \mathcal{O}$$

gegebene Abbildung  $S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$  zuordnet und dann zu den Homotopieklassen übergeht. Bild  $\omega$  besteht aus den Homotopieklassen von solchen Abbildungen  $S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$ , deren Einschränkung auf  $x_0 \times S^6$  ( $x_0 =$  Grundpunkt von  $S^5$ ) die natürliche Abbildung  $x_0 \times S^6 \rightarrow S^6$  [d.h.  $(x_0, y) \rightarrow y$ ] ist. Andererseits ist für  $b: S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$  genau dann  $[b] \in (Pf)^{*^{-1}}(Pf)^*[a]$ , wenn  $b|(S^5 \vee S^6) \simeq a|(S^5 \vee S^6)$  ist. Weil  $S^5 \vee S^6$  Teilkomplex des CW-Komplexes  $S^5 \times S^6$  ist, gibt es dann ein  $b': S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$  mit  $b' \simeq b$  und  $b'|(S^5 \vee S^6) = a|(S^5 \vee S^6)$ . Nach Definition von  $a$  ist  $a|(x_0 \times S^6): x_0 \times S^6 \rightarrow S^6$  die natürliche Abbildung, also auch  $b'|(x_0 \times S^6)$ . Folglich gilt:

$$(Pf)^{*^{-1}}(Pf)^*[a] \subset \text{Bild } \omega = \omega(\pi_5(\mathcal{O})).$$

Es genügt nun,  $\pi_5(\mathcal{O}) = 0$  zu beweisen. Dazu betrachten wir die Abbildung  $\mathcal{O} \rightarrow S^6$ , definiert durch  $g \rightarrow g(y_0)$  für jedes  $g \in \mathcal{O}$ .  $\mathcal{O} \rightarrow S^6$  ist eine Faserung mit der Faser  $\mathfrak{F}$  (vgl. G. W. WHITEHEAD [16] (2.1)). Zu ihr gehört die exakte

Homotopiefolge

$$(30) \quad \dots \rightarrow \pi_6(S^6) \xrightarrow{\varrho} \pi_5(\mathfrak{F}) \rightarrow \pi_5(\mathfrak{G}) \rightarrow \pi_5(S^6) = 0.$$

Nach [16] (2.10) ist  $\pi_5(\mathfrak{F}) \cong \pi_{11}(S^6)$ . Identifiziert man diese beiden Gruppen, so ist  $\varrho(\xi)$  für jedes  $\xi \in \pi_6(S^6)$  bis auf das Vorzeichen das Whitehead-Produkt  $[\iota, \xi]$  (zur Definition s. [18] § 3), wobei  $\iota$  eine Erzeugende von  $\pi_6(S^6)$  ist (vgl. [16] (3.2) und die Berichtigung von J. H. C. WHITEHEAD [20] (3.1)).  $\pi_{11}(S^6)$  ist frei zyklisch (SERRE [14]) und wird von  $[\iota, \iota]$  erzeugt; denn  $[\iota, \iota]$  hat die Hopfsche Invariante 2 (G. W. WHITEHEAD [17] (3.49)), und  $\pi_{11}(S^6)$  enthält nach [17] § 9 nur Elemente mit gerader Hopfscher Invariante. Daraus folgt, daß  $\varrho$  epimorph, also wegen der Exaktheit von (30)  $\pi_5(\mathfrak{G}) = 0$  ist.

### § 5. Produkte

5.1. Die Abbildungsfolge (vgl. 1.11) erweist sich als ein nützliches Hilfsmittel für den Beweis einer zuerst von HILTON angegebenen Formel für die Einhängung eines topologischen Produkts von zwei Räumen. Nachher werden wir diese Formel auf mehrere Faktoren verallgemeinern.

Wir identifizieren  $X \vee Y$  (zur Definition vgl. 3.2) im folgenden immer mit der Teilmenge  $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$  des topologischen Produkts  $X \times Y$  ( $x_0, y_0$  sind die Grundpunkte von  $X$  bzw.  $Y$ ). Man bestätigt leicht, daß  $X \vee Y$  die durch  $X \times Y$  induzierte Topologie trägt.  $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$  sei die Injektion, ( $x_0, y_0$ ) sei der gemeinsame Grundpunkt von  $X \vee Y$  und  $X \times Y$ . Bezeichnen wir  $C_i$  (vgl. 1.4) mit  $X \bar{\cap} Y$ , so lautet die Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}i$  von  $i$  (vgl. 1.11):

$$(31) \quad X \vee Y \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{P_i} X \bar{\cap} Y \xrightarrow{Q_i} S X \vee S Y \xrightarrow{S_i} S(X \times Y) \rightarrow \dots$$

[Dabei wurde von der allgemeinen Beziehung  $S(X \vee Y) = S X \vee S Y$  Gebrauch gemacht, vgl. 3.2.]

Hilfssatz 13. Für irgend zwei Räume  $X, Y$  ist in (31):  $Q_i \simeq 0$ .

Der Beweis wird im nächsten Abschnitt geführt. Als Folgerungen erhält man:

Satz 14. Für irgend zwei Räume  $X, Y$  induziert die Injektion  $P_i: X \times Y \rightarrow X \bar{\cap} Y$  Monomorphismen der Homotopiemengen (zur Definition s. 1.3)

$$(P_i)^*: \pi(X \bar{\cap} Y, V) \rightarrow \pi(X \times Y, V)$$

für jedes  $V$ .

Satz 15. Für irgend zwei Räume  $X, Y$  gilt

$$S(X \times Y) \equiv S X \vee S Y \vee S(X \bar{\cap} Y).$$

Beweis von Satz 14. Aus Hilfssatz 13 folgt  $(Q_i)^* = 0$  [vgl. 3.1 A)]. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}i$  (1.12 Satz 6) ergibt sich daraus die Behauptung.

Beweis von Satz 15. Aus Hilfssatz 13 folgt

$$C_{Q_i} \equiv S X \vee S Y \vee S(X \bar{\cap} Y)$$

(man setze  $f = Qi$  in 3.2 Satz 10). Andererseits ist  $Qi \equiv P^2i$  (1.11 Satz 5), also  $C_{Qi} \equiv C_{P^2i}$  (2.4 Satz 9) und schließlich  $C_{P^2i} \equiv S(X \times Y)$  (1.11 Satz 5).

5.2. Beweis von Hilfssatz 13. Ist  $i: A \subset B$  irgendeine Injektion, so läßt sich  $C_i$  als die Teilmenge

$$\{(b, s) \mid b \in A, s \in I \text{ oder } b \in B, s = 1\}$$

von  $CB$  auffassen (vgl. 1.4).  $C_i$  hat zwar im allgemeinen nicht die durch  $CB$  induzierte Topologie (z.B. wenn  $B = I$  und  $A$  nicht abgeschlossen ist), aber

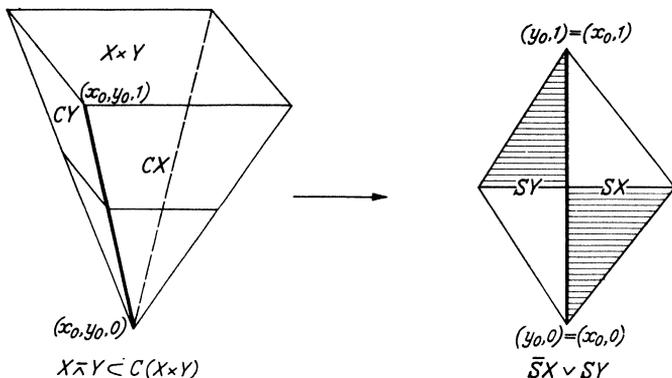


Fig. 9. Schraffierte Teile und stark ausgezogene Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

die Injektion  $j: C_i \rightarrow CB$  ist jedenfalls stetig [da ihre Zusammensetzung mit der Identifizierung  $(A \times I) + B \rightarrow C_i$  stetig ist]. Insbesondere haben wir für  $A = X \vee Y$ ,  $B = X \times Y$  die stetige Injektion  $j: X \bar{\vee} Y \rightarrow C(X \times Y)$ .

$Qi: X \bar{\vee} Y \rightarrow SX \vee SY$  ist die natürliche Projektion, d.h.

$$(32) \quad \begin{cases} Qi(x, y_0, s) = (x, s) \in SX, & x \in X, s \in I \\ Qi(x_0, y, s) = (y, s) \in SY, & y \in Y, s \in I \\ Qi(x, y, 1) = \text{Grundpunkt}, & x \in X, y \in Y \end{cases}$$

[vgl. 1.9 (3)]. Sei

$$\bar{S}X = SX / \{(x, s) \mid x \in X, s \leq \frac{1}{2}\}$$

$$\underline{S}Y = SY / \{(y, s) \mid y \in Y, s \geq \frac{1}{2}\}$$

(vgl. Fig. 9). Man konstruiert leicht eine Homotopie der Identität von  $SX$ , die  $\{(x, s) \mid x \in X, s \leq \frac{1}{2}\}$  in sich zusammenzieht, woraus nach 1.2 Hilfssatz 3 folgt, daß die natürliche Projektion  $SX \rightarrow \bar{S}X$  eine Homotopieäquivalenz ist. Das gleiche zeigt man für  $SY \rightarrow \underline{S}Y$ , und da  $SX, SY$  in  $SX \vee SY$  nur den Grundpunkt gemeinsam haben (der bei allen Abbildungen und Homotopien erhalten bleibt), folgt: Die natürliche Projektion

$$p: SX \vee SY \rightarrow \bar{S}X \vee \underline{S}Y$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Durch die Zuordnung

$$(x, y, s) \rightarrow \begin{cases} (y, s), & s \leq \frac{1}{2} \\ (x, s), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

wird eine Abbildung  $C(X \times Y) \rightarrow \bar{S}X \vee \underline{S}Y$  definiert (Fig. 9), deren Zusammensetzung mit der Injektion  $j: X \bar{\cap} Y \rightarrow C(X \times Y)$  gleich  $p \circ Qi$  [vgl. (32)] ist. Weil  $C(X \times Y)$  zusammenziehbar ist, folgt  $p \circ Qi \simeq 0$  und daher — weil  $p$  eine Homotopieäquivalenz ist —:  $Qi \simeq 0$ .

5.3. Nach einem Vorschlag von HILTON wird

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$$

gesetzt („reduced join“ bei JAMES [10] § 14). Als Grundpunkt in  $X \wedge Y$  nehmen wir den Bildpunkt von  $X \vee Y$  bei der Identifizierung. Das  $\wedge$ -Produkt ist offenbar kommutativ, jedoch im allgemeinen nicht assoziativ (vgl. 5.8). Es ist „funktoriell“, d.h.

A)  $f: X \rightarrow X'$  und  $g: Y \rightarrow Y'$  induzieren  $f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'$ , definiert durch  $(f \wedge g)(x, y) = (f(x), g(y))$ .

Aus 1.1 Hilfssatz 1 folgt:

B) Sind  $f_t: X \rightarrow X'$  und  $g_t: Y \rightarrow Y'$  ( $t \in I$ ) Homotopien (d.h. stetig in allen Variablen), so gilt das gleiche für  $f_t \wedge g_t$ .

Aus A) und B) entnimmt man leicht:

C) Der Homotopietyp von  $X \wedge Y$  hängt nur vom Homotopietyp der „Faktoren“  $X, Y$  ab.

Beispiele:

$$(33) \quad \begin{cases} X \wedge S^0 = X \\ X \wedge I = CX \\ X \wedge S^1 = SX \end{cases}$$

( $S^n = n$ -Sphäre).

Zwischen der  $\wedge$ - und der  $\bar{\cap}$ -Operation (vgl. 5.1) besteht ein enger Zusammenhang. Sind z.B.  $X$  und  $Y$  abzählbare CW-Komplexe (d.h. sie besitzen höchstens abzählbar viele Zellen), so ist auch  $X \times Y$  ein CW-Komplex (vgl. JAMES [9] Th. 1.9 oder MILNOR [11] 2.1) und  $X \vee Y$  ist ein Teilkomplex [vorausgesetzt, daß die Grundpunkte in  $X, Y$  zugleich 0-Zellen sind, vgl. Fußnote <sup>3)</sup>, S. 307]. Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe (vgl. 1.6) erhält man aus 1.6 Satz 2:

$$X \wedge Y \equiv X \bar{\cap} Y.$$

Wir werden sehen, daß das sogar unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen gilt, die nur die Umgebung der Grundpunkte betreffen und insbesondere für alle CW-Komplexe erfüllt sind (5.6 Satz 16).

5.4.  $X \vee I$  (mit dem Grundpunkt  $x_0 = 0 \in I$ ) ist mit  $X$  homotopieäquivalent. Nimmt man in  $X \vee I$  jedoch  $1 \in I \subset X \vee I$  als Grundpunkt — wir bezeichnen

den Raum dann mit  $\tilde{X}$  —, so kann sich der Homotopietyp (im Sinne von 1.2) ändern.

Hilfssatz 14. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- a)  $X \equiv \tilde{X}$ .  
 b) Die natürliche Projektion  $\tilde{X} \rightarrow X$  (Identifizieren von  $I$  zu einem Punkt) ist eine Homotopieäquivalenz.  
 c) Es gibt eine Homotopie der Identität von  $\tilde{X}$ , die  $I$  in sich auf den Punkt 1 zusammenzieht. ( $1 \in I$  bleibt als Grundpunkt während der Homotopie immer fest.)  
 d) Es gibt eine Umgebung  $U$  des Grundpunktes  $x_0$  von  $X$ , die sich in  $X$  auf  $x_0$  zusammenziehen läßt, und eine stetige Funktion  $u: X \rightarrow I$  mit  $u(x_0) = 1$  und  $u(x) = 0$  für  $x \notin U$ .

Beweis. a) folgt offenbar aus b), und b) folgt nach 1.2 Hilfssatz 3 aus c).

Sind die Abbildungen  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  und  $g: X \rightarrow \tilde{X}$  homotopieinvers zueinander, so erfüllt  $U = g^{-1}(I)$  die Bedingung d): Die Injektion  $U \rightarrow X$  ist nullhomotop, weil sie zu  $f \circ g|_U$  homotop ist und  $g|_U \simeq 0$  gilt. Die Zusammensetzung von  $g$  mit der natürlichen Projektion  $\tilde{X} (= X \vee I) \rightarrow \tilde{X}/X = I$  liefert eine Funktion  $u: X \rightarrow I$  mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist d) aus a) gefolgert.

Es bleibt zu zeigen: d) impliziert c). Ausgehend von  $U$  und  $u$  kann man leicht eine abgeschlossene Umgebung  $U'$  von  $x_0$  konstruieren, die wieder die gleichen Eigenschaften hat. Man setzt etwa  $U' = \{x | u(x) \geq \frac{1}{2}\} \subset U$  und  $u' = \text{Max}(2u - 1, 0)$ . Wir können daher von vornherein annehmen, daß  $U$  abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung existiert eine Abbildung  $\varphi: U \times I \rightarrow X$  mit

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, 1) = x_0, \quad \varphi(x_0, t) = x_0 \quad (x \in U, t \in I).$$

Mit ihrer Hilfe definieren wir zunächst  $\varphi': U \times I \rightarrow \tilde{X}$  durch

$$\varphi'(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, 2t) & (\in X \subset \tilde{X}), \quad t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & (\in I \subset \tilde{X}), \quad t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x \in U, t \in I).$$

Setzt man

$$(h_t|X)(x) = \begin{cases} x, & x \notin U \\ \varphi'(x, t \cdot u(x)), & x \in U \end{cases}$$

$$(h_t|I)(s) = \begin{cases} s, & t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (1 - s)(2 - 2t), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

so erfüllt  $h_t: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  die Bedingung c).

5.5. In Anlehnung an 5.4 treffen wir die Definition:

Der Grundpunkt  $x_0$  von  $X$  heißt nicht ausgeartet, wenn  $X$  die (untereinander äquivalenten) Bedingungen a) bis d) von Hilfssatz 14 erfüllt.

Ist  $X$  ein CW-Komplex, so auch  $\tilde{X} (= X \vee I)$ , und  $I$  ist ein Teilkomplex von  $\tilde{X}$ . (Das ist klar, wenn der Grundpunkt  $x_0$  von  $X$  zugleich eine 0-Zelle der Zellenzerlegung ist. Ist das zunächst nicht der Fall, so erreicht man es

durch geeignete Unterteilung.) Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe (vgl. 1.6) läßt sich die natürliche Zusammenziehung von  $I$  auf den Punkt 1 zu einer Homotopie der Identität von  $X$  fortsetzen, d.h. die Bedingung c) ist erfüllt, und wir können feststellen:

A) *Kein Punkt eines CW-Komplexes ist ausgeartet.*

Aus  $X \equiv X'$  folgt offenbar  $\tilde{X} \equiv \tilde{X}'$ ; es gilt daher [vgl. 5.4a)]:

B) *Ist  $X \equiv X'$ , so sind die Grundpunkte von  $X$  und  $X'$  entweder beide ausgeartet oder beide nicht ausgeartet.*

Die Umgebung  $U = I$  von  $1 \in I \subset \tilde{X}$  erfüllt 5.4 d); folglich gilt:

C) *Der Grundpunkt von  $\tilde{X}$  ist nicht ausgeartet (für beliebiges  $X$ ).*

Da  $X$  mit  $\tilde{X}$  frei homotopieäquivalent ist (d.h. homotopieäquivalent, wenn nicht verlangt wird, daß die Grundpunkte bei allen Abbildungen und Homotopien erhalten bleiben sollen), folgt aus C):

D) *Zu jedem Raum gibt es einen frei homotopieäquivalenten mit nicht ausgeartetem Grundpunkt.*

Schließlich kann man zeigen:

E) *Haben die bogenweise zusammenhängenden Räume  $X$  und  $X'$  nicht ausgeartete Grundpunkte und sind sie frei homotopieäquivalent, so sind sie auch homotopieäquivalent im strengen Sinn von 1.2.*

Da diese Eigenschaft im folgenden nicht benutzt wird, führen wir den Beweis hier nicht durch. Er wird in einem Anhang (5.13) nachgeholt.

E) zeigt insbesondere, daß es im Rahmen der Homotopietheorie unwesentlich ist, welchen Punkt eines Raumes man als Grundpunkt wählt, wenn er nur nicht ausgeartet ist.

5.6. Satz 16. *Haben  $X$  und  $Y$  nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist die natürliche Projektion*

$$p: X \bar{\cap} Y \rightarrow (X \bar{\cap} Y)/C(X \vee Y) = (X \times Y)/(X \vee Y) = X \wedge Y$$

(vgl. 1.6 (1) und die Definitionen von  $\bar{\cap}$  und  $\wedge$  in 5.1, 5.3) eine Homotopieäquivalenz.

Zusammen mit 5.1 Satz 15 ergibt das:

Folgerung. *Haben  $X$  und  $Y$  nicht ausgeartete Grundpunkte, so gilt*

$$(34) \quad S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \wedge Y)$$

(Formel von HILTON).

Beweis von Satz 16. Nach Voraussetzung ist  $X \equiv \tilde{X}$ ,  $Y \equiv \tilde{Y}$  [vgl. 5.4 a)]. Wir zeigen zuerst, daß die Projektion  $p': \tilde{X} \bar{\cap} \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \wedge \tilde{Y}$  eine Homotopieäquivalenz ist. Dazu genügt es nach 1.6 die Homotopieerweiterungseigenschaft  $HE$  für das Paar  $(B, A) = (\tilde{X} \times \tilde{Y}, \tilde{X} \vee \tilde{Y})$  nachzuweisen.  $HE$  besagt, daß sich jede Abbildung  $f: B \times 0 \cup A \times I \rightarrow V$  ( $V$  beliebig) mit  $f(a_0 \times I) = v_0$  ( $a_0, v_0 =$  Grundpunkte von  $A \subset B$  bzw.  $V$ ) zu einer Abbildung  $B \times I \rightarrow V$  fortsetzen läßt. [In

der Formulierung in 1.6 ist  $f$  durch  $f(b, 0) = g_0(b)$ ,  $f(a, t) = h_t(a)$ ,  $b \in B$ ,  $a \in A$ ,  $t \in I$ , gegeben.] Für  $(B, A) = (\tilde{X} \times \tilde{Y}, \tilde{X} \vee \tilde{Y})$  folgt also HE aus:

Hilfssatz 15. Für beliebige Räume  $X, Y$  gibt es eine Retraktion

$$q: \tilde{X} \times \tilde{Y} \times I \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{Y} \times 0 \cup (\tilde{X} \vee \tilde{Y}) \times I.$$

Dieser Hilfssatz wird im folgenden Abschnitt 5.7 bewiesen.

Um das Ergebnis über  $p'$  auf  $p$  zu übertragen, betrachten wir die natürlichen Projektionen

$$p_1: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/I = X$$

$$p_2: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}/I = Y$$

und setzen

$$q = p_1 \wedge p_2: \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \rightarrow X \wedge Y \quad [\text{vgl. 5.3 A)]}$$

$$\bar{q} = C(p_1 \vee p_2, p_1 \times p_2): \tilde{X} \bar{\wedge} \tilde{Y} \rightarrow X \bar{\wedge} Y \quad (\text{vgl. 2.2}).$$

[Dabei ist  $p_1 \times p_2: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$  durch  $(p_1 \times p_2)(x, y) = (p_1(x), p_2(y))$  definiert und  $p_1 \vee p_2 = (p_1 \times p_2) | (\tilde{X} \vee \tilde{Y})$ .]  $\bar{q}$  wird also durch die Transformation  $(p_1 \vee p_2, p_1 \times p_2)$  der Injektion  $\tilde{X} \vee \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{Y}$  in die Injektion  $X \vee Y \rightarrow X \times Y$  induziert. Man bestätigt leicht, daß das Diagramm

$$(35) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} \bar{\wedge} \tilde{Y} & \xrightarrow{p'} & \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \\ \bar{q} \downarrow & & \downarrow q \\ X \bar{\wedge} Y & \xrightarrow{p} & X \wedge Y \end{array}$$

kommutativ ist. Nach Voraussetzung sind  $p_1$  und  $p_2$  Homotopieäquivalenzen [vgl. 5.4 b)]. Aus 5.3 A) und B) folgt leicht, daß dann auch  $q = p_1 \wedge p_2$  eine Homotopieäquivalenz ist. Aus analogen Gründen sind  $p_1 \vee p_2$  und  $p_1 \times p_2$  Homotopieäquivalenzen, also nach 2.4 Hilfssatz 7 auch  $\bar{q}$ . Da wir von  $p'$  oben gezeigt haben, daß es eine Homotopieäquivalenz ist, folgt aus (35) das gleiche für  $p$ , und Satz 16 ist bewiesen.

Bemerkung. Wie man leicht sieht, ist  $X \bar{\wedge} S^0 = C X \vee \tilde{X} \equiv \tilde{X}$  ( $S^0 = 0$ -Sphäre). Andererseits gilt  $X \wedge S^0 = X$ . Für die Aussage:

$$X \bar{\wedge} Y \equiv X \wedge Y \text{ für alle } Y$$

ist es also auch notwendig, daß  $\tilde{X} \equiv X$  ist, d.h. daß  $X$  einen nicht ausgearteten Grundpunkt hat.

5.7. Zum Beweis von Hilfssatz 15 benötigen wir:

Hilfssatz 16. Seien  $X, Y$  irgend zwei topologische Räume,  $A$  eine kompakte Teilmenge von  $X$  und  $p': X \rightarrow X/A$  die natürliche Projektion. Dann ist  $p = p' \times 1_Y: X \times Y \rightarrow X/A \times Y$  eine Identifizierung. (Vgl. auch die Bemerkung am Schluß von 1.1.)

Beweis.  $p$  ist offenbar stetig, d.h.: Ist  $B \subset X/A \times Y$  offen, so auch  $p^{-1}(B)$ . Es muß noch die Umkehrung gezeigt werden: Wir setzen also  $p^{-1}(B)$  als offen voraus und wollen zeigen, daß  $B$  für jedes  $(\bar{x}, y) \in B$  eine Umgebung ist.

1. Fall:  $\bar{x} = p'(A)$ : Dann ist  $A \times y \subset p^{-1}(B)$ . Wegen der Kompaktheit von  $A$  gibt es offene Mengen  $U_0 \subset X, V_0 \subset Y$ , so daß  $A \times y \subset U_0 \times V_0 \subset p^{-1}(B)$ .  $p'(U_0) \times V_0 \subset B$  ist dann eine Umgebung von  $(\bar{x}, y)$  und daher auch  $B$  selbst.

2. Fall:  $\bar{x} = p'(x) \neq p'(A)$ . Trivialerweise gibt es offene Mengen  $U \subset X, V \subset Y$  mit  $(x, y) \in U \times V \subset p^{-1}(B)$ .  $p'(U) \times V \subset B$  ist dann eine Umgebung von  $(\bar{x}, y)$ , falls  $U \cap A = \emptyset$  ist; anderenfalls folgt  $(p'(A), y) \subset B$ , man kann das zum 1. Fall Gesagte benutzen und erhält mit  $p'(U \cup U_0) \times (V \cap V_0)$  eine Umgebung von  $(\bar{x}, y)$ , die in  $B$  enthalten ist. In jedem Falle folgt, daß  $B$  eine Umgebung von  $(\bar{x}, y)$  ist.

Beweis von Hilfssatz 15.  $\check{X}$  und  $\check{Y}$  entstehen aus  $X + I$  bzw.  $Y + I$  durch Identifizieren von  $x_0 \in X$  mit  $0 \in I$  bzw.  $y_0 \in Y$  mit  $0 \in I$ . Die natürlichen Abbildungen

$$(X + I) \times (Y + I) \rightarrow \check{X} \times (Y + I) \rightarrow \check{X} \times \check{Y}$$

sind nach Hilfssatz 16 ebenfalls Identifizierungen, und schließlich folgt aus 1.1 Hilfssatz 1, daß auch

$$(36) \quad (X + I) \times (Y + I) \times I \rightarrow \check{X} \times \check{Y} \times I$$

eine Identifizierung ist. Es genügt daher, die gesuchte Retraktion  $\varrho$  auf  $X \times Y \times I, X \times I \times I, I \times Y \times I$  und  $I^3$  getrennt zu definieren, wenn man nur dafür sorgt, daß sie mit der Identifizierung (36) verträglich ist.

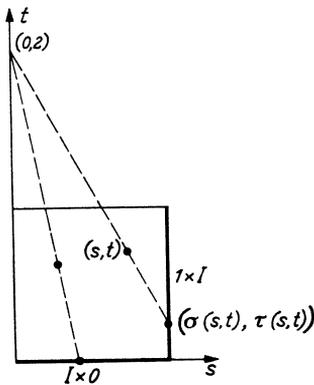


Fig. 10. Stark ausgezogen:  $I \times 0 \cup 1 \times I$

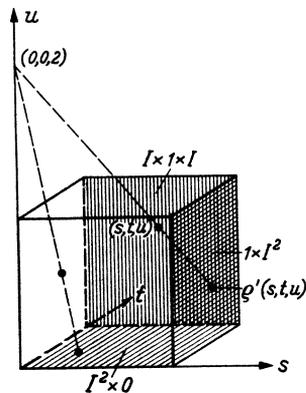


Fig. 11. Schraffiert:  $I^2 \times 0 \cup I \times 1 \times I \cup 1 \times I^2$

Seien  $\sigma, \tau: I^2 \rightarrow I$  so erklärt, daß die Zuordnung

$$(s, t) \rightarrow (\sigma(s, t), \tau(s, t)), \quad s, t \in I$$

die Zentralprojektion von  $I^2$  auf  $I \times 0 \cup 1 \times I$  vom Punkt  $(0, 2)$  aus liefert (Fig. 10).

$$\varrho': I^3 \rightarrow I^2 \times 0 \cup I \times 1 \times I \cup 1 \times I^2$$

sei die Zentralprojektion vom Punkt  $(0, 0, 2)$  aus (Fig. 11). Eine Retraktion  $\varrho$  der gesuchten Art erhält man nun durch die Festsetzung

$$\varrho(x, y, t) = \begin{cases} (x, y, 0), & x \in X, y \in Y, t \in I \\ (x, \sigma(y, t), \tau(y, t)), & x \in X, y \in I \\ (\sigma(x, t), y, \tau(x, t)), & x \in I, y \in Y \\ \varrho'(x, y, t), & x \in I, y \in I. \end{cases}$$

5.8. Das  $\wedge$ -Produkt ist im allgemeinen nicht assoziativ. Bezeichnet z. B.  $Q$  den Raum der rationalen und  $N$  den der natürlichen Zahlen, so kann man  $(Q \wedge Q) \wedge N$  und  $Q \wedge (Q \wedge N)$  zwar als dieselbe Menge auffassen, aber die Topologien sind verschieden (vgl. BOURBAKI [2] § 9, Exerc. 11, wo ein sehr ähnliches Beispiel genannt ist). Es gilt jedoch:

Satz 17. *Haben  $X$  und  $Y$  nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist auch der Grundpunkt von  $X \wedge Y$  nicht ausgeartet.*

Satz 18. *Innerhalb der Klasse der Räume mit nicht ausgeartetem Grundpunkt ist das  $\wedge$ -Produkt bis auf Homotopieäquivalenz assoziativ.*

Beweis von Satz 17. Die Retraktion  $\varrho$  von 5.6 Hilfssatz 15 induziert eine Retraktion

$$(37) \quad \bar{\varrho}: (\check{X} \wedge \check{Y}) \times I \rightarrow (\check{X} \wedge \check{Y}) \vee I.$$

[Der Übergang von  $\varrho$  zu  $\bar{\varrho}$  erfolgt durch die Identifizierung  $\check{X} \times \check{Y} \times I \rightarrow (\check{X} \wedge \check{Y}) \times I$ , vgl. 1.1 Hilfssatz 1.] Definiert man

$$h_t: (\check{X} \wedge \check{Y})^\sim \rightarrow (\check{X} \wedge \check{Y})^\sim$$

$[(\check{X} \wedge \check{Y})^\sim = (\check{X} \wedge \check{Y}) \vee I$  mit  $1 \in I$  als Grundpunkt] durch

$$\begin{aligned} h_t(x, y) &= \bar{\varrho}(x, y, t), & x \in \check{X}, y \in \check{Y}, t \in I \\ h_t(s) &= 1 - (1 - s)(1 - t), & s \in I \subset (\check{X} \wedge \check{Y})^\sim, \end{aligned}$$

so ist  $h_t$  eine Homotopie der Identität  $h_0$ , bei der  $I \subset (\check{X} \wedge \check{Y})^\sim$  in sich auf  $1 \in I$  zusammengezogen wird. Daher ist der Grundpunkt von  $\check{X} \wedge \check{Y}$  nicht ausgeartet [vgl. 5.4 c)]. Aus der Voraussetzung  $\check{X} \equiv X$ ,  $\check{Y} \equiv Y$  [vgl. 5.4 a)] folgt nach 5.3 C)  $\check{X} \wedge \check{Y} \equiv X \wedge Y$ . Nach 5.5 B) ist also auch der Grundpunkt von  $X \wedge Y$  nicht ausgeartet.

Beweis von Satz 18. Wir haben zu zeigen:  $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$  wenn  $X, Y, Z$  nicht ausgeartete Grundpunkte haben, d. h. wenn  $X \equiv \check{X}$ :  $Y \equiv \check{Y}$ ,  $Z \equiv \check{Z}$  ist [vgl. 5.4 a)]. Aus dieser Voraussetzung folgt nach 5.3 C):  $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z}$ . Sei  $M$  die Menge der Punkte von  $(\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z}$  und  $\mathfrak{X}$  die Topologie. Aus der natürlichen Projektion  $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z} \rightarrow M$  erhält man auf  $M$  andererseits die Identifizierungstopologie  $\mathfrak{X}$ .

Unter Benutzung der obigen Retraktion  $\bar{\varrho}$  [vgl. (37)] und der natürlichen Projektion  $\bar{\varphi}: (\check{X} \wedge \check{Y}) \vee I \rightarrow \check{X} \wedge \check{Y}$  (Identifizieren von  $I$  zu einem Punkt) defi-

nieren wir  $h_t: M \rightarrow M$  durch

$$h_t(x, y, z) = (\bar{p}\bar{q}(x, y, t), z), \quad x \in \check{X}, y \in \check{Y}, z \in \check{Z}, t \in I.$$

Nach 5.3 B) ist  $h_t$  eine Homotopie, wenn man  $M$  mit der Topologie  $\mathfrak{T}$  versieht. Nach 1.1 Hilfssatz 1 ist  $h_t$  auch eine Homotopie, wenn man auf  $M$  die Topologie  $\bar{\mathfrak{T}}$  nimmt, denn  $h_t$  wird durch eine Homotopie von  $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z}$  in sich induziert [gegeben durch  $(x, y, z) \rightarrow (p\varrho(x, y, t), z)$ , wobei  $\varrho$  die Retraktion von 5.6 Hilfssatz 15 und  $p: \check{X} \times \check{Y} \times I \rightarrow \check{X} \times \check{Y}$  die natürliche Projektion ist].

Die Identität  $(M, \bar{\mathfrak{T}}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$  ist stetig, weil ihre Zusammensetzung mit der Identifizierung  $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z} \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$  stetig ist. Schließlich werden wir zeigen:

(38)  $h_1: (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$  ist stetig.

Daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes: Setzt man  $h_1: (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$  mit der Identität  $(M, \bar{\mathfrak{T}}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$  zusammen, so ergibt sich je nach der Reihenfolge  $h_1: (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$  oder  $h_1: (M, \bar{\mathfrak{T}}) \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$ . Beide Abbildungen sind vermöge  $h_t$  zur Identität  $h_0$  homotop, also ist  $(M, \mathfrak{T}) = (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z} \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$  mit  $(M, \bar{\mathfrak{T}})$  homotopieäquivalent. Da  $(M, \bar{\mathfrak{T}})$  in  $X, Y, Z$  symmetrisch ist, folgt ebenso  $X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (M, \bar{\mathfrak{T}})$  und damit die behauptete Assoziativität.

Es ist also nur noch (38) zu beweisen. Wir definieren dazu zwei Teilmengen  $A_1, A_2$  von  $\check{X} \wedge \check{Y}$  durch (Fig. 12)

$$A_1 = \{(x, y) \mid x \in I < \check{X}, x \geq \frac{1}{2} \text{ oder } y \in I < \check{Y}, y \geq \frac{1}{2}\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \mid (x \notin I \text{ oder } x \leq \frac{1}{2}) \text{ und } (y \notin I \text{ oder } y \leq \frac{1}{2})\}.$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, weil ihre Urbilder in  $\check{X} \times \check{Y}$  es sind. Die Projektion  $(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z} \rightarrow (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z} = (M, \mathfrak{T})$  ist eine abgeschlossene Identifizierung (vgl. BOURBAKI [2] § 9, No. 7), weil lediglich die abgeschlossene Teilmenge  $(\check{X} \wedge \check{Y}) \vee \check{Z}$  zu einem Punkt identifiziert wird. Insbesondere ist das Bild  $M_i$  von  $A_i \times \check{Z}$  in  $M$  ( $i=1, 2$ ) bezüglich der Topologie  $\mathfrak{T}$  abgeschlossen. Da  $M_1, M_2$  ganz  $M$  überdecken, genügt es zu zeigen, daß  $h_1|_{M_i}$  stetig ist. Für  $i=1$  ist das trivial, weil  $h_1(M_1)$  nur aus dem Grundpunkt besteht (vgl. die Definition von  $h_t$ ). Für  $i=2$  bemerken wir zunächst, daß  $M_2$  als Menge mit  $(A_2 \times \check{Z}) / (A_2 \times \check{z}_0)$  übereinstimmt ( $\check{z}_0 = 1 \in I < \check{Z}$  ist der Grundpunkt von  $\check{Z}$ ). Aber auch die Topologie von  $(A_2 \times \check{Z}) / (A_2 \times \check{z}_0)$  stimmt sowohl mit der durch  $\mathfrak{T}$  als auch mit der durch  $\bar{\mathfrak{T}}$  in  $M_2$  induzierten überein. Das folgt aus [2] § 9, Prop. 8, weil  $A_2 \times \check{Z}$  eine abgeschlossene Teilmenge sowohl von  $(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z}$

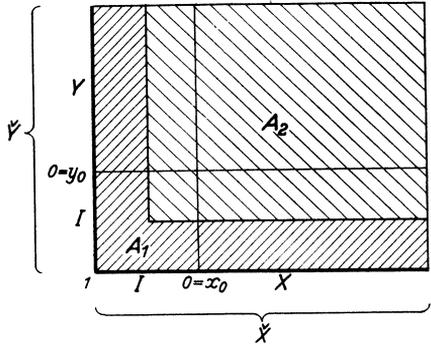


Fig. 12. Stark ausgezogene Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

als auch von  $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z}$  ist ( $A_2$  bleibt von der Identifizierung  $\check{X} \times \check{Y} \rightarrow \check{X} \wedge \check{Y}$  unberührt) und weil

$$\begin{aligned} (\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z} &\rightarrow (M, \mathfrak{I}) \\ \check{X} \times \check{Y} \times \check{Z} &\rightarrow (M, \overline{\mathfrak{I}}) \end{aligned}$$

abgeschlossene Identifizierungen sind.  $\mathfrak{I}$  und  $\overline{\mathfrak{I}}$  induzieren also in  $M_2$  dieselbe Topologie. Weil  $h_1|_{M_2}: (M_2, \overline{\mathfrak{I}}) \rightarrow (M, \overline{\mathfrak{I}})$  stetig ist, wie wir oben sahen, ist es auch  $h_1|_{M_2}: (M_2, \mathfrak{I}) \rightarrow (M, \overline{\mathfrak{I}})$ .

**5.9.** Wir sind nun in der Lage, die Formel 5.6 (34) für die Einhängung eines Produkts von zwei Räumen auf mehrere Faktoren zu verallgemeinern. Dazu zunächst:

*Hilfssatz 17. Haben  $X$  und  $Y$  nicht ausgeartete Grundpunkte  $x_0$  bzw.  $y_0$ , so ist auch der Grundpunkt  $(x_0, y_0)$  von  $X \times Y$  nicht ausgeartet.*

[Beweis. Nach Voraussetzung [vgl. 5.4 d)] gibt es Umgebungen  $U, V$  von  $x_0$  bzw.  $y_0$ , die sich in  $X$  bzw.  $Y$  zusammenziehen lassen, und stetige Funktionen  $u: X \rightarrow I, v: Y \rightarrow I$  mit

$$\begin{aligned} u(x_0) = 1, \quad u(x) = 0 &\quad \text{für } x \notin U \\ v(y_0) = 1, \quad v(y) = 0 &\quad \text{für } y \notin V. \end{aligned}$$

Die Umgebung  $W = U \times V$  von  $(x_0, y_0)$  und die durch  $w(x, y) = u(x) \cdot v(y)$  definierte Funktion  $w: X \times Y \rightarrow I$  leisten dann das Entsprechende für  $X \times Y$ .]

Seien nun  $X_1, X_2, \dots, X_n$  topologische Räume mit nicht ausgearteten Grundpunkten. [Interessiert nur der freie Homotopietyp, nicht aber der Grundpunkt, so ist das wegen 5.5 D) keine Einschränkung.] Unter Beachtung von  $SX = S^1 \wedge X$  [vgl. 5.3 (33)] läßt sich 5.6 (34) in der Form

$$(39) \quad S^1 \wedge (X \times Y) \equiv (S^1 \wedge X) \vee (S^1 \wedge Y) \vee (S^1 \wedge X \wedge Y)$$

schreiben. Wegen 5.8 Satz 18 ist es nicht nötig im letzten Glied weitere Klammern zu setzen. Nach Hilfssatz 17 ist (39) auf  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}$ ,  $Y = X_n$  anwendbar und ergibt

$$\begin{aligned} S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_n) \\ \equiv (S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_{n-1})) \vee (S^1 \wedge X_n) \vee (S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \wedge X_n). \end{aligned}$$

Das ist eine Rekursionsformel zur Berechnung von  $S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_n)$ , aus der man leicht schließt — wir schreiben wieder  $SX$  für  $S^1 \wedge X$ :

**Satz 19.** *Haben die Räume  $X_1, X_2, \dots, X_n$  nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist*

$$(40) \quad S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \equiv \bigvee_{N} S \wedge X_i,$$

worin  $N$  alle nichtleeren Teilmengen der Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis  $n$  durchläuft.

Für Sphären  $S^p, S^q$  ist  $S^p \wedge S^q = S^{p+q}$ . [ $S^p \times S^q$  besitzt nämlich eine Zellenzerlegung, bei der das Komplement von  $S^p \vee S^q$  eine einzige  $(p+q)$ -Zelle ist, also besteht  $S^p \wedge S^q = (S^p \times S^q)/(S^p \vee S^q)$  aus einer  $(p+q)$ -Zelle und einer 0-Zelle.] Man erhält daher aus Satz 19:

Satz 20<sup>6)</sup>. *Haben die Sphären  $S_i$  die Dimensionen  $k_i$  ( $0 \leq k_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n$ ), so ist*

$$S(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n) \equiv \bigvee_N S_N,$$

wobei  $N$  alle nicht leeren Teilmengen der Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis  $n$  durchläuft und  $S_N$  eine Sphäre der Dimension  $1 + \sum_{i \in N} k_i$  ist.

Bemerkung. Sind  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abzählbare CW-Komplexe, so vereinfacht sich der Beweis von (40) erheblich. Man kommt ohne die Abschnitte 5.4 bis 5.8 aus:  $\wedge$ -Produkte von abzählbaren CW-Komplexen sind nämlich wieder abzählbare CW-Komplexe (vgl. den Schluß von 5.3) und das  $\wedge$ -Produkt ist für sie sogar streng assoziativ, weil (wie aus MILNOR [11] 2.9 leicht folgt) die natürliche Abbildung  $X \times Y \times Z \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$  eine Identifizierung ist. Außerdem wird nur noch die Formel (34) bzw. (39) gebraucht, die man in diesem Fall aus 5.1 Satz 15 und der Schlußbemerkung in 5.3 entnehmen kann.

5.10. Die  $\wedge$ -Multiplikation mit einem festen Raum  $Z$  hat die bemerkenswerte Eigenschaft, eine Abbildungsfolge im Sinne von 1.11 (bis auf Homotopieäquivalenz) wieder in eine Abbildungsfolge überzuführen. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 18. *Für jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  und jeden Raum  $Z$  gibt es Homotopieäquivalenzen*

$$\varphi: C_f \wedge Z \rightarrow C_{f \wedge 1} \quad \text{und} \quad \psi: C_{f \wedge 1} \rightarrow C_f \wedge Z,$$

so daß die Diagramme

$$(41a) \quad \begin{array}{ccc} & & C_f \wedge Z \\ & \nearrow^{P(f \wedge 1)} & \\ Y \wedge Z & & \downarrow \varphi \\ & \searrow_{P(f \wedge 1)} & C_{f \wedge 1} \end{array}$$

$$(41b) \quad \begin{array}{ccc} & & C_f \wedge Z \\ & \nearrow^{P(f \wedge 1)} & \\ Y \wedge Z & & \uparrow \psi \\ & \searrow_{P(f \wedge 1)} & C_{f \wedge 1} \end{array}$$

kommutativ sind.  $1$  bezeichnet dabei die Identität  $1 = 1_Z: Z \rightarrow Z$ .

Satz 21. *Die Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$  (vgl. 1.11) ist mit der Folge*

$$\mathfrak{A} f \wedge 1_Z: X \wedge Z \xrightarrow{f \wedge 1} Y \wedge Z \xrightarrow{P(f \wedge 1)} C_f \wedge Z \xrightarrow{Q(f \wedge 1)} S X \wedge Z \xrightarrow{S(f \wedge 1)} S Y \wedge Z \rightarrow \dots$$

homotopieäquivalent.

Hilfssatz 18 wird in 5.12 bewiesen.

<sup>6)</sup> Dieser Satz wurde mit anderen Methoden zuerst von K. A. HARDIE bewiesen und mir durch P. HILTON brieflich mitgeteilt.

Beweis von Satz 21. Wir ergänzen das Diagramm (41 a) zu

$$(42) \quad \begin{array}{ccccc} & & & P^2 f \wedge 1 & \rightarrow & C_{Pf \wedge Z} \\ & & & \nearrow & & \downarrow \varphi' \\ & & C_f \wedge Z & \xrightarrow{P(Pf \wedge 1)} & C_{Pf \wedge 1} & \\ & \nearrow P f \wedge 1 & \downarrow \varphi & & \downarrow \chi & \\ Y \wedge Z & \xrightarrow{P(f \wedge 1)} & C_{f \wedge 1} & \xrightarrow{P^2(f \wedge 1)} & C_{P(f \wedge 1)}. & \end{array}$$

Darin ist  $\varphi'$  eine zu  $\varphi$  analoge Homotopieäquivalenz mit  $Pf$  an Stelle von  $f$ .  $\chi = C(1_{Y \wedge Z}, \varphi)$  wird durch die Transformation  $(1_{Y \wedge Z}, \varphi)$  von  $Pf \wedge 1$  in  $P(f \wedge 1)$  induziert (vgl. 2.2), ist also auch eine Homotopieäquivalenz (2.4 Hilfssatz 7). Man entnimmt daher aus (42), daß nicht nur

$$[f \wedge 1, Pf \wedge 1] \equiv [f \wedge 1, P(f \wedge 1)]$$

ist, wie schon aus (41 a) hervorgeht, sondern sogar

$$[f \wedge 1, Pf \wedge 1, P^2 f \wedge 1] \equiv [f \wedge 1, P(f \wedge 1), P^2(f \wedge 1)]$$

(vgl. 1.2 zur Definition der Homotopieäquivalenz zwischen Folgen von Abbildungen). Analog schließt man weiter und erhält

$$(43) \quad \mathfrak{P} f \wedge 1_Z \equiv \mathfrak{P}(f \wedge 1_Z)$$

(zur Definition von  $\mathfrak{P}f$  vgl. 1.11). Nach 1.11 Satz 5 ist  $\mathfrak{P}f \equiv \mathfrak{A}f$  und  $\mathfrak{P}(f \wedge 1_Z) \equiv \mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$ . Aus ersterem gewinnt man  $\mathfrak{P}f \wedge 1_Z \equiv \mathfrak{A}f \wedge 1_Z$  durch  $\wedge$ -Multiplikation aller vorkommenden Abbildungen mit  $1_Z$ . Also folgt aus (43)

$$\mathfrak{A} f \wedge 1_Z \equiv \mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$$

und damit Satz 21.

Bemerkungen. 1. Nach Satz 21 ist insbesondere  $S(X \wedge Z) \equiv SX \wedge Z$ , d. h. [vgl. 5.3 (33)]

$$S^1 \wedge (X \wedge Z) \equiv (S^1 \wedge X) \wedge Z$$

ohne jede Voraussetzung über  $X$  und  $Z$  (vgl. im Gegensatz dazu 5.8). Entscheidend für dieses besondere Verhalten, das mit Hilfssatz 16 zusammenhängt, ist die Kompaktheit von  $S^1$ .

2. Mit  $\bar{\wedge}$  an Stelle von  $\wedge$  wäre Satz 21 im allgemeinen falsch. Insbesondere ist nicht immer  $S(X \bar{\wedge} Z) \equiv SX \bar{\wedge} Z$ . Gegenbeispiel:  $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{0\}$  mit 0 als Grundpunkt,  $Z = S^0$ .

**5.11.** Induziert  $f: X \rightarrow Y$  Monomorphismen  $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$  für jeden Bildraum  $V$ , so ist wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge  $\mathfrak{A}f$  (1.12 Satz 6)  $(Pf)^* = 0$  für alle  $V$  und daher  $Pf \simeq 0$  [vgl. 3.1 A)]. Dann ist auch  $Pf \wedge 1_Z \simeq 0 \wedge 1_Z = 0$  für alle  $Z$ . (0 bezeichnet darin die konstante Abbildung, die den ganzen Urbildraum in den Grundpunkt des Bildraumes überführt.) Wegen  $Pf \wedge 1_Z \equiv P(f \wedge 1_Z)$  (5.10 Satz 21) folgt  $P(f \wedge 1_Z) \simeq 0$ . Also ist  $(P(f \wedge 1_Z))^* = 0$ , und mit Hilfe der Exaktheit von  $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$  schließt man auf die Monomorphie von  $(f \wedge 1_Z)^*$ .

Etwas allgemeiner betrachten wir  $f \wedge f' : X \wedge X' \rightarrow Y \wedge Y'$  (mit  $f' : X' \rightarrow Y'$ ). Wegen  $f \wedge f' = (f \wedge 1_{Y'}) \circ (1_X \wedge f')$  erhält man durch zweimalige Anwendung dieser Schlußweise:

Satz 22. *Induzieren  $f : X \rightarrow Y$  und  $f' : X' \rightarrow Y'$  Monomorphismen der Homotopiemengen  $f_* : \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ ,  $f'_* : \pi(Y', V) \rightarrow \pi(X', V)$  (zur Definition s. 1.3) für jeden Bildraum  $V$ , so ist auch  $(f \wedge f')_*$  monomorph.*

Eine Anwendung dieses Satzes in Verbindung mit 5.1 Satz 14 werden wir im zweiten Teil der Arbeit angeben (vgl. [12] 6.4 Satz 4).

5.12. Beweis von Hilfssatz 18. Der Grundgedanke des Beweises ist ähnlich wie bei 5.8 Satz 18.

Wie in 3.6 sei  $\tilde{C}X = (X \times I)/(X \times 0)$  und  $\tilde{C}_f$  entstehe aus  $\tilde{C}X + Y$  durch die Identifizierungen

$$\tilde{C}X \ni (x, 1) = f(x) \in Y \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist offenbar (vgl. 1.4)

$$(44) \quad C_f = \tilde{C}_f / \{(x_0, s) \mid s \in I\}.$$

Sei  $M$  die Menge der Punkte von  $\tilde{C}_{f \wedge 1}$  ( $1 = 1_Z : Z \rightarrow Z$ ) und  $\mathfrak{X}_2$  die Topologie.  $M$  kann man auch aus  $\tilde{C}_f \times Z$  durch die Identifizierungen

$$\begin{aligned} (x_0, z, s) &= (x, z_0, s)^7 && \text{für alle } x \in X, z \in Z, s \in I \\ (y_0, z) &= (y, z_0) && \text{für alle } y \in Y, z \in Z \end{aligned}$$

erhalten (Fig. 13).  $\mathfrak{X}_1$  sei die Identifizierungstopologie. Mit der Abkürzung

$$I_0 = \{(x_0, z_0, s) \mid s \in I\} \subset M$$

gilt

$$(45) \quad (M, \mathfrak{X}_1) / I_0 = C_f \wedge Z,$$

$$(46) \quad (M, \mathfrak{X}_2) / I_0 = C_{f \wedge 1}.$$

(46) geht aus (44) hervor, wenn man  $f$  durch  $f \wedge 1$  ersetzt. Beweis von (45) Mit der natürlichen Projektion  $p : \tilde{C}_f \rightarrow C_f$  [vgl. (44)] ist auch  $p \times 1_Z : \tilde{C}_f \times Z \rightarrow C_f \times Z$  eine Identifizierung, weil bei  $p$  lediglich eine kompakte Teilmenge von  $\tilde{C}_f$  zu einem Punkt identifiziert wird (5.7 Hilfssatz 16).  $C_f \wedge Z$  trägt daher die Identifizierungstopologie bezüglich

$$\tilde{C}_f \times Z \xrightarrow{p \times 1} C_f \times Z \rightarrow C_f \wedge Z.$$

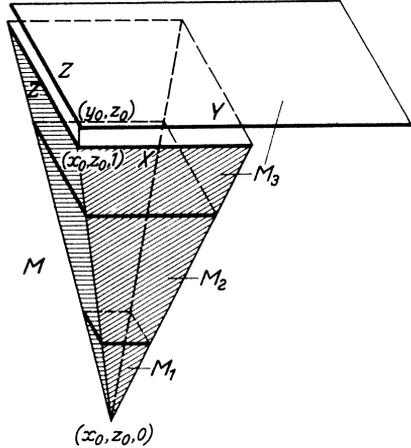


Fig. 13. Jede stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen. Die schraffierten Teile stehen für die „vertikale“ Strecke  $I_0$ .

<sup>7)</sup> Die Punkte von  $\tilde{C}_f \times Z$  müßten eigentlich mit  $(x, s, z)$  bzw.  $(y, z)$  ( $x \in X, y \in Y, z \in Z, s \in I$ ) bezeichnet werden. Um die Übereinstimmung mit  $M$  zu erreichen, haben wir hier  $(x, s, z)$  durch  $(x, z, s)$  ersetzt.

Hierbei werden im Endglied dieselben Punkte gleichgesetzt wie bei

$$\tilde{C}_f \times Z \rightarrow (M, \mathfrak{X}_1) \rightarrow (M, \mathfrak{X}_1)/I_0$$

(natürliche Projektionen). Da es sich wieder um Identifizierungen handelt, folgt (45).

Wir betrachten nun folgende drei Teilmengen von  $M$  (vgl. Fig. 13):

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, z, s) \mid s \leq \frac{1}{4}\} \\ M_2 &= \{(x, z, s) \mid \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}\} \\ M_3 &= \{(x, z, s) \mid s \geq \frac{3}{4}\} \cup \{(y, z)\} \end{aligned}$$

( $x \in X, y \in Y, z \in Z, s \in I$ ). Sie sind in beiden Topologien  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  abgeschlossen.  $\eta_t: I \rightarrow I$  ( $t \in I$ ) sei eine Homotopie der Identität  $\eta_0$  von  $I$ , die das Teilintervall  $[0, \frac{1}{4}] \subset I$  auf 0 und  $[\frac{3}{4}, 1] \subset I$  auf 1 (unter Festhaltung von 0 und 1) zusammenzieht. Definieren wir  $h_t: M \rightarrow M$  durch

$$(47) \quad \begin{cases} h_t(x, z, s) = (x, z, \eta_t(s)) \\ h_t(y, z) = (y, z), \end{cases}$$

so zieht  $h_t$  (wenn  $t$  von 0 nach 1 läuft)  $M_1$  auf den Punkt  $(x_0, z_0, 0)$  zusammen und  $M_3$  auf  $M'_3 = \{(y, z)\}$ .

1.1 Hilfssatz 1 liefert:  $h_t$  ist eine Homotopie von  $(M, \mathfrak{X}_i)$  in sich für  $i = 1, 2$ . Wir werden ferner zeigen:

(48)  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  induzieren sowohl in  $M_2$  als auch in  $M'_3$  dieselbe Topologie.

Daraus folgt, daß  $h_1$  auch als Abbildung von  $(M, \mathfrak{X}_1)$  in  $(M, \mathfrak{X}_2)$  und von  $(M, \mathfrak{X}_2)$  in  $(M, \mathfrak{X}_1)$  stetig ist; denn diese Abbildungen sind auf den drei abgeschlossenen Teilmengen  $M_1, M_2, M_3$ , die  $M$  überdecken stetig:  $h_1(M_1)$  ist ein einziger Punkt, auf  $M_2$  sind die Topologien  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  gleich, und  $M_3$  wird durch  $h_1$  in  $M'_3$  abgebildet, wo  $\mathfrak{X}_1$  und  $\mathfrak{X}_2$  ebenfalls gleich sind.

Da  $h_1$  die Teilmenge  $I_0$  in sich abbildet, induziert  $h_1$  stetige Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi &: C_f \wedge Z \rightarrow C_{f \wedge 1} \\ \psi &: C_{f \wedge 1} \rightarrow C_f \wedge Z \end{aligned}$$

[vgl. (45), (46)].  $\psi \circ \varphi$  und  $\varphi \circ \psi$  werden durch  $h_1 \circ h_1: (M, \mathfrak{X}_i) \rightarrow (M, \mathfrak{X}_i)$  mit  $i = 1$  bzw. 2 induziert. Vermöge  $h_t \circ h_t: (M, \mathfrak{X}_i) \rightarrow (M, \mathfrak{X}_i)$  ist  $h_1 \circ h_1 \simeq h_0 \circ h_0 = 1_M$  (bezüglich  $\mathfrak{X}_i$ ). Wegen  $h_t(I_0) \subset I_0$  ist  $h_t \circ h_t$  mit dem Identifizieren von  $I_0$  zu einem Punkt verträglich und liefert (vgl. 1.1 Hilfssatz 1)

$$\psi \circ \varphi \simeq 1, \quad \varphi \circ \psi \simeq 1.$$

Nach Konstruktion von  $\varphi$  und  $\psi$  [vgl. (47)] sind die Diagramme (41 a) und (41 b) von Hilfssatz 18 kommutativ.

Es ist also nur noch (48) zu beweisen: Wie man (unter Benutzung der Stetigkeit von  $f$ ) leicht bestätigt, wird  $Y$  bei der Identifizierung  $\tilde{C}X + Y \rightarrow \tilde{C}_f$  topologisch auf eine abgeschlossene Teilmenge von  $\tilde{C}_f$  abgebildet, die wir mit

$Y$  identifizieren. Auf  $f \wedge 1$  angewandt, besagt das:

$$(M'_3, \mathfrak{X}_2) = Y \wedge Z.$$

Andererseits ist  $Y \times Z$  ein abgeschlossener Teilraum von  $\tilde{C}_I \times Z$  (mit der induzierten Topologie), der bezüglich der Identifizierung  $\tilde{C}_I \times Z \rightarrow (M, \mathfrak{X}_1)$  saturiert<sup>8)</sup> ist. Daraus folgt nach BOURBAKI [2] § 9, No. 5, Corr. 1, daß  $(M'_3, \mathfrak{X}_1)$  durch Identifizieren aus  $Y \times Z$  entsteht, d.h.

$$(M'_3, \mathfrak{X}_1) = Y \wedge Z.$$

Der Beweis für  $M_2$  verläuft analog: Mit der Abkürzung  $I' = \{s \mid s \in I, \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}\}$  ist offenbar

$$(M_2, \mathfrak{X}_2) = (X \wedge Z) \times I'.$$

Andererseits ist  $X \times Z \times I'$  ein abgeschlossener Teilraum von  $\tilde{C}_I \times Z^0$ , der bezüglich der Identifizierung  $\tilde{C}_I \times Z \rightarrow (M, \mathfrak{X}_1)$  saturiert ist, und daraus folgt, daß  $(M_2, \mathfrak{X}_1)$  durch Identifizieren aus  $X \times Z \times I'$  entsteht, d.h. (unter Beachtung von 1.1 Hilfs-satz 1)

$$(M_2, \mathfrak{X}_1) = (X \wedge Z) \times I'.$$

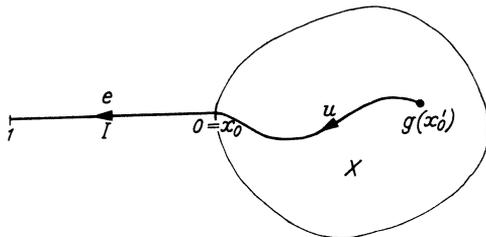


Fig. 14

**5.13. Anhang.** Beweis von 5.5 E). Seien  $f: X \rightarrow X'$ ,  $g: X' \rightarrow X$  frei homotopieinvers zueinander. Wir werden  $f$  zu

einer gebundenen Homotopieäquivalenz  $\check{f}: \check{X} \rightarrow \check{X}'$  fortsetzen. Wegen der Voraussetzung  $X \equiv \check{X}$ ,  $X' \equiv \check{X}'$  [vgl. 5.4 a)] genügt das zum Beweis von 5.5 E).

Seien  $u: I \rightarrow X$ ,  $v: I \rightarrow X'$  Wege, die  $g(x'_0)$  mit  $x_0$  bzw.  $f(x_0)$  mit  $x'_0$  verbinden ( $x_0, x'_0 =$  Grundpunkte von  $X$  bzw.  $X'$ , vgl. Fig. 14, die den ersten der beiden Fälle veranschaulicht).  $e: I \rightarrow I$  sei die Identität. Wie üblich wird die Zusammensetzung  $w \cdot w'$  zweier Wege  $w, w'$  [falls  $w(1) = w'(0)$ ] durch

$$(w \cdot w')(s) = \begin{cases} w(2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ w'(2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (s \in I)$$

und der inverse Weg  $w^{-1}$  durch

$$w^{-1}(s) = w(1 - s), \quad s \in I$$

definiert. Fortsetzungen  $\check{f}: \check{X} \rightarrow \check{X}'$ ,  $\check{g}: \check{X}' \rightarrow \check{X}$  von  $f$  bzw.  $g$ , die Grundpunkte in Grundpunkte abbilden, erhält man nun, wenn man

$$\check{f}|I = v \cdot e, \quad \check{g}|I = u \cdot e$$

setzt (Fig. 14).

<sup>8)</sup> Eine Menge  $A \subset X$  heißt saturiert bezüglich der Identifizierung  $p: X \rightarrow \bar{X}$ , wenn  $p^{-1}(p(A)) = A$  ist.

<sup>9)</sup> Statt  $X \times Z \times I'$  müßte es eigentlich  $X \times I' \times Z$  heißen, vgl. aber Fußnote <sup>7)</sup>, S. 341.

Nach Voraussetzung bestehen die freien Homotopien  $g \circ f \simeq 1_X$  und  $f \circ g \simeq 1_{X'}$ . Die Grundpunkte  $x_0$  bzw.  $x'_0$  mögen bei diesen Homotopien die Wege  $w$  bzw.  $w'$  durchlaufen. Kann man  $u$  und  $v$  so wählen, daß der Weg

$$\check{g} \circ \check{f} | I = (\check{g} \circ v) \cdot (\check{g} \circ e) = (g \circ v) \cdot (u \cdot e)$$

mit  $w \cdot e$ , d.h.  $(g \circ v) \cdot u$  mit  $w$  homotop ist (Fig. 15), so läßt sich die freie Homotopie  $g \circ f \simeq 1_X$  zu einer gebundenen Homotopie  $\check{g} \circ \check{f} \simeq 1_{\check{X}}$  fortsetzen.

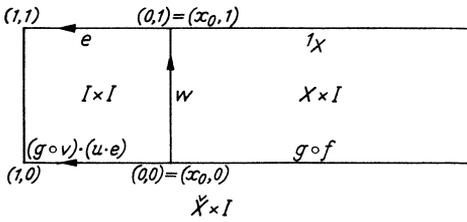


Fig. 15

Analog erhält man  $\check{f} \circ \check{g} \simeq 1_{\check{X}'}$ , wenn  $(f \circ u) \cdot v \simeq w'$  ist.

Wir wählen nun für  $u$  irgendeinen Weg von  $g(x'_0)$  nach  $x_0$ . Dann setzen wir  $v = (f \circ u)^{-1} \cdot w'$ , wodurch  $(f \circ u) \cdot v \simeq w'$  und daher  $\check{f} \circ \check{g} \simeq 1_{\check{X}'}$  erfüllt wird. Dann setzen wir  $u' = (g \circ v)^{-1} \cdot w$  und erhalten  $(g \circ v) \cdot u' \simeq w$ , also  $\check{g}' \circ \check{f}' \simeq 1_{\check{X}'}$ ,

wenn  $\check{g}'$  die zu  $u'$  gehörende Fortsetzung von  $g$  bezeichnet.  $\check{f}'$  besitzt demnach sowohl ein Rechts- als auch ein Links-Homotopieinverses und ist daher eine Homotopieäquivalenz [vgl. 2.5 C)].

### Literatur

[1] BARRATT, M. G.: Track groups I. Proc. London Math. Soc. (3) **5**, 71—106 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I, Structures topologiques, 2. Aufl. Paris 1951. — [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. X, Espaces fonctionnels. Paris 1949. — [4] EILENBERG, S.: On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups. Fund. Math. **32**, 167—175 (1939). — [5] EILENBERG, S., and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press 1952. — [6] HILTON, P. J.: An introduction to homotopy theory. Cambridge Univ. Press 1953. — [7] HOPF, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637—665 (1931). — [8] FOX, R. H.: On homotopy type and deformation retracts. Ann. of Math. **44**, 40—50 (1943). — [9] JAMES, I. M.: Reduced product spaces. Ann. of Math. **62**, 170—197 (1955). — [10] JAMES, I. M.: On the suspension triad. Ann. of Math. **63**, 191—247 (1956). — [11] MILNOR, J.: Construction of universal bundles I. Ann. of Math. **63**, 272—284 (1956). — [12] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen II. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in Math. Z. **69**, Schlußheft (1958). — [13] SEIFERT, H., u. W. THRELHALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934. — [14] SERRE, J. P.: Sur la suspension de Freudenthal. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1340—1342 (1952). — [15] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [16] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460—475 (1946). — [17] WHITEHEAD, G. W.: A generalization of the Hopf invariant. Ann. of Math. **51**, 192—237 (1950). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: On adding relations to homotopy groups. Ann. of Math. **42**, 409—428 (1941). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949). — [20] WHITEHEAD, J. H. C.: On certain theorems of G. W. WHITEHEAD. Ann. of Math. **58**, 418—428 (1953).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 4. September 1957)