Mathematische Zeitschrift, Band 56, Heft 1, S. 33—48 (1952).

Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

Von

S. D. Puppe in Heidelberg.

Einleitung.

Für das Isotopieproblem der Knotentheorie wurden bisher zwei Methoden mit Erfolg angewandt, um die Verschiedenheit von Knoten mit gleicher Knotengruppe, insbesondere von einander spiegelbildlichen Knoten, nachzuweisen. Die erste, auf GOERITZ [1] [1]) zurückgehende Methode beruht auf den MINKOWSKIschen Einheiten der quadratischen Form eines Knotens, die zweite benutzt die von SEIFERT [5] eingeführten Verschlingungsinvarianten von Überlagerungen des Knotenaußenraumes. Es sind Beispiele bekannt, bei denen die Unterscheidung zweier Knoten durch die Verschlingungsinvarianten möglich ist, während ihre MINKOWSKIschen Einheiten übereinstimmen (SEIFERT [6] S. 92). Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zu zeigen, daß das Umgekehrte nicht möglich ist, sondern daß die MINKOWSKIschen Einheiten durch die Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt sind und sich aus ihnen berechnen lassen.

Kapitel I.
Minkowskische Einheiten.

§ 1.
Zahlentheoretische Hilfsmittel.

Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger Definitionen und Sätze aus der elementaren Zahlentheorie. Die Beweise findet man in den entsprechenden Lehrbüchern (vgl. etwa LANDAU [2]). Sofern nichts Besonderes gesagt ist, sind die auftretenden Größen ganze Zahlen oder ganzzahlige Matrizen.

Ist p eine Primzahl $\neq 2$ und $n \not\equiv 0 \pmod p$, so ist das LEGENDREsche Restsymbol definiert durch

$$(1)\qquad \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \equiv x^2 \pmod p \text{ lösbar ist,} \\ -1, & \text{wenn das nicht der Fall ist.} \end{cases}$$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Es gilt dann:

(2) $$\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{p}\right) = \left(\frac{n_1}{p}\right) \cdot \left(\frac{n_2}{p}\right).$$

(3) Aus $n_1 \equiv n_2 \pmod p$ folgt $\left(\frac{n_1}{p}\right) = \left(\frac{n_2}{p}\right)$.

Ist $n > 0, A = (a_{\nu\mu})$ eine symmetrische quadratische Matrix und $x = (x_\nu)$ eine variable Spalte, so heißt

(4) $$G_n(A) = \sum_{x \bmod n} e^{\frac{2\pi i}{n} x' A x}$$

die Gausssche Summe von A (bzw. von der durch A bestimmten quadratischen Form $x' A x$) zum Modul n. Bei der Summation sollen die x_ν unabhängig voneinander ein vollständiges Restsystem mod n durchlaufen, also etwa die Zahlen von 0 bis $n-1$.

Sätze und Formeln über Gausssche Summen:

Geht B aus A durch unimodulare Transformation hervor, d. h. ist $S' A S = B$ mit $|S| = \pm 1$, so gilt

(5) $$G_n(A) = G_n(B).$$

(6) Ist $A \equiv B \pmod n$, so gilt $G_n(A) = G_n(B)$.

(7) $$\text{Für } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ gilt } G_n(A) = G_n(A_1) \cdot G_n(A_2).$$

Für $t > t' \geqq 0$ ist

(8) $$G_{p^t}(p^{t'} a) = G_{p^{t-t'}}(a) \cdot p^{t'},$$

wo a als einreihige Matrix aufzufassen ist und p wieder eine Primzahl $\neq 2$ bedeutet.

Wenn $a \not\equiv 0 \pmod p$ ist, so gilt weiter

(9) $$G_{p^t}(a) = \begin{cases} p^{\frac{t}{2}}, & t \equiv 0 \pmod 2 \\ p^{\frac{t-1}{2}} \cdot G_p(a), & t \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

(10) $$G_p(a) = \left(\frac{a}{p}\right) G_p(1),$$

(11) $$G_p(1) = \varrho(p) \cdot \sqrt{p} \text{ mit } \varrho(r) = \begin{cases} 1, & r \equiv 1 \pmod 4 \\ i, & r \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

§ 2.

Minkowskische Einheiten einer quadratischen Form.

Bei Minkowski [3] wird einer quadratischen Form für jede Primzahl p eine Zahl $C_p = \pm 1$ zugeordnet, und es wird gezeigt, daß diese Zahlen gegenüber rationalen Transformationen invariant sind. Für die Anwendung in der Knotentheorie scheidet C_2 ganz aus, und es genügt zu wissen, daß die anderen C_p gegenüber unimodularen Transformationen invariant sind. Der Einfachheit halber beschränken wir uns von vornherein auf den Fall $p \neq 2$ und den Nachweis der letztgenannten Eigenschaft.

Sei A eine ganzzahlige symmetrische Matrix mit $|A| \neq 0$. Wir bezeichnen mit $m = m(A)$ die Reihenzahl von A und (für eine Primzahl $p \neq 2$) mit $\omega = \omega_p(A)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von $|A|$. t sei in folgendem immer eine gerade Zahl > 0, und unter $\varrho(r)$ ist die in (11) definierte Funktion zu verstehen. Es wird dann zunächst die Zahl

$$C_p^t(A) = \frac{1}{\varrho(p^\omega)} \cdot p^{-\frac{1}{2}(mt+\omega)} \cdot G_{p^t}(A) \tag{12}$$

eingeführt. Aus (5) entnimmt man, daß $C_p^t(A)$ bereits eine Invariante gegenüber unimodularen Transformationen von A ist; denn es ist $|A|$, damit $\omega_p(A)$ und offenbar auch $m(A)$ invariant. Ferner folgt für zwei Matrizen A, B mit gleicher Reihenzahl aus $A \equiv B \pmod{p^v}$ die gleiche Kongruenz für die Determinanten: $|A| \equiv |B| \pmod{p^v}$. Daraus ergibt sich $\omega(A) = \omega(B)$ für $v > \omega(A)$, und wenn auch $v \geqq t$ gilt, ist nach (6) $C_p^t(A) = C_p^t(B)$. $C_p^t(A)$ ist also zweitens invariant bei Ersetzung von A durch eine mod p^v kongruente Matrix, vorausgesetzt daß v genügend groß ist. Diese beiden Eigenschaften gestatten es, den allgemeinen Fall auf den Fall, daß A eine Diagonalmatrix ist, zurückzuführen. Dadurch wird die Abhängigkeit von dem Parameter t in natürlicher Weise beseitigt und ein einfaches Berechnungsverfahren für die C_p^t angegeben werden können. Es dient dazu folgender

Hilfssatz 1. *Für jedes $v > 0$ gibt es eine unimodulare Matrix S, so daß*

$$S' A S \equiv D \pmod{p^v}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Für $m(A) = 1$ ist nichts zu beweisen, sei also $m(A) > 1$. Ist $A = p^r \cdot \bar{A}$ und leistet S für $\bar{A}$ das Geforderte, so auch für A, es genügt also, den Nachweis für $A \not\equiv 0 \pmod{p}$ zu führen. Man kann annehmen, daß es in der Hauptdiagonale von A ein Element $a_{\nu\nu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ gibt; denn andernfalls betrachte man irgendein nicht durch p teilbares Element $a_{\nu\mu}$. Addiert man die μ-te Spalte zur ν-ten und dann die μ-te Zeile zur ν-ten (das ist eine unimodulare Transformation), so wird $a_{\nu\nu}$ durch $a_{\nu\nu} + 2a_{\nu\mu} + a_{\mu\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ersetzt[2]). Demnach kann a_{11}, falls es nicht schon selbst prim zu p ist, immer durch Zeilen- und Spaltenvertauschung in ein nicht durch p teilbares Element übergeführt werden. Dies wird als geschehen angenommen. Addiert man dann die mit x multiplizierte erste Spalte zur k-ten und anschließend die mit x multiplizierte erste Zeile zur k-ten ($k > 1$), so tritt $a_{11} \cdot x + a_{1k}$ an die Stelle von a_{1k} und a_{k1} ($= a_{1k}$). Wird für x

[2]) An dieser Stelle geht die Voraussetzung $p \neq 2$ entscheidend ein.

eine Lösung von $a_{11} \cdot x + a_{1k} \equiv 0 \pmod{p^v}$ gewählt und der Prozeß für alle $k > 1$ durchgeführt, so erhält man

$$\bar{S}' A \bar{S} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \pmod{p^v} \text{ mit unimodularem } \bar{S}.$$

Durch Induktionsschluß folgt die Behauptung.

Für eine Diagonalmatrix kann C_p^t mit Hilfe der Formeln (7)—(11) explizit berechnet werden. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 2. *Ist* $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu})$, $c_\nu \not\equiv 0 \pmod{p}$ *und* $t > \operatorname{Max} \omega_\nu$, *so ist*

$$C_p^t(D) = \varrho \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \left(\frac{c_\nu}{p}\right) \tag{13}$$

mit

$$\varrho = \frac{\varrho(p)^\lambda}{\varrho(p^\omega)} = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}}{p}\right) \tag{14}$$

$\omega = \omega(D) = \sum_\nu \omega_\nu$, $\lambda =$ *Anzahl der ungeraden* ω_ν ($\delta_{\nu\mu}$ *ist hier das* Kronecker-*Symbol, und* $[r]$ *bedeutet die größte ganze Zahl* $\leq r$).

Beweis.

$$\begin{aligned} G_{p^t}(D) &= \prod_\nu G_{p^t}(c_\nu p^{\omega_\nu}) = \prod_\nu G_{p^{t-\omega_\nu}}(c_\nu) p^{\omega_\nu} && \text{nach (7) u. (8)} \\ &= \prod_{\omega_\nu \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)} p^{\frac{1}{2}(t+\omega_\nu)} \cdot \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} G_p(c_\nu)\, p^{\frac{1}{2}(t+\omega_\nu-1)} && \text{nach (9)} \\ &= p^{\frac{1}{2}(mt+\omega)} \cdot \varrho(p)^\lambda \cdot \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 2)} \left(\frac{c_\nu}{p}\right). && \text{nach (10) u. (11)} \end{aligned}$$

Nach Definition von C_p^t ist das schon die Behauptung, wobei für ϱ der erste der beiden angegebenen Ausdrücke steht; die Übereinstimmung mit dem zweiten bestätigt man durch Fallunterscheidung.

Offenbar ist $C_p^t(D)$ unabhängig von t für alle $t > \operatorname{Max} \omega_\nu$. Zusammen mit dem Hilfssatz 1 folgt daraus allgemein

Hilfssatz 3. *Für beliebiges* A *ist* $C_p^t(A)$ *unabhängig von* t *für alle* $t > \omega(A)$.

Beweis. Ist $t_i > \omega(A)$, $i = 1, 2$, so gibt es nach Hilfssatz 1 eine Diagonalmatrix D, so daß $S' A S \equiv D \pmod{p^{t_1+t_2}}$ gilt mit unimodularem S. Nach den Bemerkungen im Anschluß an (12) ist $C_p^{t_i}(A) = C_p^{t_i}(D)$; $C_p^{t_1}(D)$ und $C_p^{t_2}(D)$ stimmen aber wie eben gezeigt überein (da $t_i > \omega(A) = \omega(D) \geqq \operatorname{Max}_\nu \omega_\nu$ ist).

Dieses Ergebnis berechtigt zu der endgültigen Definition:

$$C_p(A) = C_p^t(A) \text{ mit } t > \omega(A).$$

$C_p(A)$ wird die Minkowskische Einheit von A zur Primzahl p genannt. (Daß $C_p(A)$ tatsächlich eine Einheit, d. h. $= \pm 1$ ist, folgt aus Hilfssatz 2 zusammen mit Hilfssatz 1.)

Es ist klar, wie sich die Eigenschaften von $C_p^t(A)$ auf $C_p(A)$ übertragen. Wir fassen nochmals zusammen:

Satz 1. *$C_p(A)$ ist invariant gegenüber unimodularen Transformationen von A und für hinreichend großes v gegenüber Ersetzung von A durch eine* mod p^v *kongruente Matrix. Dabei genügt es, daß $v \geqq t_0$ gilt, wo t_0 die kleinste gerade Zahl $> \omega(A)$ ist.*

Satz 2. *Man kann $C_p(A)$ berechnen, indem man mit $v \geqq t_0$ nach Hilfssatz 1 ein $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu}) \equiv S' A S \pmod{p^v}$ bestimmt, und man erhält*

$$C_p(A) = C_p(D) = \varrho \prod_{\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2} \left(\frac{c_\nu}{p}\right)$$

(vgl. (13) *und* (14)), *speziell*

$$C_p(A) = 1 \quad \textit{für} \quad |A| \not\equiv 0 \pmod p.$$

Von entscheidender Bedeutung in der Knotentheorie ist ferner

Satz 3. *Ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $\omega_p(A_i) = \omega_i$, so gilt*

$$C_p(A) = (-1)^{\frac{1}{4}(p^{\omega_1}-1)(p^{\omega_2}-1)} \cdot C_p(A_1) \cdot C_p(A_2),$$

speziell $C_p(A) = C_p(A_1)$ für $|A_2| \not\equiv 0 \pmod p$.

Beweis. Mit $m(A_i) = m_i$ und genügend großem t gilt nach der Definition von C_p

$$C_p(A) = \frac{1}{\varrho(p^\omega)} \cdot p^{-\frac{1}{2}((m_1+m_2)t + (\omega_1+\omega_2))} \cdot G_{p^t}(A_1) \cdot G_{p^t}(A_2) \qquad \text{(vgl. (7))}$$
$$= \frac{\varrho(p^{\omega_1}) \cdot \varrho(p^{\omega_2})}{\varrho(p^{\omega_1+\omega_2})} \cdot C_p(A_1) \cdot C_p(A_2).$$

Durch Fallunterscheidung erkennt man die Übereinstimmung dieses Koeffizienten mit dem in der Behauptung angegebenen. Die spezielle Folgerung ergibt sich sofort, wenn man $C_p(A_2) = 1$ und $\omega_2 = 0$ beachtet.

Wir zeigen zum Schluß, daß diese Definition von C_p mit der bei Goeritz [1] und Reidemeister [4] (S. 28) übereinstimmt, die durch folgende Vorschrift gegeben ist:

Man transformiere A rational in $B \equiv \overline{D} \pmod{p^2}$ mit

$$(16) \qquad \overline{D} = (\overline{d}_\nu \delta_{\nu\mu}), \quad \overline{d}_\nu = \begin{cases} \overline{c}_\nu, & \nu \leqq m - \lambda \\ \overline{c}_\nu p, & \nu > m - \lambda, \end{cases} \quad \overline{c}_\nu \not\equiv 0 \pmod p$$

und setze

$$(17) \qquad C_p(A) = C_p(\overline{D}) = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}}{p}\right) \cdot \prod_{\nu = m-\lambda+1}^{m} \left(\frac{\overline{c}_\nu}{p}\right).$$

Für den Beweis, daß diese Vorschrift immer ausführbar ist und zu keinen Widersprüchen führt, wird auf Minkowski [3] verwiesen.

Wir erhalten hier nach Satz 2

$$(18) \qquad C_p(A) = C_p(D) = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}}{p}\right) \cdot \prod_{\nu = m-\lambda+1}^{m} \left(\frac{c_\nu}{p}\right),$$

wenn $S' A S \equiv D \pmod{p^{\omega+2}}$, $D = (c_\nu p^{\omega_\nu} \delta_{\nu\mu})$ ist und wenn man die offenbar erlaubte Annahme macht, daß gerade die letzten $\omega_\nu \equiv 1 \pmod 2$ sind. Setzt man

$$R = (p^{-\left[\frac{\omega_\nu}{2}\right]} \delta_{\nu\mu}),$$

so ergibt sich aus A durch rationale Transformation

$$B = R' S' A S R.$$

Es ist $B \equiv \overline{D} \pmod{p^2}$, wo $\overline{D}$ die in (16) geforderte Gestalt hat. Die dort angegebene Vorschrift (17) liefert mit diesem $\overline{D}$ gerade dasselbe wie (18).

§ 3.

Die quadratische Form eines Knotens.

Unter einer Knotenlinie wird hier ein geschlossenes, doppelpunktfreies, orientiertes Polygon in dem (durch einen unendlich fernen Punkt) zur 3-Sphäre S^3 geschlossenen dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 verstanden. Dabei sei in R^3 eine bestimmte Orientierung festgelegt. Zwei Knotenlinien heißen isotop, wenn sie durch kombinatorische Deformationen (Reidemeister [4]) ineinander übergeführt werden können. Ein Knoten ist eine Isotopieklasse von Knotenlinien.

Ist $\mathfrak{k}$ eine Knotenlinie, so betrachten wir Projektionen von $\mathfrak{k}$ auf Ebenen E von R^3, die so orientiert werden, daß sie zusammen mit der Projektionsrichtung einen fest vorgegebenen Schraubsinn im R^3 bestimmen. Eine solche Projektion heißt regulär (Reidemeister [4]), wenn die Doppelpunkte des entstehenden Polygons $\pi(\mathfrak{k})$ höchstens zweifach sind und inneren Punkten der Kanten von $\mathfrak{k}$ entsprechen; ihre Anzahl ist dann sicher endlich. Es gibt zu jeder Knotenlinie reguläre Projektionen. $\pi(\mathfrak{k})$ heißt normiert, wenn bei jedem Doppelpunkt D der überkreuzende Bogen gekennzeichnet ist.

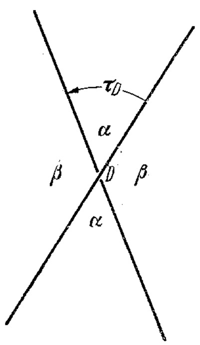

Fig. 1.

Einer regulären normierten Knotenprojektion wird nach Goeritz [1] folgendermaßen eine symmetrische Matrix und damit eine quadratische Form zugeordnet:

Die Gebiete, in die E durch $\pi(\mathfrak{k})$ zerlegt wird, lassen sich auf genau eine Weise so in zwei Klassen α und β einteilen, daß zwei Gebiete derselben Klasse höchstens Doppelpunkte von $\pi(\mathfrak{k})$ als gemeinsame Randpunkte haben. Es sei α die Klasse, zu der das Außengebiet G_0 von $\pi(\mathfrak{k})$ gehört; die übrigen α-Gebiete werden mit $G_1, \ldots, G_h$ bezeichnet. In einem Doppelpunkt D von $\pi(\mathfrak{k})$ stoßen vier Gebiete aneinander (Fig. 1), von denen je zwei gegenüberliegende zur gleichen Klasse gehören (sie sind nicht notwendig voneinander verschieden). Ist τ_D die Drehung um D, die die überkreuzende Strecke so in die unterkreuzende überführt, daß sie dabei in der Umgebung von D nur die α-Gebiete überstreicht, so wird definiert:

$$\eta(D) = \begin{cases} 0, & \text{wenn in } D \text{ ein } \alpha\text{-Gebiet an sich anstößt,} \\ +1 \text{ oder } -1 & \text{je nachdem, ob } \tau_D \text{ in } E \text{ positiv oder negativ ist, wenn die beiden } \alpha\text{-Gebiete verschieden sind.} \end{cases}$$

Mit $q_{ii} = \sum \eta(D)$, summiert über alle mit G_i inzidenten D,
$q_{ik} = \sum -\eta(D)$, summiert über alle zugleich mit G_i und G_k inzidenten $D\,(i \neq k)$,
ist $Q = (q_{ik})$, $i, k = 1, \ldots, h$ die gesuchte Matrix.

Es läßt sich zeigen (Goeritz [1]), daß man die Veränderungen von Q, die der Übergang zu einer anderen Projektion von $\mathfrak{k}$ oder zu einer isotopen Knotenlinie bewirkt, durch geeignete Verknüpfung von Operationen der folgenden Art erhalten kann:

1. Q geht über in $\overline{Q} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$ mit $|Q_1| = \pm 1$,
2. Q geht über in $\overline{Q} = S'QS$ mit unimodularem S.

Ferner ist immer

$$|Q| \neq 0\,^{3)}.$$

Nach § 2 ist also $C_p(Q)$ definiert, und aus den Sätzen 1 und 3 ergibt sich, daß bei den obigen Operationen

$$C_p(Q) = C_p(\overline{Q})$$

gilt. $C_p(Q)$ ist daher eine Knoteninvariante. Wir nennen sie Minkowskische Einheit oder auch Minkowskische Invariante des Knotens.

Kapitel II.

Verschlingungsinvarianten.

§ 1.

Abstrakte Gruppen mit Verschlingung.

Im Anschluß an Seifert [5] wird der Begriff einer Gruppe mit Verschlingung eingeführt. Die Anwendung dieses Begriffs auf die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ einer orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (§ 2) liefert die Verschlingungsinvarianten.

Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Abelsche Gruppe. Wir nennen ein Erzeugendensystem $b = (b_i)$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der von den b_i erzeugten zyklischen Untergruppen ist und wenn für die Ordnungen c_i von b_i gilt $c_{i+1} \equiv 0 \pmod{c_i}$. Die Zahlen c_i sind dann bekanntlich durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt. Sie mögen (im Hinblick auf die topologische Anwendung) als Torsionskoeffizienten bezeichnet werden.

[3]) Tatsächlich ist $|Q|$ sogar immer ungerade.

Definition. $\mathfrak{G}$ heißt Gruppe mit Verschlingung — oder kürzer V-Gruppe —, wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Abelsche Gruppe ist und wenn für $a, b \in \mathfrak{G}$ eine Funktion $V(a, b)$ definiert ist, deren Werte Klassen rationaler Zahlen mod 1 sind und die folgenden Axiomen genugt:
V_1: $V(a, b) = V(b, a)$
V_2: $V(a+b, c) = V(a, c) + V(b, c)$
V_3: Es gibt zwei Basen (b_i), $(\bar{b}_i)$ von $\mathfrak{G}$, genannt duale Basen, so daß

$$V(b_i, \bar{b}_k) = \overbrace{\frac{1}{c_i}\delta_{ik}}$$

ist, wo c_i die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{G}$ sind[4]). Dabei bedeutet $\breve{r}$ für rationales r die Klasse mod 1.

Einige einfache Folgerungen sind:

(1) $$V(c, a+b) = V(c, a) + V(c, b),$$

(2) $$V(0, a) = V(a, 0) = \breve{0}.$$

Sind α und β die Ordnungen von a bzw. b und bezeichnet (α, β) ihren größten gemeinsamen Teiler, so gilt

(3) $$(\alpha, \beta) \cdot V(a, b) = \breve{0}.$$

Beweis. (1) und (2) ergeben sich unmittelbar aus V_1 und V_2. Bei (3) ist nach (2) $\alpha \cdot V(a, b) = \beta \cdot V(a, b) = \breve{0}$, und da (α, β) sich als ganzzahlige Linearkombination von α und β darstellen läßt, folgt die Behauptung.

Das Ergebnis von Seifert [5] ist die folgende Charakterisierung der möglichen Verschlingungen (V-Gruppen-Strukturen) einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$. Die hier nicht ausgeführten Beweise findet man in dieser Arbeit.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Verschlingung. Wir zerlegen $\mathfrak{G}$ in eine direkte Summe von Primzahlpotenzgruppen (d. h. von Gruppen, deren Elemente nur Potenzen einer festen Primzahl als Ordnung haben), was bekanntlich — abgesehen von der Reihenfolge — auf genau eine Weise möglich ist. Sei p eine Primzahl $\neq 2$ und $\mathfrak{G}_p$ die zugehörige Gruppe dieser Zerlegung. Ihre Torsionskoeffizienten haben die Form p^{e_i}, wobei etwa

(4) $$0 < e_1 = \cdots = e_{\nu_1} < e_{\nu_1+1} = \cdots = e_{\nu_2} < e_{\nu_2+1} = \cdots < \cdots = e_{\nu_r}$$

[4]) V_3 ist äquivalent mit der vom algebraischen Standpunkt einfacheren Forderung (vgl. [8], [9])

V_3': Zu jedem $a \in \mathfrak{G}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein b, so daß $V(a, b) \neq \breve{0}$.

Hier wurde trotzdem V_3 vorgezogen, um die Darstellung möglichst eng an Seifert [5] anschließen zu können und weil bei der Torsionsgruppe einer Mannigfaltigkeit der Poincaré-Veblensche Dualitätssatz direkt auf V_3 führt (vgl. II § 2). Übrigens ist V_3 bzw. V_3' nur für den Beweis von (6) erforderlich.

gilt. Ist (b_i) eine Basis von $\mathfrak{G}_p$ und $(V(b_i, b_k)) = \breve{M}$, M eine rationale Matrix, so unterteilen wir M den Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_r$ entsprechend in Teilmatrizen und erhalten nach (3)

$$(5) \qquad M = \begin{pmatrix} M_{11} p^{-e_{\nu_1}} & M_{12} p^{-e_{\nu_1}} & \ldots & M_{1r} p^{-e_{\nu_1}} \\ M_{21} p^{-e_{\nu_1}} & M_{22} p^{-e_{\nu_2}} & \ldots & M_{2r} p^{-e_{\nu_2}} \\ \vdots & & & \\ M_{r1} p^{-e_{\nu_1}} & M_{r2} p^{-e_{\nu_2}} & \ldots & M_{rr} p^{-e_{\nu_r}} \end{pmatrix},$$

wo die M ganzzahlig sind. Wegen V_1 ist $\breve{M}$ symmetrisch, man kann daher dasselbe von M annehmen.

Aus V_3 läßt sich

$$(6) \qquad |M_{ii}| \not\equiv 0 \pmod p$$

folgern, und eine Untersuchung der möglichen Basen von $\mathfrak{G}_p$ lehrt

Hilfssatz 4. *Der quadratische Restcharakter von $|M_{ii}|$ bezüglich p, also die Zahl*

$$\left(\frac{|M_{ii}|}{p}\right)$$

ist unabhängig von der speziellen Basis (b_i) und unabhängig von der Wahl von M allein durch die Struktur der V-Gruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt.

Dementsprechend werden einer V-Gruppe $\mathfrak{G}$ Verschlingungsinvarianten $\mathfrak{v}_{p^e}$ zugeordnet durch die

Definition.

$$\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{G}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } p^e \text{ nicht unter den Torsionskoeffizienten von } \mathfrak{G}_p \text{ vorkommt,} \\ \left(\frac{|M_{ii}|}{p}\right), & \text{wenn } e = e_{\nu_i} \text{ (wo } e_{\nu_i} \text{ und } M_{ii} \text{ nach (5) bestimmt wird).} \end{cases}$$

Durch diese Größen ist die Struktur von $\mathfrak{G}$ tatsächlich in gewissem Sinn bestimmt; es gilt nämlich

Satz 4. *Ist $\mathfrak{G}$ eine V-Gruppe, die keine Elemente der Ordnung 2 enthält, so ist ihre Struktur durch die gewöhnliche Gruppenstruktur und durch die Verschlingungsinvarianten eindeutig bestimmt.*

Wir werden von diesem Satz keinen Gebrauch machen und gehen deshalb nicht auf seinen Beweis ein. Es sei jedoch bemerkt, daß der folgende Hilfssatz, den wir hier mit Rücksicht auf eine Anwendung in Kapitel III ableiten, einen wichtigen Schritt zu diesem Beweis darstellt (vgl. [5] S. 821 f.).

Hilfssatz 5. *Ist $b = (b_i)$ irgendeine Basis von $\mathfrak{G}_p$, so kann man eine Basis $\bar{b} = (\bar{b}_i)$ finden, die mit b durch eine unimodulare Matrix Γ zusammenhängt, $\bar{b} = \Gamma b$, und für die*

$$V(\bar{b}_i, \bar{b}_k) = \breve{D} \text{ mit } D = \text{Diagonalmatrix, also } D = (d_i p^{-e_i} \delta_{ik}),$$

gilt.

Beweis. b wird schrittweise in $\bar{b}$ übergeführt durch folgende Operationen:

1. b_i bleibt für $i \neq \nu$, b_ν wird durch $b_\nu + b_\mu$ ersetzt mit $\mu < \nu$.

2. b_i bleibt für $i \neq \nu$, b_ν wird durch $b_\nu + p^{e_\mu - e_\nu} b_\mu$ ersetzt mit $\mu > \nu$.

3. b_i bleibt für $i \neq \nu$, μ, b_ν und b_μ werden vertauscht mit solchem ν, μ, daß $e_\nu = e_\mu$, daß also ν und μ in demselben Intervall (ν_i, ν_{i+1}) liegen.

Jede dieser Operationen führt b wieder in eine Basis über, und die zugehörigen Matrizen Γ sind unimodular. Ist $(V(b_i, b_k)) = \breve{M}$, so erhält man aus M entsprechende Matrizen für die neuen Basen, indem man

bei 1. nacheinander die μ-te Spalte zur ν-ten und die μ-te Zeile zur ν-ten addiert,

bei 2. die mit $p^{e_\mu - e_\nu}$ multiplizierte μ-te Spalte und Zeile (analog 1.) zur ν-ten addiert,

bei 3. die ν-te und μ-te Zeile und Spalte miteinander vertauscht.

Sei nun M gemäß (5) zerlegt (und symmetrisch). Gibt es in $M_{11} = (m_{ik})$ ein $m_{ii} \not\equiv 0 \pmod p$, so kann man es durch die Operation 3. an die Stelle von m_{11} bringen; andernfalls gibt es wegen (6) ein $m_{\mu 1} = m_{1\mu} \not\equiv 0 \pmod p$, und die Anwendung der Operation 2. mit $\nu = 1$ bringt $m_{11} + 2m_{1\mu} + m_{\mu\mu} \not\equiv 0 \pmod p$ an die Stelle von m_{11}. Man kann also $m_{11} \not\equiv 0 \pmod p$ annehmen. x-maliges Anwenden von 1. mit $\mu = 1$ sukzessiv für alle $\nu > 1$ führt bei geeigneter Wahl von x die Matrix M in eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} m_{11} p^{-e_1} & G \\ G & M^* \end{pmatrix}$$

über, wo G ganzzahlig ist und M^* wieder die Eigenschaften von M besitzt. Durch Induktionsschluß folgt, daß M mit Hilfe der Operationen 1. bis 3. in ein $\bar{M} \equiv D \pmod 1$ mit $D =$ Diagonalmatrix überführbar ist. Die Basis $\bar{b}$, zu der man auf diese Weise gelangt, hat offenbar die geforderten Eigenschaften.

§ 2

Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ als Gruppe mit Verschlingung.

Sei $\mathfrak{M}^3$ eine dreidimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Um in ihrer Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ der Dimension 1 eine Verschlingung im Sinne von § 1 dieses Kapitels einzuführen, sei daran erinnert, daß zwei punktfremden divisions-nullhomologen singulären 1-Ketten A^1, B^1 in $\mathfrak{M}^3$ eine rationale Zahl $V(A^1, B^1)$ als Verschlingungszahl zugeordnet ist (Seifert-Threlfall [7] S. 277). Für diese Zahlen gilt:

1. $V(A^1, B^1) = V(B^1, A^1)$.
2. $V(A^1 + B^1, C^1) = V(A^1, C^1) + V(B^1, C^1)$.
3. Es gibt in $\mathfrak{M}^3$ zwei Torsionsbasen (B_i^1) und $(\overline{B}_i^1)$, so daß $V(B_i^1, \overline{B}_k^1) = \frac{1}{c_i}\,\delta_{ik}$ gilt, mit $c_i =$ Ordnung von B_i^1 und $\overline{B}_i^1$. (Diese Eigenschaft ist ein Teil des Poincaré-Veblenschen Dualitätssatzes, vgl. [7] S. 253).
4. Aus $A^1 \sim {}'A^1$ und $B^1 \sim {}'B^1$ folgt $V(A^1, B^1) \equiv V('A^1, 'B^1) (\text{mod } 1)$.

Danach ist klar, daß die Festsetzung

$$V(a, b) = \overbrace{V(A^1, B^1)},$$

wo $a, b \in \mathfrak{T}^1$ und A^1, B^1 punktfremde Repräsentanten von a bzw. b sind, die Gruppe $\mathfrak{T}^1$ zu einer V-Gruppe macht; die Eigenschaft 4. sichert die Eindeutigkeit der Definition, und 1. bis 3. liefert die Axiome V_1—V_3.

Die V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ ist allein durch die topologische Struktur und die Orientierung von $\mathfrak{M}^3$ definiert; also sind die Verschlingungsinvarianten $\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}^1)$ zugleich Invarianten der orientierten Mannigfaltigkeit. Insbesondere gilt das für den Fall, daß $\mathfrak{M}^3$ eine Überlagerung des Außenraumes einer Knotenlinie $\mathfrak{K}$ in einer 3-Sphäre S^3 ist. Da die kombinatorischen Knotendeformationen durch orientierungserhaltende topologische Abbildungen der S^3 auf sich bewirkt werden können, sind die $\mathfrak{v}_{p^e}$ auch Invarianten des Knotens.

Nach Seifert [6] können die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen berechnet werden, und zwar erhält man ([6] S. 100) für die zweifache Überlagerung $\mathfrak{M}_2^3$ den

Satz 5. *Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^1$ von $\mathfrak{M}_2^3$ besitzt ein Erzeugendensystem $q = (q_i)$ mit den definierenden Relationen $Q\,q = 0$ und der Verschlingung $(\overbrace{V(q_i, q_k)}) = \varepsilon\, Q^{-1}$, wobei Q die Matrix einer quadratischen Form des Knotens ist. ε ist $+1$ oder -1, je nachdem wie sich die Orientierung von $\mathfrak{M}_2^3$ zu dem bei der Definition von Q zugrundegelegten Schraubsinn* (I § 3) *verhält.*

Dieses Ergebnis weist deutlich auf einen engen Zusammenhang hin zwischen den Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{M}_2^3$ und den Minkowskischen Einheiten, eine Vermutung, die in dem nun folgenden Kapitel III bestätigt wird.

Kapitel III.

Bestimmung der Minkowskischen Einheiten aus den Verschlingungsinvarianten der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes.

Anknüpfend an den Schluß des vorigen Kapitels, wählen wir die Orientierung von $\mathfrak{M}_2^3$ so, daß in Satz 5 $\varepsilon = +1$ wird. Dann liegt folgendes Problem vor:

Gegeben ist eine V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ durch ($|Q| \neq 0$)

(1) $$q = (q_i),\ i = 1, \ldots, h, \quad Qq = 0, \quad (V(q_i, q_k)) = \breve{Q}^{-1}.$$

Es sollen die $C_p(Q)$ aus den $\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}^1)$ berechnet werden.

Erster Schritt. Vereinfachung durch Einführung eines neuen Erzeugendensystems.

Sei

$$\mathfrak{T}^1 = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{T}_{p_j}$$

die Zerlegung von $\mathfrak{T}^1$ in Primzahlpotenzgruppen. Wir bezeichnen mit P diejenige Matrix, die in der Hauptdiagonale der Reihe nach die Torsionskoeffizienten der $\mathfrak{T}_{p_j}$ und sonst lauter Nullen enthält. Mit geeigneten Einheitsmatrizen E kann man erreichen, daß

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_1 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

gleiche Reihenzahl m haben. Die von 1 verschiedenen Elementarteiler von P und Q sind die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{T}^1$, also haben Q_1 und P_1 gleiche Elementarteiler, und es gibt unimodulare Matrizen R, S, so daß

(2) $$Q_1 = R P_1 S$$

ist.

Kommt die Primzahl p, für die C_p berechnet werden soll, unter den p_j nicht vor, so ist $|Q| = \pm |P| \not\equiv 0 \pmod{p}$, also nach Satz 2

$$C_p(Q) = 1.$$

Wir schließen diesen Fall von jetzt ab aus und können $p = p_1$ annehmen.

Ergänzt man q formal zu einer m-zeiligen Spalte q^1, so ist dieselbe V-Gruppe $\mathfrak{T}^1$ gegeben durch

(3) $$q^1 = (q_i),\ i = 1, \ldots, m, \quad Q_1 q^1 = 0, \quad (V(q_i, q_k)) = \breve{Q}_1^{-1}$$

und, wenn $b^1 = Sq^1$ gesetzt wird (S nach (2) bestimmt), auch durch

(4) $$b^1 = (b_i), \quad P_1 b^1 = 0, \quad (V(b_i, b_k)) = \breve{S}\breve{Q}_1^{-1} S'.$$

Nach Definition von P_1 bilden die ersten b_i — die entsprechende Teilspalte von b^1 sei $b = (b_i)$, $i = 1, \ldots, n_p$ — eine Basis von $\mathfrak{T}_{p_1} = \mathfrak{T}_p$. Nach Hilfssatz 5 gibt es ein unimodulares Γ, so daß für die Basis $\bar{b} = \Gamma b$ gilt

(5) $$(V(\bar{b}_i, \bar{b}_k)) = \breve{D}, \quad D = (d_i p^{-e_i} \delta_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, n_p,$$

wo p^{e_i} die Torsionskoeffizienten von $\mathfrak{T}_p$ sind. Hieraus wird $\mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}^1)$ bestimmt. Es ist nach Definition

(6) $$\mathfrak{v}_{p^{e_{\nu_i}}} = \prod_{j=\nu_{i-1}+1}^{\nu_i} \left(\frac{d_j}{p}\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_{p^e} = 1 \ \text{für}\ e \neq e_{\nu_i}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

wenn wie in II (4) $0 < e_1 = \cdots = e_{\nu_1} < e_{\nu_1+1} \cdots < \cdots e_{\nu_r}$ und $\nu_0 = 0$ ist.

Andererseits wird

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

so gebildet, daß Γ_1 m-reihig wird, und $\Gamma_1 b^1 = \bar{b}^1 = (\bar{b}_i)$ gesetzt. Dann ist

$$V(\bar{b}_i, \bar{b}_k) = \breve{M}_1 \tag{7}$$

mit

$$M_1 = \Gamma_1 S Q_1^{-1} S' \Gamma_1', \quad \text{d. h.} \quad M_1^{-1} = \Gamma_1'^{-1} S'^{-1} Q_1 S^{-1} \Gamma_1^{-1}, \tag{8}$$

und nach den Sätzen 3 und 1 folgt

$$C_p(Q) = C_p(Q_1) = C_p(M_1^{-1}). \tag{9}$$

Damit ist das Problem auf die Berechnung von $C_p(M_1^{-1})$ reduziert.

Zweiter Schritt. Untersuchung von M_1^{-1}.

Unterteilt man M_1 zwischen der n_p-ten und n_p+1-ten Zeile und Spalte, so ergibt sich

$$M_1 = \begin{pmatrix} M & G \\ G & N \end{pmatrix}, \tag{10}$$

wobei wegen (7) und II (3) G ganzzahlig ist und die Elemente von N die Primzahl p nicht im Nenner enthalten. Wegen (5) ist

$$M \equiv D \pmod 1. \tag{11}$$

Die Determinantenteiler von M_1^{-1} stimmen nach (8) mit denen von Q_1 und nach (2) auch mit denen von P_1 überein. Speziell ist

$$\varDelta = |M_1^{-1}| = \pm |P_1| = p^{\Sigma e_i} d, \; d \not\equiv 0 \pmod p, \tag{12}$$

$$\varDelta_{m-n_p} \not\equiv 0 \pmod p, \tag{13}$$

wenn mit $\varDelta_k$ der größte gemeinsame Teiler aller k-reihigen Unterdeterminanten bezeichnet wird.

Wir setzen $M_1^{-1} = A = (a_{\nu\mu})$, $M_1 = (m_{\nu\mu})$, und es sei $M_{\nu\mu}$ die Matrix, die aus M_1 durch Streichen der ν-ten Zeile und μ-ten Spalte hervorgeht. Dann ist bekanntlich

$$a_{\nu\mu} = \pm |M_{\nu\mu}| \varDelta.$$

Hieraus ergibt sich

$$a_{\nu\mu} \equiv 0 \begin{cases} \pmod{p^{e_\nu}} & \text{für} \quad \nu \leqq n_p, \\ \pmod{p^{e_\mu}} & \text{für} \quad \mu \leqq n_p, \\ \pmod{p^{e_\nu+e_\mu}} & \text{für} \quad \nu,\ \mu \leqq n_p,\ \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{14}$$

In der Tat enthält $M_{\nu\mu}$ in den Nennern seiner Elemente als Potenzen von p nur die p^{e_i} je einmal, und zwar für $\nu \leqq n_p$ oder $\mu \leqq n_p$ nur die p^{e_i} mit $i \neq \nu$ bzw. $i \neq \mu$ und für $\nu, \mu \leqq n_p$ sogar nur die mit $i \neq \nu$ und $i \neq \mu$. Da $\varDelta$ nach (12) durch $p^{\Sigma e_i}$ teilbar ist, folgt die Behauptung.

Streicht man in A die n_p ersten Zeilen und Spalten, so gilt für die entstehende Matrix A_{n_p}

$$|A_{n_p}| \not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{15}$$

Wäre das nämlich nicht der Fall, so wären wegen (14) alle $(m-n_p)$-reihigen Unterdeterminanten von A durch p teilbar im Widerspruch zu (13).

Wegen $M_1 A = E$ ist $\sum\limits_{\mu} m_{\nu\mu} a_{\mu\nu} = 1$. Für $\nu \leqq n_p$, $\nu \neq \mu$ ist $m_{\nu\mu}$ nach (10) und (11) ganz und nach (14) $a_{\mu\nu} \equiv 0 \pmod{p^{e_\nu}}$; also ist

$$1 = \sum_{\mu} m_{\nu\mu} a_{\mu\nu} \equiv m_{\nu\nu} a_{\nu\nu} \pmod{p}.$$

Nach (11) und (5) ist $m_{\nu\nu} \equiv d_\nu p^{-e_\nu} \pmod{1}$, und es folgt

$$d_\nu a_{\nu\nu} p^{-e_\nu} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{für} \quad \nu \leqq n_p. \tag{16}$$

Dritter Schritt. Bestimmung von $C_p(A)$.

Hilfssatz 6. *Ist A irgendeine ganzzahlige symmetrische Matrix mit den Eigenschaften* (14), (15) *und* (16) *und* $v > 0$, *so gibt es ein unimodulares S, so daß*

$$S' A S \equiv \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \pmod{p^v}, \quad C = (c_i p^{e_i} \delta_{ik}), \quad i, k = 1, \ldots, n_p,$$

$$d_\nu c_\nu \equiv 1 \pmod{p} \quad \textit{und} \quad |T| \not\equiv 0 \pmod{p}$$

ist.

Beweis. Es genügt offenbar, den Beweis für genügend große v zu führen. Wir nehmen $v > \omega(A) = \Sigma e_i$ an. Die Konstruktion geschieht dann nach dem üblichen Ausräumverfahren. Wir wählen x so, daß $a_{11} x + a_{1\mu} \equiv 0 \pmod{p^v}$ wird. Das ist möglich, da a_{11} und $a_{1\mu}$ durch p^{e_1} teilbar sind und $a_{11} p^{-e_1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist. Addiert man die mit x multiplizierte erste Spalte zur μ-ten, so wird $a_{\nu\mu}$ durch $a_{\nu 1} x + a_{\nu\mu}$ ersetzt. Dabei bleiben die Eigenschaften (14), (15), und (16) erhalten. Wir bestätigen das im Einzelnen:

(14) ist für $\mu > n_p$ klar und folgt für $\mu \leqq n_p$ daraus, daß dann $x \equiv 0 \pmod{p^{e_\mu}}$ ist.

(15): A_{n_p} ändert sich bei $\mu \leqq n_p$ gar nicht und wird sonst durch eine $\pmod{p}$ kongruente Matrix ersetzt.

(16): Es ist nur etwas zu beweisen, wenn $\mu \leqq n_p$ ist; dann wird $a_{\mu\mu}$ durch $a_{\mu 1} x + a_{\mu\mu}$ ersetzt, und es gilt

$$d_\mu (a_{\mu 1} x + a_{\mu\mu}) p^{-e_\mu} \equiv d_\mu a_{\mu\mu} p^{-e_\mu} \pmod{p^{e_1}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Addiert man nun die mit x multiplizierte erste Zeile zur μ-ten, so gilt das gleiche, und man hat im ganzen eine unimodulare Transformation ausgeführt. Geschieht das sukzessiv für alle $\mu > 1$, so erhält man

$$S' A S \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A^1 \end{pmatrix} \pmod{p^v},$$

wobei A' wieder den Voraussetzungen genügt. Durch Induktion ergibt sich die Behauptung.

Aus den in I § 2 hergeleiteten Eigenschaften von C_p (Satz 1—3) folgt

$$C_p(A) = C_p\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = C_p(C) = \varrho \cdot \prod_{e_\nu \equiv 1 \pmod 2} \left(\frac{c_\nu}{p}\right)$$

und damit

$$C_p(A) = \varrho \cdot \prod_{e_\nu \equiv 1 \pmod 2} \left(\frac{d_\nu}{p}\right), \tag{17}$$

denn wegen $d_\nu c_\nu \equiv 1 \pmod p$ ist $\left(\frac{c_\nu}{p}\right) = \left(\frac{d_\nu}{p}\right)$ (vgl. I (2), (3)).

Kehren wir wieder speziell zu $A = M_1^{-1}$ zurück, so lehrt der Vergleich von (17) mit (6) und (9)

$$C_p(Q) = \varrho \cdot \prod_{e \equiv 1 \pmod 2} \mathfrak{v}_{p^e}(\mathfrak{T}'). \tag{18}$$

Diese Formel gilt offenbar auch für den oben ausgeschlossenen Fall, daß eine Gruppe $\mathfrak{T}_p$ in der Zerlegung von $\mathfrak{T}^1$ gar nicht vorkommt ($\varrho = 1$ wegen $\lambda = 0$ vgl. I (14)), und wir erhalten als Ergebnis

Satz 6. *Die Minkowskischen Einheiten eines Knotens sind durch die Torsionskoeffizienten und die Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt, und zwar gilt bei geeigneter Festsetzung der Orientierungen* ($\varepsilon = +1$ in Satz 5)

$$C_p = \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{\lambda}{2}\right]}}{p}\right) \prod_{e \equiv 1 \pmod 2} \mathfrak{v}_{p^e};$$

dabei ist λ die Anzahl der Torsionskoeffizienten, die die Primzahl p in ungerader Potenz enthalten.

Literaturverzeichnis.

Goeritz, L.

[1] Knoten und quadratische Formen. Math. Zeitschr. Bd. 36 (1933), S. 647.

Landau, E.

[2] Vorlesungen über Zahlentheorie Bd. 1. Leipzig: Hirzel 1927.

Minkowski, H.

[3] Über die Bedingungen, unter welchen zwei quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten ineinander rational transformiert werden können. Ges. Abh. Bd. 1, S. 219. Leipzig: Teubner 1911.

Reidemeister, K.

[4] Knotentheorie. Ergebnisse der Math. I 1. Berlin: Springer 1932.

SEIFERT, H.
[5] Verschlingungsinvarianten. Sitz.-Ber. der preuß. Akad. d. Wiss. 1933, S. 811.
SEIFERT, H.
[6] Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. Hamb. Math. Abh. Bd. 11 (1936), S. 84.
SEIFERT, H. u. THRELFALL, W.
[7] Lehrbuch der Topologie. Leipzig und Berlin: Teubner 1934.
BURGER, E.
[8] Über Gruppen mit Verschlingungen. Crelle Journal Bd. 188 (1950), S. 193.
BLANCHFIELD, R. C. und FOX, R. H.
[9] Invariants of self-linking. Ann. of Math. Bd. 53 (1951), S. 556.

(Eingegangen am 12. Januar 1952.)