RADEMACHER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 445—463 (1956)

Zur Theorie der Dedekindschen Summen

I. SCHUR zum Gedächtnis

Von

HANS RADEMACHER [1])

1. Die Dedekindschen Summen $s(h,k)$, die in der Theorie der Dedekindschen Funktion $\log\eta(\tau)$ auftreten, sind definiert als

$$s(h,k)=\sum_{\mu \bmod k}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right) \qquad (h,k)=1, \qquad k>0, \tag{1}$$

wo für reelles x

$$((x))=\begin{cases}0 \text{ für ganzes } x\\ x-[x]-\frac{1}{2} \text{ sonst}\end{cases} \tag{2}$$

gesetzt ist. Ihre bemerkenswerteste Eigenschaft wird durch die Reziprozitätsformel

$$s(h,k)+s(k,h)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}\right) \tag{3}$$

ausgedrückt, die einerseits aus dem Verhalten von $\log\eta(\tau)$ unter Modulsubstitutionen abzulesen ist, für die aber auch eine Anzahl direkter Beweise bekannt sind. Man kann (2) mit Hilfe eines Euklidischen Algorithmus, da $s(h_1,k)=s(h_2,k)$, für $h_1\equiv h_2 \pmod k$ ist, zweckmäßigerweise zur numerischen Berechnung von $s(h,k)$ für größere Werte von k, wo die Summendefinition unbequem wäre, benutzen.

Es treten in (2) und in einigen Verallgemeinerungen, die in verschiedener Richtung von MORDELL [*1*] und von mir [*2*] gegeben worden sind, jedoch mehrere $s(h,k)$ zugleich auf. Im folgenden will ich nun Eigenschaften studieren, die der einzelnen Summe $s(h,k)$ zukommen. Abschnitt I soll sich mit den Werten von $s(h,k)$ beschäftigen, Abschnitt II von einer Anwendung der Dedekindschen Summen auf das Problem der Transformationsklassen der Modulgruppe handeln, und Abschnitt III zieht quadratische Formen heran.

I

2. Hilfssatz 1. *Wenn h' durch*

$$hh'\equiv 1 \pmod k \tag{4}$$

bestimmt wird, ist

$$s(h',k)=s(h,k). \tag{4a}$$

Ferner ist

$$s(-h,k)=-s(h,k). \tag{4b}$$

[1]) John Simon Guggenheim Memorial Fellow 1954/55.

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der Tatsache, daß $((x))$ eine ungerade Funktion von x ist.

Wenn ferner μ ein volles Restsystem modulo k durchläuft, so tut dies auch $h'\mu$. Wir haben also

$$s(h,k)=\sum_{\mu \bmod k}\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)=\sum_{\mu \bmod k}\left(\left(\frac{h'\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{h h'\mu}{k}\right)\right)=\sum_{\mu \bmod k}\left(\left(\frac{h'\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right)=s(h',k).$$

3. Da $((x))$ eine ungerade Funktion der Periode 1 ist, folgt sofort

$$\sum_{\lambda \bmod k}\left(\left(\frac{\lambda}{k}\right)\right)=0$$

und somit

$$s(h,k)=\sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\frac{\mu}{k}-\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)=\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right).$$

Explizit heißt dies

$$\begin{cases} s(h,k) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right) \\[2ex] = \displaystyle\frac{h}{k^2}\sum_{1}^{k-1}\mu^2-\frac{1}{k}\sum_{1}^{k-1}\mu\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2k}\sum_{1}^{k-1}\mu \\[2ex] = \displaystyle\frac{h(k-1)(2k-1)}{6k}-\frac{1}{k}g-\frac{k-1}{4}, \end{cases} \tag{5}$$

wo g eine ganze Zahl ist. Man sieht daher, daß der Nenner von $s(h,k)$ höchstens $6k$ sein kann. Da ferner in (5) der Nenner des einzelnen Summanden höchstens k^2 für gerades k und $2k^2$ für ungerades k beträgt, so ist der Nenner von $s(h,k)$ höchstens

für k gerade: $\quad (6k,k^2)=k(6,k)=2k\cdot(3,k)$,

für k ungerade: $\quad (6k,2k^2)=2k(3,k)$.

Damit haben wir erhalten den

Hilfssatz 2. *Der Nenner von $s(h,k)$ ist höchstens $2k\cdot(3,k)$.*

Dieser Wert des Nenners wird erreicht, z.B. ist $s(1,3)=\frac{1}{18}$. Der Nenner kann aber auch ein echter Teiler des angegebenen Wertes sein: $s(3,25)=\frac{2}{5}$.

Multiplikation von (3) mit $12hk$ ergibt

$$12hk\,s(h,k)+12hk\,s(k,h)=-3hk+h^2+k^2+1. \tag{6}$$

Im Hinblick auf Hilfssatz 2 lesen wir hieraus leicht ab den

Hilfssatz 3. *Es sei $\Theta=(3,k)$. Dann ist*

$$12hk\,s(h,k)\equiv h^2+1 \pmod{\Theta k}. \tag{7}$$

4. Wir beweisen nun den

Satz 1. *Der einzige ganzzahlige Wert, den $12s(h,k)$ annimmt, ist Null. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn*

$$h^2+1\equiv 0 \pmod{k}. \tag{8}$$

Beweis. Es sei zunächst (8) erfüllt. Dann ist, in der Bezeichnung Hilfssatz 1

$$h' = -h,$$

also

$$s(h, k) = s(-h, k) = -s(h, k),$$

woraus die zweite Hälfte des Satzes folgt.

Sei nun umgekehrt $12 s(h, k)$ ganz. Dann ist nach (6) und Hilfssatz 2 die Kongruenz (8) erfüllt.

5. Satz 2. *Es ist* $s(h, k) < s(1, k)$ *für* $1 < h < k$.

Beweis. Wir haben nach (5)

$$k \cdot s(1, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \mu\left(\frac{\mu}{k} - \frac{1}{2}\right),$$

$$k \cdot s(h, k) = \sum_{\mu=1}^{k-1} \mu\left(\frac{h\mu}{k} - \left[\frac{h\mu}{k}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\sum_{\mu=1}^{k-1} \mu^2 > \sum_{\mu=1}^{k-1} \mu\left(h\mu - k\left[\frac{h\mu}{k}\right]\right)$$

ist. Hier sind die Zahlen

$$a_\mu = h\mu - k\left[\frac{h\mu}{k}\right]$$

eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, k-1$. Für alle möglichen Permutationen $\{a_\mu\}$ der Zahlen 1 bis $k-1$ erreicht aber die Summe

$$\sum \mu\, a_\mu$$

ihr Maximum für die Anordnung $a_\mu = \mu$. In der Tat, wenn nicht durchgängig $\mu = a_\mu$ ist, dann gibt es in der Anordnung $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ ein größtes $\mu = \mu_0$, so daß $a_{\mu_0} \neq \mu_0$, während $a_\mu = \mu$ für $\mu > \mu_0$ (sofern ein solches μ vorrätig ist). Dann ist jedoch sogar $a_{\mu_0} < \mu_0$, denn die $a_\mu > \mu_0$ sind besetzt durch $a_\mu = \mu$. Es sei dann $\mu_0 = a_{\mu_1}$ mit $\mu_1 < \mu_0$. Wir vertauschen dann a_{μ_0} und a_{μ_1}, ersetzen also die beiden Summanden $\mu_1 a_{\mu_1} + \mu_0 a_{\mu_0}$ durch $\mu_1 a_{\mu_0} + \mu_0 a_{\mu_1}$, was eine Vergrößerung bedeutet:

$$\mu_1 a_{\mu_0} + \mu_0 a_{\mu_1} - (\mu_1 a_{\mu_1} + \mu_0 a_{\mu_0}) = (\mu_0 - \mu_1)(a_{\mu_1} - a_{\mu_0}) = (\mu_0 - \mu_1)(\mu_0 - a_{\mu_0}) > 0.$$

Satz 3. *Es ist* $s(h, k) > 0$ *für* $0 < h < \sqrt{k-1}$.

Beweis. Nach (3) und nach Satz 2 haben wir

$$s(h, k) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{h^2+1}{hk} + \frac{k}{h}\right) - s(k, h)$$

$$\geq -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{h^2+1}{hk} + \frac{k}{h}\right) - s(1, h).$$

Nun folgt aus (3), da $s(h, 1) = 0$ ist,

$$s(1, h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{h^2+1}{h} + \frac{1}{h}\right),$$

so daß wir erhalten

$$s(h, k) \geqq \frac{(k-1)(k-h^2-1)}{12hk},$$

woraus die Behauptung des Satzes folgt.

Da in dieser Überlegung das Ungleichheitszeichen nur bei der Ersetzung von $s(k, h)$ durch $s(1, h)$ auftritt, so haben wir das

Korollar. $s(h, k) = \dfrac{(k-1)\left(\dfrac{k-1}{h} - h\right)}{12k}$ *für* $k \equiv 1 \pmod{h}$.

5. Satz 4. *Es seien* $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h_2}{k_2}$ *zwei benachbarte Brüche in einer Farey-Reihe. Dann ist*

$$s(h_1, k_1) - s(h_2, k_2) = \frac{1}{4} - \frac{1 + k_1^2 + k_2^2}{12 k_1 k_2}. \tag{9}$$

Beweis. Die kennzeichnende Eigenschaft für benachbarte Farey-Brüche $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h_2}{k_2}$ ist

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = -1,$$

so daß also

$$h_1 k_2 \equiv -1 \pmod{k_1},$$
$$h_2 k_1 \equiv 1 \pmod{k_2}.$$

Dann ist aber nach Hilfssatz 1

$$s(k_2, k_1) = -s(h_1, k_1),$$
$$s(k_1, k_2) = s(h_2, k_2),$$

womit (9) aus (3) folgt, wenn dort h, k durch k_1, k_2 ersetzt werden.

Satz 5. *Über* h_1/k_1 *und* h_2/k_2 *mögen die Voraussetzungen von Satz 4 gelten. Dann ist*

$$s(h_1+h_2, k_1+k_2) = \frac{1}{2}\{s(h_1, k_1) + s(h_2, k_2)\} + \frac{(k_2-k_1)(1+k_1^2+k_1k_2+k_2^2)}{24 k_1 k_2 (k_1+k_2)}. \tag{10}$$

Beweis. Die Anwendung von (9) auf $\frac{h_1}{k_1} < \frac{h_1+h_2}{k_1+k_2} < \frac{h_2}{k_2}$ ergibt

$$s(h_1, k_1) - s(h_1+h_2, k_1+k_2) = \frac{1}{4} - \frac{1 + k_1^2 + (k_1+k_2)^2}{12 k_1 (k_1+k_2)},$$

$$s(h_1+h_2, k_1+k_2) - s(h_2, k_2) = \frac{1}{4} - \frac{1 + (k_1+k_2)^2 + k_2^2}{12 (k_1+k_2) k_2}.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen voneinander ergibt sich (10).

Die Formel (10) eignet sich besonders gut zur schrittweisen tabellarischen Berechnung von $s(h, k)$, ausgehend von $s(0, 1) = s(1, 1) = 0$.

6. Die Sätze 4 und 5 legen nahe, $s(h/k)$ statt $s(h, k)$ zu schreiben. Dies kann man unbedenklich tun, wenn man vorübergehend die Bedingung $(h, k) = 1$ fallen läßt. In der Tat hängt dann $s(h, k)$ nur von dem Verhältnis $h:k$ ab, wie man ersieht aus

Hilfssatz 4. *Für ganzes positives q ist*

$$s(qh, qk) = s(h, k).$$

Dies gilt nur für die Definition (1) von $s(h, k)$, nicht etwa für Formel (5). Dieser Hilfssatz ist Theorem 1 in [*3*] und dort bewiesen. [Alle Formeln setzen aber bisher $(h, k) = 1$ voraus.] Damit ist eine Funktion $s(\varrho)$ für alle rationalen $\varrho = h/k$ definiert. Über den Verlauf dieser Funktion x macht der folgende Satz eine Aussage.

Satz 6. *Die für rationale $\varrho = h/k$ definierte Funktion $s(\varrho)$ ist in jedem Intervall nach oben und unten unbeschränkt.*

Beweis. In (9) möge h_1/k_1 festgehalten werden und h_2/k_2 eine Folge von benachbarten Brüchen durchlaufen die von oben gegen h_1/k_1 gehen (z. B. durch festgesetze Mediantenbildung). Mit k_1 fest, $k_2 \to +\infty$ geht die rechte Seite von (9) gegen $-\infty$, also $s(h_2/k_2) \to +\infty$. Ebenso, wenn man h_2/k_2 festhält und h_1/k_1 gegen h_2/k_2 gehen läßt, folgt $s(h_1/k_1) \to -\infty$.

II

7. Es sei Γ die Gruppe aller homogenen Modulsubstitutionen

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Zwei Substitutionen M_1, M_2 heißen ähnlich, wenn ein $L \in \Gamma$ existiert, so daß

$$M_1 = L^{-1} M_2 L.$$

Die Gruppe Γ zerfällt durch die Ähnlichkeitsrelation in *Klassen*. Die Spur $a + d$ ist offenbar eine Invariante der Ähnlichkeitsklassen. In diesem Abschnitt behandeln wir eine weitere Invariante.

Satz 7. *Die Funktion*

$$(11) \quad \begin{cases} \Psi(M) = \Psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{cases} \dfrac{b}{d} & \text{für } c = 0 \\ \dfrac{a+d}{c} - 12 \operatorname{sign} c \cdot s(a, |c|) - 3 \operatorname{sign}(c(a+d)) & \text{für } c \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

ist eine Klasseninvariante. Außerdem ist

$$(12) \qquad \Psi(M) = \Psi(-M), \qquad \Psi(M^{-1}) = -\Psi(M),$$

und Ψ ist eine ganze Zahl.

Beweis. Die Aussagen (12) folgen aus der Definition (11), wenn man noch

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

beachtet. Ferner kann man aus (7) entnehmen

$$12|c|\, s(a, |c|) \equiv a + d \pmod{c},$$

also

$$\frac{a+d}{|c|} - 12\, s(a, |c|)$$

ganzzahlig, woraus die Ganzzahligkeit von Ψ in (11) folgt.

Für die Invarianz von $\Psi(M)$ brauchen wir nur die Gleichungen

$$\Psi(S^{-1} M S) = \Psi(M), \tag{13}$$

$$\Psi(T^{-1} M T) = \Psi(M), \tag{14}$$

mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu beweisen.

Mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

haben wir

$$S^{-1} M S = \begin{pmatrix} a-c & a-c+b-d \\ c & c+d \end{pmatrix}, \tag{13a}$$

$$T^{-1} M T = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{14a}$$

Dann ist (13) unmittelbar aus der Definition von Ψ abzulesen. Wir haben also nur noch (14) zu untersuchen. Zunächst bemerken wir, daß

$$12\, s(1, k) = -3 + k + \frac{2}{k}, \tag{15}$$

was aus dem Korollar zu Satz 3, oder auch direkt aus (3) folgt. Für den Beweis von (14) unterscheiden wir drei Fälle.

I. $c = 0$, dann ist $a = d = 1$. [$a = d = -1$ kann auf Grund von (12) beiseite gelassen werden.] Dann lautet (14), (14a):

$$\Psi\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

oder, nach (11),

$$b = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad b = 0 \\ \dfrac{2}{-b} + 12 \operatorname{sign} b \cdot s(1, |b|) + 3 \operatorname{sign} b, \end{cases}$$

was in der Tat durch (15) für $k = |b|$ bestätigt wird.

II. $c \neq 0$, $b = 0$. Dann handelt es sich um

$$\Psi\begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 1\end{pmatrix} \doteq \Psi\begin{pmatrix}1 & -c\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

was aus (16) durch Vertauschung von c und $-b$ hervorgeht und somit unter I erledigt ist.

III. $b \neq 0$, $c \neq 0$. Hier ist also im Hinblick auf (11), (14), (14a) zu beweisen:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &12 \operatorname{sign} c \cdot s(a, |c|) + 12 \operatorname{sign} b \cdot s(d, |b|)\\ &= \frac{a+d}{c} + \frac{a+d}{b} - 3 \operatorname{sign}\big(c(a+d)\big) - 3 \operatorname{sign}\big(b(a+d)\big).\end{aligned}\right.$$

Wenn $d = 0$ ist, dann muß $b = -c = \pm 1$ sein, und (17) ist dann trivialerweise erfüllt.

Wenn $d \neq 0$, dann kann wegen (12) $d > 0$ angenommen werden. Dann ergibt (3)

$$12\, s(d, |c|) + 12\, s(|c|, d) = -3 + \frac{d}{|c|} + \frac{|c|}{d} + \frac{1}{d|c|},$$

$$12\, s(d, |b|) + 12\, s(|b|, d) = -3 + \frac{d}{|b|} + \frac{|b|}{d} + \frac{1}{d|b|}.$$

Die erste dieser Gleichungen multiplizieren wir mit $\operatorname{sign} c$, die zweite mit $\operatorname{sign} b$ und beachten, daß zufolge (4b)

$$s(h, k) = \operatorname{sign} h \cdot s(|h|, k)$$

ist, so daß

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &12 \operatorname{sign} c \cdot s(d, |c|) + 12\, s(c, d) = -3 \operatorname{sign} c + \frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{1}{dc},\\ &12 \operatorname{sign} b \cdot s(d, |b|) + 12\, s(b, d) = -3 \operatorname{sign} b + \frac{d}{b} + \frac{b}{d} + \frac{1}{db}\end{aligned}\right.$$

hervorgeht. Nach Hilfssatz 1 ist

$$s(a, |c|) = s(d, |c|),$$

$$s(c, d) = -s(b, d).$$

Addition der Gln. (18) ergibt also

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &12 \operatorname{sign} c \cdot s(a, |c|) + 12 \operatorname{sign} b \cdot s(d, |b|)\\ &= -3 \operatorname{sign} c - 3 \operatorname{sign} b + \frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{ad-bc}{dc} + \frac{d}{b} + \frac{b}{d} + \frac{ad-bc}{db}.\end{aligned}\right.$$

Ein Vergleich von (17) und (19) zeigt, daß (17) bewiesen sein wird, sobald die Richtigkeit von

$$(20)\qquad \operatorname{sign}\big(c(a+d)\big) + \operatorname{sign}\big(b(a+d)\big) = \operatorname{sign} c + \operatorname{sign} b$$

gezeigt ist. Nun ist (20) klar für $a+d>0$. Für $a+d\leq 0$ und $d>0$ (was wir annehmen durften) folgt $ad<0$, und somit $bc=ad-1<0$, was entgegengesetzte Vorzeichen von b und c bedeutet. Dann sind beide Seiten von (20) gleich Null. Somit ist (17) bewiesen und damit der Beweis von Satz 7 erbracht.

8. Unter Einführung der Matrix $U=ST$ mit

$$T^2 = U^3 = 1 \tag{21}$$

(wo Faktoren ± 1 vernachlässigt, d.h. die inhomogenen Modulsubstitutionen gemeint sind) kann jede Modulsubstitution *eindeutig* in kürzester Form dargestellt werden[2]) als

$$M = U^{\varepsilon_0}\, T\, U^{\varepsilon_1}\, T \ldots T\, U^{\varepsilon_{\nu+1}}, \tag{22}$$

wo

$$\varepsilon_j = \pm 1, \qquad j = 1, \ldots, \nu$$
$$\varepsilon_0,\, \varepsilon_{\nu+1} = 0 \quad \text{oder} \quad \pm 1 .$$

Elemente M, die durch zyklische Vertauschung der Faktoren der Darstellung (22) auseinander hervorgehen, gehören zur selben Klasse. Wenn man das Produkt (22) zyklisch schließt, wird im allgemeinen eine Reduktion durch Anwendung von (21) eintreten. Dann gibt es also in einer Klasse immer eine Transformation von folgender Art

1. die elliptischen T, U, U^{-1}

oder

2. $T\,U^{\varepsilon_1}\,T\,U^{\varepsilon_2}\ldots T\,U^{\varepsilon_\nu}, \quad \varepsilon = \pm 1$.

Hilfssatz 4. *Ist*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T\,U^{\varepsilon_1}\,T\,U^{\varepsilon_2}\ldots T\,U^{\varepsilon_\nu}, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \tag{23}$$

dann gilt[3])

$$a<0, \quad d<0, \quad b\geq 0, \quad c\geq 0 \tag{24}$$

Beweis. Diese Behauptungen sind richtig für $\nu = 1$, also für

$$T\,U = T\,S\,T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$T\,U^{-1} = S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Angenommen die Behauptungen (24) wären für M in der Form (23) gültig, dann haben wir zu zeigen, daß sie auch für

$$M \cdot T\,U^{\varepsilon_{\nu+1}}$$

[2]) Den Hinweis auf die Bedeutung der kürzesten Darstellung in diesem Zusammenhang verdanke ich Herrn REIDEMEISTER; vgl. [1], S. 42, 43.

[3]) Möglicherweise zu erreichen durch Multiplikation der Matrix mit -1.

zutreffen. Nun ist

$$M\,T\,U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

und

$$M\,T\,U^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-a \\ c & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Aus (24) folgt dann dieselbe Behauptung auch für a', b', c', d', und a'', b'', c'', d'', womit der Hilfssatz bewiesen ist.

9. Nunmehr kann man der Klasseninvariante Ψ eine neue Bedeutung geben. Es gilt nämlich der

Satz 8. *Es sei M in seiner Klasse in der zyklisch reduzierten Form angenommen. Dann gilt:*

$$(25)\qquad \begin{cases} \Psi(T) = \Psi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \Psi(U) = \Psi\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2, \quad \Psi(U^{-1}) = \Psi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \end{cases}$$

und im Falle (23)

$$(26)\qquad \Psi(M) = \sum_{j=1}^{\nu} \varepsilon_j.$$

Beweis. Die Formeln (25) liest man direkt aus der Definition (11) von Ψ ab. Die Gl. (26) wird durch die für den Beweis von Hilfssatz 4 angewandte Induktion bewiesen.

Zunächst ist

$$\Psi(T\,U) = \Psi\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\Psi(T\,U^{-1}) = \Psi\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1,$$

wie aus (11) folgt. Also stimmt (26) für $\nu = 1$.

Es sei nun (26) für ein ν erfüllt, dann bleibt nur zu zeigen, daß

$$(27)\qquad \Psi(M\,T\,U^{\varepsilon_{\nu+1}}) = \Psi(M) + \varepsilon_{\nu+1}, \qquad \varepsilon_{\nu+1} = \pm 1$$

ist. Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dann ist

$$M\,T\,U = \begin{pmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{pmatrix},$$

also

$$\Psi(M) = \begin{cases} \dfrac{b}{d} \quad \text{für} \quad c = 0 \\ \dfrac{a+d}{c} - 12s(d,c) + 3, \quad c > 0, \end{cases} \tag{28a}$$

$$\Psi(M\,T\,U) = \frac{a-b+d}{c-d} - 12s(d, c-d) + 3, \tag{28b}$$

wo nach (24) $c-d=0$ nicht vorkommt, und wo, wieder nach (24), $a+d<0$, $a-b+d<0$ benutzt ist.

Sei zunächst $c=0$, also $a=d=-1$. Dann ist

$$\begin{cases} \Psi(M) = \dfrac{b}{d} = -b, \qquad \Psi(M\,T\,U) = \dfrac{-1-b-1}{-d} + 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -b+1, \end{cases} \tag{29}$$

in Übereinstimmung mit (27).

Sei zweitens $c>0$, also nach (28a), (28b)

$$\Psi(M\,T\,U) - \Psi(M) = \frac{a-b+d}{c-d} - \frac{a+d}{c} - 12s(d, c-d) + 12s(d,c).$$

Nun ist aber nach (3)

$$-12s(d, c-d) = 12s(c,d) + 3 - \frac{d^2 + (c-d)^2 + 1}{d(c-d)}$$

und somit

$$\Psi(M\,T\,U) - \Psi(M) = 12s(c,d) + 12s(d,c) +$$
$$+ 3 - \frac{d^2 + (c-d)^2 + 1}{d(c-d)} + \frac{a-b+d}{c-d} - \frac{a+d}{c}.$$

Eine nochmalige Anwendung von (3) ergibt dann

$$\Psi(M\,T\,U) - \Psi(M) = \frac{c^2 + d^2 + 1}{cd} - \frac{a+d}{c} + \frac{b-c+d}{d} = 1.$$

Diese Gleichung und (29) bestätigen (27) für den Fall $\varepsilon_{\nu+1} = +1$.

Ferner ist

$$\Psi(M\,T\,U^{-1}) = \Psi\begin{pmatrix} a & -a+b \\ c & -c+d \end{pmatrix} = \begin{cases} -\dfrac{a+b}{d} \qquad c = 0 \\ \dfrac{a-c+d}{c} - 12s(d,c) + 3, \quad c > 0 \end{cases} \tag{30}$$

und somit für $c=0$, $a=d=-1$:

$$\Psi(M) = -b, \qquad \Psi(M\,T\,U^{-1}) = -1-b,$$

während sich für $c>0$ aus (28a) und (30)

$$\Psi(M\,T\,U^{-1}) - \Psi(M) = -\frac{c}{c} = -1$$

ergibt. Damit ist (27) auch für den Fall $\varepsilon_{\nu+1} = -1$ bewiesen und der Induktionsbeweis von Satz 8 zu Ende geführt.

10. Im allgemeinen kann man nur aussagen, daß $\Psi(M_1 M_2)$ und $\Psi(M_1) + \Psi(M_2)$ sich nur um Vielfache von 3 unterscheiden können. Jedoch gilt der

Satz 9. *Wenn M keine elliptische Substitution ist, dann ist für ganzes k*

$$\Psi(M^k) = k\,\Psi(M).$$

Beweis. Dies folgt zunächst für $k > 0$ daraus, daß in dem zyklischen Zusammenschluß von M_k k mal die gleichen Reduktionen auftreten, die nur einmal bei dem zyklischen Zusammenschluß von M auftreten. Also besteht das zyklisch reduzierte M_k aus k Wiederholungen des zyklisch reduzierten M, was den Satz für $k > 0$ beweist. Für $k < 0$ folgt der Satz dann aus der zweiten Gl. (12), und für $k = 0$ aus $\Psi(E) = 0$, wo E die Einheitsmatrix ist.

In etwas anderer Richtung liegt der

Satz 10. *Wenn für*

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

die Ungleichungen

$$\begin{cases} a_1 < 0, \; d_1 < 0, & c_1 > 0, \; b_1 > 0 \\ a_2 < 0, \; d_2 < 0, & c_2 > 0, \; d_2 > 0 \end{cases} \tag{32}$$

gelten, so ist

$$\Psi(M_1 M_2) = \Psi(M_1) + \Psi(M_2). \tag{33}$$

Beweis. Die Ungleichungen (32) sorgen dafür, daß in der Normaldarstellung (22) M_1 so endet und M_2 so anfängt, daß keine gegenseitigen Reduktionen in dem Produkt $M_1 M_2$ stattfinden.

Um dies einzusehen, ändern wir die Bedingungen zu (22) dahin ab, daß wir nur nicht-negative Potenzen zulassen, was dadurch geschieht, daß jeder etwa auftretende Exponent -1 durch 2 ersetzt wird. Dann werde die Definition $U = S\,T$ benutzt, so daß (22) umgeformt wird in

$$\begin{cases} M = (S\,T)^{\eta_0}\, T (S\,T)^{\eta_1}\, T \ldots (S\,T)^{\eta_\nu}\, T (S\,T)^{\eta_{\nu+1}}, \\ \qquad \eta_0, \eta_{\nu+1} = 0, 1, 2, \quad \eta_j = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, \nu. \end{cases} \tag{34}$$

Dann und nur dann, wenn $\eta_0 = 0$, $\eta_{\nu+1} > 0$ wird M in (22) die spezielle Form (23) haben, d.h. mit T anfangen und mit einer Potenz von U enden. Wir wollen zeigen, daß aus

$$a < 0, \quad d < 0, \quad c > 0 \tag{35}$$

folgt $\eta_0 = 0$, $\eta_{\nu+1} > 0$.

In der Tat, (34) kann nach gehörigem Zusammenziehen auf Grund von $T^2 = 1$ geschrieben werden:

$$M = S^{q_0}\, T\, S^{q_1} \ldots T\, S^{q_l}\, T\, S^{q_{l+1}}, \quad q_j \geq 1, \; j = 1, \ldots l, \quad q_0 \geq 0, \; q_{l+1} \geq 0, \tag{36}$$

wo $q_0 > 0$ aus $\eta_0 > 0$, und $q_{l+1} > 0$ aus $\eta_{\nu+1} = 0$ folgen würde. Man sieht ferner leicht, daß wegen (34) von den nicht-verschwindenden q_j nur das erste und letzte gleich 1 sein können, während für die übrigen sogar $q_j \geqq 2$ gilt. Nach (36) kann man

$$M(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

als einen Kettenbruch

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = q_0 - \frac{1}{q_1 - \ddots - \cfrac{1}{q_l - \cfrac{1}{q_{l+1} + \tau}}}$$

schreiben, woraus durch $\frac{1}{\tau} \to 0$

$$\frac{a}{c} = q_0 - \frac{1}{q_1 - \ddots - \cfrac{1}{q}}$$

folgt, so daß $q_0 > 0$

$$\frac{a}{c} \geqq 0$$

nach sich ziehen würde, gegen die Ungleichungen (35). Ebenso beweist man aus

$$M^{-1} = S^{-q_{l+1}} T S^{-q} \ldots T S^{-q_1} T,$$

also aus

$$-\frac{d}{c} = -q_{l+1} - \frac{1}{-q_l - \ddots - \cfrac{1}{-q_1}},$$

daß $q_{l+1} > 0$ die Ungleichung

$$-\frac{d}{c} \leqq 0$$

zur Folge hätte, wieder gegen (35). Es ist also $q_0 = q_{l+1} = 0$ und folglich $\eta_0 = 0$, $\eta_{\nu+1} > 0$, und M hat die Form (23), wobei nur $\varepsilon_{\nu+1}$ statt ε_ν zu schreiben ist.

Daher haben infolge von (32) die Substitutionen M_1 und M_2 auch die Form (23). Dann aber tritt in dem Produkt $M_1 M_2$ keine Reduktion ein, da auf das letzte U^{ε_ν} von M, das erste T von M_2 folgt. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Wenn man in (33) die Matrizen von (31) einträgt und die Definition (11) von Ψ aus Satz 7 heranzieht, so folgt nach einigen Rechnungen das

Korollar. *Unter den Bedingungen* (32) *ist*

$$s(d, |c|) + s(d_1, c_1) + s(d_2, c_2) = \frac{1}{4} - \frac{c_1^2 + c_2^2 + c^2}{12 c_1 c_2 |c|}$$

mit

$$c = c_1 a_2 + d_1 c_2, \quad d = c_1 b_2 + d_1 d_2.$$

Diese Formel könnte auch analytisch aus der Theorie der Funktion $\log \eta(\tau)$ gewonnen werden. Sie folgt übrigens auch aus der dreigliedrigen Formel (30) in [2].

III

11. Für die elliptischen Substitutionen, die mit T oder U oder U^{-1} äquivalent sind, also nur zu 3 Klassen gehören können, ist die Spur $a+d$ gleich 0 oder ± 1. Wenn man die Spur $a+d=m$ mit $|m| \geq 2$ vorgibt, wobei man $a+d$ negativ wählen kann, so kann man nach dem Hilfssatz 4 und den ihm vorausgehenden Erörterungen in derselben Klasse stets eine Substitution in der Form (23) finden, für die $a<0$, $d<0$ ist. Solche a, d gibt es aber bei festem $a+d=m$ nur endlich viele.

Ist $m \leq -3$, so ist $a \cdot d \neq 1$, also

$$bc = ad - 1 \neq 0,$$

und von den b, c (die beide nach Hilfssatz 4 positiv zu sein haben), gibt es daher wieder nur endlich viele. Also gibt es mit vorgegebener Spur $a+d = m \leq -3$ nur je endlich viele Klassen von Modulsubstitutionen.

Für $a+d=-2$, also $a=d=-1$, $bc=0$ gibt es die unendlich vielen Substitutionen

$$(T\,U)^c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \quad c>0,$$

$$(T\,U^{-1})^b = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b>0,$$

die verschiedene Normalformen (23) zeigen, und also zu verschiedenen Klassen gehören. Dies sind die parabolischen Substitutionen. Es ist übrigens

$$\Psi\big((T\,U)^c\big) = c, \quad \Psi\big((T\,U^{-1})^b\big) = -b.$$

12. Einen anderen Einblick in die Verteilung auf die Klassen bei gegebenem $m=a+d$ gewinnt man durch eine Zuordnung von quadratischen Formen zu den Modulsubstitutionen.

Wir gehen dazu wieder zu den homogenen Modulsubstitutionen über, unterscheiden also die unimodularen Matrizen M und $-M$. Dann werde der Modulsubstitution

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die quadratische Form

$$Q(x, y) = c\,x^2 + (d-a)\,x\,y - b\,y^2 \tag{36}$$

mit der Diskriminante

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4 = m^2 - 4$$

zugeordnet. Es ist klar, daß zu

$$-M^{-1}=\begin{pmatrix}-d & b\\ c & -a\end{pmatrix}$$

dieselbe Form Q gehört wie zu M.

Umgekehrt, hat

$$Q(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2 \tag{37}$$

die Diskriminante

$$\Delta=B^2-4AC=m^2-4, \tag{38}$$

dann gehört sie zu

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(m-B) & -C\\ A & \frac{1}{2}(m+B)\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -M^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(m+B) & -C\\ A & \frac{1}{2}(m-B)\end{pmatrix}.$$

Die Elemente in M sind ganz, da aus (38)

$$B\equiv m \pmod 2$$

folgt.

Im allgemeinen liegen M und $-M^{-1}$ in verschiedenen Ähnlichkeitsklassen der homogenen Modulgruppe, da sie verschiedene Spuren $a+d$ und $-a-d$ haben. In derselben Klasse können sie nur für $a+d=0$ liegen, und tun es auch wirklich, weil dann $M=-M^{-1}$.

Der Ähnlichkeitsklasseneinteilung der Modulgruppe entspricht nun die Einteilung der quadratischen Formen in eigentliche Äquivalenzklassen. Wenn die Koeffizienten der quadratischen Form (37) die Matrix

$$Q=\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}$$

bilden, so handelt es sich also um den folgenden

Satz 11. *Wenn der quadratischen Form (oder ihrer Koeffizientenmatrix) Q die Modulsubstitution M (zusammen mit $-M^{-1}$) zugeordnet ist, dann gehört zu $L'QL$ die Matrix $L^{-1}ML$ (zusammen mit $-L^{-1}M^{-1}L$), wo L eine beliebige Modulsubstitution ist und L' die Transponierte von L bedeutet.*

Beweis. Der Satz braucht nur für $L=S$ und $L=T$ bewiesen zu werden. Es sei

$$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

dann ist [s. (13a)]

$$S^{-1}MS=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & a-c+b-d\\ c & c+d\end{pmatrix}.$$

Zu M gehört nach (36) die Koeffizientenmatrix

$$Q=\begin{pmatrix}c & \frac{d-a}{2}\\ \frac{d-a}{2} & -b\end{pmatrix},$$

und in der Tat gilt dann

$$S' Q S = \begin{pmatrix} c & c + \frac{d-a}{2} \\ c + \frac{d-a}{2} & c - b + d - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' & \frac{d' - a'}{2} \\ \frac{d' - a'}{2} & -b' \end{pmatrix},$$

wie es sein muß. Ebenso ist [s. (14a)]

$$T^{-1} M T = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -e \\ -b & a \end{pmatrix}$$

und

$$T' Q T = \begin{pmatrix} b & \frac{a-d}{2} \\ \frac{a-d}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'' & \frac{d'' - a''}{2} \\ \frac{d'' - a''}{2} & -b'' \end{pmatrix},$$

wie es der zu beweisende Satz verlangt.

(Bemerkung. LATIMER und MACDUFFEE [5] und O. TAUSSKY [6] haben eine Zuordnung von Matrizen n-ter Ordnung zu Idealen in algebraischen Körpern n-ten Grades studiert. Wir ziehen hier statt der Ideale in quadratischen Körpern die quadratischen Formen vor, die auch für $\Delta = 0$ brauchbar sind.)

13. Satz 7 zusammen mit Satz 11 ergeben nun den

Satz 12. *Für die quadratischen Formen $Q(x, y) = A x^2 + B x y + C y^2$ mit der Diskriminante $\Delta = B^2 - 4AC = m^2 - 4$ bildet die Funktion*

$$\Psi \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m - B) & -c \\ A & \frac{1}{2}(m + B) \end{pmatrix}$$

eine Klasseninvariante.

Das folgende Beispiel ist lehrreich: Für $m = 45$, $\Delta = 45^2 - 4 = 43 \cdot 47 = 2021$ gehören die beiden Formen

$$x^2 + xy - 505 y^2 \quad \text{und} \quad 17 x^2 - 7 xy - 29 y^2$$

verschiedenen Klassen an, denn für die erstere findet man

$$\Psi \begin{pmatrix} 22 & 505 \\ 1 & 23 \end{pmatrix} = 42$$

und für die letztere

$$\Psi \begin{pmatrix} 19 & 29 \\ 17 & 26 \end{pmatrix} = -6.$$

Die beiden Formen gehören aber demselben Geschlecht an, weil

$$\left(\frac{A}{43}\right) = +1, \quad \left(\frac{A}{47}\right) = +1$$

für $A = 1$ und $A = 17$ ist[4]). Die Funktion Ψ ist also keine generische Invariante.

[4]) Ein anderes Beispiel dieser Art, für $\Delta = 25^2 - 4 = 621$ wurde mir von Herrn R. Ayoub mitgeteilt.

14. Man kann nun umgekehrt den Satz 12 benutzen, um in vielen Fällen $s(h, k)$ ohne eine auf Gl. (3) gegründete Rekursion zu finden, nämlich zunächst, wenn die Klassenzahl zu $\Delta = m^2 - 4$ gleich 1 ist. Dies trifft nur für $|m| = 0, 1, 3$, also für $\Delta = -4, -3, 5$ zu. Da für diese m alle unimodularen Substitutionen der Spur $a + d = m$ zur gleichen Klasse gehören müssen, so haben wir hier

$$\Psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & m-a \end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a(m-a) - bc = 1$, $m = 0, \pm 1, \pm 3$, wobei wir $c > 0$ nehmen können. Wenn man in diese Gleichung die Werte aus (11) einsetzt, so erhält man den

Satz 13. *Es ist für $c > 0$ und $a(m-a) \equiv 1 \pmod{c}$*

$$s(a, c) = \frac{(1-c)\, m}{12\, c}$$

für $m = 0, \pm 1, \pm 3$.

Dieser Satz besagt für $m = 0$, also $a^2 \equiv -1 \pmod{c}$ nur einen Teil von Satz 1. Für ungerades m aber ist $a(m-a)$ gerade, also c ungerade. Dann lassen sich die Aussagen für $m = \pm 1, \pm 3$ auch folgendermaßen schreiben:

Für ungerades $c > 0$ und $(2a \pm 1)^2 \equiv -3 \pmod{c}$ ist

$$s(a, c) = \pm \frac{c-1}{12 c}; \tag{39}$$

und für $(2a \pm 3)^2 \equiv 5 \pmod{c}$ ist

$$s(a, c) = \pm \frac{c-1}{4 c}. \tag{40}$$

Dieser Fall ist besonders bemerkenswert, da er zu $\Delta > 0$ gehört, wo $M(\tau)$ hyperbolisch ist und nur Fixpunkte auf der reellen Achse hat. Ein Beispiel für (40) ist

$$a = 16,\quad c = 61,\quad m = +3,\quad (32 + 3)^2 = 1225 \equiv 5 \pmod{61},$$

also

$$s(16, 61) = \frac{60}{4 \cdot 61} = \frac{15}{61}.$$

Auch wenn die Klassenzahl von Δ nicht 1 aber klein ist, könnte man Ergebnisse erzielen. Zum Beispiel für $m = 4$, $\Delta = 12$ gibt es zwei Klassen quadratischer Formen, von denen

$$x^2 - 4xy + y^2 \quad \text{und} \quad -x^2 + 4xy - y^2$$

Repräsentanten sind. Diesen Formen sind beziehungsweise die unimodularen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

zugeordnet, für die man erhält:

$$\Psi\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \Psi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -1.$$

Wir haben also mit $c>0$, $a(4-a)-bc=1$

$$\Psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & 4-a \end{pmatrix} = \pm 1$$

oder

$$s(a,c) = \frac{4-3c\mp c}{12c}. \tag{41}$$

Sei zunächst $3 \nmid c$. Dann wissen wir nach Hilfssatz 2, daß 3 kein Teiler des Nenners von $s(a,c)$ sein kann, so daß also folgt

$$s(a,c) = \begin{cases} \dfrac{4-4c}{12c} = \dfrac{1-c}{3c} & c \equiv 1 \pmod 3, \\[2ex] \dfrac{4-2c}{12c} = \dfrac{2-c}{6c} & c \equiv 2 \pmod 3. \end{cases} \tag{42}$$

Ist ferner $3/c$, so zeigt die Bedingung $a(4-a) \equiv 1 \pmod c$ oder

$$(a-2)^2 \equiv 3 \pmod c, \tag{43}$$

daß $9 \nmid c$, also nur $c \equiv \pm 3 \pmod 9$ in Frage kommen.

Nun folgt aus (41)

$$12c\, s(a,c) \equiv 4 \mp c \pmod{3c},$$

anderseits aus (7), Hilfssatz 3,

$$12ac\, s(a,c) \equiv a^2+1 \pmod{3c},$$

also

$$4a \mp ac \equiv a^2+1 \pmod 9.$$

Wegen (43) ist

$$a-2 \equiv 0 \pmod 3, \qquad (a-2)^2 \equiv 0 \pmod 9,$$

also

$$3 \mp ac \equiv 0 \pmod 9,$$

oder

$$3 \pm c \equiv 0 \pmod 9,$$

so daß, da die oberen und unteren Vorzeichen hier und in (41) sich entsprechen,

$$s(a,c) = \begin{cases} \dfrac{4-4c}{12c} & c \equiv -3 \pmod 9 \\[2ex] \dfrac{4-2c}{12c} & c \equiv 3 \pmod 9. \end{cases}$$

Zusammenfassend haben wir also

Satz 14. *Wenn* $c>0$, $(a-2)^2 \equiv 3 \pmod c$, *so ist*

$$s(a,c) = \begin{cases} \dfrac{1-c}{3c} & \text{für } c \equiv 1 \pmod 3 \text{ und für } c \equiv -3 \pmod 9, \\[2ex] \dfrac{2-c}{6c} & \text{für } c \equiv -1 \pmod 3 \text{ und für } c \equiv 3 \pmod 9. \end{cases}$$

Von dieser Art könnte man noch weitere Sätze für geeignetes $\Delta > 0$ aufstellen.

15. Es bleibt noch der parabolische Fall $\Delta = 0$, $m = \pm 2$ zu diskutieren. Hier haben wir, wie schon in § 11 erwähnt ist, unendlich viele Klassen.

Sei zunächst

(44) $$a + d = 2,$$

also

$$(d-1)^2 = -bc.$$

Zu

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

gehört die quadratische Form

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= c x^2 + 2(d+1)\, x y - b y^2 \\ &= \frac{1}{c}\left(c x + (d-1)\, y\right)^2. \end{aligned}$$

Wenn

(45) $$\begin{gathered} \lambda = (c, d-1), \\ c = \lambda\gamma, \quad d - 1 = \lambda\delta \end{gathered}$$

gesetzt wird, erhalten wir

$$Q(x, y) = \frac{\lambda^2}{c}(\gamma x + \delta y)^2.$$

Hier ist einerseits λ^2/c ganz, denn

$$\lambda^2 = \left(c^2, (d-1)^2\right)$$

zugleich mit

(46) $$(d-1)^2 \equiv 0 \pmod{c}.$$

Anderseits ist

$$(\gamma, \delta) = 1,$$

also lassen sich α, β finden, so daß

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

eine Modulsubstitution darstellt, und somit ist

$$Q(x, y) \sim \frac{\lambda^2}{c} y^2.$$

Daher gilt innerhalb der Modulgruppe die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda^2}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so daß also

$$\Psi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda^2}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda^2}{c}$$

ist. Ausführlich heißt dies, unter der Annahme $c > 0$ (sonst könnte man die Vorzeichen umkehren und $a + d = -2$ betrachten),

$$\frac{2}{c} - 12\,s(a, c) - 3 = -\frac{\lambda^2}{c}, \tag{47}$$

unter der Bedingung (46).

Wenn man endlich statt (44) die Bedingung

$$a + d = -2$$

nimmt, so werden (45), (46) durch

$$\lambda = (c, d + 1),$$

$$(d + 1)^2 \equiv 0 \pmod{c}$$

ersetzt, und statt (47) erscheint, $c > 0$ vorausgesetzt,

$$-\frac{2}{c} - 12\,s(a, c) + 3 = \frac{\lambda^2}{c}.$$

Schließlich beachten wir noch $s(a, c) = s(d, c)$ und erhalten somit den

Satz 15. *Ist* $c > 0$, $(d \pm 1)^2 \equiv 0 \pmod{c}$, *so ist*

$$s(d, c) = \mp \frac{\lambda^2 + 2 - 3c}{12c},$$

mit $\lambda = (c, d \pm 1)$, *wobei die unteren und die oberen Vorzeichen zusammengehören.*

Für quadratfreies c ist stets $\lambda = c$, und der Satz besagt dann nicht mehr als (15). Er enthält jedoch eine neue Aussage für c mit quadratischem Faktor. Wir erhalten z.B. für

$$c = 50, \quad d = 10j \pm 1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \text{also} \quad \lambda = 10$$

$$s(10j \pm 1, 50) = \pm \frac{100 + 2 - 150}{600} = \mp \frac{2}{25}.$$

Literatur

[1] Mordell, L. J.: Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums. J. Indian Math. Soc. **15**, 41—46 (1951). — [2] Rademacher, H.: Generalization of the reciprocity formula for Dedekind sums. Duke Math. J. **21**, 391—397 (1954). — [3] Rademacher, H., and A. Whiteman: Theorems on Dedekind sums. Amer. Math. J. **63**, 377—407 (1941). — [4] Reidemeister, K.: Einführung in die kombinatorische Topologie. Braunschweig 1932. — [5] Latimer, C. G., and C. C. MacDuffee: A correspondence between classes of ideals and classes of matrices. Ann. of Math. (2) **34**, 313—316 (1933). — [6] Taussky, O.: On a theorem of Latimer and MacDuffee. Canad. J. Math. **1**, 300—302 (1949).

Prof. H. Rademacher, University of Pennsylvania, Philadelphia 4, Pa. (USA)

(Eingegangen am 24. August 1955)