Über den Begriff der Riemannschen Fläche.

Von Tibor Radó in Szeged.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Untersuchung, zu welcher ich beim Studium des grundlegenden Werkes des Herrn Weyl über *Die Idee der Riemannschen Fläche* geführt wurde. Bekanntlich wird in diesem Buche der Begriff der Riemannschen Fläche zum ersten Male in vollkommen strenger Weise erklärt, und zwar wie folgt. Eine Riemannsche Fläche ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, welche trianguliert werden kann, und für welche eine konforme Abbildung im Kleinen mitgegeben ist. Wir werden diese Begriffe eingehend besprechen (§§ 1 und 4), müssen aber gleich an dieser Stelle die Forderung der *Triangulierbarkeit* doch etwas genauer betrachten, um unser Problem formulieren zu können.

Der Ausdruck *zweidimensionale Mannigfaltigkeit* wird nicht von allen Autoren in demselben Sinne gebraucht. Sie ist jedenfalls ein zusammenhängender topologischer Raum im Hausdorffschen Sinne, welcher im Kleinen der xy-Ebene homöomorph ist: aber es wird manchmal noch die Forderung an sie gestellt, sie soll dem zweiten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom genügen. Wollte man den Ausdruck zweidimensionale Mannigfaltigkeit bei der Erklärung der Riemannschen Fläche in diesem Sinne verstehen, so wäre die Forderung der Triangulierbarkeit überflüssig. Unter Voraussetzung dieses Abzählbarkeitsaxioms bietet nämlich die Triangulierung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit keine prinzipielle, sondern nur technische Schwierigkeiten, und die explicite Forderung der Triangulierbarkeit würde einfach bedeuten dass man mit möglicherweise umständlichen, aber im Grunde ganz einfachen Betrachtungen keine Zeit verlieren will.

Herr WEYL setzt aber kein Abzählbarkeitsaxiom voraus und dadurch wird die Sachlage eine ganz andere, die Behauptung der Triangulierbarkeit wird zu einer wesentlichen Aussage. Da nämlich die Mannigfaltigkeit zusammenhängend sein soll, so ist die Menge der Dreiecke der Triangulierung sicher abzählbar, und daraus folgt sofort, dass das zweite HAUSDORFFsche Axiom erfüllt ist. Die Forderung der Triangulierbarkeit ist hiernach mit diesem Axiom gleichwertig; sie dient also dazu, der Mannigfaltigkeit *Abzählbarkeitseigenschaften* aufzuprägen, wie dies Herr WEYL selbst ausdrücklich hervorhebt.

Bei der Einführung dieser Forderung bemerkt Herr WEYL, dass dieselbe notwendig zu sein *scheint*, um über die zweidimensionale Mannigfaltigkeit wesentliche Sätze aufstellen zu können. Diese Bemerkung veranlasste die vorliegende Untersuchung. Ich erhielt das Resultat, dass *die Triangulierbarkeit eine Folge der Voraussetzung ist, dass für die Mannigfaltigkeit eine konforme Abbildung im Kleinen (siehe § 4) mitgegeben ist.* Eine wichtige Ergänzung dieses Resultates bildet die Tatsache, deren Kenntnis ich Herrn PRÜFER verdanke, dass es zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt, welche *nicht* trianguliert werden können. Mit der freundlichen Erlaubnis des genannten Herrn teile ich in § 2 sein hiefür konstruiertes Beispiel mit. Dasselbe ist in mehreren Beziehungen sehr lehrreich. Dieses Beispiel setzt zunächst den spezifisch funktionentheoretischen Karakter unseres Satzes von der Triangulierbarkeit der RIEMANNschen Fläche in Evidenz,[1]) beleuchtet aber gleichzeitig die wesentlichen Gründe dieses funktionentheoretischen Satzes. Die Konstruktion des Herrn PRÜFER beruht nämlich auf der einfachen und doch merkwürdigen Tatsache, dass es möglich ist, die ganze endliche Ebene topologisch auf das Innere des Einheitskreises abzubilden. Könnte eine derartige Abbildung konform sein, so wäre es möglich, für die PRÜFERsche Mannigfaltigkeit eine konforme Abbildung im Kleinen (siehe § 4) zu erklären, und man würde eine nicht triangulierbare RIEMANNsche Fläche erhalten. Be-

---

[1]) Herr PRÜFER wurde zur Konstruktion dieses Beispiels eben durch den Wunsch angeregt, diesen Punkt klarzustellen, und er teilte mir sein Beispiel bereits in Jänner 1923 mit. Durch eine briefliche Mitteilung des Herrn TIETZE wurde ich auf ein anders geartetes Beispiel aufmerksam gemacht, welches seither auch durch Herrn ALEXANDROFF gefunden und veröffentlicht wurde (*Math. Annalen* 92).

kanntlich ist aber die endliche Ebene dem Innern des Einheitskreises nicht aequivalent im Sinne konformer Abbildung; und analoge Abbildungssätze werden es sein, auf welche wir den Beweis unseres funktionentheoretischen Satzes gründen werden.

Da es sich um eine axiomatische Untersuchung handelt, so war es nötig, in die folgende Darstellung eine genaue Besprechung des Begriffes der RIEMANNschen Fläche mit aufzunehmen. Und zwar umsomehr, da doch jedermann bereits eine fertige *Idee der Riemannschen Fläche* besitzt, höchstwahrscheinlich die Idee einer der *konkreten* RIEMANNschen Flächen, welche in der funktionentheoretischen Praxis gehandhabt werden. Diese sind natürlich Spezialfälle der allgemeinen RIEMANNschen Fläche, die wir betrachten werden, aber solche Spezialfälle, für welche unser Satz von der Triangulierbarkeit trivial wird. Immerhin sind diese Spezialfälle lehrreich, indem sie zeigen, dass beim Nachweis ihrer Triangulierbarkeit immer *die spezielle aritmetische Beschaffenheit* ihrer Punkte zur Verwendung kommt; im Falle des analytischen Gebildes hat man beispielsweise vom bekannten Satze Gebrauch zu machen, dass bei der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe nur abzählbar viele Potenzreihen mit vorgegebenem Mittelpunkte erhalten werden können. Demgegenüber werden wir uns bei der folgenden Untersuchung auf die besondere arithmetische Erklärung der Punkte unserer Fläche nicht berufen können, da eine derartige Erklärung in einer axiomatischen Definition der RIEMANNschen Fläche überhaupt nicht auftreten kann.

Die Arbeit gliedert sich folgendermassen. In § 1 wird die zweidimensionale Mannigfaltigkeit erklärt. Der § 2 bringt das PRÜFERsche Beispiel einer nicht triangulierbaren zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, und in § 3 wird der Hilfssatz bewiesen, dass die Triangulierbarkeit eine Folge des zweiten HAUSDORFFschen Axioms ist, womit das Topologische erledigt ist. In § 4 wird die RIEMANNsche Fläche erklärt und der Satz bewiesen, dass sie immer triangulierbar ist.

Es sei noch erwähnt, dass ich den Hauptsatz dieser Arbeit mit Andeutung des Beweisganges in Bd. 90 der Mathematischen Annalen mitgeteilt habe, in meiner Note: *Bemerkung zur Arbeit des Herrn Bieberbach* etc.

§ 1.

Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit.[2])

Herr WEYL führt die RIEMANNsche Fläche nicht genetisch, sondern axiomatisch ein; bei ihm wird dieselbe nicht etwa *hergestellt* aus aufgeschnittenen und kreuzweise zusammengehefteten ebenen Blättern, sondern sie wird *erklärt* durch eine Reihe von Eigenschaften, wobei die aritmetische Erklärung der Punkte gar nicht in Betracht kommt. Durch die geforderten Eigenschaften wird die RIEMANNsche Fläche zunächst als *topologischer Raum* gekennzeichnet. Dieser wird erklärt als der Inbegriff einer Menge von irgendwelchen Dingen, die als Punkte des Raumes gelten werden, und einer Vorschrift, durch welche jedem Punkte gewisse Punktmengen als *Umgebungen* zugeordnet werden, wobei die folgenden Umgebungsaxiome erfüllt sein müssen:

A) Zu jedem Punkte P gehört wenigstens eine Umgebung $U(P)$; jede Umgebung von P enthält den Punkt P.

B) Sind $U_1(P)$, $U_2(P)$ Umgebungen desselben Punktes P, so hat P eine Umgebung, welche Teilmenge von beiden ist.

C) Liegt der Punkt Q in einer Umgebung $U(P)$ von P, so hat Q eine Umgebung $U(Q)$, die Teilmenge von $U(P)$ ist.

D) Sind P und Q verschiedene Punkte, so haben sie solche Umgebungen $U(P)$, $U(Q)$, die keinen Punkt gemein haben.

Ist dann $\mathbf{M}$ eine Punktmenge im topologischen Raume $\mathbf{R}$, so heisst ein Punkt P innerer Punkt von $\mathbf{M}$, wenn es eine Umgebung von P gibt, die Teilmenge von $\mathbf{M}$ ist. Eine Menge heisst offen, wenn alle ihre Punkte innere Punkte sind. Randpunkt einer offenen Menge ist ein Punkt, falls er nicht in der Menge enthalten ist, aber in jeder Umgebung desselben Punkte der Menge liegen. In analoger Weise lassen sich weitere Begriffe aus der Theorie der ebenen Punktmengen übertragen. Wir wollen hier ausführlicher noch die topologischen Abbildungen und den Begriff der gleichwertigen Umgebungssysteme besprechen

Sind $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ zwei topologische Räume, und ist zwischen ihren Punkten eine umkehrbar eindeutige Beziehung erklärt, so heisst

[2]) Eine ausführliche systematische Darstellung der in diesem Abschnitte besprochenen Begriffsbildungen findet sich bei HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Kapitel 7 und 8.

diese eine topologische Abbildung, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Sind P_1 und P_2 entsprechende Punkte, $U(P_1)$ und $U(P_2)$ irgendwelche Umgebungen derselben, so gibt es eine Umgebung von P_1, deren Bildmenge Teilmenge von $U(P_2)$, und eine Umgebung von P_2, deren Bildmenge Teilmenge von $U(P_1)$ ist. Es folgt dann sofort, dass eine umkehrbar eindeutige Beziehung zweier Räume dann und nur dann eine topologische Abbildung ist, wenn die Bildmenge jeder offenen Menge wieder offen ist.

Wird für die Menge, deren Elemente die Punkte des topologischen Raumes $\mathbf{R}$ darstellen, eine andere Vorschrift für die Umgebungen gegeben, so entsteht ein neuer topologischer Raum $\overline{\mathbf{R}}$. Es steht uns vollkommen frei, die Fälle zu bestimmen, in welchen $\mathbf{R}$ und $\overline{\mathbf{R}}$ identisch heissen sollen, durch die Anwendungen der Theorie wird indessen die folgende Festsetzung aufgenötigt. Für die beiden Räume $\mathbf{R}$ und $\overline{\mathbf{R}}$ ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung unmittelbar gegeben, nämlich die identische Abbildung, bei welcher jeder Punkt sein eigener Bildpunkt ist. Dann und nur dann, wenn diese identische Abbildung eine topologische Abbildung ist, soll $\mathbf{R} \equiv \overline{\mathbf{R}}$ gesetzt werden. Dann und nur dann also, wenn jede Punktmenge, welche im einen dieser Räume offen ist, auch im anderen offen ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so heissen die beiden Umgebungssysteme *gleichwertig*. Ist $\mathbf{R}$ gegeben, so verstehen wir in der Folge unter einem *Umgebungssystem* schlechthin stets ein solches, welches dem bei der Erklärung von $\mathbf{R}$ ursprünglich verwendeten Systeme gleichwertig ist.

Ein topologischer Raum heisst zusammenhängend, wenn es nicht möglich ist, denselben in zwei offene punktfremde Teilmengen zu zerlegen. In positiver Fassung bedeutet dies, dass jede offene Punktmenge, welche nicht alle Punkte des Raumes enthält, wenigstens einen Randpunkt hat. Die Eigenschaft eines Raumes, zusammenhängend zu sein, bleibt offenbar bei topologischen Abbildungen erhalten. Die Definition überträgt sich sofort auf offene Punktmengen, und führt zum Begriffe des Gebietes: eine offene Punktmenge heisst Gebiet, wenn sie zusammenhängend ist. Man sieht sofort: ist irgend eine Menge von Gebieten gegeben, welche alle einen gewissen Punkt P enthalten, so ist ihre Vereinigungsmenge wieder ein Gebiet. Mit Rücksicht auf spätere Anwendung soll noch eine einfache Tatsache als besonderer Hilfssatz angeführt werden.

Hilfssatz 1. Sei irgend eine Menge $\{G\}$ von Gebieten gegeben, welche den zusammenhängenden Raum **R** vollständig überdecken. Sind dann P und Q irgend zwei Punkte, so kann man unter den Gebieten von $\{G\}$ endlich viele herausgreifen, welche eine von P nach Q führende *Kette* bilden.

Darunter ist folgendes zu verstehen. Es gibt unter den Gebieten von $\{G\}$ endlich viele: $G_1, G_2, \ldots, G_n$, so dass je zwei aufeinander folgende Gebiete innere Punkte gemein haben, und P in G_1, Q in G_n liegt. Sei nun, bei festem P, **M** die Menge der Punkte Q, für welche die Behauptung richtig ist. Da **M** jedes Gebiet von $\{G\}$ vollständig enthält, von welchem auch nur ein einziger Punkt ihr angehört, so folgt, dass **M** eine nicht leere, offene Punktmenge ist, welche keinen Randpunkt haben kann. Da der betrachtete Raum zusammenhängend sein soll, so ist hiernach **M** mit dem ganzen Raume identisch, w. z. b. w.

Die xy-Ebene fällt unter den allgemeinen Begriff des topologischen Raumes. Als Umgebung eines Punktes kann man z. B. das Innere eines jeden Kreises erklären, welcher den Punkt im Innern enthält, und kommt auf diese Weise auf die geläufige Theorie der ebenen Punktmengen. Ist nun G ein Gebiet eines topologischen Raumes, und ist es möglich, G topologisch auf das Innere des Einheitskreises abzubilden, so möge G ein *zweidimensionales Elementargebiet* heissen.

Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit wird nun erklärt als ein zusammenhängender topologischer Raum, für welchen es ein Umgebungssystem gibt, dessen Umgebungen zweidimensionale Elementargebiete sind. Dieselbe besitzt hiernach alle die Eigenschaften, die sich der Anschauung bei der Betrachtung einer unberandeten stetigen Fläche unmittelbar darbieten, und kann im Kleinen tatsächlich als solche behandelt werden. Hingegen können wir keine Betrachtungen anstellen, welche topologische Eigenschaften im Grossen betreffen, und zwar aus einem, wie es zunächst scheint, äusseren Grunde. Die Eigenschaften einer Fläche im Grossen werden nämlich in der naiven Topologie durch räumliche Betrachtungen hergeleitet, in der wissenschaftlichen Topologie durch kombinatorische Überlegungen, welche an die Triangulierung der Fläche anknüpfen. Unsere zweidimensionale Mannigfaltigkeit liegt aber nicht im anschaulichen Raume, sie ist auch nicht trianguliert. Wir wollen uns zunächst überzeugen, dass die hiermit bezeichnete Schwierigkeit eine wesentliche ist.

§ 2.

Das Prüfersche Beispiel.

Sobald es gelingt, eine vorgelegte zweidimensionale Mannigfaltigkeit zu triangulieren, so können auf dieselbe alle die Schlüsse der Flächentopologie angewendet werden. Die Forderung der Triangulierbarkeit stellt indessen eine wesentliche Einschränkung dar, wie wir es an einem ganz elementaren Beispiele zeigen wollen.

Ist eine Triangulierung irgendwie hergestellt, so ergibt sich sogleich, dass die Menge der verwendeten Dreiecke abzählbar ist. Und da jedes Dreieck einer abgeschlossenen Kreisscheibe der xy-Ebene topologisch aequivalent sein soll, so wird die Mannigfaltigkeit eine Reihe von Abzählbarkeitseigenschaften im Grossen besitzen, wie solche für die xy-Ebene aus der unmittelbaren Beziehung zum komplexen Zahlensystem erschlossen werden. Wir wollen hier nur diejenige Eigenschaft anführen, welche wir unmittelbar benötigen werden, dass nämlich jede nicht abzählbare Punktmenge wenigstens eine Häufungsstelle hat. Dies folgt aus der Bemerkung, dass unter den abzählbar vielen Dreiecken der Triangulierung wenigstens eines unendlich viele Punkte der Menge enthalten muss; im Innern oder am Rande eines solchen Dreiecks liegt dann sicher ein Häufungspunkt. Wir werden nun eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit angeben, welche bereits diese Abzählbarkeitseigenschaft nicht besitzt, also sicher nicht trianguliert werden kann. Um den elementaren Karakter der Konstruktion klar hervortreten zu lassen, werden wir die Überlegung des Herrn Prüfer aritmetisch einkleiden.

Die Punkte der zu erklärenden Mannigfaltigkeit **R** werden Symbole zweierlei Art sein. Zunächst nehmen wir Symbole (x, y, a), wobei x, y und a die erste, zweite und dritte Koordinate des Punktes heissen sollen. Diese können alle reelle Werte annehmen, welche den Ungleichungen

$$y > 0, (x-a)^2 + y^2 \leqq 1$$

genügen. Weiter betrachten wir Symbole, bei welchen die dritte Koordinate die imaginäre Einheit i ist, während die beiden ersten Koordinaten wieder beliebige reelle Werte sein können, nur für die zweite Koordinate y muss die Ungleichung $y > 0$ erfüllt sein

Der Bequemlichkeit halber sollen die Punkte mit der dritten Koordinate i *imaginäre*, alle übrigen *reelle* Punkte heissen.

Wir erklären nun für jede reelle Zahl a eine Menge $B(a)$, welche alle Punkte enthält, deren dritte Koordinate a oder i ist. Ein imaginärer Punkt ist hiernach in allen Mengen $B(a)$ enthalten, ein reeller Punkt aber nur in einer einzigen. Für jede Menge $B(a)$ erklären wir eine Abbildung $T(a)$, welche den Punkten von $B(a)$ in ein-eindeutiger Weise die Punkte der Euklidischen oberen Halbebene entsprechen lässt, also die Punkte (x, y) mit $y > 0$. Diese Abbildung erhalten wir wie folgt. Die reellen Punkte von $B(a)$ haben alle die gleiche dritte Koordinate a; einem solchen Punkte (x, y, a) ordnen wir einfach den Punkt (x, y) zu Ausserdem enthält $B(a)$ alle imaginäre Punkte; ist (x, y, i) ein solcher, so führe man die folgende Konstruktion aus: Sei A der Punkt $(a, 0)$, P der Punkt (x, y); auf dem Halbstrahle von A nach P bestimme man den Punkt P' so, dass $\overline{AP'} = \overline{AP} + 1$ sei. Dieser Punkt P ist dann der Bildpunkt von (x, y, i) bei der Abbildung $T(a)$. Den reellen Punkten von $B(a)$ entsprechen hiernach in ein-eindeutiger Weise diejenigen Punkte (x, y), für welche $y > 0, (x-a)^2 + y^2 \leq 1$ ist, während den imaginären Punkten die Punkte (x, y) mit $y > 0, (x-a)^2 + y^2 > 1$ zugeordnet werden.

Eine Teilmenge $\mathbf{M}$ heisse *einfach*, wenn es eine Menge $B(a)$ gibt, in welcher sie enthalten ist. Gibt es zwei verschiedene Mengen $B, B(a_1)$ und $B(a_2)$, welche $\mathbf{M}$ enthalten, so kann $\mathbf{M}$ nur aus imaginären Punkten bestehen. Seien $\mathbf{M}_1'$ und $\mathbf{M}_2'$ die Bildmengen von $\mathbf{M}$ bei den Abbildungen $T(a_1)$ und $T(a_2)$. Aus der Konstruktion dieser Mengen erhellt dann sofort, dass sie ein-eindeutig und stetig einander entsprechen, wenn also die eine ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, so ist es auch die andere. Wir dürfen hiernach erklären:

Ein *einfaches Elementargebiet* ist eine Punktmenge, welche ganz in einer Menge $B(a)$ liegt und bei der Abbildung $T(a)$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet der xy-Ebene übergeht.

Dabei ist also, im Falle mehrere Mengen $B(a)$ verwendet werden können, gleichgültig, welche man benutzt. Solche einfache Elementargebiete sind beispielsweise:

1. Die Menge aller imaginärer Punkte.
2. Jede Menge $B(a)$.

3 Jede Menge $B^*(a)$, enthaltend alle reelle Punkte mit der dritten Koordinate a, für welche $(x-a)^2+y^2<1$ ist.

4. Sei ϱ eine reelle positive Zahl, und man betrachte die Menge derjenigen Punkte von $B(a)$, deren Bildpunkte bei der Abbildung $T(a)$ das Gebiet $y>0$, $(x-a)^2+y^2<(1+\varrho)^2$ ausfüllen. Diese Menge, die wir mit $B_\rho(a)$ bezeichnen, ist ebenfalls ein einfaches Elementargebiet. Dasselbe enthält alle reelle Punkte von $B(a)$, einen imaginären Punkt (x, y, i) aber dann und nur dann, wenn $(x-a)^2+y^2<\varrho^2$ ist.

Nunmehr können wir Umgebungen erklären, und zwar sollen als Umgebungen eines Punktes alle einfache Elementargebiete gelten, welche den betreffenden Punkt enthalten. Es ergibt sich dann leicht, dass unter Zugrundelegung dieser Vorschrift den in § 1 erklärten Umgebungsaxiomen $A)$ bis $D)$ genügt wird. Für $A)$ und $C)$ ist dies evident. Um $B)$ zu zeigen, sei P ein Punkt und U_1, U_2 zwei Umgebungen desselben. Nun ist U_1 ganz in einer Menge $B(a_1)$, U_2 in einer Menge $B(a_2)$ enthalten. Ist $a_1=a_2$, so ist alles klar. Ist aber $a_1 \neq a_2$, so ist P notwendig ein imaginärer Punkt, da er in zwei verschiedenen Mengen B enthalten ist. Dann genügt zu bemerken, dass in jeder Umgebung eines imaginären Punktes solche Umgebungen desselben enthalten sind, welche nur aus imaginären Punkten bestehen. Um $D)$ zu verifizieren, seien P_1 und P_2 zwei verschiedene Punkte. Sind sie erstens beide reell und haben sie verschiedene dritte Koordinaten a_1 und a_2, so wähle man $\varrho=\frac{|a_1-a_2|}{4}$, und betrachte die oben unter 4. erklärten Mengen $B_\rho(a_1)$ und $B_\rho(a_2)$. Dann ist die erste eine Umgebung für P_1, die zweite eine Umgebung für P_2, und die Annahme, dass diese Umgebungen einen Punkt Q gemein haben, führt sofort zu einem Widerspruche. In der Tat, Q müsste dann ein imaginärer Punkt (x, y, i) sein, und es müssten die Ungleichungen

$$(x-a_1)^2+y^2<\varrho^2$$
$$(x-a_2)^2+y^2<\varrho^2$$

gleichzeitig erfüllt sein, was aber infolge der Wahl von ϱ unmöglich ist. Ist zweitens für die Punkte P_1 und P_2 die erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt, so gibt es wenigstens eine Menge $B(a)$, welche beide Punkte enthält, und dann ist alles klar.

Ist **M** eine einfache Menge, so folgt aus der getroffenen Umgebungserklärung sofort, dass dieselbe dann und nur dann offen ist, wenn ihre Bildmenge durch die entsprechende Abbildung $T(a)$ offen ist. Die $T(a)$ sind also topologische Abbildungen, und daraus ergibt sich weiter, dass die Mengen $B(a)$ Gebiete sind. Da diese Gebiete $B(a)$ zusammen alle Punkte von **R** enthalten, und da es Punkte gibt, nämlich alle imaginäre Punkte, welche in allen diesen Gebieten enthalten sind, so ist **R** zusammenhängend, also eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten nun etwa die Punktmenge $(1/2, 1/2, a)$, wo a alle reelle Werte annimmt. *Diese Punktmenge ist nicht abzählbar und hat doch keine Häufungsstelle.* Denn jedes Gebiet $B(a)$ enthält von dieser Menge einen einzigen Punkt, mithin keinen Häufungspunkt derselben, während doch ein etwa vorhandener Häufungspunkt in wenigstens einem dieser Gebiete enthalten sein müsste, da sie die Mannigfaltigkeit vollständig überdecken. Damit ist erwiesen, dass die Prüfersche Mannigfaltigkeit nicht trianguliert werden kann.

§ 3.

Ein Hilfssatz über Tiangulierung.

Es soll nun gezeigt werden, dass jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die sich, anschaulich gesprochen, nicht ins Unabzählbare erstreckt, trianguliert werden kann: wir werden dartun, dass eine Triangulierung möglich ist, sobald das zweite Hausdorffsche Axiom erfüllt ist. Dieses verlangt die Existenz eines abzählbaren Umgebungssystems, und kann im vorliegenden Falle in der folgenden, etwas bequemeren Form ausgesprochen werden:

A b z ä h l b a r k e i t s a x i o m: Es existiert eine Folge, d. h. eine abzählbare Menge, von Elementargebieten, welche die zweidimensionale Mannigfaltigkeit vollständig überdecken.

Im Falle der xy-Ebene bilden z. B. die Kreise mit rationalem Halbmesser und rationalem Mittelpunkte eine derartige Folge. Überhaupt ist für die Flächen, welche in der Topologie und Funktionentheorie betrachtet werden, das Axiom erfüllt, hingegen braucht es für eine allgemeine zweidimensionale Mannigfaltigkei nicnt erfüllt zu sein, wie dies aus dem Prüferschen Beispiel hervorgeht. Die Tatsache, dass die Triangulierbarkeit eine Folge dieses Axioms ist, ist allgemein bekannt, wurde aber nur für besondere

Fälle bewiesen.[3]) Wir führen den Beweis ganz allgemein, wollen aber gleich bemerken, dass für unsere Zwecke dieser Hilfssatz ganz überflüssig wäre, wenn wir uns auf einen topologisch vollständig durchgearbeiteten, *mit Kreisscheiben operierenden* Beweis des Grenzkreistheorems berufen könnten.

Hilfssatz 2. *Ist* **R** *eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, für welche das Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, so kann dieselbe trianguliert werden.*

Es sei uns gestattet, wegen der genauen Definition der Triangulierung den Leser auf das WEYLsche Buch zu verweisen und sofort mit dem Beweise von Hilfssatz 2 zu beginnen. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ von Elementargebieten, welche die Mannigfaltigkeit vollständig überdecken. Wir bezeichnen eine Punktmenge, welche ganz in einem gewissen Elementargebiete E enthalten ist und bei der topologischen Abbildung von E auf das Innere des Einheitskreises als eine geschlossene Jordankurve nebst Innengebiet erscheint, als einen JORDANschen Bereich. Dann können wir zunächst behaupten, dass die Mannigfaltigkeit auch durch eine Folge von JORDANschen Bereichen überdeckt werden kann, und zwar so, dass jeder Punkt in wenigstens einem Bereiche als innerer Punkt auftritt. In der Tat, für ein einzelnes Elementargebiet E_n folgt dies aus der Tatsache, dass das Innere des Einheitskreises durch abzählbar viele Kreisscheiben überdeckt werden kann. Nachdem wir für jedes E_n eine dasselbe überdeckende Folge von JORDANschen Bereichen hergestellt haben, erhalten wir durch Vereinigung dieser abzählbar vielen Folgen eine Folge, durch welche nunmehr die ganze Mannigfaltigkeit überdeckt wird. Wir behaupten nun das folgende

Lemma. Es existiert auch eine die ganze Mannigfaltigkeit überdeckende Folge von JORDANschen Bereichen, bei welcher die Randkurven von zwei verschiedenen Bereichen höchstens endlich viele Punkte gemein haben.

Wir wollen sofort angeben, wie man unter Zugrundelegung einer derartigen Folge eine Triangulierung herstellen kann. Zunächst konstruieren wir eine Polygonteilung der Mannigfaltigkeit. Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ die Bereiche der Folge. Als Polygon $\pi^{(1)}$ erklären wir B_1 selbst. Der Voraussetzung zufolge wird B_2 durch die Rand-

[3]) WEYL, Die Idee der Riemannschen Fläche, S. 32. — H. KNESER, Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Annalen* 91, S. 137—139.

kurve von B_1 in endlich viele, endlich vielfach zusammenhängende, Polygone zerlegt; diejenigen dieser Polygone, welche ins Innere von B_1 nicht eindringen, bezeichnen wir mit $\pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_{i_2}^{(2)}$. Allgemein wird B_n durch die Randkurven von $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ in endlich viele, endlich vielfach zusammenhängende, Polygone zerlegt, von welchen wir nur diejenige beibehalten, welche *nicht* ins Innere von $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ eindringen; es seien $\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \ldots, \pi_{i_n}^{(n)}$ diese Polygone. Dann haben keine zwei der schrittweise erklärten Polygone π innere Punkte gemein, jeder Punkt ist in wenigstens einem derselben als innerer oder Randpunkt enthalten, und schliesslich gibt es zu jedem Punkte eine Umgebung, in welche nur endlich viele Polygone eindringen. Es wird wohl genügen, die dritte Behauptung genauer zu betrachten. Sei also P der fragliche Punkt; in der Folge $B_1, B_2, \ldots$ gibt es dann einen Bereich B_m, welcher P im Innern enthält, es kommen also nur Polygone mit einem oberen Zeiger $\leqq m$ in Betracht, denn die übrigen können nach ihrer Erklärung ins Innere von B_m nicht eindringen. Es gibt aber nur endlich viele Polygone mit oberem Zeiger $\leqq m$, womit die Behauptung erwiesen ist. Durch geeignete Unterteilung erhalten wir nunmehr aus dieser Polygonteilung ohne Schwierigkeit eine Triangulierung.

Wir müssen nunmehr das Lemma begründen.[4]) Zu dem Ende gehen wir von irgendeiner Folge $B_1, B_2, \ldots$ aus, welche die Mannigfaltigkeit vollständig überdeckt. Ist B_n^* ein Jordanscher Bereich, welcher B_n enthält, so wird die Folge $B_1^*, B_2^*, \ldots$ die Mannigfaltigkeit *a fortiori* vollständig überdecken. Wir werden die Bereiche B_n^* so zu bestimmen suchen, dass die Folge dieser Bereiche ausserdem der im Lemma ausgesprochenen Bedingung genügt.

Als B_1^* können wir B_1 selbst wählen. Wir wollen gleich annehmen, es seien bereits $B_1^*, B_2^* \ldots, B_{n-1}^*$ so bestimmt, dass B_1 in $B_1^*, \ldots, B_{n-1}$ in B_{n-1}^* enthalten ist und dass die Randkurven dieser $n-1$ Bereiche paarweise höchstens endlich viele Punkte gemein haben. Es muss nun B_n^* so gewählt werden, dass diese Aussagen für die n Bereiche $B_1^*, B_2^*, \ldots, B_n^*$ gültig bleiben. Um die

---

[4]) Für RIEMANNsche Flächen ist das Lemma selbstverständlich. Auf einer solchen kann man nämlich *analytische* Kurven erklären, wobei der Satz bestehen bleibt, dass zwei verschiedene einfache geschlossene analytische Kurven höchstens endlich viele Schnittpunkte haben. Da aber sich die rein topologische Durchführung über Erwarten elementar erwies, so ziehe ich vor, dieselbe mitzuteilen.

folgenden Überlegungen möglichst übersichtlich zu gestalten, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Einen Punkt, welcher für mehr als einen der Bereiche $B_1^*, \ldots, B_{n-1}^*$ Randpunkt ist, nennen wir einen Kreuzungspunkt. Mit $\mathbf{M}_{n-1}$ bezeichnen wir die Menge der Randpunkte dieser $n-1$ Bereiche. Sind schliesslich P und Q irgend zwei Punkte, so soll jeder einfache Jordanbogen, welcher P und Q verbindet und mit $\mathbf{M}_{n-1}$ höchstens endlich viele Punkte gemein hat, als ein *erlaubter Weg* bezeichnet werden. Dann gelten zunächst die folgenden Tatsachen:

a) Sind $P_0, P_1, \ldots, P_k$ gegebene Punkte und $l_1, l_2, \ldots, l_k$ erlaubte Wege, wobei l_1 die Punkte P_0 und $P_1, \ldots, l_k$ die Punkte P_{k-1} und P_k verbindet, so gibt es einen erlaubten Weg l, welcher P_0 und P_k verbindet und nur aus solchen Punkten besteht, welche wenigstens einem der Bögen $l_1, l_2, \ldots, l_k$ angehören.

b) Ist P ein Punkt von $\mathbf{M}_{n-1}$, wobei P kein Kreuzungspunkt sein möge, so ist im Punkte P die Punktmenge $\mathbf{M}_{n-1}$ *unbewallt* im folgenden Sinne: ist U eine beliebige Umgebung von P, so gibt es eine weitere Umgebung V von P, so dass irgend zwei Punkte Q_1, Q_2 von V durch einen ganz in U verlaufenden erlaubten Weg verbunden werden können.

c) Ist G ein Gebiet, welches keinen Kreuzungspunkt enthält, so können irgend zwei Punkte von G durch einen ganz in G verlaufenden erlaubten Weg verbunden werden.

Die Behauptung *b)* ist eine unmittelbare Folge der *Unbewalltheit der Jordankurve.* Zu *a)* bemerke man, dass es genügt, den Fall $k=2$ zu betrachten. Sei Q der Punkt, in welchem beim Durchlaufen von l_1 in der Richtung von P_0 nach P_1 der Bogen l_2 zum ersten Male getroffen wird. Dann bilden der Teilbogen P_0Q von l_1 und der Teilbogen QP_2 von l_2 einen Weg mit den verlangten Eigenschaften. Endlich ist *c)* eine unmittelbare Folge aus *a)* und *b)*. Man sieht nämlich, dass nach *b)* zu jedem Punkte P von G insbesondere eine Umgebung gehört, so dass jeder Punkt dieser Umgebung mit P durch einen erlaubten Weg innerhalb G verbunden werden kann. Nach Hilfssatz 1, § 1 können dann irgend zwei Punkte von G durch eine endliche Kette derartiger Umgebungen verbunden werden, und dann folgt *c)* aus *a)*.

Nachdem dies alles festgestellt ist, kehren wir zu unserer Aufgabe, zur Bestimmung des Bereiches B_n^*, zurück. Sei E_n ein Elementargebiet, welches den Bereich B_n im Innern enthält. Wir bilden E_n topologisch auf das Innere des Einheitskreises ab, wobei der Rand von B_n als eine einfache geschlossene JORDANkurve C'_n erscheint. Da es nur endlich viele Kreuzungspunkte gibt, so können wir im Einheitskreise einen konzentrischen Kreis K derart annehmen, dass C'_n innerhalb K liegt, und dass der Kreisring zwischen K und dem Einheitskreise das Bild eines Gebietes G sei, welches keinen Kreuzungspunkt enthält. Unsere Aufgabe wird dann gelöst sein, wenn es uns gelingt, in diesem Kreisringe eine einfache geschlossene JORDANkurve anzugeben, welche K im Innern enthält und mit einer gewissen nirgends dichten, unbewallten Punktmenge, welche das Bild einer gewissen Teilmenge von $\mathbf{M}_{n-1}$ ist, höchstens endlich viele Punkte gemein hat. Dies bietet nunmehr keine Schwierigkeit. Da die erwähnte Punktmenge nirgends dicht ist, so können wir im Kreisringe zwei Punkte P, Q so annehmen, dass es je eine Umgebung derselben gibt, die frei von dieser Punktmenge sind, und dass ausserdem die beiden durch diese Punkte gehenden Radien verschieden sind. Diese Radien zerlegen den Kreisring in zwei viereckige Gebiete D_1 und D_2. Wir können dann in D_1 zwei Punkte P_1, Q_1 so annehmen, dass die Strecken PP_1, QQ_1 erlaubte Wege sind. Auf Grund von *c)* können wir weiter P_1 und Q_1 innerhalb D_1 durch einen erlaubten Weg l_1 verbinden, und nach *a)* können wir dann aus den Strecken PP_1, QQ_1 und aus l_1 einen erlaubten Weg t_1 von P nach Q zusammensetzen, welcher von den Punkten P und Q selbst abgesehen ganz in D_1 enthalten ist. Ebenso erhalten wir einen erlaubten Weg $\bar{l}_2$, welcher P und Q innerhalb D_2 verbindet. Die Bögen $\bar{l}_1$ und $\bar{l}_2$ bilden dann zusammen eine JORDANkurve, welche unsere Aufgabe löst.

Damit ist erwiesen, dass die Bereiche B^*_n schrittweise so bestimmt werden können, dass eine durch das Lemma geforderte Folge zustande kommt, und der Beweis von Hilfssatz 2 ist beendigt.

§ 4.

Beweis des Satzes von der Triangulierbarkeit der Riemannschen Fläche.

Wir haben nun die RIEMANNsche Fläche zu erklären. Indem wir aus Zweckmässigkeitsgründen die von Herrn WEYL entwickelte funktionentheoretische Fassung durch eine rein geometrische er-setzen, führen wir zunächst den *Begriff der konformen Abbildung im Kleinen* ein. Sei **R** eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, $\{U\}$ ein *bestimmtes* Umgebungssystem, wobei jede Umgebung des Systems Elementargebiet sein soll. Für jede Umgebung des Systems sei ferner eine *bestimmte* topologische Abbildung $T[U]$ auf das Innere des Einheitskreises mitgegeben. Diese Abbildungen sollen im folgenden Verhältnis zueinander stehen.

Bedingung der Konformität. Ist G ein Gebiet, welches gleichzeitig in den Umgebungen U_1 und U_2 enthalten ist und sind G_1', G_2' die Bildgebiete von G bei den Abbildungen $T[U_1], T[U_2]$, so ist $T[U_1]^{-1}\,T[U_2]$ eine im üblichen Sinne direkt, d. h. ohne Umlegung der Winkel, konforme Abbildung von G_1' auf G_2'

Ist die Bedingung der Konformität erfüllt, so wollen wir sagen, das System $\{U\}$ und die mitgegebenen Abbildungen $T[U]$ bestimmen eine *konforme Abbildung im Kleinen* der Mannigfaltigkeit. Wie man sieht, sind die Abbildungen $T[U]$ nicht unabhängig voneinander, andererseits sind sie durch die Mannigfaltigkeit offenbar nicht eindeutig bestimmt. Eine unmittelbar sich darbietende Fragestellung ist die, ob es denn möglich sei, für jede beliebige zweidimensionale Mannigfaltigkeit eine konforme Abbildung im Kleinen zu erklären. Aus unseren Entwicklungen wird gerade hervorgehen, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, weil nämlich aus der Annahme dieser Möglichkeit auf die Triangulierbarkeit der Mannigfaltigkeit geschlossen werden kann.

Die Definition, die wir nunmehr für die RIEMANNsche Fläche geben werden, weicht von der WEYLschen zunächst in ihrer geometrischen Fassung ab, was unwesentlich ist. Der wesentliche Unterschied wird aber darin bestehen, dass wir in die Definition keine Abzählbarkeitseigenschaft aufnehmen.

Erklärung der Riemannschen Fläche Eine RIEMANNsche Fläche ist der Inbegriff einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit und einer *bestimmten* konformen Abbildung im Kleinen derselben.

Zur Erläuterung mögen hier einige weitere Begriffsbildungen angeführt werden. Wenn für eine Mannigfaltigkeit **R** auf zwei verschiedene Arten konforme Abbildungen im Kleinen erklärt sind, so entstehen zwei kollokale RIEMANNsche Flächen, und es handelt sich dann darum, ein Kriterium für die Identität derselben anzugeben. Zu dem Ende vereinigen wir die beiden verwendeten Umgebungssysteme; wir erhalten dann wieder ein Umgebungssystem, und wenn für dieses unter Beibehaltung der ursprünglich mitgegebenen Abbildungen die Bedingung der Konformität erfüllt ist, dann und nur dann sollen die beiden RIEMANNschen Flächen als identisch gelten. Sind weiter **R** und **R**$'$ zwei RIEMANNsche Flächen und ist Σ eine topologische Abbildung $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$, so muss bestimmt werden, unter welchen Umständen diese Abbildung konform heissen soll. Wenn $\{U\}$ das bei der Bestimmung von **R** verwendete Umgebungssystem bezeichnet, so entspricht demselben vermöge Σ ein Umgebungssystem $\{U'\}$ auf **R**$'$, und indem wir jeder solchen Umgebung U' die Abbildung $\Sigma^{-1} T[U]$ zuordnen, erhalten wir eine konforme Abbildung im Kleinen für **R**$'$. Es entsteht auf diese Weise eine neue, mit **R**$'$ kollokale RIEMANNsche Fläche $\overline{\mathbf{R}}$; dann und nur dann, wenn im bereits erklärten Sinne $\mathbf{R}' \equiv \overline{\mathbf{R}}$ ist, nennen wir Σ eine konforme Abbildung von **R** auf **R**. Man stellt sofort fest, dass für die konformen Abbildungen die Gruppeneigenschaften bestehen: die inverse Abbildung einer konformen Abbildung ist wieder konform, und durch Zusammensetzung konformer Abbildungen erhält man wieder konforme Abbildungen. — Ist G ein Teilgebiet einer RIEMANNschen Fläche, so wird für G eine konforme Abbildung im Kleinen auf die folgende Weise eindeutig festgelegt. Diejenigen Umgebungen des bei der Erklärung der RIEMANNschen Fläche verwendeten Systems, die in G enthalten sind bilden ein Umgebungssystem für G, und unter Beibehaltung der Abbildungen $T[U]$ erhalten wir eine konforme Abbildung im Kleinen für G. Wir setzen nun ein für allemal fest, dass die Teilgebiete einer RIEMANNschen Fläche immer in diesem Sinne als RIEMANNsche Flächen aufgefasst werden sollen.

Auf die RIEMANNsche Fläche, wie dieselbe hier erklärt wurde, können wir nun *im Kleinen* alle Sätze der Funktionentheorie anwenden, *im Grossen* aber keineswegs, eben deswegen, weil wir keine Abzählbarkeitseigenschaften vorausgesetzt haben. Wir müssen uns dies bei den folgenden Überlegungen wohl gegenwärtig halten, wenn wir nicht in einen Zirkelschluss verfallen wollen.

Ist **R** eine RIEMANNsche Fläche im Sinne unserer Erklärung, so ist dieselbe im Grossen vorläufig unzugänglich. Wir werden aber in der Folge mit solchen Teilgebieten operieren, welche durch eine Folge von Elementargebieten überdeckt werden können; wir wollen solche Teilgebiete als *übersichtliche Gebiete* bezeichnen. Ein übersichtliches Gebiet kann nach § 3, Hilfssatz 2, trianguliert werden, ist demnach eine RIEMANNsche Fläche im WEYLschen Sinne, auf welche also alle Resultate der Funktionentheorie angewendet werden dürfen.[5]) Für uns kommen hier die fundamentalen Ergebnisse der *Uniformisierungstheorie*[6]) in Betracht. Es ist nicht möglich, auf dieselbe an dieser Stelle genauer einzugehen, es wäre aber auch ganz überflüssig, da beispielsweise im WEYLschen Buche der Leser alles Nötige in musterhafter Darstellung beisammen hat. Es sei uns also gestattet, sofort die Folgerungen anzugeben, die wir aus dem Hauptsatze der Uniformisierungstheorie, dem Grenzkreistheorem, ziehen werden.

Wir wählen auf der RIEMANNschen Fläche **R** einen festen Punkt 0 und bezeichnen mit **A** die Menge der übersichtlichen Gebiete, welche diesen Punkt enthalten. Die wesentliche Leistung des Grenzkreistheorems wird nun darin bestehen, dass es uns die Mittel an die Hand gibt, um die Gebiete von **A** in Bezug auf ihre Grösse miteinander vergleichen zu können. Wir werden nämlich folgendes zeigen. Jedem Gebiete G von **A** kann man in eindeutiger Weise eine positive Zahl $R(G)$, welche auch unendlich sein kann, zuordnen derart, dass für diese Zuordnung die beiden Gesetze gelten:

I. Ist G ein Gebiet von **A**, welches eine volle Umgebung irgendeines Punktes frei lässt, so ist $R(G)$ endlich.

II. Ist $\overline{G}$ ein Gebiet von **A**, für welches $R(\overline{G})$ endlich ist, so ist für jedes Teilgebiet G von $\overline{G}$ die zugeordnete Zahl $R(G)$ ebenfalls endlich und es ist $R(G) \leq R(\overline{G})$ *Das Gleichheitszeichen gilt indessen dann und nur dann, wenn das Teilgebiet G identisch mit $\overline{G}$ ist.*[7])

---

[5]) Es sei hier daran erinnert, dass beim Beweise des Grenzkreistheorems im WEYLschen Buche keine Regularitätsvoraussetzungen über die Einteilungslinien der Triangulierung gemacht werden, im Gegensatze zu den funktionentheoretischen Beweisen, wo derartige Voraussetzungen nötig sind, um die Ausführbarkeit gewisser *Heftungsprozesse* zu sichern. Es würde übrigens keine Schwierigkeit bieten, eine auch bei diesen Beweisen brauchbare Triangulierung herzustellen.

[6]) Wegen der Litteratur verweisen wir den Leser auf die Enzyklopädie-Artikel: L. BIEBERBACH, *Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen,* II C 4, und L. LICHTENSTEIN, *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.* II C 3.

[7]) Gerade dieser Zusatz wird den Beweis ermöglichen.

Es folgt nun ganz allgemein, sobald für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit eine derartige *Gebietsmessung* eingeführt werden kann, die Triangulierbarkeit derselben. Wir wollen diesen einfachen Gedankengang gleich durchführen, und erst dann die noch ausstehenden, ebenfalls sehr einfachen funktionentheoretischen Überlegungen nachholen.

Wir nehmen auf **R** einen JORDANschen Bereich B, welcher den Punkt O nicht enthält, bezeichnen mit $\overline{\mathbf{A}}$ die Menge der Gebiete von **A**, welche mit B keinen Punkt gemein haben, und schliessen dann aus I, dass für jedes Gebiet G von $\overline{\mathbf{A}}$ die Zahl $R(G)$ endlich ist. Wir behaupten weiter: die obere Grenze der Zahlen $R(G)$, für alle Gebiete G in $\overline{\mathbf{A}}$, ist ebenfalls endlich. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir aus $\overline{\mathbf{A}}$ eine Gebietsfolge $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ herausgreifen, für welche $R(G_n) \to \infty$. Durch Vereinigung dieser abzählbar vielen übersichtlichen Gebiete erhalten wir offenbar wieder ein Gebiet G in $\overline{\mathbf{A}}$, und nach II muss $R(G) \geq R(G_n)$ sein für jeden Wert von n. Es könnte also $R(G)$ nicht endlich sein, im Widerspruche mit I. Bezeichnen wir nun die obere Grenze der Zahlen $R(G)$, für alle G in $\overline{\mathbf{A}}$, mit ϱ, so ergibt sich gleich, dass in $\overline{\mathbf{A}}$ ein Maximalgebiet G vorhanden ist, für welches $R(G) = \varrho$ ist. Denn jedenfalls können wir aus $\overline{\mathbf{A}}$ eine Gebietsfolge $G_1, G_2, \ldots$ herausgreifen, so dass $R(G_n) \to \varrho$. Durch Vereinigung dieser abzählbar vielen Gebiete erhalten wir ein Gebiet G von $\overline{\mathbf{A}}$, für welches aus I die Beziehung $R(G_n) \leq R(G)$, aus der Definition von ϱ hingegen $R(G) \leq \varrho$ folgt. Wegen $R(G_n) \to \varrho$ muss hiernach $R(G) = \varrho$ sein.

Dieses Maximalgebiet von $\overline{\mathbf{A}}$ muss nun identisch sein mit dem Gebiete $\overline{\mathbf{R}}$, welches aus **R** durch Entfernung der Punkte des JORDANschen Bereiches B entsteht. Sonst würde G wenigstens einen Randpunkt P in $\overline{\mathbf{R}}$ haben. Indem wir G mit einem in $\overline{\mathbf{R}}$ enthaltenen, den Punkt P enthaltenden Elementargebiete vereinigen, erhalten wir ein Gebiet G^* von $\overline{\mathbf{A}}$, welches das Maximalgebiet G als echtes Teilgebiet enthält. Nach II muss dann $R(G^*) > R(G)$ sein, im Widerspruche mit der Maximaleigenschaft von G. Damit ist erwiesen, dass das Gebiet $\overline{\mathbf{R}}$, welches aus **R** durch Entfernung der Punkte des JORDANschen Bereiches B entsteht, übersichtlich ist, mithin durch eine Folge $E_1, E_2, \ldots$ von Elementargebieten überdeckt werden kann. Nehmen wir noch ein Elementargebiet E_0 hinzu, welches B im Innern enthält, so wird die Folge $E_0, E_1, E_2, \ldots$

nunmehr die ganze Mannigfaltigkeit **R** überdecken, und diese ist also nach Hilfssatz 2, § 3 triangulierbar, wie es behauptet wurde.

Wir müssen noch zeigen, dass aus dem Vorhandensein einer konformen Abbildung im Kleinen die Möglichkeit einer *Gebietsmessung* im obigen Sinne folgt Wir nehmen eine Umgebung U von O, welche eine konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises gestattet; diese Abbildung kann dann auch so gewählt werden, dass dem Punkte O der Nullpunkt entspricht. Durch diese Abbildung wird für den Punkt O eine Ortsuniformisierende erklärt, die nunmehr festgehalten werden soll. Ist G ein übersichtliches Gebiet, welches den Punkt O enthält, so gilt für dasselbe das Grenzkreistheorem. Die Fundamentalabbildung von G erfolgt dann entweder auf die Vollebene, oder auf die endliche Ebene, oder schliesslich auf das Innere eines endlichen Kreises. Dem Gebiete G ordnen wir in den beiden ersteren Fällen den Wert $+\infty$ zu. Im letzteren Falle normieren wir die Abbildung so, dass die Uniformisierende einen Zweig, den Hauptzweig, hat, welcher in O verschwindet und dort eine Ableitung gleich $+1$ nach der Ortsuniformisierenden besitzt. Es ergibt sich dann ein ganz bestimmter Bildkreis, und der Halbmesser desselben wird als die Zahl $R(G)$ erklärt. Es ist dann zu zeigen, dass die Gesetze I und II für diese Zuordnung erfüllt sind. Man erkennt sofort, dass diese Gesetze bloss eine etwas genauere Fassung der Unitätssätze der Uniformisierungstheorie darstellen. Wir wollen die Beweise dennoch durchführen, um die einfachsten funktionentheoretischen Gründe unseres Hauptsatzes beisammen zu haben.

Ad I. Sei P ein solcher Punkt, welcher eine Umgebung $U(P)$ hat, in welcher kein Punkt von G liegt. Nach Hilfssatz 1, § 1 können wir die Punkte O und P durch eine Kette von endlich vielen Elementargebieten verbinden. Indem wir diese Elementargebiete mit G vereinigen, erhalten wir ein übersichtliches Gebiet $\overline{G}$, welches G als Teilgebiet enthält, wobei eine gewisse in $\overline{G}$ enthaltene Umgebung des Punktes P frei von G ist Wir bestimmen nun eine Uniformisierende $\overline{f}$ von $\overline{G}$. Sollte die Fundamentalabbildung von $\overline{G}$ auf die Vollebene erfolgen, so können und wollen wir es so einrichten, dass $\overline{f}$ gerade im Punkte P unendlich wird Wir gehen nun von einem Zweige von $\overline{f}$ im Punkte P aus, und beschränken die analytischen Fortsetzungen dieses Zweiges auf das Teilgebiet G von $\overline{G}$. Ist dann f eine Uniformisierende für G, so entsteht durch diese analytische Fortsetzung eine eindeutige analytische Funktion $\bar{f}(f)$, die alle Werte auslässt, welche $\bar{f}$ in der von G freien Umgebung des Punktes P annimmt. Bedeutet also α einen der Werte von $\bar{f}$ in P, so wird die Funktion

$$\frac{1}{\bar{f}(f)-\alpha}$$

beschränkt sein (falls α unendlich ist, kann man die Funktion $\bar{f}(f)$ selbst betrachten). Wenn nun die Fundamentalabbildung von G nicht auf das Innere eines endlichen Kreises erfolgen würde, so wäre diese Funktion regulär für jeden endlichen Wert von f, also nach dem Liouvilleschen Satze konstant, was widersinnig ist.

Ad II. Soviel sieht man sofort, dass die Fundamentalabbildung von G nicht auf die Vollebene erfolgen kann. In diesem Falle wäre nämlich G geschlossen, könnte also keinen Randpunkt haben, und müsste mit $\bar{G}$ identisch sein, während nach Voraussetzung $R(\bar{G})$ endlich ist.

Es seien nun f und $\bar{f}$ die im Punkte O normierten Uniformisierenden der Gebiete G und $\bar{G}$, und sei K das Bildgebiet von G in der komplexen f-Ebene. Dabei ist also K entweder die ganze endliche Ebene, oder aber das Innere eines Kreises um den Nullpunkt mit dem endlichen Radius $R(G)$. Wir beschränken wieder die analytischen Fortsetzungen des Hauptzweiges von $\bar{f}$ auf das Teilgebiet G von $\bar{G}$, und erhalten eine in K reguläre eindeutige Funktion $\bar{f}(f)$. Da diese in K dem absoluten Betrage nach kleiner als die nach Voraussetzung endliche Zahl $R(\bar{G})$ bleibt, so kann K nicht die ganze endliche Ebene sein, denn aus dem Liouvilleschen Satze würde dann folgen, dass $\bar{f}(f)$ konstant ist, was nicht der Fall sein kann. Die Zahl $R(G)$ ist hiernach endlich. Da nun $\bar{f}(f)$ im Kreise K absolut kleiner als $R(\bar{G})$ bleibt, im Nullpunkte verschwindet und dort die Ableitung $+1$ hat, so folgt aus dem Schwarzschen Lemma, dass $R(G) \leqq R(\bar{G})$ ist, mit dem Zusatze, dass das Gleichheitszeichen dann und nur dann gelten kann, wenn $\bar{f}(f) \equiv f$ ist. In diesem Falle schliessen wir wie folgt weiter. Da $\bar{f}(f) \equiv f$ sein soll, so nimmt $\bar{f}(f)$ in K alle Werte mit einem absoluten Betrage kleiner als $R(G) = R(\bar{G})$ an. Ist nun G ein echtes Teilgebiet von $\bar{G}$, so gibt es wenigstens einen Punkt P in $\bar{G}$ welcher nicht in G enthalten ist. Bedeutet α einen den Werte von $\bar{f}$ in P, so ist $|\alpha| < R(\bar{G})$, und $\bar{f}$ nimmt in G den Wert α

nicht an. Es kann also das Gleichheitszeichen nicht gelten, wenn G echtes Teilgebiet von $\overline{G}$ ist.[8])

Damit sind die Gesetze I und II verifiziert, und unser Beweis ist zu Ende.

Szeged, den 10. Jänner 1925.

---

[8]) Die Voraussetzung, dass $R(\overline{G})$ endlich ist, ist wesentlich. Sei nämlich $\overline{G}$ die ganze endliche Ebene, und G entstehe durch Punktierung von $\overline{G}$ im Nullpunkte. Dann ist G echtes Teilgebiet von $\overline{G}$, und für beide Gebiete erfolgt die Fundamentalabbildung auf die ganze endliche Ebene. Dieser Umstand machte auch die Vorsichtsmassregel der Einführung von B beim Beweise des Hauptsatzes nötig.