Durchschnitt und Schnitt von Homotopieketten.

Von **Kurt Reidemeister** in Marburg a. L.

Mit Hilfe des Durchschnitts lassen sich neuartige Invarianten aus den Homotopieketten von Mannigfaltigkeiten bilden, zu denen im Folgenden der Zugang erschlossen werden soll. Die Schwierigkeit, die dabei zu überwinden ist, beruht auf der Unmöglichkeit, den Durchschnitt für Ketten von Überdeckungen analog wie bei gewöhnlichen Ketten oder wie bei Homotopieketten zu erklären. Es läßt sich aber aus dem Durchschnitt ein gleichwertiger Prozeß σ und ein abgeschwächter Prozeß τ für Homotopieketten erklären, der auch in den Überdeckungen die zu den Rechtsidealen des Gruppenringes der Fundamentalgruppe gehören, also in allen topologisch wesentlichen Überdeckungen seinen Sinn behält. Insbesondere lassen sich allgemeine Schnitt- und Verschlingungszahlen angeben, welche die bisher bekannten, die Verschlingungszahlen für Homologiegruppen und die Schnittklassensysteme für Kurven auf Flächen als Spezialfälle enthalten.

§ 1. Es sei zunächst an die Grundtatsachen erinnert.[1]) Wir betrachten zwei duale universelle Überlagerungskomplexe A, $\widetilde{\mathrm{A}}$ derselben n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n und verstehen unter Δ den durch A, $\widetilde{\mathrm{A}}$ festgelegten Durchschnittskomplex, der also ebenfalls M^n universell überlagert. Mit

$$\mathfrak{a}_i^d,\ \widetilde{\mathfrak{a}}_i^{n-d}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha^d;\ d=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

seien die orientierten Zellen eines Fundamentalbereichs von A bzw. $\widetilde{\mathrm{A}}$ bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Decktransformationen bezeichnet. Durchlaufen die Elemente g_{di} für jedes d und i die Gruppe $\mathfrak{G}$ unabhängig voneinander, so erhalten wir in

$$\pm g_{di}\mathfrak{a}_i^d,\ \pm g_{di}\widetilde{\mathfrak{a}}_i^{n-d},$$

die sämtlichen orientierten Zellen von A und $\widetilde{\mathrm{A}}$ genau einmal.

Zur bequemen Schreibung der Ketten von A, $\widetilde{\mathrm{A}}$ führen wir den Gruppenring $\mathfrak{X}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein; er besteht aus den Elementen

$$x_i=\sum_k \chi_{ik}\, g_k,$$

[1]) Vgl. hierzu K. Reidemeister, Topologie der Polyeder, Leipzig 1938, § 17.

wo g_k $(k=1, 2, \ldots,)$ die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft und die χ_{ik} ganze rationale Zahlen sind, von denen bei festem i nur endlich viele von Null verschieden sind. Dann erhalten wir in

$$x^d = \sum_{i=1}^{\alpha^d} x_i \mathfrak{a}_i^d, \quad \tilde{x}^{n-d} = \sum_{i=1}^{\alpha^d} x_i \tilde{\mathfrak{a}}_i^{n-d} \, (d=0, 1, \ldots, n)$$

die Ketten von A und $\tilde{A}$, die wir auch Homotopieketten von M^n nennen. Unter $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{X}\,\tilde{\mathfrak{x}}$ werde die Gesamtheit der Ketten von A, $\tilde{A}$ verstanden. Unter $x\,\mathfrak{x}^d$ wird die Kette

$$\sum x x_i \mathfrak{a}_i^d$$

verstanden. Offenbar ist

$$x(\mathfrak{x}_1^d + \mathfrak{x}_2^d) = x\mathfrak{x}_1^d + x\mathfrak{x}_2^d.$$

Die Ketten bilden daher eine Abelsche Gruppe mit der Addition als Verknüpfung und mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{X}$. Jede Kette $\mathfrak{x}^d$, $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d}$ von größerer Dimension als Null besitzt eine Randkette

$$\dot{\mathfrak{x}}^d = \sum x_i \dot{\mathfrak{a}}_i^d, \qquad \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-d} = \sum x_i \dot{\tilde{\mathfrak{a}}}_i^{n-d},$$

welche durch die Randketten der orientierten Zellen

$$\dot{\mathfrak{a}}_i^d = \sum_j r_{ij}^d \mathfrak{a}_j^{d-1}, \qquad \dot{\tilde{\mathfrak{a}}}_i^{n-d} = \sum_k \tilde{r}_{ik}^{n-d} \tilde{\mathfrak{a}}_k^{n-d-1}$$

festgelegt ist. Offenbar ist

$$(\sum x_k \mathfrak{x}_k^d)^{\cdot} = \sum x_k \dot{\mathfrak{x}}_k^d.$$

Eine Kette, deren Randkette die Nullkette ist, heißt geschlossen, eine Kette, die Randkette einer anderen ist, berandend; zwei geschlossene Ketten sind homolog, wenn ihre Differenz eine berandende Kette ist. Eine berandende Kette ist stets geschlossen.

Der Durchschnitt von zwei Zellen $g\mathfrak{a}_i^d$, $\tilde{g}\,\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}$, in Zeichen

$$g\,\mathfrak{a}_i^d \cdot \tilde{g}\,\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}, \tag{1}$$

ist entweder leer oder eine orientierte Zelle des Komplexes Δ, und zwar erhalten wir in der Gesamtheit der Durchschnitte (1) bis auf die Orientierung jede Zelle von Δ genau einmal. Es gilt dann die folgende Regel: es ist

$$g' g\,\mathfrak{a}_i^d \cdot g'\,\tilde{g}\,\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f} = g'(g\,\mathfrak{a}_i^d \cdot \tilde{g}\,\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}); \tag{2}$$

zu jedem Zellenpaar $\mathfrak{a}_i^d$, $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}$ gibt es höchstens ein Gruppenelement $g_{ij}^{d,\, n-d+f}$, für welches

$$\mathfrak{a}_i^d \cdot g_{ij}^{d,\, n-d+f} \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f} \neq 0 \tag{3}$$

ist. Wir finden also in den von Null verschiedenen Elementen (3) einen Fundamentalbereich von Δ gegenüber der Gruppe von Decktransformationen.

Der Durchschnitt der Ketten

$$\mathfrak{x}^d = \sum \chi_{ik} g_k \mathfrak{a}_i^d, \quad \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f} = \sum \widetilde{\chi}_{jl} g_l \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}$$

wird durch

$$\mathfrak{x}^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f} = \sum \chi_{ik} \widetilde{\chi}_{jl} \left(g_k \mathfrak{a}_i^d \cdot g_l \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\right)$$

erklärt. Diese Multiplikation genügt den beiden distributiven Gesetzen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{x}_1^d + \mathfrak{x}_2^d) \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f} &= \mathfrak{x}_1^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f} + \mathfrak{x}_2^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f} \\ \mathfrak{x}^d \cdot (\widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f} + \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}) &= \mathfrak{x}^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f} + \mathfrak{x}^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Randkette des Durchschnitts ist

$$(\mathfrak{x}^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})^{\cdot} = \sum \chi_{ik} \widetilde{\chi}_{jl} \left(g_k \mathfrak{a}_i^d \cdot g_l \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\right)^{\cdot},$$

wobei

$$(g_k \mathfrak{a}_i^d \cdot g_l \widetilde{\mathfrak{a}}^{n-d+f})^{\cdot} = g_k \mathfrak{a}_i^d \cdot (g_l \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f})^{\cdot} + (-1)^{n-d+f} (g_k \mathfrak{a}_i^d)^{\cdot} \cdot g_l \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}$$

ist. Es ist also allgemein

$$(\mathfrak{x}^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})^{\cdot} = \mathfrak{x}^d \cdot \dot{\widetilde{\mathfrak{x}}}^{n-d+f} + (-1)^{n-d+f} \dot{\mathfrak{x}}^d \cdot \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}. \tag{5}$$

Hieraus ergeben sich leicht die beiden wichtigen Sätze:

Der Durchschnitt geschlossener Ketten ist geschlossen.

Der Durchschnitt einer geschlossenen und einer berandenden Kette ist berandend.

Die Gesamtheit der Ketten von Δ, die also zugleich Homotopieketten von M^n sind, werde mit $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}^*$ bezeichnet.

§ 2. Um die Beziehungen zwischen Durchschnitt und Decktransformationen übersichtlich machen zu können, müssen wir ein weiteres algebraisches Hilfsmittel heranziehen. Unter h_k $(k = 1, 2, \ldots)$ verstehen wir die Elemente einer zu $\mathfrak{G}$ einstufig isomorphen Gruppe $\mathfrak{H}$; die Numerierung vermittle einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$; es ist also stets gleichzeitig

$$g_i g_k = g_l \text{ und } h_i h_k = h_l$$

Unter $\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}$ werde das direkte Produkt der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ verstanden. $\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}$ bestehe m. a. W. aus den Elementen $g_i h_k$ mit der Multiplikationsregel

$$(g_i h_k)\ (g_j h_l) = (g_i g_j)\ (h_k h_l). \tag{6}$$

Ist $g_1 = h_1$ das Einheitselement, so schreiben wir statt $g_1 h_k$ auch h_k und statt $g_i h_1$ auch g_i; die Elemente g_i sind dann mit sämtlichen Elementen h_k vertauschbar.

Unter $\mathfrak{Y}$ verstehen wir den Gruppenring von $\mathfrak{G}\,\mathfrak{H}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten; die Elemente y von $\mathfrak{Y}$ sind also

$$y = \sum \chi_{ik}\, g_i\, h_k,$$

wobei nur endlich viele χ_{ik} von Null verschieden sind; $\mathfrak{Y}$ enthält den Gruppenring $\mathfrak{X}$, und jedes y läßt sich eindeutig als Summe

$$y = \sum x_k\, h_k$$

mit x_k aus $\mathfrak{X}$ schreiben; unter $\mathfrak{X}'$ werde der Gruppenring von $\mathfrak{H}$ verstanden, unter $\mathfrak{X}''$ der Gruppenring der Gruppe mit den Elementen $g_i h_i$; beide sind in $\mathfrak{Y}$ enthalten und zu $\mathfrak{X}$ einstufig isomorph.

Zu $\mathfrak{Y}$ gehört eine bestimmte Überdeckung des Komplexes Δ, deren Ketten $\mathfrak{y}$ in der folgenden Weise erklärt sind: sind

$$\overset{*}{\mathfrak{a}}{}_i^{d} \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, \overset{*}{\alpha}{}^{d};\ d = 0,\ 1, \ldots n)$$

die orientierten Zellen eines Fundamentalbereiches von Δ, so ist die Kette $\mathfrak{y}^d$ durch

$$\mathfrak{y}^d = \sum_{i=1}^{\overset{*}{\alpha}{}^{d}} y_i\, \overset{*}{\mathfrak{a}}{}_i^{d}$$

gegeben.

Unter $y\,\mathfrak{y}^d$ verstehen wir die Kette

$$\sum y\, y_i\, \overset{*}{\mathfrak{a}}{}_i^{d}$$

und unter $\mathfrak{y}^d x'$ mit x' aus $\mathfrak{X}'$ die Kette

$$\sum y_i\, x'\, \overset{*}{\mathfrak{a}}{}_i^{d}.$$

Es ist

$$y\,(\mathfrak{y}_1^d + \mathfrak{y}_2^d) = y\,\mathfrak{y}_1^d + y\,\mathfrak{y}_2^d$$

und

$$(\mathfrak{y}_1^d + \mathfrak{y}_2^d)\, x' = \mathfrak{y}_1^d x' + \mathfrak{y}_2^d x'.$$

Die Ketten bilden daher eine Abelsche Gruppe mit den zwei Operatorenbereichen $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}'$.

Die Randkette von $\mathfrak{y}^d$ ist

$$\dot{\mathfrak{y}}^d = \sum y_i\, \dot{\overset{*}{\mathfrak{a}}}{}_i^{d} \tag{7}$$

mit

$$\dot{\overset{*}{\mathfrak{a}}}{}_i^{d} = \sum_j \overset{*}{r}{}_{ij}^{d}\, \overset{*}{\mathfrak{a}}{}_j^{d-1}. \tag{8}$$

Darin sind $\dot{\mathfrak{a}}_i^{*d}$ die Randketten von $\mathfrak{a}_i^{*d}$, so wie sie in § 1 erklärt wurden; neu ist, daß r_{ij}^{*d} aus $\mathfrak{X}$ zugleich in $\mathfrak{Y}$ liegt und daher $\dot{\mathfrak{y}}^d$ aus (7), (8) und den Multiplikationsregeln in $\mathfrak{Y}$ erklärt ist.

Offenbar ist

$$\sum (y_k \mathfrak{y}_k^d)^{\cdot} = \sum y_k \dot{\mathfrak{y}}_k^d$$

und weil die Elemente x' aus $\mathfrak{X}'$ mit den Elementen r_{ij}^{*d} aus $\mathfrak{X}$ vertauschbar sind, ist auch

$$(\sum \mathfrak{y}_k^d x_k')^{\cdot} = \sum \dot{\mathfrak{y}}_k^d x_k'.$$

Ist

$$y_i = \sum_k x_{ik} h_k, \qquad \mathfrak{x}_k^{*d} = \sum_i x_{ik} \mathfrak{a}_i^{*d},$$

so läßt sich

$$\mathfrak{y}^d = \sum y_i \mathfrak{a}_i^{*d} = \sum \mathfrak{x}_k^{*d} h_k$$

setzen. Darin sind $\mathfrak{x}_k^{*d}$ Ketten aus $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}^*$; die Komponenten $\mathfrak{x}_k^{*d}$ sind $\mathfrak{y}^d$ in eindeutiger Weise zugeordnet, und es ist

(9) $$\dot{\mathfrak{y}}^d = \sum \dot{\mathfrak{x}}_k^{*d} h_k.$$

Die Gesamtheit der Ketten $\mathfrak{y}^d$ $(d = 0, 1, \ldots, n)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{x}^*$. Die Begriffe geschlossen, berandend und homolog übertragen sich ohne weiteres.

Unter dem *Schnitt* der Kette $\mathfrak{x}^d$ aus $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}$ mit der Kette $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+}$ aus $\mathfrak{X}\,\tilde{\mathfrak{x}}$ werde nun die Kette $\mathfrak{y}^f = \sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})$ aus $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{x}^*$ verstanden, welche durch

(10) $$\sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sum_k (\mathfrak{x}^d \cdot g_k \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) h_k$$

erklärt ist. Darin ist $\mathfrak{x}^d \cdot g_k \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}$ der in § 1 erklärte Durchschnitt der Ketten $\mathfrak{x}^d$ und $g_k \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}$. Die Summe enthält wegen (3) nur endlich viele Glieder, die von der Nullkette verschieden sind. Aus (4) folgen die beiden distributiven Gesetze auch für den Schnitt, nämlich

(11) $$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{x}_1^d + \mathfrak{x}_2^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) &= \sigma(\mathfrak{x}_1^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) + \sigma(\mathfrak{x}_2^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\\ \sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f} + \tilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}) &= \sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}) + \sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}).\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{x}^d, g\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) &= \sum (\mathfrak{x}^d \cdot g_k g\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) h_k\\ &= (\sum (\mathfrak{x}^d \cdot g_k g\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) h_k h) h^{-1},\end{aligned}$$

wenn h das g isomorph entsprechende Element ist, und daher

$$(12)\qquad \sigma(\mathfrak{x}^d, g\, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sigma(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, h^{-1}.$$

Andrerseits ist nach (2)

$$\begin{aligned}\sigma(g\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) &= \sum (g\mathfrak{x}^d \cdot g_k \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, h_k\\ &= \sum g(\mathfrak{x}^d \cdot g^{-1} g_k \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, h_k\\ &= \sum g\, h\, (\mathfrak{x}^d \cdot g^{-1} g_k \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, h^{-1} h_k,\end{aligned}$$

also

$$(13)\qquad \sigma(g\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = g\, h\, \sigma(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}).$$

Verstehen wir für jedes Gruppenringelement

$$x = \sum \chi_i g_i$$

unter $\overline{x}$ das Element

$$\overline{x} = \sum \chi_i g_i^{-1},$$

unter x', x'' das isomorph entsprechende Element aus $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$

$$x' = \sum \chi_i h_i, \qquad x'' = \sum \chi_i g_i h_i,$$

so folgt aus (11), (12) und (13) die allgemeine Rechenregel

$$(14)\qquad \sigma(x_1 \mathfrak{x}^d, x_2 \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = x_1''\, \sigma(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, \overline{x}_2'.$$

In der Tat ist nach den distributiven Gesetzen

$$\sigma(x_1 \mathfrak{x}^d, x_2 \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sum \chi_{1i} \chi_{2k}\, \sigma(g_i \mathfrak{x}^d, g_k \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f});$$

unter Verwendung von (12) und (13) folgt

$$\begin{aligned}\sigma(x_1 \mathfrak{x}^d, x_2 \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) &= \sum \chi_{1i} \chi_{2k}\, g_i h_i\, \sigma(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, h_k^{-1}\\ &= (\sum_i \chi_{1i} g_i h_i)\, \sigma(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})\, (\sum_k \chi_{2k} h_k^{-1})\end{aligned}$$

und damit die behauptete Gleichung (14).

Die Rechenregeln (11) und (14) erlauben den Schnitt einfach zu berechnen, wenn der Schnitt für die orientierten Zellen eines Fundamentalbereichs von A mit denjenigen eines Fundamentalbereichs von $\widetilde{\mathrm{A}}$ bekannt ist. Denn ist

$$\mathfrak{x}^d = \sum x_{1i}\, \mathfrak{a}_i^d \qquad \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f} = \sum x_{2j}\, \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f},$$

so ist

$$(15)\qquad \begin{aligned}\sigma(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) &= \sum \sigma(x_{1i}\mathfrak{a}_i^d, x_{2j} \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f})\\ &= \sum x_{1i}''\, \sigma(\mathfrak{a}_i^d, \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f})\, \overline{x}_{2i}';\end{aligned}$$

unter Beachtung von (3) ergibt sich

$$(16)\qquad \sigma(\mathfrak{a}_i^d, \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}) = \mathfrak{a}_i^d \cdot g_{ij}^{d,\, n-d+f}\, \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\, h_{ij}^{d,\, n-d+f},$$

wenn $h_{ij}^{d,\, n-d+f}$ das $g_{ij}^{d,\, n-d+f}$ isomorph entsprechende Element ist.

Für die Randkette des Schnittes folgt aus (9)

$$\dot{\sigma}(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sum (\mathfrak{x}^d \cdot g_k \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})^{\cdot} h_k$$

und aus (5) weiter

$$\dot{\sigma}(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sum \mathfrak{x}^d \cdot g_k \dot{\widetilde{\mathfrak{x}}}^{n-d+f} h_k + (-1)^{n-d+f} (\dot{\mathfrak{x}}^d \cdot g_k \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) h$$

also nach der Definition von σ

$$\dot{\sigma}(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sigma(\mathfrak{x}^d, \dot{\widetilde{\mathfrak{x}}}^{n-d+f}) + (-1)^{n-d+f} \sigma(\dot{\mathfrak{x}}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}). \tag{17}$$

Hieraus ergeben sich ganz analog wie für den Durchschnitt die beiden folgenden Sätze:

Der Schnitt zweier geschlossenen Ketten ist geschlossen.

Der Schnitt zweier geschlossenen Ketten, von denen eine überdies berandend ist, ist berandend.

§ 3. Wir wenden uns nun zu der Betrachtung des Schnittes für die Ketten von Überdeckungen, die zu den Rechtsidealen des Gruppenringes gehören. Eine Menge $\mathfrak{U}$ von Elementen u aus $\mathfrak{X}$ ist ein Rechtsideal, wenn $\mathfrak{U}$ mit u_1, u_2 auch die Summe $u_1 + u_2$ und mit u auch $u\,x$ mit beliebigem x aus $\mathfrak{X}$ enthält. Unter der Gesamtheit $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ der Ketten der zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Überdeckung von M^n verstehen wir die Ketten

$$\mathfrak{u}^d = \sum u_i\, \mathfrak{a}_i^d \qquad \text{(mit } u_i \text{ aus } \mathfrak{U}).$$

Die Aussonderung dieser Ketten ist von der Wahl des Fundamentalbereichs unabhängig, weil $\mathfrak{U}$ ein Rechtsideal ist. Mit $\mathfrak{u}_1^d$, $\mathfrak{u}_2^d$ gehört auch $\mathfrak{u}_1^d + \mathfrak{u}_2^d$ zu $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ und mit $\mathfrak{u}^d$ auch $u\,\mathfrak{u}^d$. Die Ketten $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ bilden also eine Abelsche Gruppe mit $\mathfrak{U}$ als Operatorenbereich. Ist $\mathfrak{U}$ ein Ideal, so gehört mit u auch zu $x\,u$ zu $\mathfrak{U}$, und $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ besitzt $\mathfrak{X}$ selbst als Operatorenbereich. Mit $\mathfrak{u}^d$ gehört auch

$$\dot{\mathfrak{u}}^d = \sum u_i\, r_{ij}^d\, \mathfrak{a}_j^{d-1}$$

zu $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, weil $u^i r_{ij}^d$ zu $\mathfrak{U}$ gehört. Der Begriff „geschlossen" wird wie in § 1 erklärt; dagegen werden die Begriffe „berandend" und „homolog" verschärft zu „in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ berandend" und „in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ homolog". Die Kette $\mathfrak{u}^d$ heißt in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ berandend, wenn es eine Kette $\mathfrak{u}^{d+1}$ mit $\dot{\mathfrak{u}}^{d+1} = \mathfrak{u}^d$ gibt. Zwei Ketten $\mathfrak{u}_1^d$, $\mathfrak{u}_2^d$ heißen in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ homolog, wenn ihre Differenz in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ berandend ist. Analog werden die Ketten $\mathfrak{U}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ der zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Überdeckung von M^n erklärt.

In einer etwas anderen, aber ähnlichen Weise können wir aus $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{x}^*$ die Ketten von den Überdeckungen aussondern. Es sei $\mathfrak{W}$ eine Teilmenge von Elementen w aus $\mathfrak{Y}$, welche mit

$$w_1,\ w_2 \text{ auch } w_1 + w_2 \tag{18}$$

enthält und

(19) mit w auch $w\,x$

für beliebiges x aus $\mathfrak{X}$. Unter $\mathfrak{W}\,\mathfrak{x}^*$ verstehen wir alsdann die Ketten

$$\mathfrak{w}^d = \sum w_i\, \mathfrak{a}^{*d}_i$$

mit w_i aus $\mathfrak{W}$. Diese Erklärung ist wieder von der Wahl des Fundamentalbereichs unabhängig. Die Begriffe in $\mathfrak{W}\,\mathfrak{x}^*$ berandend und in $\mathfrak{W}\,\mathfrak{x}^*$ homolog lassen sich ohne weiteres übertragen.

Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ zwei Rechtsideale von $\mathfrak{X}$, so werde unter $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{V}}'$ die Menge der Elemente

$$\sum u_i''\,\overline{v}_j' \qquad (u_i \text{ aus } \mathfrak{U},\ v_j \text{ aus } \mathfrak{V})$$

aus $\mathfrak{Y}$ verstanden. Sie bilden eine Teilmenge $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{Y}$; denn (18) ist offenbar erfüllt und (19) folgt, weil nach (6)

$$\sum (u_i''\,\overline{v}_j')\,g = \sum u_i''\,g\,\overline{v}_j'$$

und

$$\sum u_i''\,g\,\overline{v}_j' = \sum u_i''\,g\,h \cdot h^{-1}\,\overline{v}_j' = \sum (u_i\,g)'' \cdot (\overline{v_j g})'$$

ist und $u_i g$, $v_j g$ zu $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ gehören.

Sind $\mathfrak{u}^d$, $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}$ *zwei Ketten aus* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *bzw.* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$, *so liegt ihr Schnitt in* $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{V}}'\mathfrak{x}^*$. Denn es ist

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}) &= \sigma\left(\sum u_i\,\mathfrak{a}^d_i,\ \sum v_j\,\widetilde{\mathfrak{a}}^{n-d+f}_j\right) = \sum u_i''\,\sigma(\mathfrak{a}^d_i, \widetilde{\mathfrak{a}}^{n-d+f}_j)\,\overline{v}_j' \\ &= \sum u_i'' h^{d\,n-d+f}_{ij}\,\overline{v}_j'\,(\mathfrak{a}^d_i \cdot g^{d\,n-d+f}_{ij}\,\widetilde{\mathfrak{a}}^{n-d+f}_j).\end{aligned}$$

Der zweite Satz am Ende von § 2 läßt sich leicht zu dem folgenden verschärfen:

Ist $\mathfrak{u}^d$ *in* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *berandend und* $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}$ *geschlossen oder ist* $\mathfrak{u}^d$ *geschlossen und* $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}$ *in* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *berandend, so ist* $\sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f})$ *in* $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{V}}'$ *berandend.* Denn ist z. B. $\dot{\mathfrak{u}}^{d+1} = \mathfrak{u}^d$, so ist

$$\dot{\sigma}(\mathfrak{u}^{d+1}, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}) = (-1)^{n-d+f}\,\sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f})$$

und $\sigma(\mathfrak{u}^{d+1}, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f})$ gehört $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{V}}'\,\mathfrak{x}^*$ an.

Folglich *ordnet der Schnitt je zwei Klassen in* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *geschlossener homologer Ketten eine Klasse in* $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{V}}'\,\mathfrak{x}^*$ *geschlossener homologer Ketten zu.*

§ 4. Aus einem Rechtsideal $\mathfrak{U}$ läßt sich auf eine zweite Weise eine Überdeckung, die Überdeckung $\mathfrak{X}/\mathfrak{U}$ erklären, deren Ketten aus den Klassen modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ kongruenter Ketten $\mathfrak{x}^d$ bestehen. Zwei Ketten $\mathfrak{x}^d_1$, $\mathfrak{x}^d_2$ heißen kongruent modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, in Zeichen

$$\mathfrak{x}_1^d = \mathfrak{x}_2^d \quad \bmod \mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$$

wenn $\mathfrak{x}_1^d - \mathfrak{x}_2^d$ in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ liegt. Eine Kette $\mathfrak{x}^d$ heißt geschlossen modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, wenn ihre Randkette $\dot{\mathfrak{x}}^d$ in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ liegt. Eine Kette heißt berandend modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, wenn sie zu einer berandenden Kette (im Sinne von § 1 also) kongruent modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ ist; schließlich heißen zwei Ketten $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ homolog modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, wenn ihre Differenz berandend modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ ist.

In analoger Weise erklären wir die Kongruenz modulo $\mathfrak{W}\,\mathfrak{x}^*$ für Ketten aus $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{x}^*$.

Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ zwei Rechtsideale von $\mathfrak{X}$, so werde unter $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}'$ die Menge der Elemente

$$\sum u_i''\,\overline{x}_{1i}' + \sum x_{2j}''\,\overline{v}_j' \quad (\text{mit } u_i \text{ aus } \mathfrak{U} \text{ und } v_j \text{ aus } \mathfrak{V})$$

aus $\mathfrak{Y}$ verstanden. Man bestätigt wie in § 3, daß $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}'$ die Eigenschaften (18) und (19) einer Menge $\mathfrak{W}$ hat.

Sind $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ *zwei modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *kongruente Ketten aus* $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}$, $\widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}$, $\widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}$ *zwei modulo* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *kongruente Ketten aus* $\mathfrak{X}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$, *so sind die Schnitte* $\sigma(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f})$ *und* $\sigma(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f})$ *modulo* $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}'$ *kongruente Ketten von* $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{x}^*$.

Denn ist

$$\mathfrak{x}_2^d = \mathfrak{x}_1^d + \mathfrak{u}^d \qquad \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f} = \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f} + \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f},$$

so ist

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}) &= \sigma(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}) + \sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}) \\ &\quad + \sigma(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}) + \sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}).\end{aligned}$$

Nun liegt

$$\sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}) \text{ in } \mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}'\,\mathfrak{x}^*,\ \sigma(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}) \text{ in } \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}'\,\mathfrak{x}^*,$$

$$\sigma(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}) \text{ in } \mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{V}}'\,\mathfrak{x}^*,$$

also sowohl in $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}'\,\mathfrak{x}^*$ wie $\mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}'\,\mathfrak{x}^*$, und daher ist tatsächlich

$$\sigma(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}) = \sigma(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}) \text{ modulo } (\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}')\,\mathfrak{x}^*.$$

Ist $\mathfrak{x}^d$ *modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *geschlossen,* $\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}$ *modulo* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *geschlossen, so ist der Schnitt* $\sigma(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})$ *modulo* $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}'$ *geschlossen.*

Denn es ist

$$\dot{\sigma}(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sigma(\mathfrak{x}^d, \dot{\widetilde{\mathfrak{x}}}^{n-d+f}) + (-1)^{n-d+f}\,\sigma(\dot{\mathfrak{x}}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}),$$

und nach dem soeben Bewiesenen liegen die beiden Summanden der rechten Seite dieser Gleichung in $(\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{V}}')\,\mathfrak{x}^*$.

Ist $\mathfrak{x}^d$ *modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *berandend und* $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}$ *modulo* $\mathfrak{B}\,\tilde{\mathfrak{x}}$ *geschlossen, oder ist* $\mathfrak{x}^d$ *modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *geschlossen und* $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}$ *modulo* $\mathfrak{B}\,\tilde{\mathfrak{x}}$ *berandend, so ist der Schnitt* $\sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})$ *modulo* $\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{B}}'$ *berandend.*

Ist nämlich etwa $\mathfrak{x}^d = \dot{\mathfrak{x}}^{d+1} + \mathfrak{u}^d$, so ist

$$\sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sigma(\dot{\mathfrak{x}}^{d+1}, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) \bmod \mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{B}}';$$

andrerseits ist

$$\dot{\sigma}(\mathfrak{x}^{d+1}, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sigma(\mathfrak{x}^{d+1}, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-d+f}) + (-1)^{n-d+f}\,\sigma(\dot{\mathfrak{x}}^{d+1}, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f});$$

und da der erste Summand auf der rechten Seite dieser Gleichung in $(\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{B}}')\,\mathfrak{x}^*$ liegt, ist

$$\sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = (-1)^{n-d+f}\,\dot{\sigma}(\mathfrak{x}^{d+1}, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) \bmod \mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{B}}'.$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

Sind $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ *geschlossen und homolog modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *und* $\tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}$, $\tilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}$ *geschlossen und homolog modulo* $\mathfrak{B}\,\tilde{\mathfrak{x}}$, *so sind die Schnitte* $\sigma(\mathfrak{x}_1^d, \tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f})$ *und* $\sigma(\mathfrak{x}_2^d, \tilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f})$ *geschlossen und homolog modulo* $(\mathfrak{U}''\,\overline{\mathfrak{X}}' + \mathfrak{X}''\,\overline{\mathfrak{B}}')\,\mathfrak{x}^*$.

§ 5. Es ist zweckmäßig, aus dem Schnitt $\sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})$ einen vereinfachten Schnitt $\tau(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})$ zu bilden, indem man die Kettengruppe $\mathfrak{Y}\,\mathfrak{x}^*$ homomorph auf eine Kettengruppe $\mathfrak{X}'\,\mathfrak{p}^*$ abbildet. Es sei M_Δ^n der Zerlegungskomplex der Mannigfaltigkeit M^n, welche von dem Komplex Δ überlagert wird. Dann entspricht jeder Homotopiekette $\mathfrak{x}^{*d}$ von M^n aus $\mathfrak{X}\,\mathfrak{x}^*$ eine wohlbestimmte Homologiekette $\mathfrak{p}^{*d}$ aus M_Δ^n

$$(\mathfrak{x}^{*d})' = \mathfrak{p}^{*d}.$$

Sind $\pm\,\mathfrak{c}_i^{*d}$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^{*d})$ die orientierten Zellen der Dimension d von M_Δ^n, so verstehen wir unter $\mathfrak{X}'\,\mathfrak{p}^*$ die Gesamtheit der Ketten

$$\mathfrak{q}^{*d} = \sum_{i=1}^{\alpha^{*d}} x_i'\,\mathfrak{c}_i^{*d} \quad (\text{mit } x_i' \text{ aus } \mathfrak{X}').$$

Es sei

$$x'\,\mathfrak{q}^{*d} = \sum x'\,x_i'\,\mathfrak{c}_i^{*d} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}^{*d}\,x' = \sum x_i'\,x'\,\mathfrak{c}_i^{*d};$$

dann ist

$$x'\,(\mathfrak{q}_1^{*d} + \mathfrak{q}_2^{*d}) = x'\,\mathfrak{q}_1^{*d} + x'\,\mathfrak{q}_2^{*d}$$

und

$$(\mathfrak{q}_1^{*d} + \mathfrak{q}_2^{*d})\,x' = \mathfrak{q}_1^{*d}\,x' + \mathfrak{q}_2^{*d}\,x'$$

Die Ketten bilden also eine Abelsche Gruppe mit dem doppelten Operatorenbereich $\mathfrak{X}'$. Ist

$$x_i' = \sum_k \chi_{ik} h_k ,$$

so sei

$$\mathfrak{p}_k^{*d} = \sum_i \chi_{ik} \mathfrak{c}_i^{*d};$$

alsdann ist

$$\mathfrak{q}^{*d} = \sum \mathfrak{p}_k^{*d} h_k. \tag{20}$$

Hierin sind $\mathfrak{p}_k^{*d}$ Homologieketten von M_Δ^n; eine Kette $\mathfrak{q}^{*d}$ läßt sich nur auf eine Weise in die Gestalt (20) setzen.

Der Kette

$$\mathfrak{y}^d = \sum \mathfrak{x}_k^{*d} h_k \text{ werde nun die Kette } (\mathfrak{y}^d)' = \sum (\mathfrak{x}_k^{*d})' h_k$$

zugeordnet. Diese Zuordnung ist ein Homomorphismus; es ist

$$(\mathfrak{y}_1^d + \mathfrak{y}_2^d)' = (\mathfrak{y}_1^d)' + (\mathfrak{y}_2^d)',$$

und setzen wir

$$y' = (\sum \chi_{ik} g_i h_k)' = \sum_k (\sum_i \chi_{ik}) h_k,$$

so ist

$$(y\, \mathfrak{y}^d x')' = y' (\mathfrak{y}^d)' x'.$$

Die Randkette $\dot{\mathfrak{q}}^{*d}$ von $\mathfrak{q}^{*d}$ wird durch

$$\dot{\mathfrak{q}}^{*d} = \sum \dot{\mathfrak{p}}_k^{*d} h_k$$

erklärt, wo $\dot{\mathfrak{p}}_k^{*d}$ die Randkette von $\mathfrak{p}_k^{*d}$ in M_Δ^n ist. Alsdann ist

$$((\mathfrak{y}^d)')^{\boldsymbol{\cdot}} = (\dot{\mathfrak{y}}^d)'.$$

Die Begriffe geschlossen, berandend und homolog übertragen sich auf den Bereich $\mathfrak{X}\, \mathfrak{p}^*$ ohne weiteres.

Wir erklären nun

$$\tau(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = (\sigma(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}))';$$

etwas ausführlicher geschrieben ist

$$\tau(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = \sum (\mathfrak{x}^d \cdot g_k\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f})' h_k.$$

Aus den Rechenregeln für σ in § 2 und den Regeln des Homomorphismus $(\mathfrak{y}^d)' = \mathfrak{q}^{*d}$ ergibt sich

$$\tau(x_1 \mathfrak{x}^d, x_2 \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) = x_1' \tau(\mathfrak{x}^d, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-d+f}) \bar{x}_2';$$

dabei bedeute x'

$$\text{für } x = \sum \chi_i g_i \text{ das Element } x' = \sum \chi_i h_i.$$

Für die Basen $\mathfrak{a}_i^d$, $\widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}$ ergibt sich

$$\tau\left(\sum x_{1i}\mathfrak{a}_i^d, \sum x_{2j}\widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\right) = \sum x'_{1i}\tau\left(\mathfrak{a}_i^d, \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\right)\overline{x}'_{2j}.$$

Da nach (16)

$$\tau\left(\mathfrak{a}_i^d, \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\right) = \mathfrak{a}_i^d \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f} h_{ij}^{d,\, n-d+f}$$

ist, folgt

$$(21) \qquad \tau\left(\sum x_{1i}\mathfrak{a}_i^d, \sum x_{2j}\widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}\right) = \sum x'_{1i} h_{ij}^{d,\, n-d+f} \overline{x}'_{2j}\mathfrak{a}_i^d \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f};$$

$\mathfrak{a}_i^d \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d+f}$ ist eine orientierte Zelle aus $\mathfrak{M}_\Delta^n$.

Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ Rechtsideale von $\mathfrak{X}$, so werde unter $\mathfrak{U}'\,\overline{\mathfrak{V}}'$ die Gesamtheit der Elemente

$$\sum u'_i \overline{v}'_j \quad (\text{mit } u_i \text{ aus } \mathfrak{U},\ v_j \text{ aus } \mathfrak{V})$$

von $\mathfrak{X}'$ verstanden. Die Menge $\mathfrak{U}'\,\overline{\mathfrak{V}}'$ enthält mit zwei Elementen auch deren Summe. Sind $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ Ideale in $\mathfrak{X}$, so ist $\mathfrak{U}'\,\overline{\mathfrak{V}}'$ ein Ideal in $\mathfrak{X}'$.

Unter $\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}'$ werde die Gesamtheit der Elemente

$$u' + \overline{v}' \qquad (u \text{ aus } \mathfrak{U},\ v \text{ aus } \mathfrak{V})$$

von $\mathfrak{X}'$ verstanden. Auch diese Menge enthält mit je zwei Elementen auch deren Summe und bildet ein Ideal in $\mathfrak{X}'$, falls es $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{X}$ sind.

Wie in § 3 und § 4 folgt dann:

Ist $\mathfrak{u}^d$ *eine Kette aus* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f}$ *eine Kette aus* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$, *so ist* $\tau(\mathfrak{u}^d, \widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d+f})$ *eine Kette aus* $\mathfrak{U}'\,\overline{\mathfrak{V}}'\,\mathfrak{p}^*$. *Und zwar werden durch* τ *Klassen in* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *und in* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *geschlossener homologer Ketten auf Klassen n* $\overline{\mathfrak{U}}'\,\mathfrak{V}'\,\mathfrak{p}^*$ *geschlossener homologer Ketten abgebildet.*

Sind $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ *modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *kongruent, und* $\widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f}$, $\widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f}$ *modulo* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *kongruent, so sind* $\tau(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d+f})$ *und* $\tau(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d+f})$ *modulo* $\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}'$ *kongruent. Und zwar werden durch* τ *Klassen modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ *geschlossener homologer Ketten auf Klassen modulo* $(\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}')\,\mathfrak{p}^*$ *geschlossener homologer Ketten abgebildet.*

Wir fassen nun den Fall $f = 0$ näher ins Auge. Jeder null-dimensionalen Kette $\mathfrak{q}^{*0} = \sum x'_i \mathfrak{c}_i^{*0}$ werde das Gruppenringelement $\sum x'_i$ als Rand, in Zeichen

$$\dot{\mathfrak{q}}^{*0} = \sum x'_i,$$

zugeordnet. Die $\mathfrak{c}_i^{*0}$ entsprechen den Punkten von $\mathfrak{M}_\Delta^n$; ihre Orientierung ist so getroffen, daß die Randkette jeder Strecke aus $\mathfrak{M}_\Delta^n$ eine Differenz $\mathfrak{c}_i^{*0} - \mathfrak{c}_j^{*0}$ ist. Hieraus folgt, daß stets

$$(22) \qquad (\dot{\mathfrak{q}}^{*1})^{\cdot} = 0$$

ist.

Den Rand $\dot{\tau}(\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d})$ nennen wir die *Schnittzahl* von $\mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d}$. Die Schnittzahl berechnet sich nach (21) zu

$$\dot{\tau}(\sum x_{1i}\, \mathfrak{a}_i^d,\ \sum x_{2j} \widetilde{\mathfrak{a}}_j^{n-d}) = \sum x_{1i}' h_{ij}^{d,\, n-d} \overline{x}_{2j}'.$$

Sind $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ geschlossen und homolog modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, $\widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}$, $\widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d}$ geschlossen und homolog modulo $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$, so sind die Schnittzahlen $\dot{\tau}(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d})$ und $\dot{\tau}(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d})$ kongruent modulo $\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}'$.

Denn die Ketten

$$\tau(\mathfrak{x}_2^d - \mathfrak{x}^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}), \tau(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d} - \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}) \text{ und } \tau(\mathfrak{x}_2^d - \mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d} - \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d})$$

sind modulo $(\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}')\, \mathfrak{p}^*$ berandend, weil $\mathfrak{x}_2^d - \mathfrak{x}_1^d$ modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ und $\widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d} - \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}$ modulo $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ berandend und $\mathfrak{x}_1^d$ modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ und $\widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}$ modulo $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ geschlossen ist; liegt $\mathfrak{q}^{*0}$ in $(\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}')\, \mathfrak{p}^*$, so liegt $\dot{\mathfrak{q}}^{*0}$ in $\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}'$; folglich liegen nach (22)

$$\dot{\tau}(\mathfrak{x}_2^d - \mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}),\ \dot{\tau}(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d}),\ \dot{\tau}(\mathfrak{x}_2^d - \mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d} - \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d})$$

in $\mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}'$, und es ist

$$\begin{aligned} \dot{\tau}(\mathfrak{x}_2^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d}) &= \dot{\tau}(\mathfrak{x}_1^d + (\mathfrak{x}_2^d - \mathfrak{x}_1^d), \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d} + (\widetilde{\mathfrak{x}}_2^{n-d} - \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d})) \\ &= \dot{\tau}(\mathfrak{x}_1^d, \widetilde{\mathfrak{x}}_1^{n-d}) \text{ modulo } \mathfrak{U}' + \overline{\mathfrak{V}}'. \end{aligned}$$

§ 6. Es werde in diesem Abschnitt eine weitere Annahme über die zugrunde gelegte Mannigfaltigkeit gemacht, nämlich die folgende: Jede geschlossene Homotopiekette $\mathfrak{x}^d\ (0 < d < n)$ ist berandend.

Die Homologiegruppen der universellen Überlagerung sind also hier für die Dimensionen $d \neq 0, n$ sämtlich gleich der Identität. Es gibt eine umfassende Klasse von Mannigfaltigkeiten, die diese zusätzliche Forderung erfüllen. Alsdann lassen sich die Homologieklassen modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ und die Homologieklassen in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ eineindeutig auf einander beziehen, und es lassen sich aus den Schnittzahlen gewisse Verschlingungszahlen ableiten.

Sind $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ geschlossen und homolog modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, so sind ihre Randketten $\dot{\mathfrak{x}}_1^d$, $\dot{\mathfrak{x}}_2^d$ geschlossen und homolog in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$. Denn nach Voraussetzung gibt es Ketten $\mathfrak{x}^{d+1}$, $\mathfrak{u}^d$ mit $\mathfrak{x}_1^d - \mathfrak{x}_2^d = \dot{\mathfrak{x}}^{d+1} + \mathfrak{u}^d$, also ist $(\mathfrak{x}_1^d - \mathfrak{x}_2^d)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{u}}^d$, also sind $\dot{\mathfrak{x}}_1^d, \dot{\mathfrak{x}}_2^d$ in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ homolog.

Sind $\mathfrak{u}_1^{d-1}$, $\mathfrak{u}_2^{d-1}$ *in* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *geschlossen und homolog und* $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ *zwei Ketten mit* $\dot{\mathfrak{x}}_1^d=\mathfrak{u}_1^{d-1}$, $\dot{\mathfrak{x}}_2^{d-1}=\mathfrak{u}_2^{d-1}$, *so sind* $\mathfrak{x}_1^d$, $\mathfrak{x}_2^d$ *modulo* $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ *geschlossen und homolog.*

Denn nach Voraussetzung gibt es eine Kette $\mathfrak{u}^d$ mit $\mathfrak{u}_1^{d-1}-\mathfrak{u}_2^{d-1}=\mathfrak{u}^d$. Die Kette $\mathfrak{x}_1^d-\mathfrak{x}_2^d-\mathfrak{u}^d$ ist also geschlossen; es gibt also eine Kette $\mathfrak{x}^{d+1}$ mit

$$\dot{\mathfrak{x}}^{d+1}=\mathfrak{x}_1^d-\mathfrak{x}_2^d-\mathfrak{u}^d$$

und $\mathfrak{x}_1^d-\mathfrak{x}_2^d$ ist modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ berandend.

Wir erklären nun die folgenden *Verschlingungszahlen:*

Ist $\mathfrak{u}^{d-1}$ in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ geschlossen, $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1}$ in $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ geschlossen, und $\dot{\mathfrak{x}}^d=\mathfrak{u}^{d-1}$, $\dot{\widetilde{\mathfrak{x}}}^{n-d}=\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1}$, so ist die Verschlingungszahl von $\mathfrak{u}^{d-1}$, $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1}$

$$\rho(\mathfrak{u}^{d-1},\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1})=\dot{\tau}(\mathfrak{x}^d,\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d}).$$

Ist $\mathfrak{u}^{d-1}$ in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ geschlossen, $\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d}$ modulo $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ geschlossen und $\dot{\mathfrak{x}}^d=\mathfrak{u}^{d-1}$, so ist die Verschlingungszahl von $\mathfrak{u}^{d-1}$, $\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d}$

$$\rho(\mathfrak{u}^{d-1},\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d})=\tau(\mathfrak{x}^d,\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d}).$$

Ist $\mathfrak{x}^d$ modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$ geschlossen, $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1}$ in $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ geschlossen und $\dot{\widetilde{\mathfrak{x}}}^{n-d}=\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1}$, so ist die Verschlingungszahl von $\mathfrak{x}^d$, $\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1}$

$$\rho(\mathfrak{x}^d,\widetilde{\mathfrak{v}}^{n-d-1})=\dot{\tau}(\mathfrak{x}^d,\widetilde{\mathfrak{x}}^{n-d}).$$

Aus den am Beginn dieses Abschnitts angegebenen Sätzen und dem Ergebnis von § 5 über die Schnittzahlen folgt, daß der Prozeß ρ je zwei Homologieklassen modulo $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ bzw. in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{x}$, $\mathfrak{V}\,\widetilde{\mathfrak{x}}$ eindeutig eine Restklasse von $\mathfrak{X}'$ modulo $\mathfrak{U}'+\overline{\mathfrak{V}}'$ zuordnet.

(Eingegangen: 23. I. 1939.)