French translation of Rohlin's
"New results in the theory of 4-dimensional manifolds"
Dokl. Akad. Nauk SSSR 84, 221-224 (1952)

IV. NOUVEAUX RESULTATS DANS LA THEORIE DES VARIETES DE DIMENSION 4

R [18]

On sait que toute surface close orientée est le bord d'une variété orientée de dimension 3 . Dans ma note III, il est démontré que toute variété close orientée de dimension 3 est le bord d'une variété orientée de dimension 4 . Le théorème analogue pour les variétés orientées de dimension 4 est faux ; par exemple, le plan projectif complexe ne peut être un bord. Dans cette note, on donne une condition homologique nécessaire et suffisante pour qu'une variété close orientée de dimension 4 puisse être le bord d'une variété orientée de dimension 5. Il s'avère que toute variété close orientée de dimension 4 devient un bord après qu'on lui ait ajouté un certain nombre de plans projectifs complexes convenablement orientés. A l'aide de ce résultat, on arrive à exprimer le nombre caractéristique de Pontriaguine ([12], [13]) en fonction des invariants homologiques de la variété. Des résultats analogues sont obtenus pour les variétés non-orientées. De plus, à partir des résultats de cette note, on corrige l'erreur contenue dans mes notes I et II consacrées au calcul du (n+3)-ème groupe d'homotopie de la n-sphère.

1. Définitions.

Par variété, nous entendrons une variété lisse compacte, avec ou sans bord. Pour toute variété orientée M^k , on note $-M^k$ la même variété munie de l'orientation opposée, et à toute paire M^k , N^k de variétés orientées, on associe leur somme $M^k + N^k$ (réunion disjointe de M^k et N^k) et leur différence $M^k - N^k = M^k + (-N^k)$. Convenons de dire qu'une variété orientée M^k borde ou encore qu'elle est homologue à zéro, et de noter $M^k \sim 0$, s'il existe un difféomorphisme préservant l'orientation entre M^k et le bord d'une variété orientée M^{k+1} . Convenons ensuite de dire que deux variétés closes orientées M^k et N^k sont homologues, et de noter $M^k \sim N^k$, lorsque $M^k - N^k \sim 0$. En vertu de ces définitions, les variétés closes orientées de dimension k se répartissent en classes d'homologie et ces classes forment un groupe additif, le k-ème groupe d'homologie, que nous allons noter $\mathfrak{D}^k$. Des considérations élémentaires montrent que les groupes $\mathfrak{D}^1$ et $\mathfrak{D}^2$ sont nuls, alors que le résultat de ma note III affirme la nullité de $\mathfrak{D}^3$.

Le groupe $\mathfrak{D}^4$ n'est pas nul et il contient même un sous-groupe cyclique infini. En effet, soient P^4 le plan projectif complexe muni de son orientation naturelle,

s un nombre entier et sP^4 la variété composée de s exemplaires (disjoints) de la variété P^4, si $s \geq 0$, ou de $-s$ exemplaires de la variété $-P^4$, si $s < 0$. Le nombre caractéristique de Pontriaguine de sP^4 est $3s$ (cf. [13], §3, E), alors qu'il est nul pour toute variété homologue à zéro (cf. [12], théorème 3). Les variétés sP^4 sont donc deux à deux non homologues.

Soit M^4 une variété close orientée arbitraire de dimension 4. Notons B le second groupe d'homologie réduit de M^4 et (x,y), $x, y \in B$, le nombre d'intersection des classes d'homologie x et y. Alors (x,x) est une forme quadratique entière à discriminant ± 1 définie sur le réseau B. La signature de cette forme sera appelée signature de la variété M^4 et notée $\sigma(M^4)$. Il est clair que $\sigma(-M^4) = -\sigma(M^4)$.

2. Principaux résultats.

Une variété close orientée M^4 de dimension 4 borde si et seulement si sa signature $\sigma = \sigma(M^4)$ est nulle. Dans le cas général, M^4 est homologue à la variété σP^4. Ainsi, le groupe d'homologie $\mathfrak{Q}^4$ en dimension 4 est un groupe cyclique libre engendré par la classe d'homologie du plan projectif complexe P^4. Le nombre caractéristique de Pontriaguine X_{22} de la variété est donné par :

$$X_{22}(M^4) = 3\,\sigma(M^4) .$$

Ces théorème sont des conséquences directes des 5 lemmes suivants :

a) Pour tout M^4, il existe un s tel que $M^4 \sim sP^4$;

b) Si $M^4 \sim N^4$, alors $\sigma(M^4) = \sigma(N^4)$;

c) $\sigma(sP^4) = s$;

d) Si $M^4 \sim N^4$, alors $X_{22}(M^4) = X_{22}(N^4)$;

e) $X_{22}(sP^4) = 3s$.

Les propositions d) et e), déja citées, appartiennent à Pontriaguine. Le lemme b) est démontré à l'aide des théorèmes de dualité classiques. Le lemme c) est évident. La difficulté principale réside dans la démonstration du lemme a). Elle se déroule de la manière suivante. Il est facile de démontrer que, la variété M^4 étant donnée, il existe une variété connexe M_1^4 qui lui est homologue, dont le groupe fondamental est trivial et qui admet un plongement dans l'espace euclidien R^7. Dans R^7, on peut toujours construire sur M_1^4 un champ de vecteurs normaux dont les points singuliers sont isolés et sont d'indice ± 1. En enlevant des voisinages sphériques des points singuliers et en les remplaçant par des plans projectifs complexes troués de la même manière, on transforme M_1^4 en une variété $M_2^4 \subset R^7$ sur laquelle il existe un champ de vecteurs normaux sans point singulier. Il est clair que $M^4 \sim M_2^4 + mP^4$, où m est un nombre entier. Soit S^7 la sphère obtenue en ajoutant un point à R^7 et soient L^7 le complément d'un voisinage régulier de M_2^4 dans S^7 et U^5 le générateur du groupe d'homologie entière relative de L^7 en dimension 5 choisi en accord avec l'orientation de la variété M_2^4. Il se trouve que parmi les cycles relatifs de la classe U^5, on peut trouver une variété dont le bord est homologue, au sens du n° 1, à la variété $M_2^4 - nP^4$, où n est un nombre entier. Donc $M_2^4 \sim nP^4$ et $M^4 \sim M_2^4 + mP^4 \sim (m+n)P^4$

Remarque. Notre connaissance des groupes d'homologie $\mathfrak{Q}^k$ pour $k > 4$ se réduit pour l'essentiel, à ce que l'on sait des nombres et des résidus caractéristiques de Pontriaguine ([12], [13]). Comme les nombres et les résidus caractéristiques de la somme de deux variétés sont la somme des nombres et des résidus caractéristiques des deux variétés, et que ces nombres et résidus sont nuls pour une variété homologue à zéro (cf. [12], théorème 3), chaque nombre caractéristique en dimension k définit un homomorphisme du groupe $\mathfrak{Q}^k$ dans le groupe des entiers, alors que chaque résidu caractéristique définit un homomorphisme dans le groupe des entiers modulo 2. A l'exception de la caractéristique d'Euler (qu'il convient de considérer ici comme résidu) et du nombre caractéristique X_{22} de dimension 4 trouvé dans le présent travail, aucun de ces invariants n'a été calculé. Seules les variétés de dimension divisible par 4 ont des nombres caractéristiques (cf. [12], §6, D). Il est intéressant de noter que la définition de la signature donnée ci-dessus pour les variétés de dimension 4 admet également une généralisation aux variétés de dimension divisible par 4 (il faut alors entendre par B le $(k/2)$-ème groupe d'homologie réduit de la variété M^k), et que la signature d'une telle variété est nulle, si la variété borde.

3. Le cas non-orienté.

Négligeons maintenant les orientations et considérons les variétés closes de dimension k qu'elles soient orientables ou pas. Si la variété M^k est difféomorphe au bord d'une variété M^{k+1} (orientable ou non orientable), nous allons dire que M^k est homologue à zéro modulo 2 et écrire $M^k \sim 0 \pmod 2$. A toute paire de variétés M^k, N^k correspond leur somme $M^k + N^k$, et on dira que M^k et N^k sont homologues modulo 2, et on écrira $M^k \sim N^k \pmod 2$, si cette somme est homologue à zéro modulo 2. Les classes d'homologie modulo 2 des variétés closes de dimension k forment un groupe additif, le k-ème groupe d'homologie modulo 2, que nous allons noter $\mathfrak{N}^k$. Tous les éléments non nuls du groupe $\mathfrak{N}^k$ sont évidemment d'ordre 2. Des considérations élémentaires montrent que le groupe $\mathfrak{N}^1$ est nul, alors que le groupe $\mathfrak{h}^2$ a deux éléments (son générateur est la classe du plan projectif réel P^2 : si la caractéristique d'Euler d'une variété M^2 est paire, $M^2 \sim 0 \pmod 2$, sinon $M^2 \sim P^2 \pmod 2$). Il découle des résultats de ma note III que le groupe $\mathfrak{h}^3$ est nul. Il s'avère que le groupe $\mathfrak{h}^4$ a deux éléments (†) et qu'il est engendré par la classe du plan projectif complexe P^4 . Une variété close M^4 est homologue à zéro modulo 2 si et seulement si sa caractéristique d'Euler est paire. Si elle est impaire, $M^4 \sim P^4 \pmod 2$.

4. Le (n+3)-ème groupe d'homotopie de la n-sphère.

Au calcul de ce groupe sont consacrées mes notes I et II. Elles contiennent une erreur qui a conduit à des résultats incorrects. Cette erreur sera maintenant corrigée.

Nous utiliserons les notations $\pi_r(S^n)$, $\pi_r^0(S^n)$, f_n $(n \geq 3)$ et g_n $(n \geq 4)$ de la note II et la notation h_n $(n \geq 2)$ de la note I . Dans I, on affirme que $h_n = 0$ pour $n \geq 3$. En réalité, la classe h_n n'est nulle pour aucune valeur de n . La preuve s'appuie sur les résultats de la présente note. En effet, on peut prouver par les méthodes de la note I que $h_n = 0$ $(n \geq 3)$ est équivalent à l'existence d'une variété close orientée Q^4 ayant les deux propriétés suivantes (cf. I, n° 4) :

a) Il existe dans Q^4 un tore lisse T^2 qui d'une part a un voisinage E^4 décomposable en un produit de T^2 et d'un 2-disque, et qui d'autre part est un 2-cycle caractéristique de la variété Q^4 et le reste si on enlève E^4 de Q^4 et on le replace d'une manière (lisse) différente ;

b) $X_{22}(Q^4) = 0$.

D'après les résultats de la présente note, la condition b) est équivalente à l'affirmation que la variété Q^4 borde, et on peut démontrer que ceci contredit la condition a). L'erreur de la note I apparaît dans le n° 4 à l'endroit où intervient la sphère Σ^2 . En réalité, il n'existe pas de sphère Σ^2 ayant les propriétés annoncées. Cette erreur est répétée dans la note II (n° 3, paragraphe 3) où elle a entraîné l'affirmation erronée $12 g_n = 0$. En réalité, la construction décrite au n° 4 de II, conduit à l'égalité $12 g_n = h_n$ $(\neq 0)$. Comme $2 h_n = 0$, on a $24 g_n = 0$. L'égalité $\pi_{n+3}(S^4) = \pi^0_{n+3}(S^4)$ prouvée au n° 3 de II reste vraie (dans sa démonstration, au lieu d'appliquer implicitement l'égalité $h_n = 0$, il convient d'utiliser l'égalité $h_n = 12 g_n$) . Donc, les générateurs des groupes $\pi_{n+3}(S^n)$ $(n \geq 3)$ sont correctement indiqués dans II , mais leurs ordres sont en réalité deux fois plus grands :

$\pi_6(S^3)$ est un groupe cyclique d'ordre 12 de générateur f_3 , le groupe $\pi_7(S^4)$ est somme directe de son sous-groupe cyclique d'ordre 12 engendré par f_4

(†) Ceci est faux ; cf. les commentaires (N.d.T.)

et du sous-groupe cyclique libre engendré par g_4 , le groupe $\pi_{n+3}(S^4)$ pour $n \geq 5$ est cyclique d'ordre 24 et est engendré par g_n .†

5. Une relation entre les cycles caractéristiques.

Nous avons identifié l'ordre de l'élément g_n comme étant la moitié de la valeur minimale que peut prendre le nombre caractéristique X_{22} d'une variété orientée M^4 de dimension 4 dont la classe caractéristique $z^2(M^2)$ de dimension 2 est nulle (cf. II, n° 4). Comme cette valeur minimale du nombre X_{22} est 48 , on a : $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{48}$ et $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$ pour toute variété M^4 telle que $z^2(M^4) = 0$ (cf. II, n° 5).

Ce théorème a une application intéressante. Whitehead [19] et Pontriaguine [14] ont démontré que le type d'homotopie d'une variété close M^4 connexe et simplement connexe est déterminé par le type arithmétique de la forme quadratique (x,x) (cf. n° 1). Cependant, la question de l'existence d'une variété dont la forme (x,x) a le type arithmétique donné (étant entendu, bien sûr, qu'on se limite aux formes entières de discriminant +1), restait ouverte. Nous pouvons donner une réponse négative à cette question. Par exemple, la forme (x,x) ne peut pas être définie positive, de rang 8 de discriminant +1 et ne prendre que des valeurs paires (une telle forme a été construite par A. Korkine et G. Zolotareff [9]). En effet, si la forme (x,x) d'une variété M^4 simplement connexe ne prend que des valeurs paires, alors $z^2(M^4) = 0$ (cf. [22]) et par conséquent $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$, donc $\sigma(M^4) \neq 8$.

---

† Dans leur note [10], Massey et Whitehead affirment également que $h_n \neq 0$ $(n \geq 3)$ et que les groupes $\pi_6(S^3)$ et $\pi_{n+3}(S^n)$ $(n \geq 5)$ sont respectivement d'ordre 12 et 24 (la structure exacte des groupes $\pi_{n+3}(S^n)$ n'est pas déterminée dans [10]). A la lecture de la note, on voit que ces résultats sont obtenus par des méthodes complètement différentes des miennes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLAKERS A.L., MASSEY W.S., The homotopy groups of a triad, I, Ann. Math., 53 (1951), 161-205.

[2] CAIRNS S.S., Introduction of a Riemannian geometry on a triangulable 4-manifold, Ann. Math., 45 (1944), 218-219.

[3] FREUDENTHAL H., Uber die Klassen der Sphärenabbildungen, I, Compos. Math., 5 (1938), 299-314.

[4] HOPF H., Uber die Abbildungen der dreidimensionalen Späre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104 (1931), 637-666.

[5] HOPF H., Uber die Abbildungen von Spären au Spären niedrigerer Dimenson, Fund. Math., 25 (1935), 427-440.

[6] HUREWICZ W., Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 38 (1935), 112-119.

[7] HUREWICZ W., STEENROD N.E., Homotopy relations in fiber spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 27 (1941), 60-64.

[8] KNESER H., Ein topologisches Zerlegungssatz, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., 27 (1924), 601-616.

[9] KORKINE A., ZOLOTAREFF G., Sur les formes quadratiques, Math. Ann., 6 (1873), 366-389.

[10] MASSEY W.S., WHITEHEAD G.W., The Eilenberg-MacLane groups and homotopy groups of spheres, Bull. AMS, 57 (1951), 491.

[11] PONTRYAGIN L. (= PONTRIAGUINE L.S.), A classification of continuous transformations of a complex into a sphere, I, Comptes-rendus (Doklady de l'Acad. Sci. URSS, 19 (1938), 147-179.

[12] PONTRYAGIN L.S., Characteristic cycles on differentiable manifolds, Mat. Sbornik, 21 (1947), 233-284.

[13] PONTRYAGIN L.S., Vector fields on manifolds, Mat. Sbornik, 24 (1949), 129-162.

[14] PONTRYAGIN L.S., On the classification of four-dimensional manifolds, Uspehi. Mat. Nauk., 4 (1949), 157-158.

[15] PONTRYAGIN L.S., Homotopy classification of the mappings of an (n+2)-dimensional sphere on an n-dimensional one, Doklady Akad. Nauk. SSSR, 70 (1950), 957-959.

[16] SERRE J.-P., Homologie singulière des espaces fibrés, III, Applications homotopiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 232 (1951), 142-144.

[17] STIEFEL E.L., Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helv. 8 (1936), 305-353.

[18] WHITEHEAD G.W., A generalisation of the Hopf invariant, Ann. Math., 51 (1950), 192-237.

[19] WHITEHEAD J.H.C., On simply connected, 4-dimensional polyhedra, Comment. Math. Helv., 22 (1949), 48-92.

[20] WHITNEY H., On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology, pp. 101-141, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., USA, 1941.

[21] WHITNEY H., The singularities of a smooth n-manifold in (2n-1)-space, Ann. Math., 45 (1944), 247-293.

[22] WU WEN-TSUN, Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété, C.R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 508-511.