

Zur Faserung von Graphenmannigfaltigkeiten

Alois Scharf

Einleitung

Graphenmannigfaltigkeiten treten in natürlicher Weise (und historisch zum ersten Mal) beim Studium von isolierten normalen Singularitäten 2-dimensionaler komplexer Räume auf (vgl. Mumford [3], Hirzebruch [1]).

Bekanntlich definiert man eine Auflösung einer solchen Singularität $p \in V$ als holomorphe Abbildung f einer komplexen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit V in V , so daß $V - f^{-1}(p)$ unter f biholomorph auf $V - p$ abgebildet wird. Dann ist $f^{-1}(p)$ eine i. a. reduzible Kurve C in V . Die lokale topologische Struktur dieser Singularität ist durch die Geschlechter und Selbstschnittzahlen der Komponenten von C sowie durch die Schnittkonfiguration eindeutig bestimmt (während man für die holomorphe Struktur natürlich zusätzliche Bestimmungsstücke benötigt).

Sind, was wir im folgenden immer voraussetzen wollen, alle Komponenten von C vom Geschlecht 0, so kann man also die Topologie der Singularität durch einen bewerteten Graphen Γ beschreiben, wobei die Eckpunkte des Graphen in eineindeutiger Beziehung zu den Komponenten von C stehen, die Kanten des Graphen das Schnittverhalten dieser Komponenten untereinander beschreiben und die Bewertungen der Ecken von Γ die Selbstschnittzahlen der entsprechenden Komponenten in V angeben. Die Schnittmatrix von Γ ist negativ definit; insbesondere sind alle Bewertungen von Γ negativ.

Von dieser Situation ausgehend definiert nun Hirzebruch [1] für einen beliebigen bewerteten Graphen Γ eine 4-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit N mit Rand. Den Rand $M = \partial N$ nennt man die Graphenmannigfaltigkeit $M = M_\Gamma$ von Γ . (In der obigen Situation ist N eine Umgebung von C in V .) Diese Graphenmannigfaltigkeiten wurden erstmals für den Spezialfall von bewerteten Bäumen von v. Randow [5] für sich untersucht.

Wie von Kodaira [2] gezeigt wurde, definieren die Ausnahmefasern bestimmter elliptischer Flächen bewertete Graphen im obigen Sinn. Die zugehörigen Graphenmannigfaltigkeiten sind Torusbündel mit Basis S^1 . Davon ausgehend wird in dieser Arbeit untersucht, welche Graphenmannigfaltigkeiten beliebiger bewerteter Graphen sich auf diese Art fasern lassen.

Da eine notwendige Bedingung dafür die Auflösbarkeit der Fundamentalgruppe der Graphenmannigfaltigkeit ist, werden zunächst alle Graphen bestimmt, deren Graphenmannigfaltigkeit eine auflösbare Fundamentalgruppe besitzt. Für Graphen mit negativer definiter Schnittmatrix wurde dies von Wagreich [8] durchgeführt. Die von Wagreich entwickelten Methoden lassen sich weitgehend auch auf beliebig bewertete Graphen anwenden. Mit Hilfe des Satzes von Stallings [7] werden sodann die Graphenmannigfaltigkeiten mit auflösbarer Fundamentalgruppe auf Faserbarkeit mit Basis S^1 untersucht. Es zeigt sich,

daß alle Graphen bestimmt werden können, deren Graphenmannigfaltigkeiten S^2 - oder T^2 -Bündel über S^1 sind.

Mit den von v. Randow [5] für Bäume bewiesenen Reduktionsverfahren R I und R II, die sich auch auf Graphen mit Zykeln übertragen lassen, ist es möglich, die kanonische Vorstellung (Präsentation) der Fundamentalgruppe von M_F , $G_F \cong \pi_1(M_F)$, in eine Gestalt zu bringen, durch die Beweise vereinfacht werden. Ein weiteres Reduktionsverfahren, R III, wird mit der Poincaré-Vermutung für Graphenmannigfaltigkeiten definiert. Da der Beweis der Poincaré-Vermutung für Baummannigfaltigkeiten in [5] eine Lücke enthält, die sich mit den dort verwendeten Beweismethoden nicht schließen läßt, wurde dieser Satz auf anderem Weg bewiesen.

Setzt man voraus, daß die Graphen so weit wie möglich reduziert sind, so ergeben sich folgende Resultate über die Faserbarkeit von M_F :

1) Eine Graphenmannigfaltigkeit M_F ist genau dann ein S^2 -Bündel über S^1 , wenn $\pi_1(M_F)$ unendlich zyklisch ist.

2) Eine Graphenmannigfaltigkeit ist genau dann ein Torusbündel über S^1 , wenn entweder

a) Γ ein reiner Zyklus ist, oder

b) Γ ein Baum ist, die Determinante der Schnittmatrix von Γ verschwindet und $\pi_1(M_F)$ eine nicht zyklische auflösbare Gruppe ist.

Diejenigen Graphen, deren Graphenmannigfaltigkeit als S^2 - oder T^2 -Bündel über S^1 fasert, werden in Satz 6.1 aufgezählt.

Diese Arbeit ist die Zusammenfassung einer demnächst in den Bonner Mathematischen Schriften erscheinenden Arbeit.

Der § 1 enthält die wesentlichen Begriffe im Zusammenhang mit bewerteten Graphen. In den §§ 2 und 3 werden die Graphenmannigfaltigkeit konstruiert und die einem Graphen zugeordnete Gruppe definiert. Die von v. Randow definierten Reduktionsverfahren sind im § 4 zitiert. In § 5 werden diejenigen Graphen bestimmt, deren Graphenmannigfaltigkeit eine auflösbare Fundamentalgruppe besitzt, in § 6 diejenigen, deren Graphenmannigfaltigkeit wie oben beschrieben fasert.

§ 1. Bewertete Graphen

1.1. *Definition.* (i) Ein Graph Γ sei ein endlicher, 1-dimensionaler, zusammenhängender Simplicialkomplex, dessen Ecken numeriert und (mit ganzen Zahlen) bewertet sind. Die Ecken bezeichnen wir mit $x_1, \dots, x_n$, die Bewertung der i -ten Ecke x_i sei a_i .

(ii) Zwei Ecken heißen benachbart, wenn sie durch eine Kante miteinander verbunden sind.

(iii) Wir nennen x_i eine p_i -Ecke, wenn x_i Eckpunkt von p_i Kanten ist. Wir nennen x_i eine Verzweigungsecke, falls $p_i \geq 3$ ist.

(iv) Ein zusammenziehbbarer Graph heißt Baum.

(v) Eine #-Ecke sei eine 1-Ecke mit Bewertung 0, die einer Verzweigungsecke benachbart ist.

1.2. Zu jeder Ecke x_i wird eine Anordnung der x_i benachbarten Ecken $x_{i,1}, \dots, x_{i,p_i}$ gewählt. Mit dieser Anordnung wird in § 3 die einem Graphen zugeordnete Gruppe definiert.

§ 2. Konstruktion der Graphenmannigfaltigkeit

2.1. Wir skizzieren in diesem Abschnitt kurz ein Konstruktionsverfahren, wie jedem bewerteten Graphen Γ eine 3-dimensionale, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit M_Γ zugeordnet wird. Der Graph Γ habe die Ecken $x_1, \dots, x_n$ mit den Bewertungen $a_1, \dots, a_n$. Ist x_i eine p_i -Ecke, so wählen wir zu x_i als Baustein einen orientierten Linsenraum $L(a_i, 1)$, aus dem p_i offene Volltori ausgebohrt sind. Für die Ausbohrung betrachtet man $L(a_i, 1)$ als S^1 -Bündel über S^2 und entfernt aus $L(a_i, 1)$ die Urbilder von p_i offenen Scheiben in S^2 unter der Faserabbildung. Der ausgebohrte Linsenraum $L'(a_i, 1)$ wird von p_i Tori berandet, die wir mit den Indizes der x_i benachbarten Ecken indizieren: $T_{i,1}, \dots, T_{i,p_i}$. Die Indizierung der Randtori muß verträglich mit der in 1.2 gewählten Anordnung der x_i benachbarten Ecken erfolgen. Als Meridiankreis $M_{i,k}$ auf $T_{i,k}$ wählen wir einen Meridiankreis auf der Abschließung des Bohrkernes, als Breitenkreis $B_{i,k}$ wählen wir eine Faser bezüglich der oben erwähnten Faserung, die auf $T_{i,k}$ liegt. Meridian- und Breitenkreis seien so orientiert, daß $M_{i,k}, B_{i,k}$ in dieser Reihenfolge mit der Orientierung des Randes des Bohrkernes übereinstimmen.

Sind x_i und x_j in Γ durch eine Kante verbunden, dann ist x_j eine der Ecken $x_{i,1}, \dots, x_{i,p_i}$, etwa $x_j = x_{i,l}$ und, entsprechend, $x_i = x_{j,m}$. Der Kante zwischen x_i und x_j wird eine Verklebung von $T_{i,l}$ und $T_{j,m}$ zugeordnet. Diese erfolgt mit den Homologien $M_{i,l} \sim B_{j,m}$ und $B_{i,l} \sim M_{j,m}$. Werden die Verklebungen für alle Kanten von Γ durchgeführt, so erhalten wir die zu Γ gehörende Graphenmannigfaltigkeit M_Γ .

§ 3. Die einem Graphen zugeordnete Gruppe G_Γ

3.1. Durch einen bewerteten Graphen Γ und die in 1.2 festgelegte Anordnung der einer Ecke benachbarten Ecken ist eine Gruppe G_Γ bestimmt, die durch Erzeugende und Relationen definiert wird. Mit dem Satz von van Kampen und einer Verallgemeinerung dieses Satzes läßt sich zeigen, daß G_Γ eine Vorstellung (Präsentation) der Fundamentalgruppe von M_Γ ist (vgl. [8]).

3.2. Ist Γ ein Baum mit den Ecken $x_1, \dots, x_n$ und den Bewertungen $a_1, \dots, a_n$, so nehmen wir als Erzeugende Elemente für G_Γ die Ecken $x_1, \dots, x_n$. Definierende Relationen sind

$$x_i^{a_i} = x_{i,1} \cdots x_{i,p_i}, \quad i = 1, \dots, n, \text{ die rechte Seite in der in 1.2 gewählten Reihenfolge,}$$

$$[x_i, x_j] = 1, \quad i, j = 1, \dots, n, \text{ falls } x_i \text{ und } x_j \text{ in } \Gamma \text{ benachbart sind.}$$

3.3. Enthält Γ genau einen Zyklus, so seien x_r und x_s zwei Ecken auf dem Zyklus, die durch eine Kante verbunden sind. In diesem Fall wählt man als Erzeugende von G_Γ die Ecken $x_1, \dots, x_n$ von Γ und ein zusätzliches erzeugendes

Element y , das dem Zyklus von Γ entspricht. Definierende Relationen von G_Γ sind:

$$\begin{aligned} x_i^{a_i} &= x_{i,1} \dots x_{i,p_i}, & i \in \{1, \dots, n\} & \quad \text{und} \quad i \neq r, s, \\ x_r^{a_r} &= x_{r,1} \dots y x_s y^{-1} \dots x_{r,p_r}, \\ x_s^{a_s} &= x_{s,1} \dots y^{-1} x_r y \dots x_{s,p_s}, \\ [x_i, x_j] &= 1, & \text{falls } x_i, x_j \neq x_r, x_s & \text{ und } x_i, x_j \text{ in } \Gamma \text{ benachbart sind,} \\ [x_r, y x_s y^{-1}] &= 1. \end{aligned}$$

3.4. Enthält der Graph Γ mehr als einen Zyklus, so wird wie in 3.3 verfahren, d. h. für jeden Zyklus wird ein weiteres Erzeugendes genommen und Relationen werden wie in 3.3 zu ersehen ist geändert.

Wie schon erwähnt gilt

3.5. **Satz.** $\pi_1(M_\Gamma) \cong G_\Gamma$.

Außerdem folgt aus der Definition von G_Γ sofort

3.6. **Lemma.** $G_\Gamma / \langle x_1, \dots, x_n \rangle = \mathbb{Z}y_1 * \mathbb{Z}y_2 * \dots * \mathbb{Z}y_k$, wenn k die Anzahl der Zykeln von Γ ist und $y_1, \dots, y_k$ die den Zykeln entsprechenden Erzeugenden von G_Γ sind.

3.7. **Korollar.** Enthält Γ mindestens zwei Zykeln, dann ist G_Γ nicht auflösbar.

§ 4. Reduktionsverfahren RI und RII

Gewisse Graphen lassen sich mit Hilfe der von v. Randow [5] eingeführten Reduktionsverfahren „verkleinern“, ohne daß sich dabei die Graphenmannigfaltigkeit (bis auf orientierungserhaltende Homöomorphie) ändert. Die beschriebenen Reduktionen lassen sich durch wiederholtes „Nieder- und Aufblasen“ erhalten. Durch Reduktionen und Erweiterungen (d. h. Einsetzen von Teilen in einen Graphen, die reduzierbar sind) können Graphen in eine für Beweise günstigere Gestalt gebracht werden.

4.1. **Definition.** Für $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ sei die Zahl $p(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}$ rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} p(\cdot) &= 1 \\ p(a_1) &= a_1 \\ p(a_1, \dots, a_l) &= a_l p(a_1, \dots, a_{l-1}) - p(a_1, \dots, a_{l-2}). \end{aligned}$$

4.2. **Lemma.** Γ sei ein reihenförmiger Graph mit der Bewertung $a_1, \dots, a_n$.

Behauptung

$$\begin{aligned} M_\Gamma &\approx L(p(a_1, \dots, a_n), p(a_2, \dots, a_n)) \\ G_\Gamma &\cong \pi_1(M_\Gamma) \cong \mathbb{Z}_{|p(a_1, \dots, a_n)|}. \end{aligned}$$

4.3. **Satz.** (Reduktionssatz, vgl. [5]). Γ_1 sei ein reihenförmiger Teilgraph von Γ mit $G_{\Gamma_1} = (1)$.

RI Γ_1 habe in Γ die Gestalt

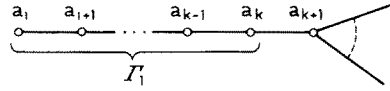


Fig. 1

dabei sei x_{k+1} eine p_{k+1} -Ecke, $p_{k+1} \geq 1$.

Wird Γ_1 aus Γ weggelassen und a_{k+1} durch $a_k - p(a_i, \dots, a_k) p(a_i, \dots, a_{k-1})$ ersetzt, so ist die Graphenmannigfaltigkeit des so reduzierten Graphen homöomorph zu M_Γ .

RII Γ_1 habe in Γ die Gestalt

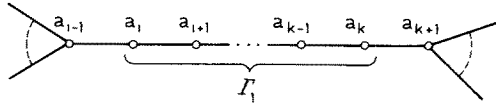


Fig. 2

x_{i-1} bzw. x_{k+1} seien p_{i-1} - bzw. p_{k+1} -Ecken, $p_{i-1}, p_{k+1} \geq 1$. Wir setzen voraus, daß x_{i-1} und x_{k+1} in Γ weder gleich noch benachbart sind (das kann auftreten, wenn $x_{i-1}, \dots, x_{k+1}$ in Γ einen Zyklus bilden). Ersetzt man Γ_1 durch eine Kante und ändert a_{i-1} in $a_{i-1} - p(a_i, \dots, a_k) p(a_{i+1}, \dots, a_k)$ und a_{k+1} in $a_{k+1} - p(a_i, \dots, a_k) \cdot p(a_i, \dots, a_{k-1})$, so ist die Graphenmannigfaltigkeit des geänderten Graphen homöomorph zu M_Γ .

Mit dem folgenden Lemma ist schnell zu entscheiden, ob ein Graph reduziert ist.

4.4. Lemma. (A) Ein Baum Γ , der nicht aus einer Ecke besteht, ist genau dann reduziert, wenn für die Bewertungen von Γ gilt:

- (i) ist $a_i = \pm 1$, dann ist x_i eine Verzweigungsecke,
- (ii) ist $a_i = 0$, dann muß eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein:
 - a) Γ besteht aus zwei Ecken,
 - b) x_i ist eine Verzweigungsecke,
 - c) x_i ist eine #-Ecke,
 - d) x_i ist eine 2-Ecke, die zwei Verzweigungsecken benachbart ist.

(B) Enthält Γ Zykeln, dann ist Γ genau dann reduziert, wenn für die Bewertungen gilt:

- (i) für Ecken, die nicht auf einem Zyklus liegen, muß (A) (i) und (ii) b)–d) erfüllt sein,
- (ii) besteht ein Zyklus aus 3 Ecken, dann können die Bewertungen dieser Ecken beliebig sein,
- (iii) besteht ein Zyklus aus 4 Ecken, dann haben höchstens Verzweigungsecken auf dem Zyklus die Bewertung ± 1 ,
- (iv) besteht ein Zyklus aus mehr als 4 Ecken, so gelten für die Bewertungen dieser Ecken die Bedingungen (A) (i) und (ii) b), d).

§ 5. Graphen Γ mit auflösbarer Gruppe G_Γ

Wagreich [8] hat diejenigen Graphen mit auflösbarer Gruppe G_Γ bestimmt, die aus Auflösungen von Singularitäten entstehen. Mit ähnlichen Methoden lassen sich alle Graphen bestimmen, deren Gruppe auflösbar ist. Wir zitieren die für die Beweise notwendigen Sätze – ausgenommen die schon von Wagreich verwendeten – und geben eine Beweisidee. Dabei wird vorausgesetzt, alle Graphen sind nach RI und RII reduziert.

5.1. Lemma. Γ sei reihenförmig.

Behauptung. (i) $G_\Gamma = (1) \Leftrightarrow \Gamma$ besteht aus einer Ecke mit der Bewertung ± 1 oder Γ ist von der Gestalt $\overset{a}{\circ} \text{---} \overset{0}{\circ}$ $a \in \mathbb{Z}$.

(ii) $G_\Gamma \cong \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Gamma$ besteht aus einer Ecke mit der Bewertung 0.

5.2. Ist Γ ein sternförmiger Graph, d. h. ein Baum mit genau einer Verzweigungsecke, und enthält Γ keine #-Ecke, dann kann M_Γ im Seiffertschen Sinn mit Zerlegungsfläche S^2 gefasert werden [5]. Unter diesen Graphenmannigfaltigkeiten wurden in [6] diejenigen bestimmt, deren Fundamentalgruppe endlich ist. Es sind die Bäume der Gestalt

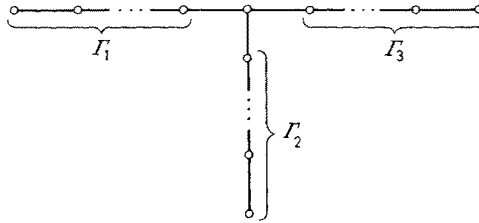


Fig. 3

und $(\text{ord } G_{\Gamma_1}, \text{ord } G_{\Gamma_2}, \text{ord } G_{\Gamma_3}) = (2, 3, 3)$

$(2, 3, 4)$

$(2, 3, 5)$

$(2, 2, n) \quad 2 \leq n < \infty.$

5.3. Satz. Sei Γ ein Baum ohne #-Ecken, $G_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n | R_\mu(x_i) \rangle$.

Behauptung. (i) G_Γ ist genau dann zyklisch, wenn Γ reihenförmig ist.

(ii) Sei Γ nicht reihenförmig und keiner der in 5.2 aufgezählten Bäume. Dann ist G_Γ nicht endlich und alle x_i , $i = 1, \dots, n$, haben unendliche Ordnung in G_Γ .

Mit diesem Satz ist es möglich, für viele Graphen Restklassengruppen von G_Γ als über $\mathbb{Z}$ amalgamiertes Produkt zu schreiben, was für den Beweis der Nichtauflösbarkeit von G_Γ von Vorteil ist.

Der Beweis des Satzes 5.3 beruht wesentlich auf Satz 5 [4]:

5.4. Satz. M sei eine 3-dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit, $\pi_1(M)$ sei nicht endlich, nicht zyklisch und kein freies Produkt.

Behauptung. $\pi_1(M)$ enthält keine Elemente endlicher Ordnung.

Um Satz 5.4 anwenden zu können, beweist man zunächst

5.5. Satz. Γ sei ein Baum ohne #-Ecken, $G_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_n \mid R_\mu(x_i) \rangle$, $x_1, \dots, x_n$ seien verschieden von $1 \in G_\Gamma$.

Behauptung. Falls ein x_i endliche Ordnung in G_Γ hat, ist G_Γ kein freies Produkt.

Mit Satz 5.5 genügt es wegen 5.4 zu zeigen, daß für die in 5.3 (ii) vorausgesetzten Bäume Γ die Gruppe G_Γ nicht endlich und nicht zyklisch ist und alle Erzeugenden $x_1, \dots, x_n$ verschieden von 1 sind. Der Beweis ist recht umfangreich und bedarf vieler Fallunterscheidungen. Er enthält jedoch schon einen großen Teil des Beweises von

5.6. Satz Sei Γ ein Graph ohne #-Ecken mit auflösbarer Gruppe G_Γ . Dann ist Γ einer der folgenden Graphen:

- (i) Γ ist reihenförmig,
- (ii) Γ ist sternförmig von der Gestalt

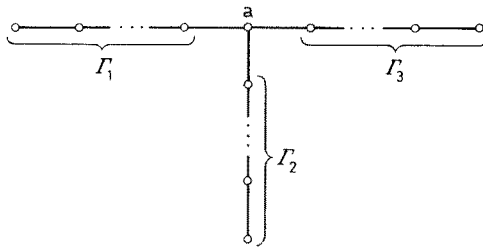


Fig. 4

$$\begin{aligned}
 a \in \mathbb{Z} \text{ und } (\text{ord } G_{\Gamma_1}, \text{ord } G_{\Gamma_2}, \text{ord } G_{\Gamma_3}) = & (2,3,3) \\
 & (2,3,4) \\
 & (2,3,6) \\
 & (2,4,4) \\
 & (3,3,3) \\
 & (2,2,n) \quad 2 \leq n < \infty,
 \end{aligned}$$

- (iii) Γ ist von der Gestalt

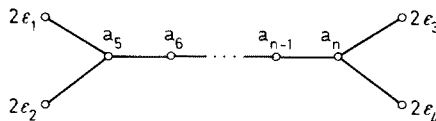


Fig. 5

$\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, 4$, $n \geq 5$ (für $n = 5$ ist Γ sternförmig),

- (iv) Γ ist rein zyklisch, d. h. jede Ecke ist 2-Ecke.

Bemerkung. Der Beweis, daß die Gruppen der aufgezählten Graphen auflösbar sind, läßt sich fast wörtlich aus [8] übernehmen.

5.7. Enthält Γ eine #-Ecke, so sind folgende Fälle zu untersuchen:

(A) Eine #-Ecke, z. B. x_i , ist einer Verzweigungsecke, die nicht auf einem Zyklus liegt, benachbart:

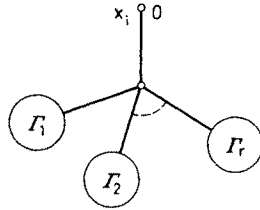


Fig. 6

Dann ist $G_\Gamma \cong G_{\Gamma_1} * \dots * G_{\Gamma_r}$.

(B) Eine #-Ecke ist einer Verzweigungsecke auf einem Zyklus benachbart:

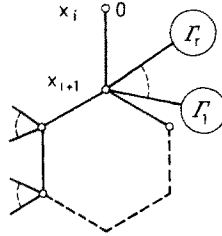


Fig. 7

Wir erhalten $G_\Gamma \cong \mathbb{Z} * G_{\Gamma_0} * G_{\Gamma_1} * \dots * G_{\Gamma_r}$, wobei Γ_0 der Graph $\Gamma - \{x_i, x_{i+1}\} - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_r$ ist.

Wie nun leicht zu sehen ist gilt

5.8. Satz. Der Graph Γ enthalte mindestens eine #-Ecke x_i .

(i) Ist x_i von der Gestalt (A), dann ist G_Γ genau dann auflösbar, wenn entweder ein j existiert, so daß G_{Γ_j} auflösbar ist und $G_{\Gamma_k} = (1)$ für $k = 1, \dots, r, k \neq j$, oder es gibt $j, k \in \{1, \dots, r\}$, so daß $G_{\Gamma_j} \cong G_{\Gamma_k} \cong \mathbb{Z}_2$ und $G_{\Gamma_l} = (1)$ für $l = 1, \dots, r, l \neq j, k$.

(ii) Für #-Ecken der Gestalt (B) ist G_Γ genau dann auflösbar, wenn $G_{\Gamma_0} = \dots = G_{\Gamma_r} = (1)$ ist.

Wie schon Waldhausen [9] gezeigt hat, lassen sich Graphenmannigfaltigkeiten, deren Graph eine #-Ecke enthält, in eine zusammenhängende Summe zerlegen, woraus der Satz 5.8 ebenfalls folgt.

5.9. Satz. Γ enthalte eine #-Ecke. Dann ist für Graphen vom Typ (A)

$$M_\Gamma \approx M_{\Gamma_1} \# \dots \# M_{\Gamma_r},$$

für Graphen vom Typ (B)

$$M_\Gamma \approx M_{\Gamma_0} \# M_{\Gamma_1} \# \dots \# M_{\Gamma_r} \# S^2 \times S^1.$$

Aus den Sätzen 5.1, 5.3, 5.7, 5.9 und einer leichten Induktion über die Anzahl der #-Ecken erhalten wir

5.10. Satz. Sei Γ ein Graph mit $G_\Gamma = (1)$.

Behauptung.

$$M_\Gamma \approx S^3.$$

Mit Satz 5.10 definieren wir ein weiteres Reduktionsverfahren (RIII) für Graphen.

5.11. Satz. Γ sei ein Graph der Gestalt (A) oder (B), sei $G_{\Gamma_i} = (1)$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ und $\Gamma = \Gamma - \Gamma_i$.

Behauptung.

$$M_{\tilde{\Gamma}} \approx M_\Gamma.$$

Sind alle Graphen so weit wie möglich reduziert, d. h. sie erfüllen Lemma 4.4 und es existieren keine nach 5.11 reduzierbare Teilgraphen, dann lassen sich 5.6 und 5.8 zusammenfassen:

5.12. Satz. G_Γ ist genau dann auflösbar, wenn Γ einer der folgenden Graphen ist:

- (i) Γ ist einer der in Satz 5.6 aufgezählten Graphen,
- (ii) Γ ist vom Typ (A) mit $r = 2$ und $G_{\Gamma_1} \cong G_{\Gamma_2} \cong \mathbb{Z}_2$, ($G_\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $M_\Gamma \approx L(2,1) \# L(2,1) \approx P_3\mathbb{R} \# P_3\mathbb{R}$),
- (iii) Γ ist vom Typ (B) mit $r = 0$ und $G_\Gamma = (1)$, ($G_\Gamma \cong \mathbb{Z}$, $M_\Gamma \approx S^2 \times S^1$).

Aus 5.1, 5.3 und 5.12 folgt

5.13. Satz. Sei Γ ein Graph mit $G_\Gamma \cong \mathbb{Z}$.

Behauptung.

$$M_\Gamma \approx S^2 \times S^1.$$

Den zitierten Sätzen ist sofort zu entnehmen, für welche Graphen $G_\Gamma \cong \mathbb{Z}$ auftritt.

§ 6. Faserbarkeit vom M_Γ über S^1

Oben wurde gezeigt, wann Graphenmannigfaltigkeiten S^2 -Bündel über S^1 sind. Wir werden nun diejenigen Graphen bestimmen, deren Graphenmannigfaltigkeiten als Torusbündel über S^1 fasern. Aus der exakten Homotopiesequenz sieht man sofort notwendige Bedingungen für die Faserbarkeit von M_Γ in diesem Sinn:

- (i) G_Γ auflösbar und
- (ii) $\text{ord}(H_1(M_\Gamma, \mathbb{Z}))$ nicht endlich.

Wie es sich zeigt, sind diese Bedingungen und $G_\Gamma \neq \mathbb{Z}$ auch hinreichend.

Für Baumannigfaltigkeiten sternförmiger Graphen ohne #-Ecken (Seifertsche Faserräume mit Zerlegungsfläche S^2) folgt aus den Resultaten von Orlik-Vogt-Zieschang [4] sogar, daß (ii) hinreichend für Faserbarkeit von M_Γ als Flächenbündel über S^1 ist.

Falls eine Graphenmannigfaltigkeit M_Γ als Flächenbündel über S^1 fasert, ist G_Γ genau dann auflösbar, wenn das Geschlecht der Faser ≤ 1 ist. Aus den Resultaten von Waldhausen [9] folgt die Irreduzibilität der Graphenmannigfaltigkeiten mit auflösbarer Fundamentalgruppe und unendlicher erster Homologiegruppe. Mit dem Faserungssatz von Stallings [7] erhalten wir, indem wir nachprüfen, daß geeignete Normalteiler von G_Γ endlich erzeugt sind, den

6.1. **Satz.** Sei Γ ein Graph und G_Γ auflösbar.

Behauptung. M_Γ fasert genau dann über S^1 als S^2 - oder T^2 -Bündel, wenn $\text{ord}(G_\Gamma/[G_\Gamma, G_\Gamma])$ unendlich ist.

Genau folgende Graphenmannigfaltigkeiten M_Γ lassen sich über S^1 mit Faser S^2 oder T^2 fasn (wir setzen Γ natürlich nach RI–RIII reduziert voraus):

- (a) Γ ist eine Ecke mit Bewertung 0,
- (b) Γ ist sternförmig

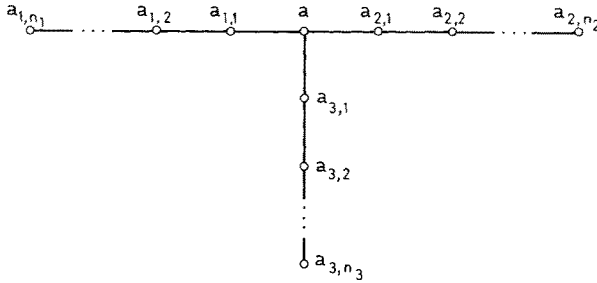


Fig. 8

und ist

$$\alpha_i = p(a_{i,1}, \dots, a_{i,n_i}),$$

$$\beta_i = p(a_{i,2}, \dots, a_{i,n_i}), \quad i = 1, 2, 3,$$

dann muß $(|\alpha_1|, |\alpha_2|, |\alpha_3|)$ eins der Tripel $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ oder $(3, 3, 3)$ sein und a die Gleichung

$$\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\alpha_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1\alpha_2 = 0$$

erfüllen.

- (c) Γ ist der Graph

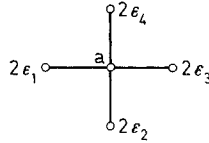


Fig. 9

und $\varepsilon_i = \pm 1$, $a = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$.

- (d) Γ ist von der Gestalt

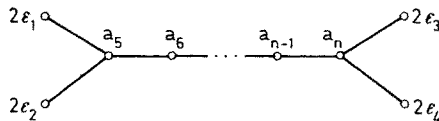


Fig. 10

mit $\varepsilon_i = \pm 1$, $n \geq 6$ und

$$p(a_5 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), a_6, \dots, a_{n-1}, a_n - \frac{1}{2}(\varepsilon_3 + \varepsilon_4)) = 0.$$

(e) Γ ist rein zyklisch.

(f) Γ ist ein Graph mit einem Zyklus und einer #-Ecke,

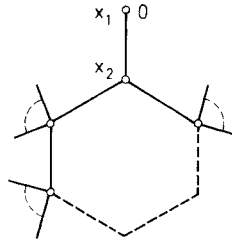


Fig. 11

so daß $\Gamma = \Gamma - \{x_1, x_2\}$ ein Baum mit $G_{\tilde{\Gamma}} = (1)$ ist.

In den Fällen (a) und (f) ist $M_{\Gamma} \approx S^2 \times S^1$, in den anderen Fällen fasert M_{Γ} als Torusbündel über S^1 .

Literatur

1. Hirzebruch, F., Neumann, W.D., Koh, S.S.: Differentiable manifolds and quadratic forms. New York: Marcel Dekker Inc. 1971
2. Kodaira, K.: On compact analytic surfaces. II. Ann. of Math. **77**, 563—626 (1963)
3. Mumford, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publ. Math. No. 9, I.H.E.S., Paris (1961)
4. Orlik, P., Vogt, E., Zieschang, H.: Zur Topologie gefaseter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Topology **6**, 49—64 (1967)
5. Randow, R. von: Zur Topologie von Dreidimensionalen Baumannigfaltigkeiten. Bonner Mathematische Schriften Nr. **14**, Bonn (1962)
6. Seifert, H., Threlfall, W.: Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des Dreidimensionalen Sphärischen Raumes. II. Math. Ann. **107**, 543—586 (1932)
7. Stallings, J.: On fibering certain 3-manifolds. In: Topology of 3-manifolds, 95—100. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall 1962
8. Wagreich, P.: Singularities of complex surfaces with solvable local fundamental group. Topology **11**, 51—72 (1972)
9. Waldhausen, F.: Beiträge zur Theorie der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Dissertation, Bonn (1965)

Dr. A. Scharf
Mathematisches Institut der Universität
D-5300 Bonn
Wegelerstr. 10
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 29. August 1974)