

# Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen.

Von H. SEIFERT in Dresden.

In einen beliebigen Knoten  $f$  des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^3$  läßt sich eine singularitätenfreie Fläche  $\mathfrak{F}$  einspannen, d. h. es gibt eine Kugel mit  $h$  Henkeln und einem Loch, so daß der Lochrand gerade der Knoten  $f$  ist.  $\mathfrak{F}$  kann aufgefaßt werden als ein Elementarflächenstück mit  $2h$  angesetzten Bändern. Aus dieser Darstellung von  $\mathfrak{F}$  leitet sich eine  $2h$ -reihige quadratische Matrix  $\Gamma$  ab, deren Elemente die gegenseitigen „Überkreuzungszahlen“ der Bänder sind. In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> habe ich gezeigt, wie sich aus der Matrix  $\Gamma$  die Homologiegruppen einer beliebigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit des Knotenaußerraumes ableiten lassen. Im folgenden soll gezeigt werden, daß auch die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeiten durch die Matrix  $\Gamma$  bestimmt sind. Hieraus ergibt sich zugleich ein einfaches Verfahren, um die Verschlingungsinvarianten für einen vorgelegten Knoten wirklich auszurechnen. — Besonders einfach liegen die Verhältnisse bei den zweiblättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeiten, da dann an Stelle von  $\mathfrak{F}$  auch eine nicht-orientierbare Fläche verwendet werden kann. Die Verschlingungsinvarianten der zweiblättrigen Überlagerung stehen in einem einfachen Zusammenhang mit der quadratischen Form des Knotens.

## § 1. Bestimmung der Verschlingungsinvarianten in einer beliebigen Mannigfaltigkeit.

1. Ich erinnere kurz an die Erklärung der Verschlingungsinvarianten<sup>2)</sup>.  $\mathfrak{M}$  sei eine dreidimensionale, orientierbare und in bestimmter Weise orientierte Mannigfaltigkeit und  $\mathfrak{T}$  ihre Torsionsgruppe der Dimension 1;  $\mathfrak{T}$  ist also die von den Elementen endlicher Ordnung gebildete Untergruppe der Homologiegruppe  $\mathfrak{H}$ . Je zwei Elementen  $\{a\}$  und  $\{b\}$  — das sind Klassen untereinander homologer 1-Ketten<sup>3)</sup> — von  $\mathfrak{T}$  kommt dann

<sup>1)</sup> H. SEIFERT, Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann. **110** (1934), S. 571—592. Im folgenden zitiert mit „Geschl.“.

<sup>2)</sup> Vgl. H. SEIFERT, Verschlingungsinvarianten, S. B. Preuß. Akad. Wiss. **26** (1933), S. 811—823. Im folgenden zitiert mit „Verschl.“.

<sup>3)</sup> Über die Terminologie vgl. H. SEIFERT und W. THRELFALL, Lehrbuch der Topologie (Leipzig 1934). Es genügt, wenn man sich unter einer geschlossenen 1-Kette eine geschlossene orientierte Kurve und unter einer 2-Kette eine orientierte Fläche vorstellt.

Die Verschlingungsinvarianten

eine bis auf ganze Zahlen be-

zu: man nimmt aus den  $H_1$  geschlossene 1-Ketten  $a$  und  $b$ .  $a$  ist ein Vielfaches von  $a$  homotop zu  $a$ , deren Rand ein Vielfaches von  $a$  ist.

Unter der Verschlingungszahl  $\mathfrak{Q}(a, b)$  versteht man dann die Verschlingungszahl der 2-Kette  $A$  mit der 1-Kette  $B$ .  $A$  ist eine 2-Kette,  $B$  eine 1-Kette,  $a$  und  $b$  sind Ketten  $a$  und  $b$ , so untersehe  $\mathfrak{Q}(a, b)$  eine ganze Zahl, so daß die Verschlingungszahl  $\mathfrak{Q}(a, b)$  eine ganze Zahl ist.

und die Ungleichung  $0 \leq \mathfrak{Q}(a, b)$  eindeutig festgelegt ist.

Kennt man in der Gruppe  $\mathfrak{T}$  die Elemente, so ergeben sich  $n$  von  $\mathfrak{T}$  auf rein gruppentheoretische Weise Restsymbole, deren genaue Torsionsgruppe  $\mathfrak{T}$  ist. Wir werden also unsere Verschlingungsinvarianten, als gelöste Verschlingungsinvarianten, als gelöste Verschlingungsinvarianten betrachten.  $\mathfrak{T}$  die Verschlingungszahl  $\mathfrak{Q}(a, b)$ .

2. In den konkreten Fällen der Überlagerungen, ist nun die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}$  und Relationen bestimmt. Man hat 1-Ketten

$$(1) \quad a_1, \dots, a_n$$

so daß jede beliebige geschlossene 1-Kette eine lineare Kombination der  $a_i$  ist.  $\mathfrak{H}$  ist dann durch gewisse Homologien

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \mathfrak{Q}(a_i, a_j) a_i \otimes a_j$$

eine beliebige in  $\mathfrak{H}$  gültige Homologie „gültige Homologien“ durch ganzzahlige Koeffizienten  $\mathfrak{Q}(a_i, a_j)$  dargestellt werden. Durch die Homologie  $\mathfrak{H}$  damit auch die Torsionsgruppe  $\mathfrak{T}$  und die Verschlingungszahlen  $\mathfrak{Q}(a_i, a_j)$ .

eine bis auf ganze Zahlen bestimmte rationale Verschlingungszahl

$$\mathfrak{V}(\{a\}, \{b\})$$

zu: man nimmt aus den Homologieklassen  $\{a\}$  und  $\{b\}$  punktfremde geschlossene 1-Ketten  $a$  und  $b$ ; da  $\{a\}$  eine endliche Ordnung hat, so ist ein Vielfaches von  $a$  homolog Null, d. h. es gibt eine 2-Kette  $A$ , deren Rand ein Vielfaches von  $a$  ist:

$$\mathfrak{R}\partial A = \alpha a.$$

Unter der Verschlingungszahl  $\mathfrak{V}(a, b)$  der beiden punktfremden 1-Ketten  $a$  und  $b$  versteht man dann die durch  $\alpha$  dividierte Schnittzahl  $\mathfrak{S}(A, b)$  der 2-Kette  $A$  mit der 1-Kette  $b$ . Ersetzt man  $a$  und  $b$  durch homologe Ketten  $a'$  und  $b'$ , so unterscheiden sich  $\mathfrak{V}(a, b)$  und  $\mathfrak{V}(a', b')$  um eine ganze Zahl, so daß die Verschlingungszahl  $\mathfrak{V}(\{a\}, \{b\})$  durch die Festsetzung

$$\mathfrak{V}(\{a\}, \{b\}) \equiv \mathfrak{V}(a, b) \pmod{1}$$

und die Ungleichung

$$0 \leq \mathfrak{V}(\{a\}, \{b\}) < 1$$

eindeutig festgelegt ist.

Kennt man in der Gruppe  $\mathfrak{T}$  die Verschlingungszahl je zweier Elemente, so ergeben sich nummehr die Verschlingungsinvarianten von  $\mathfrak{T}$  auf rein gruppentheoretischem Wege als gewisse Legendresche Restsymbole, deren genaue Definition wir zunächst nicht benötigen. Wir werden also unsere Aufgabe, die Ermittlung der Verschlingungsinvarianten, als gelöst betrachten, wenn wir von je zwei Elementen von  $\mathfrak{T}$  die Verschlingungszahl ermittelt haben.

2. In den konkreten Fällen, insbesondere bei den zyklischen Knotenüberlagerungen, ist nun die Homologiegruppe  $\mathfrak{S}$  fast stets durch Erzeugende und Relationen bestimmt. Man kennt also ein System von geschlossenen 1-Ketten

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n,$$

so daß jede beliebige geschlossene 1-Kette homolog einer ganzzahligen linearen Kombination der  $a_k$  ist. Die definierenden Relationen von  $\mathfrak{S}$  sind dann gewisse Homologien

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_k \sim 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Eine beliebige in  $\mathfrak{S}$  gültige Homologie kann aus diesen „fundamentalen Homologien“ durch ganzzahlige lineare Zeilenkombination erhalten werden. Durch die Homologien (2) ist die Homologiegruppe  $\mathfrak{S}$  und damit auch die Torsionsgruppe  $\mathfrak{T}$  völlig bestimmt. Um aber die gegenseitigen Verschlingungszahlen der Elemente von  $\mathfrak{T}$  zu ermitteln, bedarf

ten der zyklischen  
rungen.

Dresden.

klidischen Raumes  $\mathfrak{R}^3$  läßt sich  
zen, d. h. es gibt eine Kugel mit  
Lochrand gerade der Knoten f  
Elementarflächenstück mit  $2h$   
stellung von  $\mathfrak{F}$  leitet sich eine  
en Elemente die gegenseitigen  
. In einer früheren Arbeit')  
Γ die Homologiegruppen einer  
sigfaltigkeit des Knotenaußen-  
oll gezeigt werden, daß auch  
ien Überlagerungsmannigfaltig-

Hieraus ergibt sich zugleich  
lingungsinvarianten für einen  
a. — Besonders einfach liegen  
erlagerungsmannigfaltigkeiten,  
orientierbare Fläche verwendet  
aten der zweiblättrigen Über-  
menhang mit der quadratischen

ngsinvarianten in einer  
altigkeit.

er Verschlingungsinvarianten<sup>2)</sup>.  
re und in bestimmter Weise  
rsionsgruppe der Dimension 1;  
er Ordnung gebildete Unter-  
Elementen  $\{a\}$  und  $\{b\}$  — das  
etten<sup>3)</sup> — von  $\mathfrak{T}$  kommt dann

z. Math. Ann. 110 (1934), S. 571—592.

1, S. B. Preuß.-Akad. Wiss. 26 (1933),

and W. THRELFALL, Lehrbuch der  
th unter einer geschlossenen 1-Kette  
er 2-Kette eine orientierte Fläche

es darüber hinaus noch der Kenntnis der 2-Ketten

$$(3) \quad A_1, A_2, \dots, A_m,$$

die die 1-Kette  $\sum \alpha_{ik} a_k$  zum Rand haben:

$$(4) \quad \mathfrak{R}D A_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_k \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Schließlich seien

$$a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$$

$n$  zu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  punktfremde 1-Ketten, und es sei  $a_k^* \sim a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).  $a_k^*$  kann z. B. durch eine kleine Deformation aus  $a_k$  erhalten werden. Dann sind die Schnittzahlen

$$(5) \quad \mathfrak{S}(A_i, a_k^*),$$

da  $a_k^*$  den Rand von  $A_i$  nicht trifft, wohldefiniert. Ich behaupte, daß die Schnittzahlen (5) zusammen mit den „fundamentalen Berandungsrelationen“ (4) die Verschlingungszahl zweier beliebiger Elemente  $\{a\}$  und  $\{b\}$  von  $\mathfrak{T}$  bestimmen. Sind nämlich  $a = \sum \alpha_i a_i$  und  $b = \sum \beta_i a_i$  Repräsentanten aus  $\{a\}$  und  $\{b\}$ , so ist die Homologie  $aa \sim 0$  eine Folge der Homologien (2). Es besteht also eine Beziehung

$$\mathfrak{R}D \sum_{i=1}^m \gamma_i A_i = aa.$$

Da ferner

$$b = \sum_{k=1}^n \beta_k a_k \sim \sum_{k=1}^n \beta_k a_k^*,$$

so hat man

$$\begin{aligned} V(\{a\}, \{b\}) &= \frac{1}{\alpha} \mathfrak{S} \left( \sum_{i=1}^m \gamma_i A_i, \sum_{k=1}^n \beta_k a_k^* \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \gamma_i \beta_k \mathfrak{S}(A_i, a_k^*) \pmod{1}. \end{aligned}$$

Die Zahlen  $\mathfrak{S}(A_i, a_k^*)$  sind aber nach Voraussetzung bekannt.

Es kommt also nur darauf an, ein System von fundamentalen Berandungsrelationen (4) und die Schnittzahlen (5) zu ermitteln. Das ist aber gerade bei den zyklischen Knotenüberlagerungen sehr leicht.

### § 2. Die zyklischen Knotenüberlagerungen.

1. Die zu dem Knoten  $f$  gehörige  $g$ -blättrige zyklische Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_g$  ist eine verzweigte  $g$ -blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit des durch einen unendlich fernen Punkt zur 3-Sphäre  $\mathfrak{S}$  geschlossenen euklidischen Raumes, in dem der Knoten liegt. Die

einzigste Verzweigungslinie ist „Blätter“ setzen sich zyklisch werden voneinander getrennt

$$\mathfrak{F}, a$$

die alle den Knoten  $f$  zum Ra in ein und dieselbe in den K bezeichnete Fläche des Grund eine zyklische Gruppe topolog  $g$  Blätter zyklisch vertauschen, linie, punktweise fest bleibt. die ein Blatt  $\mathfrak{S}$  in das angrenz Umschlingung des Knotens al sind die Blätter der Reihe na

$$\mathfrak{S}, a$$

zu bezeichnen. Nehmen wir n und  $x\mathfrak{F}$  eingeschlossen wird, Knotens  $f$  die zyklische Folge

$$\mathfrak{F}, \mathfrak{S}, x\mathfrak{F}, x\mathfrak{S}.$$

Identifiziert man in einem Bla so schließt sich  $\mathfrak{S}$  zur 3-Sphä

2. Wir müssen nun die Be aufstellen. Diese sind, wie w zahlige Matrix  $\Gamma$  bestimmt, zu Wir fassen wie in Geschl. S. raum  $\mathfrak{S}$  liegende Fläche  $\mathfrak{F}$  als e stück  $\mathfrak{G}$  mit  $2h$  angesetzten l dürfen wir annehmen, daß  $\mathfrak{G}$  jektion eine Kreisscheibe ist, c nicht überschritten wird und der Projektion unverdrillt ers

Wir ziehen nun auf  $\mathfrak{F}$  gierten Rückkehrschnitten

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots,$$

Von denen jeder ein angesetz werden, daß  $a_{2r+2}$  von  $a_{2r+1}$  i

Die einzige Verzweigungslinie ist der Knoten  $f$ . Die  $g$  dreidimensionalen „Blätter“ setzen sich zyklisch um den Knoten herum aneinander und werden voneinander getrennt durch die  $g$  orientierbaren Flächen

$$\mathfrak{F}, x\mathfrak{F}, \dots, x^{g-1}\mathfrak{F},$$

die alle den Knoten  $f$  zum Rand haben und die sich alle eineindeutig in ein und dieselbe in den Knoten eingespannte und ebenfalls mit  $\mathfrak{F}$  bezeichnete Fläche des Grundraumes  $\mathfrak{S}$  durchdrücken.  $M_g$  gestattet eine zyklische Gruppe topologischer Selbstabbildungen, bei der sich die  $g$  Blätter zyklisch vertauschen, während der Knoten  $f$ , die Verzweigungslinie, punktweise fest bleibt. Ist  $x$  diejenige Abbildung der Gruppe, die ein Blatt  $\mathfrak{S}$  in das angrenzende überführt (dabei muß eine bestimmte Umschlingung des Knotens als die positive angenommen werden), so sind die Blätter der Reihe nach mit

$$\mathfrak{S}, x\mathfrak{S}, \dots, x^{g-1}\mathfrak{S}$$

zu bezeichnen. Nehmen wir noch an, daß  $\mathfrak{S}$  von den beiden Flächen  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  eingeschlossen wird, so hat man bei einer Umschlingung des Knotens  $f$  die zyklische Folge

$$\mathfrak{F}, \mathfrak{S}, x\mathfrak{F}, x\mathfrak{S}, \dots, x^{g-2}\mathfrak{S}, x^{g-1}\mathfrak{F}, x^{g-1}\mathfrak{S}.$$

Identifiziert man in einem Blatt, etwa  $\mathfrak{S}$ , die Randflächen  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$ , so schließt sich  $\mathfrak{S}$  zur 3-Sphäre  $\mathfrak{S}$ .

2. Wir müssen nun die Berandungs- und Schnittrelationen (4) und (5) aufstellen. Diese sind, wie wir sehen werden, durch eine einzige ganzzahlige Matrix  $\Gamma$  bestimmt, zu der man auf die folgende Weise gelangt. Wir fassen wie in Geschl. S. 584 die im Grundraum  $\mathfrak{S}$  liegende Fläche  $\mathfrak{F}$  als ein Elementarflächenstück  $\mathfrak{E}$  mit  $2h$  angesetzten Bändern auf. Dabei dürfen wir annehmen, daß  $\mathfrak{E}$  in der ebenen Projektion eine Kreisscheibe ist, die von den Bändern nicht überschritten wird und daß die Bänder in der Projektion unverdrillt erscheinen.

Wir ziehen nun auf  $\mathfrak{F}$   $h$  Paare von konjugierten Rückkehrerschnitten

$$a_1, a_2; a_2, a_1; \dots; a_{2h-1}, a_{2h},$$

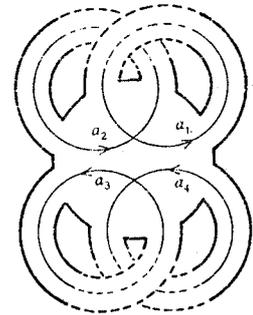


Fig. 1.

von denen jeder ein angesetztes Band durchläuft und die so orientiert werden, daß  $a_{2r+2}$  von  $a_{2r+1}$  in dem gemeinsamen Punkt von links nach

rechts durchsetzt wird (die Fig. 1 zeigt den Fall  $h = 2$ ; die gestrichelten Teile der Bänder sollen andeuten, daß sich die Bänder untereinander noch beliebig verschlingen können). Man hat also bei richtiger Orientierung der Fläche  $\mathfrak{F}$  die Schnittzahlen

$$(6) \text{ und daher } \left. \begin{aligned} \mathfrak{S}(a_{2r+1}, a_{2r+2}) &= +1 \\ \mathfrak{S}(a_{2r+2}, a_{2r+1}) &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \mathfrak{F} \quad (r = 0, 1, \dots, h-1)$$

während alle anderen Schnittzahlen  $= 0$  sind.

Es bezeichne  $v_{ik}$  die Überkreuzungszahl von  $a_i$  und  $a_k$ , d. h. die Anzahl der Überkreuzungen, bei denen  $a_k$  von links nach rechts über  $a_i$  geht, vermindert um die Anzahl der Überkreuzungen, bei denen  $a_k$  von rechts nach links über  $a_i$  geht. (Sind  $a_i$  und  $a_k$  konjugierte Rückkehrschnitte, so zählt ihr gemeinsamer Schnittpunkt natürlich nicht als Überkreuzung.) Die  $2h$ -reihige Matrix  $\Gamma = (\gamma_{ik})$  wird nun erhalten, wenn man in der Matrix  $(v_{ik})$  die  $(2r+1)$ -te Spalte mit der  $(2r+2)$ -ten vertauscht, für  $r = 0, 1, \dots, h-1$ , und danach in allen geraden Spalten die Vorzeichen umkehrt. Es ist also

$$(7) \quad \Gamma = (v_{ik}) \Delta,$$

wo

$$(8) \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt ist (freie Plätze sind mit Nullen gefüllt zu denken).

Den  $2h$  Rückkehrschnitten  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  entsprechen auf der Fläche  $x^s \mathfrak{F}$  die Rückkehrschnitte  $x^s a_1, x^s a_2, \dots, x^s a_{2h}$ , die wir zu einem Vektor (einspaltige Matrix)

$$x^s a = \begin{pmatrix} x^s a_1 \\ x^s a_2 \\ \vdots \\ x^s a_{2h} \end{pmatrix} \quad (s = 0, 1, \dots, g-1)$$

zusammenfassen.

Was nun die Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_g$  von  $\mathfrak{M}_g$  betrifft, so stützen wir uns auf den folgenden Satz (vgl. Geschl. S. 576): *Die Homologiegruppe  $H_g$  der zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_g$  wird erzeugt von den  $2hg$  1-Ketten*

$$(9) \quad a_1, \dots, a_{2h}, \dots, x^{g-1} a_1, \dots, x^{g-1} a_{2h},$$

während die Relationen in  $\mathfrak{M}$

$$(10) \quad \begin{aligned} a & \\ x a & \\ & \vdots \\ x^{g-1} a & \end{aligned}$$

Diese Relationen gelten der Reihe nach. In  $x^s \mathfrak{S}$  gibt es also  $2h$

$$(11) \quad x^s A_i,$$

mit den Rändern

$$(12) \quad \mathfrak{R} \partial x^s A_i = x^s \partial A_i$$

oder in Matrixschreibung, v

$$x^s A$$

setzen,

$$(13) \quad \mathfrak{R} \partial x^s A = (E -$$

dabei ist  $x^g a = a$  zu setzen und

Die Gleichungen (13) sind des vorigen Paragraphen. Es zu ermitteln. Dies ist bei gemein nicht ohne genaue vorliegenden Fälle dagegen zu machen haben, daß  $x^s A_i$  ge unter  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_{2h}^*$  ein Sy durch eine (kleine) Deforma hervorgehen.

Wegen der zyklischen Schnittzahlen  $\mathfrak{S}(A_i, x^s a_k^*)$   $x^s \mathfrak{S}$  liegt, so ist sicher

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{S}(A_i, x^s a_k^*) &= 0 \\ & \text{für } s = 1, 2, \dots, g-1 \end{aligned}$$

Um die Schnittzahlen  $\mathfrak{S}(A_i, x^s a_k^*)$  ermitteln, bedenken wir, daß dem aus der Fläche  $\mathfrak{F} + a$  henden Rand von  $\mathfrak{S}$  liegt  $a_k^*$  dem Rand von  $\mathfrak{S}$  sehr punkt von  $A_i$  mit  $a_k^*$  ein Schnit

im Fall  $h = 2$ ; die gestrichelten  
die Bänder untereinander noch  
also bei richtiger Orientierung

ist  $\mathfrak{F} \quad (r = 0, 1, \dots, h-1)$

0 sind.  
szahl von  $a_i$  und  $a_k$ , d. h. die  
 $a_k$  von links nach rechts über  
berkreuzungen, bei denen  $a_k$  von  
und  $a_k$  konjugierte Rückkehr-  
schnittpunkt natürlich nicht als  
 $\Gamma = (\gamma_{ik})$  wird nun erhalten.  
te Spalte mit der  $(2r+2)$ -ten  
danach in allen geraden Spalten

während die Relationen in Matrixschreibung lauten

$$(10) \quad \begin{aligned} a &\sim \Gamma(a - xa), \\ xa &\sim \Gamma(xa - x^2 a), \\ &\dots \\ x^{g-1} a &\sim \Gamma(x^{g-1} a - a). \end{aligned}$$

Diese Relationen gelten der Reihe nach in den Blättern  $\bar{\mathfrak{S}}, x\bar{\mathfrak{S}}, \dots, x^{g-1}\bar{\mathfrak{S}}$ .  
In  $x^s \bar{\mathfrak{S}}$  gibt es also  $2h$  2-Ketten

$$(11) \quad x^s A_1, x^s A_2, \dots, x^s A_{2h}$$

mit den Rändern

$$(12) \quad \mathfrak{R}\partial x^s A_i = x^s a_i - \sum_{k=1}^{2h} \gamma_{ik} (x^s a_k - x^{s+1} a_k),$$

oder in Matrixschreibung, wenn wir

$$x^s A = \begin{pmatrix} x^s A_1 \\ x^s A_2 \\ \vdots \\ x^s A_{2h} \end{pmatrix} \quad (s = 0, 1, \dots, g-1)$$

setzen,

$$(13) \quad \mathfrak{R}\partial x^s A = (E - \Gamma) x^s a + \Gamma x^{s+1} a \quad (s = 0, 1, \dots, g-1);$$

dabei ist  $x^g a = a$  zu setzen und  $E$  bezeichnet die  $2h$ -reihige Einheitsmatrix.

Die Gleichungen (13) sind die fundamentalen Berandungsrelationen (4) des vorigen Paragraphen. Es bleiben somit noch die Schnittzahlen (5) zu ermitteln. Dies ist bei einer beliebigen Mannigfaltigkeit im allgemeinen nicht ohne genaue Kenntnis der 2-Ketten  $A_i$  möglich. Im vorliegenden Falle dagegen werden wir nur von der Tatsache Gebrauch zu machen haben, daß  $x^s A_i$  ganz im Blatt  $x^s \bar{\mathfrak{S}}$  verläuft. Wir verstehen unter  $a_1^*, a_2^*, \dots, a_{2h}^*$  ein System von 1-Ketten, die aus  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  durch eine (kleine) Deformation in das Innere des Blattes  $\bar{\mathfrak{S}}$  hinein hervorgehen.

Wegen der zyklischen Symmetrie von  $\mathfrak{M}_g$  genügt es offenbar, die Schnittzahlen  $\mathfrak{S}(A_i, x^s a_k^*)$  zu betrachten. Da  $A_i$  in  $\bar{\mathfrak{S}}$  und  $x^s a_k^*$  in  $x^s \bar{\mathfrak{S}}$  liegt, so ist sicher

$$(14) \quad \mathfrak{S}(A_i, x^s a_k^*) = 0 \quad \text{für } s = 1, 2, \dots, g-1.$$

Um die Schnittzahlen  $\mathfrak{S}(A_i, a_k^*)$  zu ermitteln, bedenken wir, daß  $\mathfrak{R}\partial A_i$  auf dem aus der Fläche  $\mathfrak{F} + x\mathfrak{F}$  bestehenden Rand von  $\bar{\mathfrak{S}}$  liegt und daß  $a_k^*$  dem Rand von  $\bar{\mathfrak{S}}$  sehr nahekommt. Es wird also jedem Schnittpunkt von  $A_i$  mit  $a_k^*$  ein Schnittpunkt von  $\mathfrak{R}\partial A_i$  mit  $a_k$  entsprechen (Fig. 2),

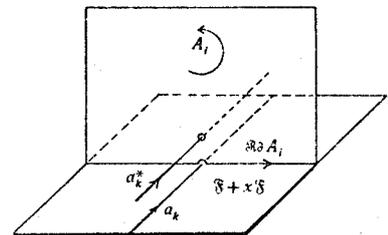


Fig. 2.

0-1  
1 0

gefüllt zu denken).

$\dots, a_{2h}$  entsprechen auf der  
 $x^s a_2, \dots, x^s a_{2h}$ , die wir zu

$$(s = 0, 1, \dots, g-1)$$

von  $\mathfrak{M}_g$  betrifft, so stützen wir  
(6): Die Homologiegruppe  $H_g$  der  
 $\mathfrak{M}_g$  wird erzeugt von den  $2hg$

$$a_1, \dots, x^{g-1} a_{2h},$$

und man hat, wenn die Orientierung von  $\mathfrak{F}$  die von  $\mathfrak{S}$  induzierte ist, was wir annehmen wollen<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(A_i, a_k^*) & \quad (\text{in } \mathfrak{S}) \\ = \mathfrak{S}(\mathfrak{R}\partial A_i, a_k) & \quad (\text{auf } \mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Nach (12) ist

$$\mathfrak{R}\partial A_i = a_i - \sum_{j=1}^{2h} r_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{2h} r_{ij} x a_j.$$

Da  $a_k$  und die  $x a_j$  auf verschiedenen Flächen  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  liegen, also punktfremd sind, so liefert  $\sum r_{ij} x a_j$  keinen Beitrag zur Schnittzahl, und man findet mit Hilfe von (6) für die Schnittmatrix  $(\mathfrak{S}(\mathfrak{R}\partial A_i, a_k))$ :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}(\mathfrak{R}\partial A_i, a_k)) & \quad (\text{auf } \mathfrak{F}) \\ = (E - \Gamma) (-\Delta), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}(A_i, a_k^*)) & \quad (\text{in } \mathfrak{M}_g) \\ (15) \quad = (\Gamma - E) \Delta. \end{aligned}$$

3. Mit der Aufstellung der Schnittzahlen können die Verschlingungsvarianten als ermittelt betrachtet werden. Es bedeutet aber für die praktischen Rechnungen eine große Vereinfachung, wenn man von der Bemerkung Gebrauch macht, daß von den  $2gh$  1-Ketten  $x^s a_k$  bereits die  $2h$  1-Ketten  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}_g$  erzeugen.

Wir betrachten die Relationen (13) für  $s = 0$  und  $s = 1$ :

$$(16_1) \quad \mathfrak{R}\partial A = (E - \Gamma) a + \Gamma x a,$$

$$(16_2) \quad \mathfrak{R}\partial x A = (E - \Gamma) x a + \Gamma x^2 a.$$

Durch Addition der zweiten Zeile zur ersten erhält man die äquivalenten Relationen

$$(16'_1) \quad \mathfrak{R}\partial(A + x A) = (E - \Gamma) a + x a + \Gamma x^2 a,$$

$$(16_2) \quad \mathfrak{R}\partial x A = (E - \Gamma) x a + \Gamma x^2 a.$$

(16'\_1) bringt zum Ausdruck, daß die  $x a_i$  homolog Linearkombinationen der  $a_i$  und  $x^2 a_i$ , d. h. eliminierbar sind. Die Elimination geschieht durch Addition der mit  $\Gamma - E$  von links multiplizierten Relation (16'\_1) zu (16\_2):

$$(17_1) \quad \mathfrak{R}\partial[(\Gamma - E) A + \Gamma x A] = -(\Gamma - E)^2 a + \Gamma^2 x^2 a.$$

Hierzu wird die dritte Relation (13) hinzugenommen:

$$(17_2) \quad \mathfrak{R}\partial x^2 A = (E - \Gamma) x^2 a + \Gamma x^3 a.$$

<sup>1)</sup> Hier treten die Regeln für die Bestimmung der induzierten Orientierung und des Vorzeichens einer Schnittzahl in Kraft; vgl. das unter <sup>2)</sup> angeführte Lehrbuch S. 59 und S. 242.

Auf analoge Weise läßt sich Man addiert die mit  $E + \Gamma$  multiplizierte Relation (17\_1) übergeht in

$$(17_1) \quad \mathfrak{R}\partial[(\Gamma - E) A] = -(\Gamma - E)^2 A$$

Darauf wird die mit  $\Gamma - E$  multiplizierte Relation (17\_2) übergeht in

$$(18_1) \quad \mathfrak{R}\partial[(\Gamma - E)^2 A + \dots]$$

so fährt man fort. Man addiert die vierte Relation (13) und eliminiert selbst übrig und eine einzige Relation

$$(19) \quad \mathfrak{R}\partial[(\Gamma - E)^{g-1} A + \dots] = \dots$$

darin bezeichnen  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  sind die fundamentalen Berandungsketten  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  bestehen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(20) \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{2h} \end{pmatrix} = B = (\Gamma - E)^{g-1} A$$

so sind nunmehr wieder die  $x^s a_k$  zu  $x A, x^2 A, \dots, x^{g-1} A$  ( $(\Gamma - E)^{g-1} A$ ) ersetzen und finden

$$(21) \quad \mathfrak{S}(B_i, \dots)$$

Das Ergebnis ist der

Satz I. *Liegt die in den  $\mathfrak{M}_g$  als Elementarflächenstück mit den Überkreuzungszahlen  $v_{ik}$  der Formel (7) und (8) bestimmte Verschlingungsvariantenmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_g$  vor, so sind die fundamentalen Berandungsketten  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  durch die  $B_i$  zu ersetzen, und die Matrix der Schnittzahlen  $(\mathfrak{S}(B_i, B_j))$  ist*

$$(19) \quad \mathfrak{R}\partial B_i = \sum \varrho_{ik} a_k$$

$$(21) \quad (\mathfrak{S}(B_i, B_j)) = \dots$$

en  $\mathfrak{F}$  die von  $\mathfrak{S}$  induzierte ist,

(in  $\mathfrak{S}$ )  
(auf  $\mathfrak{F}$ ).

$$+ \sum_{j=1}^{2h} r_{ij} x a_j.$$

Flächen  $\mathfrak{F}$  und  $x\mathfrak{F}$  liegen, also  
den Beitrag zur Schnittzahl, und  
Schnittmatrix ( $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}\partial A_i, a_k)$ ):

(auf  $\mathfrak{F}$ )

(in  $\mathfrak{M}_g$ )

flächen können die Verschlingungs-  
gen. Es bedeutet aber für die  
Einfachung, wenn man von der  
2gh 1-Ketten  $x^s a_k$  bereits die  
Gruppe  $\mathfrak{H}_g$  erzeugen.

für  $s=0$  und  $s=1$ :

$$+ \Gamma x a.$$

$$+ \Gamma x^2 a.$$

Man erhält man die äquivalenten

$$+ x a + \Gamma x^2 a.$$

$$+ \Gamma x^2 a.$$

homolog Linearkombinationen  
Die Elimination geschieht durch  
die Relation (16<sub>1</sub>) zu (16<sub>2</sub>):

$$(\Gamma - E)^2 a + \Gamma^2 x^2 a.$$

angenommen:

$$a + \Gamma x^3 a.$$

ang der induzierten Orientierung und  
das unter <sup>3)</sup> angeführte Lehrbuch

Auf analoge Weise läßt sich nun aus (17<sub>1</sub>) und (17<sub>2</sub>)  $x^2 a$  eliminieren.  
Man addiert die mit  $E + \Gamma$  multiplizierte Relation (17<sub>2</sub>) zu (17<sub>1</sub>), wodurch  
(17<sub>1</sub>) übergeht in

$$(17'_1) \quad \mathfrak{R}\partial [(\Gamma - E)A + \Gamma xA + (E + \Gamma)x^2 A] \\ = -(\Gamma - E)^2 a + x^2 a + (\Gamma + \Gamma^2)x^3 a.$$

Darauf wird die mit  $\Gamma - E$  multiplizierte Relation (17<sub>1</sub>) zu (17<sub>2</sub>) addiert:

$$(18_1) \quad \mathfrak{R}\partial [(\Gamma - E)^2 A + \dots] = -(\Gamma - E)^3 a + \Gamma^3 x^3 a,$$

so fährt man fort. Man addiert zu (18<sub>1</sub>) die mit  $E + \Gamma + \Gamma^2$  multiplizierte  
vierte Relation (13) und eliminiert  $x^3 a$ . Schließlich bleibt nur noch  $a$   
selbst übrig und eine einzige Matrizenrelation, die die Form hat:

$$(19) \quad \mathfrak{R}\partial [(\Gamma - E)^{g-1} A + \Lambda_1 xA + \dots + \Lambda_{g-1} x^{g-1} A] \\ = [-(\Gamma - E)^g + \Gamma^g] a;$$

Darin bezeichnen  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{g-1}$  gewisse Polynome in  $\Gamma$ . Das  
sind die fundamentalen Berandungsrelationen, die für die Erzeugenden  
 $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  bestehen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(20) \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{2h} \end{bmatrix} = B = (\Gamma - E)^{g-1} A + \Lambda_1 xA + \dots + \Lambda_{g-1} x^{g-1} A.$$

so sind nunmehr wieder die Schnittzahlen  $\mathfrak{S}(B_i, a_k^*)$  zu ermitteln. Da  
 $a_k^*$  zu  $xA, x^2 A, \dots, x^{g-1} A$  punktfremd ist, kann man  $B$  durch  
 $(\Gamma - E)^{g-1} A$  ersetzen und findet mit Hilfe von (15):

$$(21) \quad (\mathfrak{S}(B_i, a_k^*)) = (\Gamma - E)^g \Delta.$$

Das Ergebnis ist der

**Satz I.** *Liegt die in den Knoten  $\mathfrak{k}$  eingespannte orientierbare Fläche  $\mathfrak{F}$   
als Elementarflächenstück mit  $2h$  angesetzten Bündern vor, so ist durch  
die Überkreuzungszahlen  $e_{ik}$  der Bündel die  $2h$ -reihige quadratische Matrix  $\Gamma$   
(Formel (7) und (8)) bestimmt, aus der sich die Homologiegruppen und  
die Verschlingungsinvarianten einer beliebigen zyklischen Überlagerungs-  
mannigfaltigkeit ergeben: Die Homologiegruppe  $\mathfrak{H}_g$  der  $g$ -blättrigen Über-  
lagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_g$  wird von  $2h$  1-Ketten  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  erzeugt,  
für die die fundamentalen Berandungsrelationen*

$$(19) \quad \mathfrak{R}\partial B_i = \sum e_{ik} a_k, \quad (e_{ik}) = \Gamma^g - (\Gamma - E)^g$$

bestehen, und die Matrix der Schnittzahlen heißt

$$(21) \quad (\mathfrak{S}(B_i, a_k^*)) = (\Gamma - E)^g \Delta.$$

Dabei bezeichnet  $E$  die  $2h$ -reihige Einheitsmatrix,  $\Delta$  die Matrix (8), und  $a_k^*$  ist eine geeignete zu  $a_k$  homologe und zu  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  punktfremde 1-Kette. Nach § 1 sind auf Grund dieser Angaben Homologiegruppe und Verschlingungsinvarianten von  $\mathfrak{R}_g$  berechenbar.

### § 3. Beispiele.

1. Die Berechnung der Verschlingungsinvarianten einer Knotenüberlagerung zerfällt in einen topologischen und einen algebraischen Teil: a) Bestimmung der Matrix  $\Gamma$ , b) Bestimmung der Verschlingungsinvarianten aus der Matrix  $\Gamma$  mit Hilfe von Satz I.

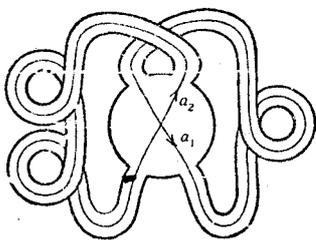


Fig. 3.

Die Elemente  $v_{ik}$  der Matrix  $\Gamma$  lassen sich sofort ablesen, wenn die in den Knoten eingespannte Fläche als Elementarflächenstück mit  $2h$  angesetzten Bändern gegeben ist. Das Band  $a_1$  in der Fig. 3 geht z. B.  $v_{11} = -1$  mal über sich selbst und  $v_{21} = 0$  mal über  $a_2$  hinweg; dabei sind Überkreuzungen von links nach rechts mit dem positiven, Überkreuzungen von rechts nach links mit dem negativen Vorzeichen zu nehmen.

Man findet so:

$$v_{11} = -1, \quad v_{22} = 2, \quad v_{12} = 1, \quad v_{21} = 0$$

und damit

$$\Gamma = \begin{pmatrix} v_{12} & -v_{11} \\ v_{22} & -v_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Relationen der Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_2$  der zweiblättrigen Überlagerung ergeben sich dann nach (19) aus der Matrix

$$2\Gamma - E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{R}\partial B_1 = a_1 + 2a_2 \sim 0,$$

$$\mathfrak{R}\partial B_2 = 4a_1 - a_2 \sim 0.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{R}\partial(B_1 + 2B_2) = 9a_1 \sim 0.$$

$\mathfrak{S}_2$  ist daher die von der Homologiekategorie  $\{a_1\}$  erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung 9.

Die Matrix  $(\Gamma - E)^2 \Delta$  der Formel (21) heißt

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (\mathfrak{S}(B_i, a_k^*)).$$

Man hat also

$$\mathfrak{S}(B_1 + 2B_2, a_1^*) = -1 + 6 = 5$$

und damit die Verschlingungsinvarianten quadratischer Nichtrest mod 3 gehörige Verschlingungsinvarianten

Kehrt man die räumliche Verschlingungszahlen ihr Vorzeichen wird gleich dem Legendrescher

daß der Knoten, der übrigens in einer Tabelle übereinstimmt, eine Tatsache, die mit den quadratischen Form des Knoten

Analog berechnet man blättrigen Überlagerung. Die Relationen sich aus der Matrix

$$\Gamma^3 - \Gamma$$

$$\mathfrak{R}\partial I$$

$$\mathfrak{R}\partial I$$

d. h.  $\mathfrak{S}_3$  ist direkte Summe von  $\{a_2\}$  erzeugten Gruppen der Ordnung

Da

$$(\mathfrak{S}(B_i, a_k^*)) =$$

ist, so hat man

$$\mathfrak{V}(\{a_1\}, \{a_1\})$$

und entsprechend

$$\mathfrak{V}(\{a_2\}, \{a_2\})$$

$$\mathfrak{V}(\{a_1\}, \{a_2\})$$

Die zu 7 gehörige Verschlingungsinvarianten Restcharakter der Determinante

$$|7 \mathfrak{V}(\{a_i\}, \{a_j\})|$$

also  $V(7) = -1$ .

Da eine Änderung aller Orientierungen ihren Wert ohne Einfluß ist, ist die Verschlingungsinvariante unorientierung des Raumes ein

2. Ist mit dem Knoten  $V$  die Form eines Elementarflächenstückes

Matrix,  $\Delta$  die Matrix (8), und zu  $a_1, a_2, \dots, a_{2h}$  punktfremder Angaben Homologiegruppe berechenbar.

ele.  
 gungsinvarianten einer Knoten-  
 schen und einen algebraischen  
 estimmung der Verschlingungs-  
 von Satz I.

emente  $v_{ik}$  der Matrix  $\Gamma$  lassen  
 lesen, wenn die in den Knoten  
 Fläche als Elementarflächen-  
 angesetzten Bändern gegeben  
 ad  $a_1$  in der Fig. 3 geht z. B.  
 al über sich selbst und  $v_{21} = 0$   
 2 hinweg; dabei sind Über-  
 von links nach rechts mit dem  
 erkreuzungen von rechts nach  
 negativen Vorzeichen zu nehmen.

$$v_{11} = 1, \quad v_{21} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

er zweiblättrigen Überlagerung  
 matrix

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}:$$

$$2a_2 \sim 0,$$

$$-a_2 \sim 0.$$

$$3a_1 \sim 0.$$

$\{a_1\}$  erzeugte zyklische Gruppe

21) heißt

$$(B_i, a_k^*).$$

$$-1 + 6 = 5$$

und damit die Verschlingungszahl  $\mathcal{Q}(\{a_1\}, \{a_1\}) = +\frac{5}{9}$ . Da  $+5$  quadratischer Nichtrest mod 3 ist, so ist die zur Primzahlpotenz  $3^2$  gehörige Verschlingungsinvariante  $V(3^2) = -1$ .

Keht man die räumliche Orientierung um, so ändern die Verschlingungszahlen ihr Vorzeichen, und die Verschlingungsinvariante wird gleich dem Legendreschen Symbol  $\left(\frac{-5}{3}\right) = +1$ . Hieraus folgt, daß der Knoten, der übrigens mit dem Knoten  $6_1$  der Alexander-Briggschen Tabelle übereinstimmt, nicht in sein Spiegelbild deformierbar ist, eine Tatsache, die mit den anderen bisher bekannten Methoden (quadratische Form des Knotens) nicht beweisbar ist.

Analog berechnet man die Verschlingungsinvarianten der dreiblättrigen Überlagerung. Die Relationen der Homologiegruppe  $\mathfrak{S}_3$  ergeben sich aus der Matrix

$$\Gamma^3 - (\Gamma - E)^3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{S} B_1 = 7 a_1 \sim 0,$$

$$\mathfrak{R}\mathfrak{S} B_2 = 7 a_2 \sim 0,$$

d. h.  $\mathfrak{S}_3$  ist direkte Summe zweier von den Homologieklassen  $\{a_1\}$  und  $\{a_2\}$  erzeugten Gruppen der Ordnung 7.

Da

$$(\mathfrak{S}(B_i, a_k^*)) = (\Gamma - E)^3 \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

ist, so hat man

$$\mathcal{Q}(\{a_1\}, \{a_1\}) = \frac{1}{7} \mathfrak{S}(B_1, a_1^*) = \frac{3}{7}$$

und entsprechend

$$\mathcal{Q}(\{a_2\}, \{a_2\}) = \frac{1}{7} \left( \equiv -\frac{6}{7} \pmod{1} \right),$$

$$\mathcal{Q}(\{a_1\}, \{a_2\}) = \mathcal{Q}(\{a_2\}, \{a_1\}) = \frac{2}{7}.$$

Die zu 7 gehörige Verschlingungsinvariante  $V(7)$  ist nun der quadratische Restcharakter der Determinante

$$7 \mathcal{Q}(\{a_i\}, \{a_k\}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

also  $V(7) = -1$ .

Da eine Änderung aller Vorzeichen in dieser Determinante auf ihren Wert ohne Einfluß ist, so bleibt die Verschlingungsinvariante bei Umorientierung des Raumes erhalten.

2. Ist mit dem Knoten nicht zugleich die eingespannte Fläche in Form eines Elementarflächenstückes mit  $2h$  angesetzten Bändern gegeben,

sondern liegt etwa der Knoten in einer beliebigen ebenen Projektion vor (die Fig. 4 zeigt eine Projektion der Kleeblattschlinge), so gewinnt man die Matrix  $\Gamma$  folgendermaßen. Man spannt in den Knoten eine orientierbare Fläche  $\mathfrak{F}$  vom Geschlechte  $h$  nach dem in Geschl. S. 572 beschriebenen Verfahren ein (in Fig. 4 ist die Fläche schraffiert), und zieht auf ihr von einem festen Punkte  $P$  aus  $h$  Paare konjugierter Rückkehrschnitte  $a_1, a_2, \dots, a_{2h-1}, a_{2h}$  (Fig. 5). Schneidet man nun aus  $\mathfrak{F}$  längs dieser Rück-

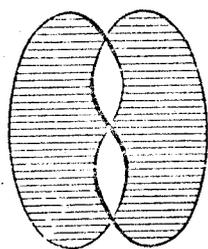


Fig. 4.

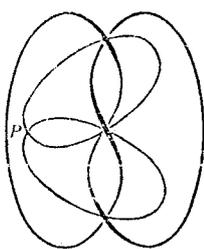


Fig. 5.

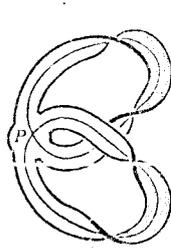


Fig. 6.

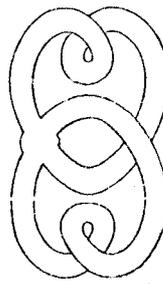


Fig. 7.

kehrschnitte je einen schmalen Streifen aus, so bilden diese Streifen zusammen ein Elementarflächenstück mit  $2h$  angesetzten Bändern,  $\mathfrak{F}'$  (Fig. 6). Man kann sich  $\mathfrak{F}'$  aus  $\mathfrak{F}$  durch eine Deformation von  $\mathfrak{F}$  (Zusammenschrumpfung) entstanden denken. Der Rand von  $\mathfrak{F}'$  ist also ein dem Rand von  $\mathfrak{F}$  äquivalenter Knoten. Schließlich lassen sich in  $\mathfrak{F}'$  noch die Verdrillungen der Bänder durch Selbstüberschneidungen ersetzen (Fig. 7), worauf man die Matrix  $\Gamma$  wie zuvor abliest.

§ 4. Die zweiblättrige Überlagerung.

Während man zur Konstruktion der  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerungsmannigfaltigkeit ( $g = 3, 4, \dots$ ) eine orientierbare Fläche in den Knoten einzuspannen muß, leistet bei der zweiblättrigen Überlagerung auch eine nichtorientierbare Fläche dieselben Dienste. Die zweiblättrige Überlagerung ist nämlich dadurch charakterisiert, daß ein geschlossener, den Knoten  $\mathfrak{f}$  nicht treffender Weg  $w$  dann und nur dann von geschlossenen Wegen überlagert wird, wenn die Verschlingungszahl von  $w$  und  $\mathfrak{f} \equiv 0 \pmod{2}$  ist. Die Verschlingungszahl mod 2 wird aber mit Hilfe einer 2-Kette mod 2 mit dem Rande  $\mathfrak{f}$  bestimmt, also etwa mit Hilfe einer in  $\mathfrak{f}$  eingespannten orientierbaren oder nichtorientierbaren Fläche. Dann und nur dann, wenn  $w$  eine solche Fläche einer geraden Anzahl von Malen durchsetzt, wird  $w$  von geschlossenen Wegen überlagert.

Ein bekanntes Verfahren, in  $\mathfrak{f}$  eine orientierbare oder nichtorientierbare Fläche einzuspannen, ist das folgende. Man färbt die Gebiete

in die die Ebene durch die  $\mathfrak{f}$  weiß, so daß zwei Gebiete verschieden gefärbt sind. Diese weiß läßt, immer und nur auf Gebiete bilden dann, wenn man Flächenstücke betrachtet, zusammen mit dem Rande  $\mathfrak{f}$ . Schneidet man die 3-Sphäre  $\mathfrak{S}$  längs der Fläche  $\mathfrak{D}_0$  auf, so ergibt sich eine von zwei längs  $\mathfrak{f}$  zusammenstoßenden Exemplaren der Fläche  $\mathfrak{D}_0$  berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{V}$ , und zwar ist dies eine Vollbrezel vom Geschlechte  $h$  (Vollkugel mit  $h$  angesetzten Vollhenkeln). Die Vollhenkel entsprechen dabei in der Knotenprojektion mit Ausnahme der Punkte  $P$  dem Rand  $\mathfrak{f}$ . Ist diese Fläche gezeichnet, von  $\mathfrak{D}$  aus  $\mathfrak{D}_0$  entsprechen und  $P$  von  $\mathfrak{D}$ , die nur dann Knotens ist.

Die zweiblättrige Überlagerung  $\mathfrak{V}$  ein zur Vollbrezel  $\mathfrak{B}$  homöomorph bezogen ist. Entspricht bei der Randfläche  $\mathfrak{D}'$  von  $\mathfrak{V}'$  ein Punkt  $P$  und erhält aus  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{V}'$  die Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_2$ . Es handelt sich also um zwei Vollbrezeln, wie sie vorhin bekannt ist.

Bevor wir die Verschlingungsinvarianten einige Bezeichnungen ein. Man wähle die den  $d$  Doppelpunkten der Überlagerung durch der Knoten in  $2d$  Punkten in der Ebene Projektion und sind  $Q_0$  und  $Q_1$  so bezeichnen wir die geraden Strecken. Sie liegt offenbar in der Ebene  $\mathfrak{D}$  ihr daher auf der Fläche  $\mathfrak{D}$

beliebigen ebenen Projektion von (zwei-blättrige Schlinge), so gewinnt man (zwei-blättrige Schlinge) in den Knoten eine orientierbare Fläche (in Geschl. S. 572 beschriebenen (schraffiert), und zieht auf ihr (konjugierter Rückkehrschritte) man nun aus  $\mathfrak{F}$  längs dieser Rück-

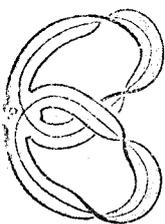


Fig. 6.

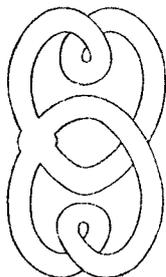


Fig. 7.

aus, so bilden diese Streifen (mit  $2h$  angesetzten Bändern) durch eine Deformation von  $\mathfrak{F}$  (zwei-blättrige Schlinge). Der Rand von  $\mathfrak{F}'$  ist also (zwei-blättrige Schlinge). Schließlich lassen sich in  $\mathfrak{F}'$  (zwei-blättrige Schlinge) Selbstüberschneidungen ersetzen (zwei-blättrige Schlinge) abliest.

Überlagerung.

Der  $g$ -blättrigen zyklischen Überlagerung (zwei-blättrige Schlinge) eine orientierbare Fläche in (zwei-blättrige Schlinge) der zwei-blättrigen Überlagerung (zwei-blättrige Schlinge) dieselben Dienste. Die zwei-blättrige Überlagerung (zwei-blättrige Schlinge) durch charakterisiert, daß ein (zwei-blättrige Schlinge) der Weg  $w$  dann und nur dann (zwei-blättrige Schlinge)  $d$ , wenn die Verschlingungszahl (zwei-blättrige Schlinge) Verschlingungszahl mod 2 wird aber (zwei-blättrige Schlinge) Rande  $f$  bestimmt, also etwa (zwei-blättrige Schlinge) orientierbaren oder nichtorientierbaren  $w$  eine solche Fläche eine (zwei-blättrige Schlinge)  $w$  von geschlossenen Wegen (zwei-blättrige Schlinge)

orientierbare oder nichtorientierbare. Man färbt die Gebiete,

in die die Ebene durch die Knotenprojektion zerlegt wird, schwarz oder weiß, so daß zwei Gebiete mit einem gemeinsamen Bogen immer verschieden gefärbt sind. Diese Färbung ist, wenn man das Außengebiet weiß läßt, immer und nur auf eine Weise möglich (Fig. 8). Die schwarzen Gebiete bilden dann, wenn man sie als im Raum gelegene Elementarflächenstücke betrachtet, zusammen eine singularitätenfreie Fläche  $\mathfrak{D}_0$  mit dem Rande  $f$ . Schneidet man die 3-Sphäre  $\mathfrak{S}$  längs der Fläche  $\mathfrak{D}_0$  auf, so ergibt sich eine von zwei längs  $f$  zusammenstoßenden Exemplaren der Fläche  $\mathfrak{D}_0$  berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{B}$ , und zwar ist dies eine Vollbrezel vom Geschlechte  $h$  (Vollkugel mit  $h$  angesetzten Vollhenkeln). Die Vollhenkel entsprechen dabei unkehrbar eindeutig den  $h$  weißen Gebieten der Knotenprojektion mit Ausschluß des Außengebietes. Der Rand von  $\mathfrak{B}$  ist somit eine orientierbare Fläche  $\mathfrak{D}$  vom Geschlechte  $h$ ; in der Fig. 9 ist diese Fläche gezeichnet, es ist hier  $h = 3$ . Gemäß der Entstehung von  $\mathfrak{D}$  aus  $\mathfrak{D}_0$  entsprechen jedem Punkte  $P_0$  von  $\mathfrak{D}_0$  zwei Punkte  $P$  und  $\bar{P}$  von  $\mathfrak{D}$ , die nur dann zusammenfallen, wenn  $P_0$  ein Punkt des Knotens ist.

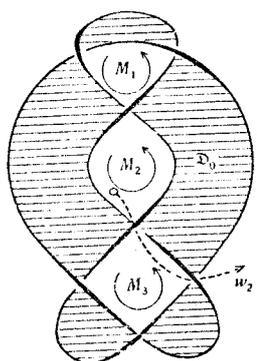


Fig. 8.

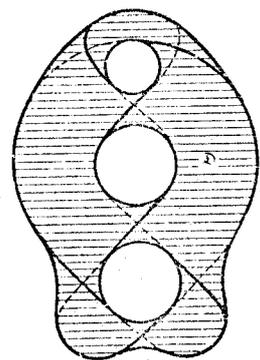


Fig. 9.

Die zwei-blättrige Überlagerung wird nun so erhalten. Man nimmt ein zur Vollbrezel  $\mathfrak{B}$  homöomorphes Exemplar  $\mathfrak{B}'$ , das auf  $\mathfrak{B}$  eindeutig bezogen ist. Entspricht bei dieser Abbildung einem Punkte  $P'$  der Randfläche  $\mathfrak{D}'$  von  $\mathfrak{B}'$  ein Punkt  $P$  von  $\mathfrak{D}$ , so identifiziert man  $P'$  mit  $P$  und erhält aus  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  die zwei-blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit  $\mathfrak{M}_2$ . Es handelt sich also hier um dieselbe Zerschneidung von  $\mathfrak{M}_2$  in zwei Vollbrezeln, wie sie von der Theorie der Heegaard-Diagramme her bekannt ist.

Bevor wir die Verschlingungsinvarianten ableiten, führen wir noch einige Bezeichnungen ein. Markiert man auf dem Knoten  $f$  die  $2d$  Punkte, die den  $d$  Doppelpunkten der Knotenprojektion entsprechen, so zerfällt hierdurch der Knoten in  $2d$  „Teilstrecken“. Ist  $Q$  ein Doppelpunkt der Projektion und sind  $Q_0$  und  $Q_n$  die beiden entsprechenden Punkte von  $f$ , so bezeichnen wir die geradlinige Strecke  $(Q_0 Q_n)$  als eine „Verbindungsstrecke“. Sie liegt offenbar auf der Fläche  $\mathfrak{D}_0$ , und es entsprechen ihr daher auf der Fläche  $\mathfrak{D}$  zwei „konjugierte“ Verbindungsstrecken,

die die gleichen Randpunkte  $Q_0$  und  $Q_n$  haben und zusammen einen „Verbindungskreis“ ausmachen. Die weißen Gebiete der Knotenprojektion mit Ausschluß des Außengebietes werden gleichsinnig orientiert und mit

$$M_1, M_2, \dots, M_h$$

bezeichnet. Dabei fassen wir  $M_i$  als ein in dem längs  $\mathfrak{D}_0$  zur Vollbrezel  $\mathfrak{B}$  aufgeschnittenen Raum gelegenes Elementarflächenstück auf, dessen Rand  $m_i$  somit eine geschlossene 1-Kette ist, die abwechselnd von Teilstrecken und Verbindungsstrecken gebildet wird.  $M_i$  stellt also einen Querschnitt durch den  $i$ -ten Henkel von  $\mathfrak{B}$  dar, und

$$m_1, m_2, \dots, m_h$$

sind die „Meridiankreise“ von  $\mathfrak{B}$ .

Wir konstruieren nun auf der Randfläche  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{B}$  eine Homologiebasis. Dazu verwenden wir zunächst die  $h$  1-Ketten  $m_1, m_2, \dots, m_h$  und konstruieren dazu weitere  $h$  1-Ketten auf die folgende Weise. Wir ziehen in der Knotenprojektion von einem inneren Punkte des Gebietes  $M_i$  aus einen Weg  $w_i$  nach dem unendlich fernen Punkte der Ebene, so daß  $w_i$  die Knotenprojektion nur in Doppelpunkten durchsetzt und ein Gebiet  $M_k$  ( $k \neq i$ ) höchstens einmal durchquert (vgl. z. B. den gestrichelten Weg  $w_2$  in Fig. 8). Den Doppelpunkten der Knotenprojektion, die  $w_i$  der Reihe nach berührt, entsprechen nun eine Reihe von Verbindungskreisen. Da genau einer dieser Verbindungskreise die 1-Kette  $m_i$  trifft, während eine beliebige andere 1-Kette  $m_k$  entweder von keinem oder von zwei Verbindungskreisen getroffen wird, so lassen sich diese Verbindungskreise auf genau eine Weise so orientieren, daß ihre Summe  $q_i$  die Schnittrelationen (auf  $\mathfrak{D}$ ) befriedigt:

$$(22) \quad \mathfrak{S}(m_i, q_i) = +1, \quad \mathfrak{S}(m_k, q_i) = 0 \quad (k \neq i).$$

Damit die Schnittzahlen einen Sinn haben, muß die Fläche  $\mathfrak{D}$  mit einer bestimmten Orientierung versehen sein. Wir nehmen an, daß es die von der räumlichen Orientierung von  $\mathfrak{B}$  induzierte Orientierung ist. Weiter hat man offenbar für beliebige  $i, k$

$$(23) \quad \mathfrak{S}(m_i, m_k) = 0, \quad \text{sowie} \quad \mathfrak{S}(q_i, q_k) = 0.$$

Denn zwei Verbindungskreise haben stets die Schnittzahl 0, da sie entweder identisch oder punktfremd sind.

Die Schnittrelationen (22) und (23) drücken aus, daß  $m_1, m_2, \dots, m_h, q_1, q_2, \dots, q_h$  die gesuchte Homologiebasis bilden. Beweis: Es seien  $l_1, l_2, \dots, l_{2h}$  die 1-Ketten eines kanonischen Schnittsystems auf der Fläche  $\mathfrak{D}$ . Dieses ist sicher eine Homologiebasis und die  $2h$ -reihige quadratische Matrix  $A$  der Schnittzahlen  $\mathfrak{S}(l_i, l_k)$  hat die Determinante 1.

Ebenso hat wegen (22) und (23) ein System  $m_1, \dots, q_h$  eine Determinante 1. Ersetzt man in  $m_i$  jede  $l_j$  durch  $\pm l_j$ , so besteht die

wobei  $T$  die transponierte Matrix  $T_{ij} = \pm 1$ , d. h. der Übergang durch eine unimodulare Transformation wieder in eine Homologiebasis

Ersetzt man in  $m_i$  jede  $l_j$  durch  $\pm l_j$ , so ergibt sich eine 1-Kette  $m'_i$ , hervorgeht, der Meridiankreis  $m_i$  wie jede geschlossene 1-Kette

$$(24) \quad m'_i \sim \sum_{k=1}^h \mu_{ik} m_k +$$

darstellen. Dabei ist auf Grund

$$(25) \quad \mu_{ik} = \mathfrak{S}(m'_i, q_k)$$

Zur Bestimmung der Schnittzahlen durch Hinznahme gewisser  $q_i$  Schnittzahl eines beliebigen  $q_i$  hat man

$$\mathfrak{S}(m'_i, q_k) = \mathfrak{S}(m_i, q_k) +$$

$$(26) \quad \mu_{ik}$$

Zur Bestimmung der  $\mu_{ik}$  projektion in drei Arten ein.  $M$  zwei verschiedene weiße Gebiete den überkreuzenden Ast des Knotens den unterkreuzenden überführt. Uhrzeigersinn erfolgt, heißt die Art (Fig. 10 I und II). Er hat beiden mit ihm inzidenten weißen

Wegen (23) ist nun  $\mathfrak{S}(m'_i, m_k)$  besteht aus ebenso vielen Verbindungskreisen, wobei etwa vorhandene 1-Kette. Man hat also nur nachzuschauen, ob die Verbindungskreise zu der Schnittzahl  $\mathfrak{S}(\sum v_k, m_i)$ . Es ist  $\mathfrak{S}(v_k, m_i)$

$Q_n$  haben und zusammen einen weißen Gebiete der Knoten- es werden gleichsinnig orientiert

$M_h$   
ein in dem längs  $\mathfrak{D}_0$  zur Voll- eines Elementarflächenstück auf- e 1-Kette ist, die abwechselnd n gebildet wird.  $M_i$  stellt also tel von  $\mathfrak{B}$  dar, und

$m_h$   
fläche  $\mathfrak{D}$  von  $\mathfrak{B}$  eine Homologie- h 1-Ketten  $m_1, m_2, \dots, m_h$  und auf die folgende Weise. Wir inneren Punkte des Gebietes  $M_i$  ernen Punkte der Ebene, so daß elpunkten durchsetzt und ein quert (vgl. z. B. den gestrichelten i der Knotenprojektion, die  $m_i$  n eine Reihe von Verbindungs- ungskreise die 1-Kette  $m_i$  trifft.  $m_k$  entweder von keinem oder wird, so lassen sich diese Ver- orientieren, daß ihre Summe  $q_i$

$(m_k, q_i) = 0 \quad (k \neq i).$   
n, muß die Fläche  $\mathfrak{D}$  mit einer Wir nehmen an, daß es die von zierte Orientierung ist. Weiter  $\mathfrak{S}(q_i, q_k) = 0.$   
s die Schnittzahl 0, da sie ent-  
brücken aus, daß  $m_1, m_2, \dots, m_h$  isis bilden. Beweis: Es seien ischen Schnittsystems auf der ologiebasis und die  $2h$ -reihige  $\mathfrak{S}(l_i, l_k)$  hat die Determinante 1.

Ebenso hat wegen (22) und (23) die Matrix  $\Sigma$  der Schnittzahlen des systems  $m_1, \dots, q_h$  eine Determinante vom Werte 1. Die Ketten dieses systems lassen sich nun durch die  $l_i$  linear ausdrücken. Ist  $T$  die Transformationsmatrix, so besteht die Beziehung

$$\Sigma = T \Lambda \dot{T},$$

wobei  $\dot{T}$  die transponierte Matrix  $T$  bedeutet. Daraus folgt sofort  $T = \pm 1$ , d. h. der Übergang von  $l_1, \dots, l_{2h}$  zu  $m_1, \dots, q_h$  erfolgt durch eine unimodulare Transformation. Dabei geht eine Homologiebasis wieder in eine Homologiebasis über, was zu beweisen war.

Ersetzt man in  $m_i$  jede Verbindungsstrecke durch ihre konjugierte, so ergibt sich eine 1-Kette  $m'_i$ .  $m'_i$  ist, wie aus der Konstruktion von  $M_2$  hervorgeht, der Meridiankreis des  $i$ -ten Henkels von  $\mathfrak{B}'$ .  $m'_i$  läßt sich, wie jede geschlossene 1-Kette auf  $\mathfrak{D}$ , in der Form

$$(24) \quad m'_i \sim \sum_k^h \mu_{ik} m_k + \sum_k^h v_{ik} q_k \quad (\text{auf } \mathfrak{D}) \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

darstellen. Dabei ist auf Grund von (22) und (23)

$$(25) \quad \mu_{ik} = \mathfrak{S}(m'_i, q_k), \quad v_{ik} = -\mathfrak{S}(m'_i, m_k).$$

Zur Bestimmung der Schnittzahlen (25) bemerken wir, daß  $m'_i$  aus  $m_i$  durch Hinzunahme gewisser Verbindungskreise entsteht. Da nun die Schnittzahl eines beliebigen Verbindungskreises mit  $q_k$  gleich 0 ist, so hat man

$$\mathfrak{S}(m'_i, q_k) = \mathfrak{S}(m_i, q_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = i, \\ 0 & \text{für } k \neq i, \end{cases}$$

d. h.

$$(26) \quad \mu_{ii} = 1, \quad \mu_{ik} = 0 \quad (i \neq k).$$

Zur Bestimmung der  $v_{ik}$  teilen wir die Doppelpunkte der Knotenprojektion in drei Arten ein. Mit einem Doppelpunkt sind im allgemeinen zwei verschiedene weiße Gebiete inzident. Je nachdem die Drehung, die den überkreuzenden Ast des Knotens über die weißen Gebiete hinweg in den unterkreuzenden überführt, im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt, heißt der Doppelpunkt von der ersten oder zweiten Art (Fig. 10 I und II). Er heißt aber von der dritten Art, wenn die beiden mit ihm inzidenten weißen Gebiete identisch sind.

Wegen (23) ist nun  $\mathfrak{S}(m'_i, m_k) = \mathfrak{S}(m'_i - m_i, m_k)$ .  $m'_i - m_i = \sum v_{ik}$  besteht aus ebenso vielen Verbindungskreisen  $v_{ik}$  wie das Gebiet  $M_i$  Ecken hat, wobei etwa vorhandene Ecken dritter Art doppelt zu zählen sind. Man hat also nur nachzusehen, welchen Beitrag die einzelnen Verbindungskreise zu der Schnittzahl liefern. Wir bestimmen zunächst  $\mathfrak{S}(\sum v_{ik}, m_i)$ . Es ist  $\mathfrak{S}(v_{ik}, m_i) = +\epsilon$  oder  $-\epsilon$  ( $\epsilon = \pm 1$ ), je nach-

dem der zu  $v_\lambda$  gehörige Doppelpunkt von der ersten oder zweiten Art ist. Es geht nämlich ein Doppelpunkt erster Art durch eine Spiegelung

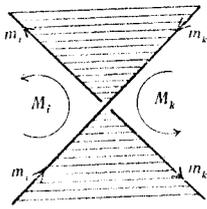


Fig. 10 I.

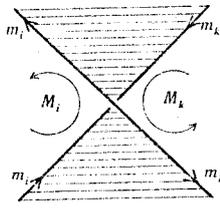


Fig. 10 II.

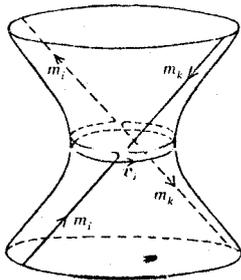


Fig. 11 I.

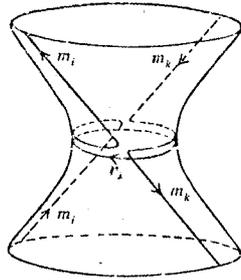


Fig. 11 II.

an der Zeichenebene in einen Doppelpunkt zweiter Art über. (In Fig. 11 ist der orientierte Verbindungskreis  $v_\lambda$  für einen Doppelpunkt erster und zweiter Art dargestellt und der Deutlichkeit wegen getrennt von  $m_i$  und  $m_k$  noch einmal gezeichnet worden.) Ist aber der Doppelpunkt von der dritten Art, so ist  $\mathfrak{S}(v_\lambda, m_i) = 0$ , da  $v_\lambda$  von  $m_i$  zweimal, und zwar in entgegengesetzten Richtungen, durchsetzt sind. Ordnet man also allen Doppelpunkten erster, zweiter, dritter Art die Indizes  $+\epsilon$ ,  $-\epsilon$  oder 0 zu, so braucht man nur die Indizes der Ecken des Gebietes  $M^i$  zu addieren, um  $\mathfrak{S}(m'_i, m_i)$  zu erhalten.

Für die Schnittzahl  $\mathfrak{S}(\sum v_\lambda, m_k)$  kommt es auf die den Gebieten  $M_i$  und  $M_k$  gemeinsamen Ecken an. Gehört der Verbindungskreis  $v_\lambda$  zu einer solchen Ecke, so wird  $v_\lambda$  von  $m_i$  und  $m_k$  in entgegengesetzter Richtung durchsetzt. Man erhält also  $\mathfrak{S}(v_\lambda, m_k) = -\epsilon$  oder  $+\epsilon$ , je nachdem der Doppelpunkt von der ersten oder zweiten Art ist.  $\mathfrak{S}(m'_i, m_k)$  ist also die negative algebraische Summe aller Indizes, die zu den gemeinsamen Doppelpunkten von  $M_i$  und  $M_k$  gehören ( $i, k = 1, 2, \dots, h$ ). Hiermit ist auch die Matrix  $(r_{ik})$  der Formel (24) bestimmt, und es geht aus dem Bestimmungsverfahren hervor, daß sie (bis auf das Vorzeichen, das von der räumlichen Orientierung abhängt) gerade die Matrix der quadratischen Form des Knotens ist<sup>5)</sup>.

Die Homologiegruppe von  $\mathfrak{M}_2$  ergibt sich nun nach dem Satz von der Homologiegruppe eines zusammengesetzten Komplexes, der im vorliegenden Fall auf die beiden Teilkomplexe  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  mit der gemeinsamen Randfläche  $\mathfrak{D}$  angewendet wird. Die Homologiegruppe von  $\mathfrak{B}$

<sup>5)</sup> L. GOERITZ, Knoten und quadratische Formen. Math. Ztschr. 36 (1933) S. 647—654. Geht man von einer Knotenprojektion zu einer anderen über, so ändert sich die quadratische Form. Unter der quadratischen Form des Knotens wird der Begriff aller zu seinen Projektionen gehörigen quadratischen Formen verstanden.

ist die freie abelsche Gruppe  $m$ , was dasselbe ist, die abelsche Gruppe  $q_1, q_2, \dots, q_h$  und den Relationen (27)

(28) Entsprechend bestehen in  $\mathfrak{B}'$  die

$$(m'_i \sim) m_i$$

Die Homologiegruppe von  $\mathfrak{M}_2$  h Nach Elimination der  $m_i$  bleiben zwischen denen die Relationen

(29) 
$$\sum$$
 bestehen.

Es ist nun leicht, die 2-K von (29) zum Rande haben.  $M$   $i$ -ten Henkels von  $\mathfrak{B}$  bezeichne  $i$ -ten Henkels von  $\mathfrak{B}'$ , so daß man (auf  $\mathfrak{D}$ ) folgt, daß es auf  $\mathfrak{D}$  eine  $\mathfrak{Z}$  gibt. Setzt man zur Abkürzung

so wird 
$$(30) \quad \mathfrak{R}\partial Q_i$$

Damit sind die fundamentalen  $E$  und es bleiben noch die Schnitt aus  $q_k$  durch eine Deformation entstanden sein möge. Dann ist und man hat daher

$$\mathfrak{S}(Q_i, q_k^*) =$$

Ebenso wie auf S. 90 zeigt man

$$\mathfrak{S}(M_i, q_k^*) = \mathfrak{S}(\mathfrak{R}\partial M_i, q_k)$$

Wegen (22) ist daher die Schnitt

(31) 
$$\mathfrak{S}(Q_i, q_k^*) =$$

die  $h$ -reihige Einheitsmatrix.

Nunmehr lassen sich die  $V$  fahren des § 1 berechnen. Es

ist die freie abelsche Gruppe mit den Erzeugenden  $q_1, q_2, \dots, q_h$  oder was dasselbe ist, die abelsche Gruppe mit den Erzeugenden  $m_1, m_2, \dots, m_h, q_1, q_2, \dots, q_h$  und den Relationen

$$(27) \quad m_i \sim 0.$$

Entsprechend bestehen in  $\mathfrak{B}'$  die Homologien

$$(28) \quad (m'_i \sim) m_i + \sum v_{ik} q_k \sim 0.$$

Die Homologiegruppe von  $\mathfrak{M}_2$  hat somit die Relationen (27) und (28). Nach Elimination der  $m_i$  bleiben als einzige Erzeugende die  $q_1, q_2, \dots, q_h$ , zwischen denen die Relationen

$$(29) \quad \sum v_{ik} q_k \sim 0$$

bestehen.

Es ist nun leicht, die 2-Ketten anzugeben, die die linken Seiten von (29) zum Rande haben. Mit  $M_i$  hatten wir den Querschnitt des  $i$ -ten Henkels von  $\mathfrak{B}$  bezeichnet. Analog sei  $M'_i$  der Querschnitt des  $i$ -ten Henkels von  $\mathfrak{B}'$ , so daß man hat  $\mathfrak{R}\partial M'_i = m'_i$ . Aus  $m'_i \sim m_i + \sum v_{ik} q_k$  (auf  $\mathfrak{D}$ ) folgt, daß es auf  $\mathfrak{D}$  eine 2-Kette  $D$  mit  $\mathfrak{R}\partial D = m'_i - m_i - \sum v_{ik} q_k$  gibt. Setzt man zur Abkürzung

$$Q_i = M'_i - M_i - D,$$

so wird

$$(30) \quad \mathfrak{R}\partial Q_i = \sum v_{ik} q_k.$$

Damit sind die fundamentalen Berandungsrelationen des § 1 aufgestellt, und es bleiben noch die Schnittrelationen  $\mathfrak{S}(Q_i, q_k^*)$  aufzusteilen, wo  $q_k^*$  aus  $q_k$  durch eine Deformation in das Innere der Vollbrezel  $\mathfrak{B}$  hinein entstanden sein möge. Dann ist  $q_k^*$  sicher punktfremd zu  $M'_i$  und  $D$ , und man hat daher

$$\mathfrak{S}(Q_i, q_k^*) = \mathfrak{S}(M_i, q_k^*) \quad (\text{in } \mathfrak{B}).$$

Ebenso wie auf S. 90 zeigt man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(M_i, q_k^*) & \quad (\text{in } \mathfrak{B}) \\ = \mathfrak{S}(\mathfrak{R}\partial M_i, q_k) & = \mathfrak{S}(m_i, q_k) \quad (\text{auf } \mathfrak{D}). \end{aligned}$$

Wegen (22) ist daher die Schnittmatrix

$$(31) \quad (\mathfrak{S}(Q_i, q_k^*)) = E$$

die  $h$ -reihige Einheitsmatrix.

Nummehr lassen sich die Verschlingungsinvarianten nach dem Verfahren des § 1 berechnen. Es können aber die Ergebnisse noch etwas

einfacher formuliert werden, wenn man bedenkt, daß bei einer zweifachen Überlagerung die Torsionsgruppe mit der Homologiegruppe zusammenfällt, d. h. daß alle Elemente  $q_k$  endliche Ordnungen haben, oder was dasselbe besagt, daß die Determinante des Relationensystems (29)

$$|v_{ik}| = v \neq 0$$

ist<sup>6)</sup>. Es ist daher  $v q_i \sim 0$ , d. h. es gibt eine 2-Kette  $K_i$  mit

$$\mathfrak{R}\partial K_i = v q_i.$$

Somit ist wegen (30)

$$\mathfrak{R}\partial v Q_i = \mathfrak{R}\partial \sum v_{ik} K_k.$$

Die geschlossene 2-Kette  $v Q_i - \sum v_{ik} K_k$  hat also<sup>7)</sup> mit der 1-Kette  $q_i^*$  die Schnittzahl 0, da  $q_i^*$  wie jede geschlossene 1-Kette von  $\mathfrak{M}_2$  divisionsnullhomolog ist. Daraus folgt

$$\mathfrak{S}(v Q_i, q_i^*) = \mathfrak{S}(\sum v_{ik} K_k, q_i^*).$$

Links steht wegen (31) die mit  $v$  multiplizierte Einheitsmatrix  $E$ , rechts das Produkt aus der Matrix  $N = (v_{ik})$  mit der Matrix  $(\mathfrak{S}(K_k, q_i^*))$ :

$$v E = N (\mathfrak{S}(K_k, q_i^*)),$$

oder

$$\frac{1}{v} (\mathfrak{S}(K_k, q_i^*)) = N^{-1}.$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn man bedenkt, daß nach Definition der Verschlingungszahlen  $\frac{1}{v} (\mathfrak{S}(K_k, q_i^*)) \equiv \mathfrak{Q}(\{q_k\}, \{q_i\}) \pmod{1}$  ist, auch so schreiben:

$$(\mathfrak{Q}(\{q_k\}, \{q_i\})) \equiv N^{-1} \pmod{1}.$$

Wir fassen das Ergebnis zusammen in den

**Satz II.** Ist  $N = (v_{ik})$  die aus einer ebenen Projektion abgelesene Matrix der quadratischen Form des Knotens, so ist die Homologiegruppe der zweiblättrigen Überlagerung  $\mathfrak{M}_2$  durch die Relationen

$$\sum v_{ik} q_k \sim 0$$

<sup>6)</sup> Vgl. K. REIDEMEISTER, Knotentheorie (Berlin 1932), S. 21. Es folgt auch daraus, daß die die Homologiegruppe bestimmende Matrix  $\Gamma^n - (\Gamma - E)^n$  des Satzes I für  $g = 2$  zu  $2\Gamma - E$  wird; deren Determinante ist offenbar  $\equiv 1 \pmod{2}$ , also sicher  $\neq 0$ .

<sup>7)</sup> Vgl. das unter <sup>3)</sup> angeführte Buch S. 265.

gegeben, während die Matrix  $d$

$$(\mathfrak{Q}(\{q_i\}, \{q_i\}))$$

ist; das Vorzeichen hängt von

Wenn hiernach die Verschlingungsinvarianten durch die quadratischen Form abgeleitbare Verschlingungsinvarianten kommen kann, daß die Matrix der Projektion der Knoten verschlingungsinvarianten übereinstimmen. So wie das Beispiel 1 des § 3 zwei quadratischen Form abgeleitbare Beispiel für das umgekehrte. Eine weitere ungeklärte Frage und Verschlingungsinvarianten diejenigen der zweiblättrigen nicht unabhängig voneinander Geschlechte 1, für die man die Gruppe der zweiblättrigen Überlagerungen aller sämtlichen mehrblättrigen Überlagerungen so wie die Verschlingungsinvarianten mit ungerader Blätterzahl ber

gegeben, während die Matrix der Verschlingungszahlen

$$(\mathfrak{Q}(\{q_i\}, \{q_k\})) \equiv \pm N^{-1} \pmod{1}$$

ist; das Vorzeichen hängt von der räumlichen Orientierung ab.

Wenn hiernach die Verschlingungsinvarianten der zweiblättrigen Überlagerung durch die quadratische Form des Knotens bestimmt sind, so bleibt die Frage offen, ob die quadratische Form durch die Verschlingungsinvarianten erschöpft wird, ob also die Klasse der aus allen möglichen Knotenprojektionen abgelesenen quadratischen Formen durch die Verschlingungsinvarianten charakterisiert wird oder ob es etwa vorkommen kann, daß die Matrizen  $N$  zweier Knoten bei jeder beliebigen Projektion der Knoten verschieden ausfallen, während die Verschlingungsinvarianten übereinstimmen. Sicher gehen die Verschlingungsinvarianten, wie das Beispiel 1 des § 3 zeigt, in gewissen Fällen über die aus der quadratischen Form ableitbaren Minkowskischen Einheiten hinaus. Ein Beispiel für das umgekehrte Vorkommnis ist mir nicht bekannt. — Eine weitere ungeklärte Frage ist es, inwieweit die Homologiegruppen und Verschlingungsinvarianten der mehrblättrigen Überlagerungen durch diejenigen der zweiblättrigen bestimmt sind. Daß diese Invarianten nicht unabhängig voneinander sind, zeigen bereits die Knoten vom Geschlechte 1, für die man nachweisen kann, daß aus der Homologiegruppe der zweiblättrigen Überlagerung die Homologiegruppen der sämtlichen mehrblättrigen Überlagerungen einschließlich des  $L$ -Polynoms so wie die Verschlingungsinvarianten aller zyklischen Überlagerungen mit ungerader Blätterzahl berechenbar sind.

denkt, daß bei einer zweifachen Homologiegruppe zusammengeordnete Ordnungen haben, oder was es Relationensystems (29)

0  
 eine 2-Kette  $K_i$  mit

$r_{ik} K_k$ .

hat also) mit der 1-Kette  $q_i^*$  die eine 1-Kette von  $\mathfrak{M}_2$  divisions-

$r_{ik} K_k, q_i^*$ .

diagonalisierte Einheitsmatrix  $E$ , rechts mit der Matrix  $(\mathfrak{S}(K_k, q_i^*))$ :

$(q_i^*)$ .

$= N^{-1}$ .

denkt, daß nach Definition der

$(\mathfrak{Q}(\{q_k\}, \{q_i\}) \pmod{1}$  ist, auch so

$\pmod{1}$ .

en  
 der ebenen Projektion abgelesene  
 ens, so ist die Homologiegruppe  
 die Relationen

)

Berlin 1932), S. 21. Es folgt auch Matrix  $\Gamma^2 = (\Gamma - E)^2$  des Satzes 1 für  $\Gamma^2 \equiv 1 \pmod{2}$ , also sicher  $\neq 0$ .  
 5.