Andrew Ranicki

Verschlingungsinvarianten.

Von Dr. Herbert Seifert
in Dresden.

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach.)

Das Problem, dem sich die folgenden Überlegungen unterordnen, ist das Homöomorphieproblem dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten: wir wollen wissen, welche topologisch verschiedenen geschlossenen Mannigfaltigkeiten[1] es in drei Dimensionen gibt.

In zwei Dimensionen fällt die Gesamtheit der geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit der Gesamtheit der geschlossenen Flächen zusammen, und diese lassen sich vollständig überblicken, weil schon die Homologiegruppen zu ihrer Unterscheidung hinreichen. In drei Dimensionen steht an bekannten Invarianten die Orientierbarkeit und die Fundamentalgruppe zur Verfügung, woraus dann die Homologiegruppen folgen. Diese Invarianten bilden aber jetzt nicht das volle Invariantensystem, denn man kennt orientierbare Mannigfaltigkeiten gleicher Fundamentalgruppe, die sich doch, und zwar durch Invarianten, die J. W. Alexander[2] angegeben hat, als voneinander verschieden erweisen. Diese Invarianten nehmen auf das gegenseitige Verhalten zweier geschlossener Kurven der Mannigfaltigkeit bezug. Mit derartigen Invarianten haben auch wir es hier zu tun.

§ 1. Verschlingungszahlen.

Wir betrachten zwei geschlossene punktfremde Kurven a^1 und b^1 im gewöhnlichen, mit einer bestimmten Orientierung versehenen dreidimensionalen Raume R^3 (obere Indizes deuten immer die Dimension an). Zwei solchen Kurven kommt nach L. E. J. Brouwer[3] eine bestimmte Verschlingungszahl zu:

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1);$$

sie wird so ermittelt: man spannt in a^1 eine orientierbare Fläche a^2 ein, die nicht notwendig singularitätenfrei im R^3 zu liegen braucht. Jedem Schnittpunkte von a^2 mit b^1 wird dann ein Index $+1$ oder -1 zugeordnet, je nach-

[1] Eine dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit ist ein dreidimensionaler zusammenhängender endlicher homogener Komplex, vgl. H. Seifert u. W. Threlfall, Topologie § 59. Erscheint demnächst bei B. G. Teubner.

[2] J. W. Alexander, Proc. Nat. Acad. 10 (1924), S. 101—103.

[3] L. E. J. Brouwer, On looping coefficients, Amsterdam Proc. 15 (1912), S. 113—122.

dem die Kurve b^1 die Fläche a^2 von rechts nach links oder von links nach rechts durchsetzt. Die Summe dieser Indizes, die die *Schnittzahl*

$$\mathcal{S}(a^2, b^1)$$

der Fläche a^2 mit der Kurve b^1 genannt wird, ist die *Verschlingungszahl* $\mathfrak{V}(a^1, b^1)$. In Formeln

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1) = \mathcal{S}(a^2, b^1). \tag{1}$$

In dem Beispiele der Fig. 1 beträgt die Verschlingungszahl ± 1. Das Vorzeichen hängt dabei von der Orientierung der Kurven a^1 und b^1 und von der Orientierung des Raumes ab. Kehrt man eine dieser drei Orientierungen um, so wechselt auch die Verschlingungszahl ihr Vorzeichen.

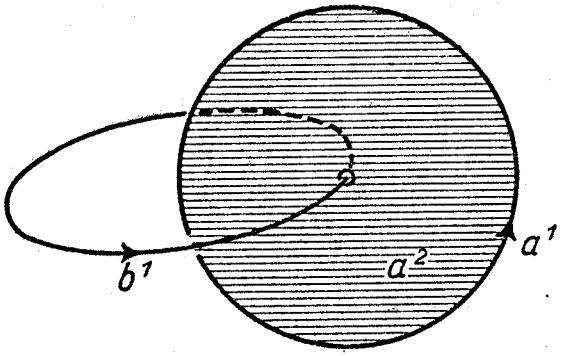

Fig. 1.

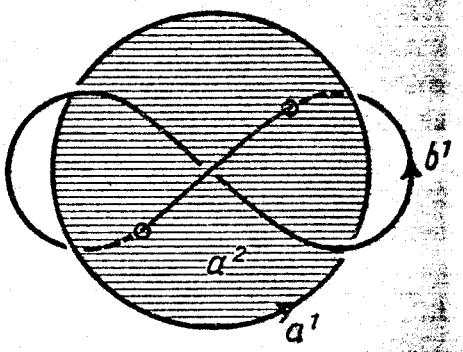

Fig. 2.

Betrachten wir noch ein zweites Beispiel, das die Fig. 2 angibt! Die Verschlingungszahl ist hier 0, denn b^1 durchsetzt a^2 in beiden Richtungen.

Die Definition hängt nur scheinbar von der eingespannten Fläche a^2 ab (s. u.). Spannt man eine andere Fläche ein, so bildet sie zusammen mit der ersten eine geschlossene Fläche, die im euklidischen Raume von jeder geschlossenen Kurve ebensooft von rechts nach links wie von links nach rechts durchsetzt wird.

Ebenso wie im euklidischen Raume kann man in einer beliebigen orientierbaren und in bestimmter Weise orientierten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ die Verschlingungszahl zweier Kurven a^1 und b^1 erklären. Nur müssen sich orientierbare Flächen in sie einspannen lassen, wofür man auch sagt, daß die Kurven berandend oder nullhomolog sind, in Formeln

$$a^1 \sim 0, \quad b^1 \sim 0.$$

Es ist nun bemerkenswert, daß sich die Verschlingungszahl auch dann noch definieren läßt, wenn die Kurven a^1 und b^1 selbst zwar nicht nullhomolog sind, wohl aber Vielfache von ihnen. Das einfachste Beispiel einer solchen Kurve

ist die projektive Gerade im projektiven Raume, die erst zweimal durchlaufen ein Flächenstück, nämlich eine von ihr aufgeschnittene projektive Ebene berandet.

Es sei demgemäß

$$\alpha a^1 \sim 0, \quad \beta b^1 \sim 0, \tag{2}$$

und die beiden Flächen, die von αa^1 und βb^1 berandet werden, mögen a^2 und b^2 heißen:

$$\mathfrak{R} a^2 = \alpha a^1, \quad \mathfrak{R} b^2 = \beta b^1. \tag{2'}$$

Dann ist die Verschlingungszahl so erklärt:

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1) = \frac{1}{\alpha} \mathfrak{s}(a^2, b^1), \tag{3}$$

wobei die Schnittzahl $\mathfrak{s}$ wie oben als Indexsumme zu verstehen ist. Die Verschlingungszahl ist jetzt im allgemeinen eine gebrochene Zahl. Zwei punktfremde projektive Geraden des projektiven Raumes haben z. B. die Verschlingungszahl $\pm \frac{1}{2}$, denn als a^2 kann man eine projektive Ebene benutzen, die von b^1 in einem Punkte getroffen wird; es ist also $\alpha = 2$, $\mathfrak{s}(a^2, b^1) = \pm 1$.

Wir lassen auch zu, daß die betrachteten geschlossenen Kurven aus mehreren getrennten Teilen bestehen und schreiben für die aus den Teilen b^1 und c^1 bestehende Kurve $b^1 + c^1$. Auch für solche Kurven lassen sich die Verschlingungszahlen definieren, und es gilt das *distributive Gesetz*

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1 + c^1) = \mathfrak{V}(a^1, b^1) + \mathfrak{V}(a^1, c^1). \tag{4}$$

Übrigens gilt für die Verschlingungszahlen auch das *kommutative* Gesetz

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1) = \mathfrak{V}(b^1, a^1). \tag{5}$$

Es ist eine unmittelbare Folge aus der Hauptformel der Theorie der Schnittzahlen:

$$\mathfrak{s}(a^2, \mathfrak{R} b^2) = \mathfrak{s}(\mathfrak{R} a^2, b^2). \tag{6}$$

Denn aus dieser Formel ergibt sich

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1) = \frac{1}{\alpha} \mathfrak{s}(a^2, b^1) = \frac{1}{\alpha\beta} \mathfrak{s}(a^2, \beta b^1) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \mathfrak{s}(\alpha a^1, b^2) = \frac{1}{\beta} \mathfrak{s}(a^1, b^2) = \mathfrak{V}(b^1, a^1). \tag{8}$$

Hieraus folgt überdies die zuvor behauptete Unabhängigkeit der Verschlingungszahl von der eingespannten Fläche a^2; denn in (8) tritt a^2 nicht mehr auf.

Es ist klar, daß Begriffe wie geschlossene Kurve, eingespannte Fläche, Schnittzahl, Addition von Kurven noch einer präziseren Definition bedürfen. Wir haben keinen Anlaß, an dieser Stelle näher darauf einzugehen, weil es uns im folgenden hauptsächlich auf die gruppentheoretische Seite des Problems ankommt[1].

Bisher haben wir nur die Verschlingungszahl von zwei einzelnen Kurven a^1 und b^1 gebildet. Wir wollen nun an Stelle von a^1 und b^1 die Homologieklassen betrachten, in denen a^1 und b^1 liegen; sie mögen A und B heißen. Zwei Kurven heißen bekanntlich homolog, wenn sie zusammen eine orientierbare Fläche beranden. A umfaßt also die Kurve a^1 und alle zu ihr homologen.

Man kann dann auch den Homologieklassen A und B eine Verschlingungszahl

$$\mathfrak{V}(A, B)$$

zuordnen, die freilich nur bis auf ganze Zahlen bestimmt ist. Ersetzt man nämlich a^1 durch eine homologe Kurve $'a^1$, so ändert sich $\mathfrak{V}(a^1, b^1)$ um eine ganze Zahl, denn es ist

$$\mathfrak{V}(a^1, b^1) - \mathfrak{V}('a^1, b^1) = \mathfrak{V}(a^1 - 'a^1, b^1),$$

und das ist eine ganze Zahl, weil $a^1 - 'a^1 \sim 0$ ist, also selbst eine Fläche berandet. Es kommt also in der Tat den beiden Homologieklassen eine bis auf ganze Zahlen bestimmte Verschlingungszahl zu, die wir im folgenden stets in dem Intervalle $0 \leqq x < 1$ gelegen denken.

Es sei nun $\mathfrak{H}$ die Homologiegruppe der Mannigfaltigkeit, also die Abelsche Gruppe, deren Elemente die sämtlichen Homologieklassen sind. $\mathfrak{T}$ sei die Untergruppe von $\mathfrak{H}$, die von den Elementen endlicher Ordnung gebildet wird. Man nennt sie die *Torsionsgruppe*. Und es seien

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

die Elemente von $\mathfrak{T}$. Dann haben wir eben gezeigt, daß zu zwei Elementen A_i, A_k eine zwischen 0 und 1 gelegene Verschlingungszahl

$$\mathfrak{V}(A_i, A_k)$$

gehört. Die Matrix der Verschlingungszahlen

$$(\mathfrak{V}(A_i, A_k)) \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

ist offenbar eine Invariante der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$. Genauer: *Damit zwei orientierte Mannigfaltigkeiten sich mit Erhaltung der Orientierung topologisch*

[1] Um den Anschluß an die strenge Theorie zu erreichen, hat man nur die Begriffe Kurve und Fläche durch singuläre 1-Kette und 2-Kette zu ersetzen. Die Definition der Schnittzahl geschieht dann mittels Approximation der singulären Ketten in dualen Zellteilungen.

aufeinander abbilden lassen, müssen die Torsionsgruppen sich so isomorph aufeinander beziehen lassen, daß die Verschlingungsmatrizen übereinstimmen.

Ob eine solche isomorphe Beziehung möglich ist, läßt sich grundsätzlich in jedem einzelnen Falle durch Probieren entscheiden, denn es gibt nur endlich viele isomorphe Abbildungen zweier endlicher Gruppen aufeinander. Die praktischen Schwierigkeiten eines solchen Verfahrens werden indessen bei komplizierteren Gruppen so erheblich sein, daß es erwünscht ist, einfachere Kennzeichen für die Übereinstimmung zweier Verschlingungsmatrizen zu finden. Wir werden im folgenden bis auf einen Ausnahmefall einen vollständigen Überblick über die Verschlingungsmatrizen gewinnen. Zu dem Zwecke stellen wir zunächst das rein arithmetische Wesen der Frage heraus.

§ 2. Gruppen mit Verschlingung.

Für die Verschlingungszahlen gilt, wie wir sahen,

I. *das kommutative Gesetz*: $\mathfrak{V}(A_i, A_k) = \mathfrak{V}(A_k, A_i)$

II. *das distributive Gesetz*: $\mathfrak{V}(A_i, A_k + A_l) \equiv \mathfrak{V}(A_i, A_k) + \mathfrak{V}(A_i, A_l) \pmod 1$.

Eine weitere weniger triviale Eigenschaft ergibt sich aus dem Poincaré-Veblenschen Dualitätssatze. Die Torsionsgruppe $\mathfrak{T}$ läßt sich (auf mannigfache Weise) als direkte Summe[1] zyklischer Gruppen der Ordnungen $c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ darstellen, wobei c_{i+1} durch c_i $(i = 1, 2, \cdots, \rho-1)$ teilbar ist. Diese Ordnungen heißen die Torsionskoeffizienten der Gruppe $\mathfrak{T}$. Versteht man unter einer Basis von $\mathfrak{T}$ ein System von erzeugenden Elementen $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$ dieser ρ zyklischen Gruppen, so behauptet der Dualitätssatz

III. *Sind $c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ die Torsionskoeffizienten der Gruppe $\mathfrak{T}$, so gibt es zwei »duale« Basen $C_1, C_2, \cdots, C_\rho$ und $C_1', C_2', \cdots, C_\rho'$, für die die Matrix der Verschlingungszahlen*

$$(\mathfrak{V}(C_i', C_k)) = \begin{pmatrix} 1/c_1 & 0 \cdot 0 \\ 0 & 1/c_2 \cdot 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ 0 & \cdot 0 \cdot 1/c_\rho \end{pmatrix} \tag{10}$$

wird.

Wenn immer in einer endlichen Abelschen Gruppe $\mathfrak{T}$ je zwei Elementen A_i und A_k eine zwischen 0 und 1 gelegene »Verschlingungszahl« $\mathfrak{V}(A_i, A_k)$ zugeordnet ist, so daß die Bedingungen I bis III erfüllt sind, so wollen wir sagen, in $\mathfrak{T}$ sei eine Verschlingung definiert oder $\mathfrak{T}$ sei eine *Gruppe mit Verschlingung*.

[1] Abelsche Gruppen schreiben wir, vielfachem Brauch folgend, additiv und setzen dementsprechend direkte Summe statt direktes Produkt.

Dieser rein gruppentheoretische Begriff gestattet es, das topologische Problem des vorigen Paragraphen in folgender rein gruppentheoretischer Gestalt auszusprechen:

Hauptproblem: Zu vorgegebener Gruppe $\mathfrak{T}$ alle möglichen Verschlingungen zu finden.

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, das Hauptproblem für Gruppen von Primzahlpotenzordnung zu lösen, und beweisen zu dem Zwecke den

Hilfssatz: Ist in einer Gruppe $\mathfrak{T}$ mit Verschlingung A_1 ein Element der Ordnung α_1 und A_2 eines der Ordnung α_2, so ist

$$\mathfrak{V}(A_1, A_2) = \frac{m}{(\alpha_1, \alpha_2)}, \tag{11}$$

wo m eine ganze Zahl ist und (α_1, α_2) den größten gemeinsamen Teiler bezeichnet. Insbesondere ist immer $\mathfrak{V}(A_1, 0) = 0$.

Beweis: Wegen

$$\mathfrak{V}(A_1, A_2 + 0) \equiv \mathfrak{V}(A_1, A_2) + \mathfrak{V}(A_1, 0) \pmod 1$$

ist $\mathfrak{V}(A_1, 0) = 0$. Hiernach hat man

$$\alpha_1 \mathfrak{V}(A_1, A_2) \equiv \mathfrak{V}(\alpha_1 A_1, A_2) = \mathfrak{V}(0, A_2) = 0 \pmod 1,$$

und entsprechend

$$\alpha_2 \mathfrak{V}(A_1, A_2) \equiv 0 \pmod 1.$$

Daher

$$\mathfrak{V}(A_1, A_2) = \frac{r}{\alpha_1} = \frac{s}{\alpha_2},$$

woraus die Behauptung folgt.

Die Gruppe $\mathfrak{T}$ läßt sich nun als direkte Summe von Gruppen darstellen, deren Ordnungen Potenzen verschiedener Primzahlen $p, q, \cdots, z$ sind:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_p + \mathfrak{T}_q + \cdots + \mathfrak{T}_z. \tag{12}$$

Sind dann A_1 und A_2 Elemente aus verschiedenen dieser Gruppen, etwa aus $\mathfrak{T}_p$ und $\mathfrak{T}_q$, so ist nach dem Hilfssatz $\mathfrak{V}(A_1, A_2) = 0$. Um die ganze Verschlingungsmatrix $(\mathfrak{V}(A_i, A_k))$ zu kennen, braucht man also wegen des distributiven Gesetzes nur die Verschlingungszahlen zu kennen, für die A_i und A_k beide zu $\mathfrak{T}_p$ oder beide zu $\mathfrak{T}_q$ usw. gehören.

Wir betrachten hinfort die Untergruppe $\mathfrak{T}_p$ und behaupten, daß *die Verschlingungszahlen, die den Elementpaaren von $\mathfrak{T}_p$ zugeordnet sind, eine Verschlingung von $\mathfrak{T}_p$ bilden.* In der Tat ist das kommutative und distributive Gesetz erfüllt, weil es in $\mathfrak{T}$ gilt. Daß auch die Eigenschaft III erfüllt ist, folgt so:

Unter den Torsionskoeffizienten $c_1, c_2, \cdots, c_\rho$ von $\mathfrak{T}$ sei c_{s+1} der erste, der den Faktor p enthält:

$$c_{s+1} = p^{e_1} d_1,\ c_{s+2} = p^{e_2} d_2, \cdots, c_{s+r} = p^{e_r} d_r;$$
$$s + r = \rho,\ d_i \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Dann bilden die Elemente

$$B_1 = d_1 C_{s+1},\ B_2 = d_2 C_{s+2}, \cdots, B_r = d_r C_{s+r}$$

eine Basis der Gruppe $\mathfrak{T}_p$, und gleiches gilt von den Elementen

$$\bar{B}_1 = d_1 C'_{s+1},\ \bar{B}_2 = d_2 C'_{s+2}, \cdots, \bar{B}_r = d_r C'_{s+r}.$$

Man hat wegen (10)

$$(\mathfrak{V}(\bar{B}_i, B_k)) \equiv \begin{pmatrix} d_1/p^{e_1} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & d_r/p^{e_r} \end{pmatrix} \pmod{1}.$$

Wählt man noch δ_k so, daß

$$d_k \delta_k \equiv 1 \pmod{p^{e_k}}$$

wird, so bilden

$$B'_1 = \delta_1 \bar{B}_1,\ B'_2 = \delta_2 \bar{B}_2, \cdots, B'_r = \delta_r \bar{B}_r$$

wieder eine Basis, für die

$$(\mathfrak{V}(B'_i, B_k)) = \begin{pmatrix} 1/p^{e_1} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 1/p^{e_r} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

womit III bewiesen ist.

Die Ordnungen

$$p^{e_1}, p^{e_2}, \cdots, p^{e_r} \tag{14}$$

der Basiselemente

$$B_1, B_2, \cdots, B_r \tag{15}$$

werden im allgemeinen nicht sämtlich verschieden sein. Es sei etwa

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_u < e_{u+1} = \cdots = e_v < \cdots < e_{\tau+1} = \cdots = e_r. \tag{16}$$

Die Verschlingung der Gruppe $\mathfrak{T}_p$ ist nun auf Grund des distributiven Gesetzes vollkommen bestimmt, wenn man die Matrix

$$(\mathfrak{V}(B_i, B_k))$$

kennt. Sie ist wegen I symmetrisch und hat nach dem Hilfssatze die Gestalt

$$(\mathfrak{P}(B_i, B_k)) = \begin{array}{c|c|ccc|c|c} & & B_1 & \cdot & B_\mu & B_{\mu+1} & \cdot \\ \hline B_1 & & \alpha_{11}/p^{e_1} & \cdot & \alpha_{1\mu}/p^{e_1} & */p^{e_1} & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_\mu & & \alpha_{1\mu}/p^{e_1} & \cdot & \alpha_{\mu\mu}/p^{e_1} & */p^{e_1} & \cdot \\ \hline B_{\mu+1} & & */p^{e_1} & \cdot & */p^{e_1} & */p^{e_{\mu+1}} & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \qquad (17)$$

Entsprechend der Einteilung der Exponenten in Systeme untereinander gleicher läßt sich die Matrix in Kästchen einteilen. Von diesen interessieren uns besonders die *Hauptkästchen*, durch die die Hauptdiagonale hindurchgeht. Wir bezeichnen diese Teilmatrizen der Reihe nach mit

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{p^{e_1}}, \frac{\mathfrak{A}_{\mu+1}}{p^{e_{\mu+1}}}, \cdots, \frac{\mathfrak{A}_{\tau+1}}{p^{e_{\tau+1}}},$$

so daß die Matrix (17) lautet:

$$(\mathfrak{P}(B_i, B_k)) = \begin{pmatrix} \frac{\mathfrak{A}_1}{p^{e_1}} & \frac{*}{p^{e_1}} & \cdot & \frac{*}{p^{e_1}} \\ \frac{*}{p^{e_1}} & \frac{\mathfrak{A}_{\mu+1}}{p^{e_{\mu+1}}} & \cdot & \frac{*}{p^{e_{\mu+1}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{*}{p^{e_1}} & \frac{*}{p^{e_{\mu+1}}} & \cdot & \frac{\mathfrak{A}_{\tau+1}}{p^{e_{\tau+1}}} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Sterne stehen für ganzzahlige Teilmatrizen, die nicht näher bezeichnet zu werden brauchen.

Nun folgt aus III die wichtige Tatsache: *Die Determinanten der Hauptkästchen*

$$|\mathfrak{A}_1|, |\mathfrak{A}_{\mu+1}|, \cdots, |\mathfrak{A}_{\tau+1}|$$

sind alle prim zu p.

Beweis: Die beiden Basen $B_1, B_2, \cdots, B_r$ und $B_1', B_2', \cdots, B_r'$ in Formel (13) hängen durch eine lineare Transformation

$$B_i' = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{ij} B_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \qquad (19)$$

zusammen.

Es ist daher

$$\mathfrak{L}(B_i', B_k) = \mathfrak{L}(\sum \gamma_{ij} B_j, B_k) \equiv \sum \gamma_{ij}\, \mathfrak{L}(B_j, B_k) \pmod 1,$$

oder in Matrizenschreibung, wenn man $(\gamma_{ij}) = \Gamma$ setzt:

$$(\mathfrak{L}(B_i', B_k)) \equiv \Gamma \cdot (\mathfrak{L}(B_i, B_k)) \pmod 1. \qquad (20)$$

Multipliziert man in den Matrizen $(\mathfrak{L}(B_i', B_k))$ und $(\mathfrak{L}(B_i, B_k))$ die k-te Spalte $(k = 1, 2, \cdots, r)$ mit p^{e_k}, so folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \equiv \Gamma \cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & * p^{e_{\mu}+1-e_1} & \cdot & * p^{e_r+1-e_1} \\ \hline * & A_{\mu+1} & \cdot & * p^{e_r+1-e_2} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline * & * & \cdot & A_{r+1} \end{array}\right) \pmod p.$$

Geht man zu den Determinanten über, so ergibt sich

$$1 \equiv |\Gamma|\,|A_1|\,|A_{\mu+1}| \cdots |A_{r+1}| \pmod p,$$

woraus die Behauptung folgt.

Die Matrix $(\mathfrak{L}(B_i, B_k))$ hängt natürlich von der gewählten Basis ab. Wir werden nun versuchen, durch Abänderung der Basis die Matrix auf eine möglichst einfache Gestalt zu bringen. Der Übergang von einer Basis zur anderen erfolgt durch einen Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{T}_p$. Wir stellen daher zunächst einige Hilfssätze über Automorphismen Abelscher Gruppen zusammen.

§ 3. Automorphismen Abelscher Gruppen.

Gehen die Basiselemente bei einem Automorphismus von $\mathfrak{T}_p$ in $B_1', B_2', \cdots, B_r'$ über, so drücken sich die neuen Basiselemente durch die alten vermöge einer linearen Transformation aus:

$$B_i' = \sum_{k=1}^{r} \gamma_{ik} B_k. \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \quad (21)$$

Da $p^{e_i} B_i$ das Nullelement ist und dieses bei einem Automorphismus wieder in das Nullelement übergeht, so ist

$$p^{e_i} B_i' = \sum p^{e_i}\, \gamma_{ik} B_k = 0,$$

was der Unabhängigkeit der Basiselemente wegen dann und nur dann der Fall ist, wenn einzeln

$$p^{e_i}\, \gamma_{ik} \equiv 0 \pmod{p^{e_k}}$$

ist. Es muß also γ_{ik} von der Form sein

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} p^{e_k - e_i}, \qquad (\text{für } i<k) \quad (22)$$

worin α_{ik} eine ganze Zahl ist. Für $i \geqq k$ dagegen ergibt sich keine Einschränkung der γ_{ik}; es kann γ_{ik} irgendeine ganze Zahl sein:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik}. \qquad (\text{für } i \geqq k)$$

Die Matrix $\Gamma = (\gamma_{ik})$ hat also die Gestalt

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} p^{e_2 - e_1} & \cdot & \alpha_{1n} p^{e_n - e_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \alpha_{2n} p^{e_n - e_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdot & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Außer der Bedingung (23) muß die Transformationsmatrix Γ noch eine weitere Bedingung erfüllen, damit sie einen Automorphismus vermittelt; es muß ihre Determinante prim zu p sein:

$$|\Gamma| \not\equiv 0 \pmod{p}. \qquad (24)$$

Bezeichnet nämlich Γ^* die zum inversen Automorphismus gehörige Matrix, so vermittelt $\Gamma\Gamma^* = \Delta$ den identischen Automorphismus. Es gilt daher für die Elemente von Δ

$$\delta_{ik} \equiv 1 \pmod{p^{e_k}} \quad \text{für } i = k,$$
$$\delta_{ik} \equiv 0 \pmod{p^{e_k}} \quad \text{für } i \neq k,$$

woraus (24) folgt.

In den beiden Bedingungen (23) und (24) hat man bekanntlich alle Bedingungen, die die Matrix Γ erfüllen muß, um einen Automorphismus zu vermitteln. Diese Tatsache wird sich als Nebenergebnis herausstellen, wenn wir jetzt einen beliebigen Automorphismus aus gewissen elementaren Automorphismen zusammensetzen.

An *elementaren Automorphismen* gibt es drei Arten, die durch die folgenden drei elementaren Transformationen der Basis bewirkt werden:

1. Alle Basiselemente bleiben ungeändert bis auf B_i, das ersetzt wird durch

$$B_i' = B_i \pm B_k. \qquad (i > k)$$

2. Es wird nur B_i ersetzt durch

$$B_i' = B_i \pm p^{e_k - e_i} B_k. \qquad (i < k)$$

3. Es wird nur B_i ersetzt durch

$$B_i' = x B_i, \quad x \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Die zu den drei elementaren Transformationen gehörigen Transformationsmatrizen seien Γ_1, Γ_2, Γ_3. Γ_1 trägt in der Hauptdiagonale lauter Einsen und an der Stelle (i, k), also unterhalb der Hauptdiagonale, die Zahl ± 1, sonst lauter Nullen; Γ_2 trägt an der Stelle (i, k), also oberhalb der Hauptdiagonale, die Zahl $\pm p^{e_k - e_i}$; in Γ_3 ist die Eins der Stelle (i, i) durch die Zahl x ersetzt. Dementsprechend bewirkt Rechtsmultiplikation einer beliebigen Matrix

mit Γ_1 Addition der mit ± 1 multiplizierten i-ten Spalte zur k-ten,

mit Γ_2 Addition der mit $\pm p^{e_k - e_i}$ multiplizierten i-ten Spalte zur k-ten,

mit Γ_3 Multiplikation der i-ten Spalte mit x.

Um nun zu zeigen, daß *jeder Automorphismus ein Produkt elementarer Automorphismen* ist, weisen wir nach, daß jede Matrix Γ mit den Eigenschaften (23) und (24) sich als Produkt elementarer Matrizen darstellen läßt, bis auf einen Faktor Δ, der den identischen Automorphismus bewirkt. Damit ist dann zugleich gezeigt, daß auch *eine beliebige Matrix mit den Eigenschaften (23) und (24) immer einen Automorphismus bewirkt.* Der Nachweis wird so geführt, daß wir durch Rechtsmultiplikation mit elementaren Matrizen Γ in die Matrix Δ überführen. Die ersten μ Elemente in der ersten Zeile von Γ enthalten wegen (16) den Faktor $p^{e_1 - e_1} = 1$. Sie können wegen (24) nicht alle durch p teilbar sein. Durch Spaltenvertauschung (Transformationen 1 und 2) bringe man ein nicht durch p teilbares Element an erste Stelle und multipliziere es danach mit einem geeigneten Faktor x (Transformation 3), so daß es $\equiv 1 \pmod{p^{e_1}}$ wird. Danach kann man durch genügend oft wiederholte Addition der mit $\pm p^{e_k - e_1}$ multiplizierten ersten Spalte zur k-ten es erreichen, daß an die Stelle $(1, k)$ eine durch p^{e_k} teilbare Zahl kommt. Streicht man danach die erste Zeile und erste Spalte, so bleibt eine Matrix übrig, die die gleichen Eigenschaften wie Γ hat und auf die das Verfahren von neuem angewendet werden kann. Schließlich ergibt sich eine Matrix, die in und oberhalb der Hauptdiagonale bereits die Gestalt von Δ hat. Nun kann man durch das gleiche Verfahren auch unterhalb der Hauptdiagonale Übereinstimmung mit Δ erzielen. Man hat nur mit der letzten Spalte zu beginnen und diese, mit ± 1 multipliziert, genügend oft zur k-ten zu addieren. Dadurch erreicht man, daß das k-te Element der letzten Zeile ($k = 1, 2, \cdots, r-1$) durch p^{e_k} teilbar wird. Indem man gleiches Verfahren mit der $(r-1)$ten Spalte und Zeile vornimmt und so fortschreitet, wird die Überführung in Δ beendet.

§ 4. Verschlingungsinvarianten.

Die Reduktion der Matrix $(\mathfrak{L}(B_i, B_k))$ auf eine Normalform wird nun schrittweise vorgenommen, indem auf die Basis $B_1, B_2, \cdots, B_r$ jeweils eine elementare Transformation 1, 2 oder 3 ausgeübt wird, der eine bestimmte

Umformung der Matrix entspricht[1]. Wir beginnen den Normalisierungsprozeß mit den ersten μ Zeilen und Spalten. Diese schneiden sich in der μ-reihigen linken oberen Matrix A_1/p^{e_1}. Man kann annehmen, daß in A_1 links oben ein nicht durch p teilbares Element steht. Denn entweder steht in der Hauptdiagonale von A_1 ein nicht durch p teilbares Element; dann kann man es durch Transformationen 1 und 2 der Basis an die Stelle (1, 1) bringen. Oder alle Elemente der Hauptdiagonale sind durch p teilbar. Wegen $|A_1| \not\equiv 0 \pmod p$ gibt es in der ersten Zeile von A_1 ein nicht durch p teilbares Element, etwa das Element α_{1k}. Durch eine geeignete Transformation 2, die sich in $(\mathfrak{P}(B_i, B_k))$ als eine Addition der k-ten Spalte zur ersten Spalte und darauffolgende Addition der k-ten Zeile zur ersten Zeile auswirkt, kann man dann an die Stelle (1, 1) von A_1 das Element $\alpha_{11} + 2\alpha_{1k} + \alpha_{kk}$ bringen, und dies ist, *wenn wir die Primzahl $p = 2$ ausschließen, was wir von jetzt ab tun wollen,* nicht durch p teilbar.

Danach kann man durch geeignete Transformationen 1 die erste Zeile und Spalte von $(\mathfrak{P}(B_i, B_k))$ bis auf das Element links oben ausräumen. Man hat nur, um das Element α_{1l} zum Verschwinden zu bringen, die Kongruenz zu lösen

$$\alpha_{1l} - y\alpha_{11} \equiv 0 \pmod{p^{e_1}}$$

und auf die Basis y-mal die Transformation 1 anzuwenden, die B_l durch $B_l' = B_l - B_1$ ersetzt[2]. Fortsetzung dieses Verfahrens führt $(\mathfrak{P}(B_i, B_k))$ in die Diagonalform über, in der die Diagonalelemente

$$\alpha_1/p^{e_1}, \quad \alpha_2/p^{e_2}, \cdots, \quad \alpha_r/p^{e_r},$$

alle übrigen Elemente $= 0$ sind. Die Exponenten genügen hierbei der Größenbeziehung (16) und die ersten μ erfüllen die Diagonale des ersten Kästchens A_1/p^{e_1}, die nächsten $\nu - \mu$ die des zweiten Kästchens A_2/p^{e_2} usw.

Durch eine Transformation 3 kann man irgendein Diagonalelement α_i mit x^2 multiplizieren. Ist α_i quadratischer Rest mod p, so kann man bekanntlich auf diese Weise jeden beliebigen Rest mod p^{e_i} an Stelle von α_i bringen. Ist α_i Nichtrest, so kann man ebenso alle möglichen Nichtreste erzielen. Es kommt also nur darauf an, ob α_i Rest oder Nichtrest mod p ist.

Kommt jetzt in jedem Kästchen kein oder nur ein einziger Nichtrest vor, so ist die Normalform von $(\mathfrak{P}(B_i, B_k))$ bereits erreicht. Andernfalls kann man

[1] Im Falle die Torsionskoeffizienten der Torsionsgruppe $\mathfrak{T}$ alle einander gleich sind, also der Gruppe $\mathfrak{T}_p$ nur ein einziges Kästchen A_1 zukommt, gehen die elementaren Transformationen von S. 820 in ganzzahlige Transformationen mit zu p primer Determinante über; A_1 hat alsdann Tensorcharakter. Diesen Tensor benutzt J. W. Alexander in der S. 811 angeführten Arbeit zur Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten gleicher Fundamentalgruppe.

[2] Wir erinnern daran, daß die Verschlingungszahlen auf das Intervall $0 \leqq x < 1$ normiert worden sind.

zwei Nichtreste desselben Kästchens durch zwei Reste ersetzen[1] und damit e Normalform erzielen. Wir stellen in der Normalform jedes Kästchens den nzigen etwa vorhandenen Nichtrest an die erste Stelle und wählen die Diagonal- emente möglichst klein. Dann behaupten wir: *Zwei so normierte verschiedene latrizen lassen sich nicht durch die Transformationen 1 bis 3 ineinander über- ühren.* Die Eigenschaft einer Kästchendeterminante, quadratischer Rest oder ichtrest mod p zu sein, bleibt nämlich bei den Transformationen 1 bis 3 un- eändert. In der Tat ändert sich bei 1 und 2 die Determinante (mod p) über- aupt nicht, bei 3 dagegen multipliziert sich die i-te Zeile und die i-te Spalte it x, die betroffene Kästchendeterminante also mit x^2. Die Restcharak- re der Kästchendeterminanten sind also bereits durch die Verschlingung der ruppe $\mathfrak{T}_p$ bestimmt und hängen nicht von der besonderen Wahl der Basis ab. Ir wollen sie die *Verschlingungsinvarianten* der Gruppe $\mathfrak{T}_p$ nennen.

Die Lösung des Hauptproblems lautet nunmehr so:

Ist eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{T}_p$ von Primzahlpotenzordnung p^t $(p \neq 2)$ direkte umme von zyklischen Gruppen der Ordnungen $p^{e_1}, p^{e_2}, \cdots, p^{e_r}$ $(e_1 = e_2 = \cdots = e_\nu < e_{\nu+1} = \cdots = e_\varrho < \cdots \cdots < e_{\tau+1} = \cdots = e_r)$, und sind $B_1, B_2, \cdots,$ Erzeugende dieser r Gruppen, so wird die allgemeinste Verschlingung von $\mathfrak{T}_p$ urch eine symmetrische Matrix

$$(\mathfrak{V}(B_i, B_k)) = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{p^{e_1}} & \frac{*}{p^{e_1}} & \cdot & \frac{*}{p^{e_1}} \\ \frac{*}{p^{e_1}} & \frac{A_{\mu+1}}{p^{e_{\mu+1}}} & \cdot & \frac{*}{p^{e_{\mu+1}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{*}{p^{e_1}} & \frac{*}{p^{e_{\mu+1}}} & \cdot & \frac{A_{\tau+1}}{p^{e_{\tau+1}}} \end{pmatrix}$$

egeben. *Darin sind $A_1, A_{\mu+1}, \cdots, A_{\tau+1}$ Matrizen, deren Determinanten lle prim zu p sind, und die Sterne stehen für Teilmatrizen, die nicht näher be- eichnet zu werden brauchen. Zwei Verschlingungen lassen sich dann und nur*

[1] Wenn z. B. im ersten Kästchen zwei Reste vorhanden sind, so darf man annehmen, daß inks oben in A_1 die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ steht. Durch a-malige Anwendung der Transformation 1 $B_2' = B_2 + B_2$ geht diese Matrix in $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1+a^2 \end{pmatrix}$ über. Durch geeignete Wahl von a machen wir $1+a^2$ zum Nichtrest; wir suchen nämlich den kleinsten Rest r, auf den ein Nichtrest folgt, dann nehmen wir für a eine Lösung der Kongruenz $a^2 \equiv r \pmod p$. Addition der mit b multiplizierten zweiten Zeile und Spalte zur ersten bringt an die Stelle (1, 2) die Zahl $a + b(1 + a^2)$, die man, da $1+a^2$ prim zu p ist, durch geeignete Wahl von $b \equiv 0 \pmod{p^{e_1}}$ machen kann. An der Stelle (2, 1) steht dieselbe Zahl, an der Stelle (1, 1) aber ein Nichtrest, weil $1+a^2$ Nichtrest ist und die Determinante durch die Umformungen ihre Eigenschaft Rest zu sein nicht verloren hat. — Durch den umgekehrten Prozeß kann man zwei Nichtreste durch zwei Reste ersetzen.

dann durch einen Automorphismus von $\mathfrak{T}_p$ ineinander überführen, wenn entsprechende Kästchendeterminanten A_1, $A_{\mu+1}$, $\cdots$, $A_{\tau+1}$ denselben Restcharakter (mod p) haben.

Da die Torsionsgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_p + \mathfrak{T}_q + \cdots + \mathfrak{T}_z$ einer orientierten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ eine Gruppe mit Verschlingung ist, so sind die Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{T}_p, \mathfrak{T}_q, \cdots, \mathfrak{T}_z$ topologische Invarianten von $\mathfrak{M}^3$.

Wir haben also den

Satz: In einer orientierten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^3$ sei $\mathfrak{T}$ die Torsionsgruppe, also die von den Elementen endlicher Ordnung der Homologiegruppe $\mathfrak{H}$ gebildete Untergruppe. $\mathfrak{T}$ ist direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Gibt es unter ihnen genau μ Gruppen der Ordnung p^e $(p \neq 2)$ und sind $B_1, B_2, \cdots, B_\mu$ Erzeugende dieser μ Gruppen, so hat die Matrix der Verschlingungszahlen $(\mathfrak{V}(B_i, B_k))$ die Gestalt

$$(\mathfrak{V}(B_i, B_k)) = \frac{1}{p^e} A,$$

wo A eine ganzzahlige Matrix und $|A|$ prim zu p ist. Dann ist die Eigenschaft von $|A|$, quadratischer Rest oder Nichtrest (mod p) zu sein, eine topologische Invariante von $\mathfrak{M}^3$. Auf diese Weise gehört zu jedem Systeme untereinander gleicher zyklischer Summanden von $\mathfrak{T}_p$ eine solche »Verschlingungsinvariante«.

Wir wollen noch zeigen, daß es Mannigfaltigkeiten mit beliebig vorgegebenen Verschlingungsinvarianten gibt. Solche Mannigfaltigkeiten kann man aus lauter Linsenräumen durch »Summenbildung« gewinnen. Der Linsenraum (p_1, q_1) entsteht, wenn man in einer von zwei Kugelkalotten begrenzten Linse die beiden Kalotten, um den Winkel $2\pi q_1/p_1$ verschraubt, identifiziert[1]. Die Homologiegruppe dieser Mannigfaltigkeit ist zyklisch von der Ordnung p_1. Als erzeugendes Element kann die Homologieklasse B_1 dienen, der die Linsenachse angehört. Dann ist die Verschlingungszahl $\mathfrak{V}(B_1, B_1) = q_1/p_1$ bei richtiger Orientierung der Mannigfaltigkeit. Man bohre nun aus dem Linsenraume eine kleine Kugel aus und tue dasselbe für einen zweiten Linsenraum (p_2, q_2). Identifiziert man die Randkugelflächen der beiden Linsenräume so, daß von beiden Linsenräumen in der gemeinsamen Randkugelfläche entgegengesetzte Orientierungen induziert werden, so entsteht eine neue Mannigfaltigkeit, deren Homologiegruppe direkte Summe einer Gruppe der Ordnung p_1 und einer der Ordnung p_2 ist. Die Verschlingungsmatrix lautet jetzt:

$$(\mathfrak{V}(B_i, B_k)) = \begin{pmatrix} q_1/p_1 & 0 \\ 0 & q_2/p_2 \end{pmatrix}.$$

[1] Vgl. z. B. W. Threlfall u. H. Seifert, Topologische Untersuchung Math. Ann. 104 S. 57.

Durch mehrfaches Aneinandersetzen erhält man Mannigfaltigkeiten mit beliebig vorgegebenen Torsionsgruppen und Verschlingungsvarianten, wobei freilich zu bedenken ist, daß die Verschlingungsinvarianten nur für $p \neq 2$ definiert sind. Ob allgemein zu einer beliebigen Gruppe mit vorgegebener Verschlingung es eine Mannigfaltigkeit gibt, ist unentschieden, da die Primzahl 2 in algebraischer und topologischer Hinsicht bei dieser Frage eine Ausnahmerolle spielt.

Die Verschlingungsinvarianten lassen sich ohne Schwierigkeit auf $(4n+3)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen. Zur Verschlingung kommen dann $(2n+1)$-dimensionale geschlossene Ketten. Man hat dementsprechend die Torsionsgruppe der Dimension $2n+1$ als Gruppe mit Verschlingung aufzufassen. — In $(4n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist die Verschlingungsmatrix der $2n$-dimensionalen Homologieklassen schiefsymmetrisch. Dieser Fall wird von G. de Rham behandelt (vgl. den Zusatz zur Korrektur am Ende der Arbeit.

§ 5. Anwendungen.

I. Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten mit gleicher Fundamentalgruppe.

Hierüber vergleiche man die Seite 811 angeführte Arbeit und das Seite 811 angeführte Buch, X. Kap.

II. Asymmetrie von Mannigfaltigkeiten.

Eine Mannigfaltigkeit heißt nach Hrn. H. Kneser[1] *asymmetrisch*, wenn es unmöglich ist, sie mit Umkehrung der Orientierung topologisch auf sich abzubilden. Nun sind die Verschlingungsinvarianten Invarianten der *orientierten* Mannigfaltigkeit. Bei Umorientierung kehren alle Verschlingungszahlen ihre Vorzeichen um. Eine Kästchendeterminante $|A|$ kehrt also ihr Vorzeichen um, wenn sie eine ungerade Anzahl von Reihen hat. Ist nun p eine Primzahl der Form $4x+3$, so vertauschen sich bei Vorzeichenänderung quadratische Reste und Nichtreste mod p. Damit ist bewiesen: *Die Verschlingungsinvarianten ändern sich bei Umkehrung der Orientierung dann und nur dann, wenn in der Zerlegung der Torsionsgruppe $\mathfrak{T}$ in zyklische Summanden von Primzahlpotenzordnung eine ungerade Anzahl von zyklischen Gruppen einer bestimmten Ordnung*

$$p^e = (4x+3)^e$$

auftritt. In diesem Falle ist also die Mannigfaltigkeit sicher asymmetrisch. Der Fall tritt z. B. immer dann ein, wenn eine Primzahl der Form $4x+3$ in un-

[1] H. Kneser, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 38 (1929) S. 256.

gerader höchster Potenz in der Ordnung der Torsionsgruppe enthalten ist. Deshalb sind alle Mannigfaltigkeiten asymmetrisch, deren Torsionsgruppe eine Ordnung der Form $4x+3$ hat, also z. B. alle Linsenräume dieser Art.

Man kann somit in gewissen Fällen allein aus der Kenntnis der Torsionsgruppe auf die Asymmetrie der Mannigfaltigkeit schließen.

III. Amphicheirale Knoten.

Es sei K ein amphicheiraler Knoten im euklidischen $\mathfrak{R}^3$, also ein solcher, der sich in sein Spiegelbild deformieren läßt. Es gibt dann auch eine topologische Selbstabbildung des Raumes mit Umkehrung der Orientierung, bei der der Knoten in sich übergeht. Folglich läßt auch die g-fache zyklische Überlagerung des $\mathfrak{R}^3$, die den Knoten zur einzigen Verzweigungslinie hat, eine solche Selbstabbildung mit Umkehrung der Orientierung zu. Die Überlagerungsmannigfaltigkeit ist also symmetrisch. *Wenn man nun die Asymmetrie der Überlagerungsmannigfaltigkeit etwa auf Grund des Satzes unter II beweisen kann, so folgt, daß der Knoten nicht amphicheiral ist.* Hierin ist insbesondere das Ergebnis des Hrn. L. Goeritz[1] enthalten, daß ein Knoten nicht amphicheiral ist, wenn die Ordnung der Torsionsgruppe der zweifachen Überlagerungsmannigfaltigkeit eine Primzahl der Form $4x+3$ in ungerader höchster Potenz enthält.

IV. Unterscheidung von Knoten mit gleicher Knotengruppe.

Schließlich lassen sich mit Hilfe der Verschlingungsinvarianten verschiedene Knoten mit der gleichen Knotengruppe unterscheiden. Z. B. hat ein Knoten, der durch Aneinanderreihen zweier Rechtskleeblattschlingen (Fig. 3) entsteht, die gleiche Knotengruppe wie einer, der sich aus einer Rechts- und einer

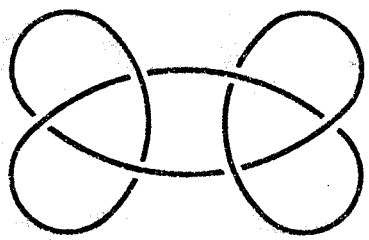

Fig. 3.

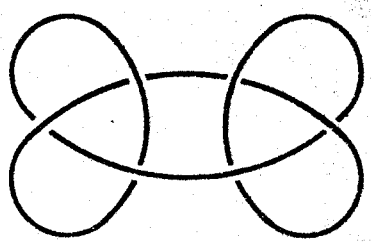

Fig. 4.

Linkskleeblattschlinge (Fig. 4) zusammensetzt. In beiden Fällen ist die Torsionsgruppe der zweifachen Überlagerung die direkte Summe von zwei

[1] L. Goeritz, Knoten und quadratische Formen, Math. Ztschr. 36 (1933).

Gruppen der Ordnung 3[1]. Die Verschlingungsmatrix $(\mathfrak{V}(B_i, B_k))$ ist also 2-reihig, und sie lautet im ersten bzw. zweiten Falle:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Es gibt ein einziges Kästchen und die Determinante $|A|$ ist $= 1$ bzw. $= 2$, also das eine Mal quadratischer Rest, das andere Mal Nichtrest mod 3. Die beiden Überlagerungsmannigfaltigkeiten und damit die Knoten sind also verschieden.

Zusatz bei der Korrektur.

Hr. K. Reidemeister hat in einer demnächst erscheinenden Arbeit[2] Invarianten dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten angegeben und aus einem Heegaarddiagramm zu berechnen gelehrt, die sich folgendermaßen den Verschlingungsinvarianten einordnen lassen. Die geschlossenen Kurven s_i in Formel (1) der angeführten Arbeit bilden eine Torsionsbasis, und die Zahl h_{ik}/g_i ist die Verschlingungszahl $\mathfrak{V}(s_i, s_k)$. Es sei nämlich F_i eine im Vollringe V_2 liegende Fläche mit dem Rande $g_i s_i + \sum h_{ik} t_k$:

$$\mathfrak{R}\, F_i = g_i s_i + \sum h_{ik} t_k. \tag{A}$$

Ferner sei T_i ein Meridianschnitt von V_1 mit dem Rande t_i:

$$\mathfrak{R}\, T_i = t_i. \tag{B}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{V}(s_i, s_k)$ ersetzen wir s_k durch eine benachbarte homologe Kurve $s_k' \sim s_k$, die ganz in V_1 verläuft, und bringen sie zum Schnitt mit einer in $g_i s_i$ eingespannten Fläche. Als solche kann man wegen (A) und (B) $F_i - \sum h_{ik} T_k$ benutzen. Dann ist

$$\mathfrak{V}(s_i, s_k) \equiv \frac{1}{g_i} \mathfrak{s}(F_i - \sum h_{ik} T_k, s_k') = \frac{h_{ik}}{g_i} \pmod 1. \tag{C}$$

Denn $\mathfrak{s}(F_i, s_k')$ ist 0, weil F_i und s_k' in verschiedenen Vollringen liegen, und $\mathfrak{s}(T_i, s_k')$ ist $= -1$ für $i = k$ und $= 0$ für $i \neq k$.

Enthält nun e_i den Primfaktor π_{im}, so heißt dies, daß in der Reihe $g_1, g_2, \cdots, g_{i+1}$ jeder Torsionskoeffizient den Faktor π_{im} mindestens einmal

[1] Das folgt daraus, daß die zweifache Überlagerung des Außenraums einer Kleeblattschlinge zur Torsionsgruppe die zyklische Gruppe der Ordnung 3 hat. (Vgl. K. Reidemeister, Knotentheorie, Berlin 1932, S. 25.) Ist B erzeugendes Element dieser Gruppe, so ist nach S. 824 $\mathfrak{V}(B, B) = \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$, je nach der räumlichen Orientierung.

[2] K. Reidemeister, Heegaarddiagramme und Invarianten von Mannigfaltigkeiten. Hamb. Abhdlg. Bd. 10.

weniger enthält als der vorangehende. Enthält nun etwa g_i den Primfaktor in der höchsten Potenz σ,

$$g_i = \pi_{im}^{\sigma} y_{im},$$

so gibt es in der Zerlegung der Homologiegruppe nach zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung genau eine Gruppe der Ordnung π_{im}^{σ}. Als erzeugendes Element dieser Gruppe kann man $y_{im} s_i$ nehmen. Es ist nach (C)

$$\mathfrak{V}(y_{im}s_i, y_{im}s_i) \equiv \frac{h_{ii} y_{im}^2}{g_i} = \frac{h_{ii} y_{im}}{\pi_{im}^{\sigma}} \pmod 1.$$

Der Restcharakter (mod π_{im}) der einreihigen Kästchendeterminante $h_{ii} y_{im}$ ist nun eine Verschlingungsinvariante der orientierten Mannigfaltigkeit. Also ist der Restcharakter von h_{ii} ebenfalls eine topologische Invariante.

Hr. K. Reidemeister machte mich überdies darauf aufmerksam, daß Verschlingungsmatrizen bereits von Hrn. G. de Rham, Journ. de Math. 10 (1931) eingeführt worden sind. Ihre Klassifikation wird dort für $(4n+1)$-dimensionale, aber nicht für $(4n+3)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten durchgeführt.

Ausgegeben am 5. Januar 1934.